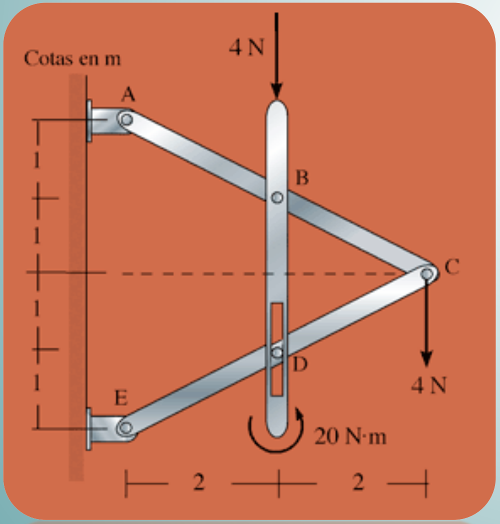
Mecánica

Tema 11. Dinámica de percusiones. Choques.



Cecilia Pardo Sanjurjo

DPTO. DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

Dinámica de percusiones . Choques

En algunas situaciones, como en los choques, se ejercen **fuerzas muy intensas entre los sólidos durante un tiempo muy corto.**

Su efecto es un cambio súbito en la velocidad de los cuerpos, así como deformaciones (permanentes o no) y pérdida de energía en forma de calor o sonido.

A estas fuerzas muy intensas ($F = \infty$) que actúan en tiempos muy cortos $(\Delta t \simeq 0)$ se les llama **fuerzas impulsivas o percusionales**

En estos casos conviene utilizar el impulso de estas fuerzas por ser una cantidad finita

$$F\Delta t = \infty \cdot 0 = \text{finito}$$

En cambio una fuerza finita (o un par de fuerzas finito) da un impulso cero, ya que

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \text{finito} \cdot 0 = 0$$

Se llama **percusión** al impulso producido por una de estas fuerzas integrada al tiempo de actuación:

$$\vec{P} = \int_{\Delta t} \vec{F}\, dt \simeq \vec{F} \Delta t \qquad \text{unidades SI: N·s}$$

Características:

$$a = \frac{F}{m} = \infty$$ aceleraciones muy altas

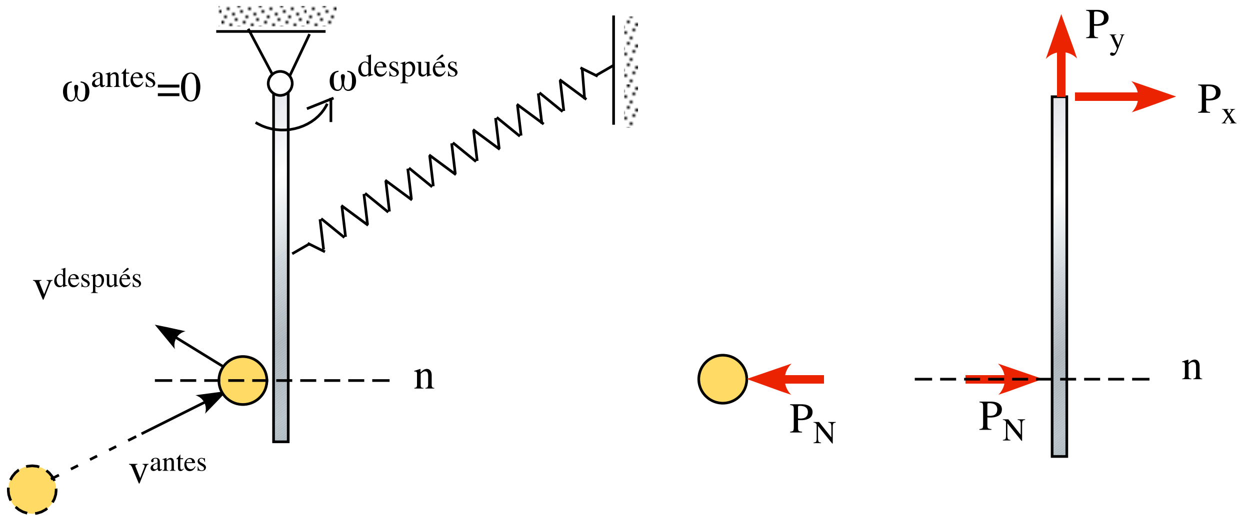
$$\Delta v = a \cdot \Delta t = \infty \cdot 0 = \text{finito}$$ Cambio finito y súbito de velocidades

$$\Delta s = v \cdot \Delta t = \text{finito} \cdot 0 = 0$$ Posiciones congeladas

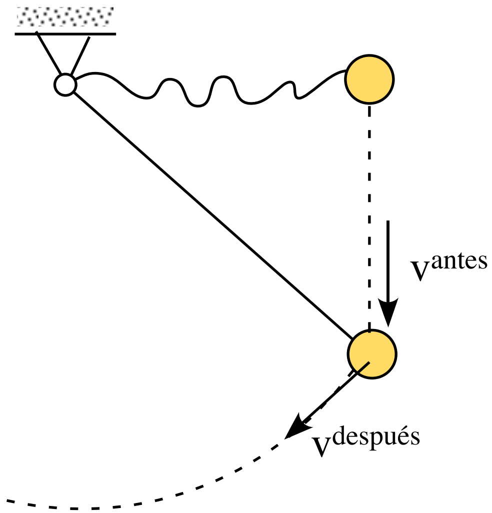
Cualquier situación en que se produzca un cambio brusco en las velocidades sin modificarse la posición se puede tratar como una percusión.

Dos situaciones de ese tipo:

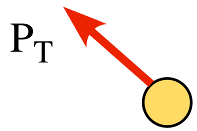
- **Choques**



- **Aparición de nuevos enlaces**



En la posición en que se tensa la cuerda se produce un cambio brusco de velocidades (percusión de tensión)



Ecuaciones de dinámica de percusiones:

2ª Ley de Newton aplicada a percusiones:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} \\ \sum\left(\vec{F}_i + \vec{\mathit{F}}_i\right)\Delta t = \cancel{\sum\vec{F}_i\Delta t} + \sum\vec{\mathit{F}}_i\Delta t = \sum\vec{P}_i\end{array}\right\} \quad \sum\vec{P}_i = \Delta\vec{p}$$

Para un sólido rígido o un sistema de puntos: $\vec{p} = m\vec{v}_G$

$$\boxed{\sum\vec{P}_i = m\left(\vec{v}_G^{\,final} - v_G^{\,inicial}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\sum P_x = m\left(v_{Gx}^f - v_{Gx}^i\right) \\ \sum P_y = m\left(v_{Gy}^f - v_{Gy}^i\right)\end{array}\right.}$$

La suma de las percusiones es igual al cambio de la cantidad de movimiento que se produce en la misma posición inmediatamente antes (inicial) e inmediatamente después (final) de la percusión.

Teorema del momento angular aplicado a percusiones:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{M}_A \Delta t = \Delta \vec{L}_A \\ \sum \overrightarrow{AP_i} \wedge \left(\vec{F}_i + \vec{\mathcal{F}}_i\right) \Delta t = \sum \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{\mathcal{F}}_i \Delta t = \sum \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{P}_i = \vec{M}_A^P \end{array}\right\} \quad \vec{M}_A^P = \Delta \vec{L}_A$$

Para un sólido rígido: $\vec{L}_A = I_A \vec{\omega}$

$$\vec{M}_A^P = I_A \left(\vec{\omega}^{\text{final}} - \omega^{\text{inicial}}\right)$$

con **A un punto fijo del sólido o su c.d.g**.

El momento de las percusiones respecto a un punto A es el cambio de momento angular que se produce entre el instante de entrada (inicial) y salida (final) de la percusión

¿Cómo se hace un esquema de percusiones?

Las percusiones no son fuerzas (N), son impulsos (N·s), pero provienen de fuerzas que instantáneamente se hacen muy altas, así que siguen las **mismas reglas**, en particular la ley de acción – reacción.

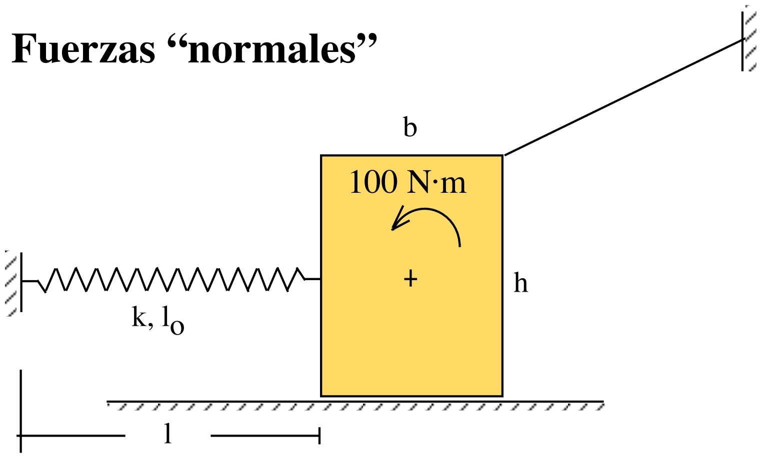
Las **fuerzas finitas no dan percusión** (pesos, cargas o pares finitos), se eliminan en los esquemas

Las **fuerzas que dependen exclusivamente de la posición tampoco dan origen a una percusión**, ya que al estar la posición "congelada" esas fuerzas se mantienen invariables y finitas (por ejemplo las fuerzas elásticas de los muelles)

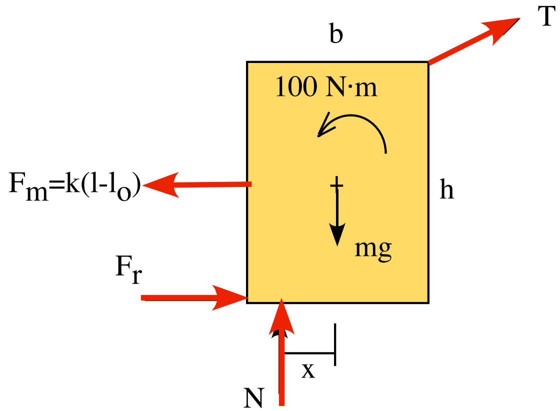
Las fuerzas en los enlaces se pueden hacer muy altas, dando origen a percusiones de reacción. Las relaciones que hay entre ellas son las mismas que entre las fuerzas de que provienen. Por ejemplo en una articulación a un punto fijo habrá P_x y P_y; si en un contacto hay percusión normal y de rozamiento

$$P_N \geq 0 \qquad P_r \leq \mu_e P_N$$

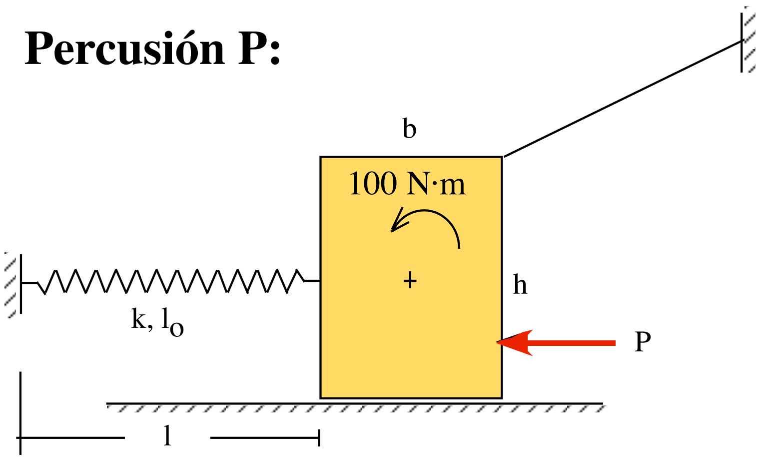
Fuerzas "normales"



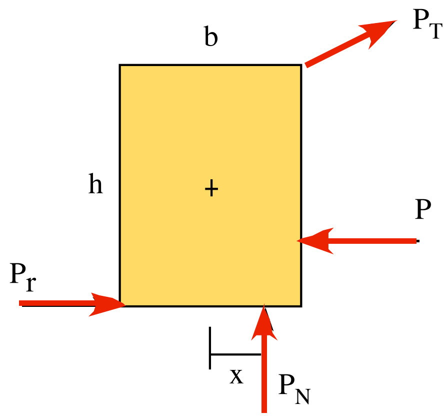
Esquema de fuerzas



Percusión P:



Esquema de percusiones



•Se aisla cada sólido y se hace el esquema de las percusiones que actúan sobre él.

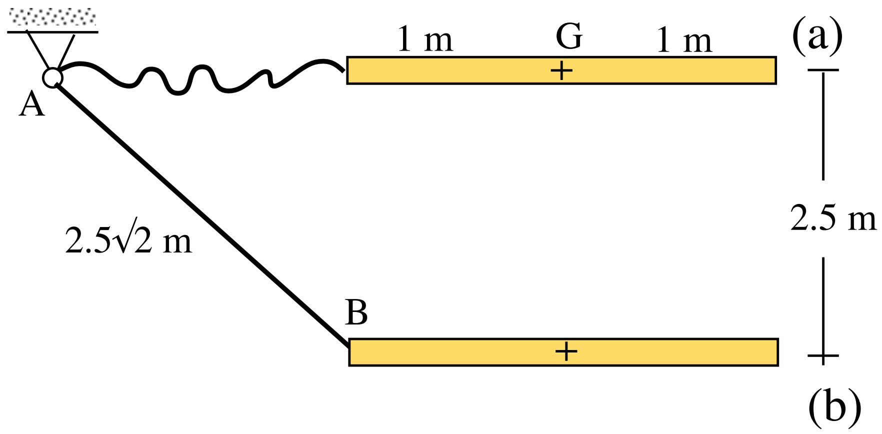
•Se plantean las ecs de dinámica de percusiones sobre cada uno

•Se completan con relaciones entre velocidades: como en las ecs figuran velocidades inmediatamente antes e inmediatamente después de la percusión, es posible que haga falta considerar el movimiento del sólido previo a la percusión y posterior a la misma que puede ser radicalmente distinto.

•En caso de que hubiera varias posibilidades de movimiento, se formula una hipótesis que , supone relaciones entre velocidades y/o entre percusiones. Se resuelve y se comprueba si dicha hipótesis es acertada.

Ejemplo

La barra de la figura se deja caer desde el reposo. Cuando ha caído 2.5 m el hilo AB se tensa. Hallar la velocidad angular de la barra inmediatamente después de tensarse el hilo.



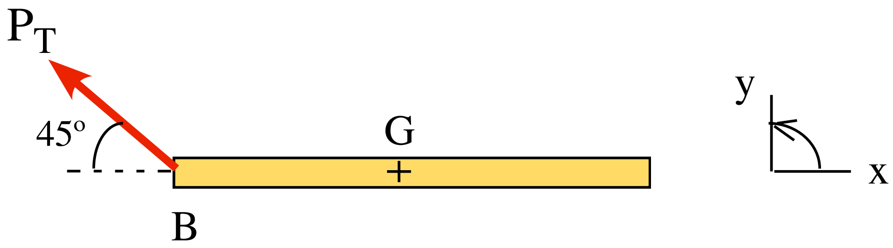
• Conservación de la energía mecánica durante la caída de la barra entre (a) y (b):

$$\left(E_{cin}+E_{pot}\right)_a=\left(E_{cin}+E_{pot}\right)_b \rightarrow 0=\frac{1}{2}mv_G^2+\cancel{\frac{1}{2}I_G\omega^2}-mg2.5$$

$$v_G=\sqrt{2g2.5}=\underline{7\ m/s}\downarrow$$

Velocidad de G inmediatamente antes de tensarse el hilo

Esquema de percusiones



Ecuaciones de la dinámica de percusiones:

antes: $\vec{v}_G^{\,i} = -7\,\vec{j} \quad \omega^i = 0$; después: $\vec{v}_G^{\,f} = \left(v_{Gx}, v_{Gy}\right) \quad \omega^f = \omega$

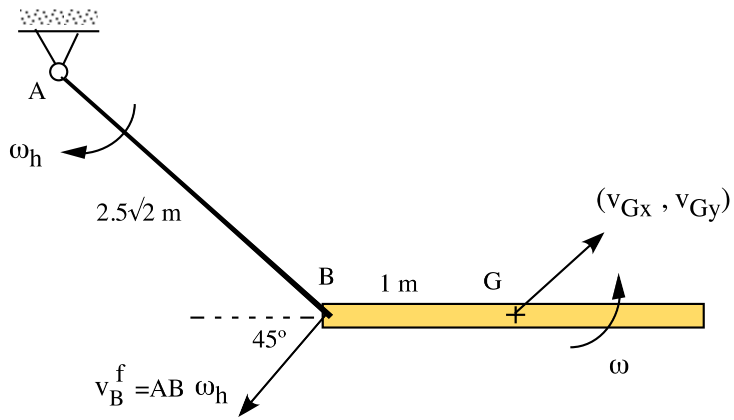
$$\sum P_x = m\left(v_{Gx}^f - v_{Gx}^i\right) \quad \rightarrow \quad -P_T \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\left(v_{Gx} - 0\right)$$

$$\sum P_y = m\left(v_{Gy}^f - v_{Gy}^i\right) \quad \rightarrow \quad P_T \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\left(v_{Gy} + 7\right)$$

$$M_G^P = I_G\left(\omega^f - \omega^i\right) \quad \rightarrow \quad -P_T \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \left(\frac{1}{12} 3 \cdot 2^2\right)\left(\omega - 0\right)$$

Ecs percusiones
(3 ecs, 4 incóg.)

• Relaciones entre velocidades finales:



Campo de velocidades en hilo:

$$\vec{v}_B = \cancel{\vec{v}_A} + \vec{\omega}_h \wedge \overrightarrow{AB} = -\omega_h 2.5\,\vec{i} - \omega_h 2.5\,\vec{j}$$

(los hilos tensos son como barras)

Campo de velocidades en la barra:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge \overline{BG} \begin{cases} v_{Gx} = -\omega_h 2.5 \\ v_{Gy} = -\omega_h 2.5 + 1 \cdot \omega \end{cases} \qquad (\,+2\text{ecs}, +1 \text{ incóg}\,)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de las percusiones y resolviendo:

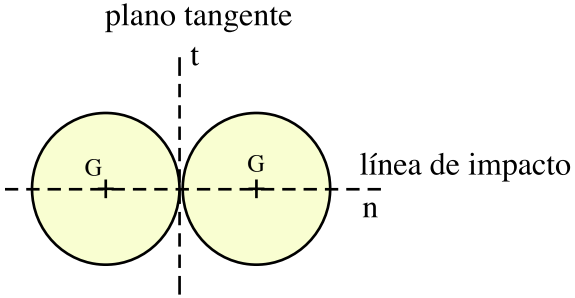
$$\omega = -4.2 \text{ rad/s}$$

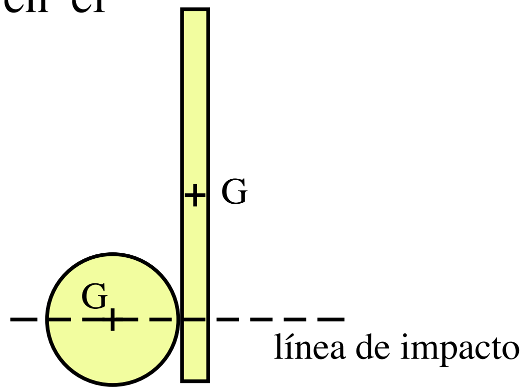
$$\omega_h = 0.56 \rightarrow \vec{v}_G = -1.4\,\vec{i} - 5.6\,\vec{j} \qquad P_T = 4.2\sqrt{2} \quad \text{N·s} \quad > 0$$

Choques

Suelen tener lugar en intervalos cortos de tiempo, durante el cual las fuerzas (normales) que se ejercen entre los cuerpos son muy intensas produciéndose en consecuencia un cambio brusco en velocidades en uno o en ambos cuerpos (percusión). También se producen deformaciones permanentes o no.

Línea de impacto o choque : dirección de la normal en el contacto



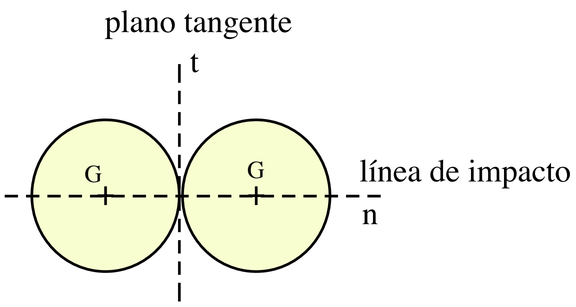


Choque central: ambos c.d.m. en la línea de impacto

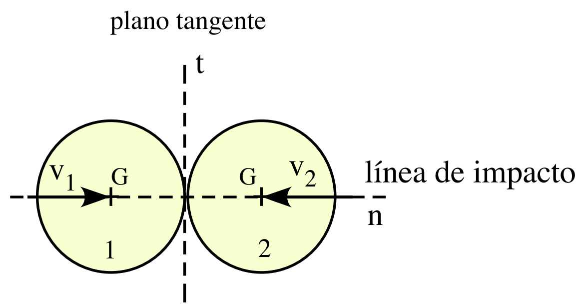
Choque excéntrico: alguno de los c.d.m. está fuera de la línea de impacto

Consideraremos que la percusión del choque es siempre en la dirección de la línea de impacto (a veces se menciona que es liso)

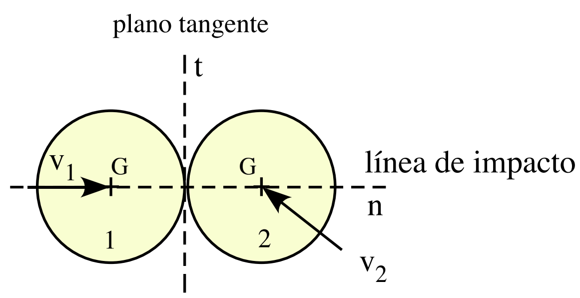
Centros de masa en la línea de impacto: **Choque central**



Velocidades de ambos cdm contenidas en la línea de impacto: **Choque central directo**

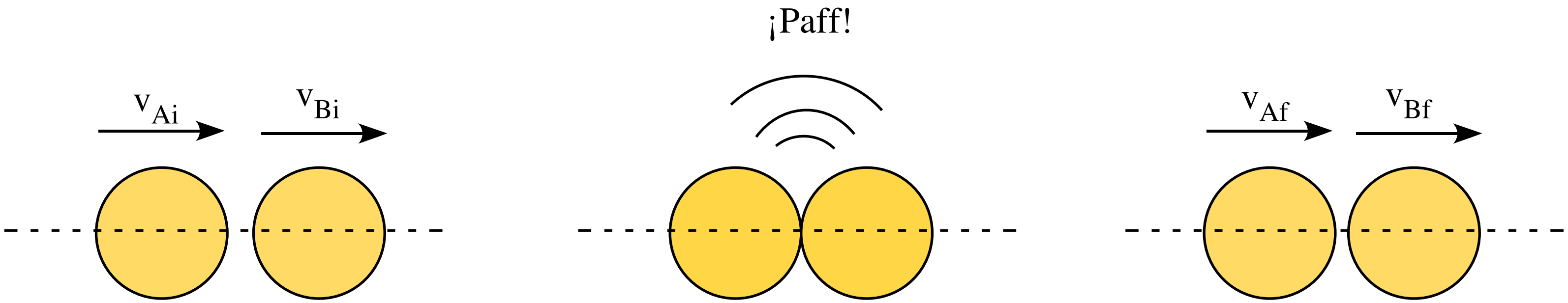


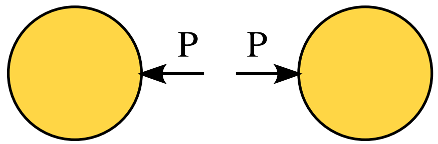
Alguna de las velocidades no dirigida según la línea de impacto: **Choque central oblicuo**



Choque central directo

Dos puntos materiales tienen velocidades iniciales a lo largo de la línea de impacto, de forma que se produce un choque durante un intervalo de tiempo



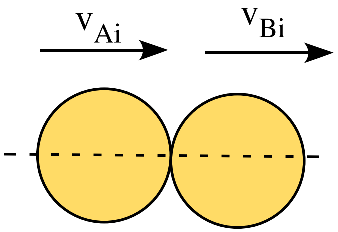


Supongamos que en el impacto sólo se producen fuerzas impulsivas normales en el contacto entre los puntos

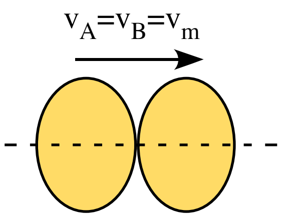
Considerando el sistema formado por A y B, **la cantidad de movimiento del conjunto inmediatamente antes e inmediatamente después del choque se conserva:**

$$m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}$$

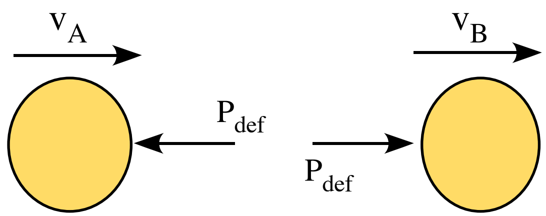
Fase de deformación o aproximación: desde t_i hasta t_m en que dejan de aproximarse (deformación máxima) ($v_A=v_B=v_m$)



$t=t_i$



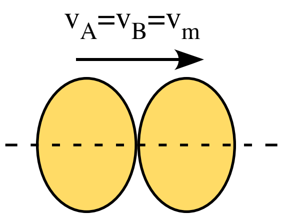
$t=t_m$



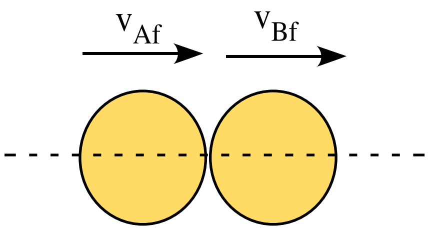
Teorema del impulso aplicado a A

$$\underbrace{-\int_{t_i}^{t_m} F_{def}dt}_{-P_{def}} = m_A v_m - m_A v_{Ai}$$

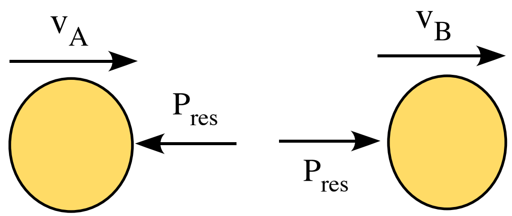
Fase de restitución: desde t_m hasta t_f



$t=t_m$



$t=t_f$



$$-\int_{t_m}^{t_f} F_{res}dt = m_A v_{Af} - m_A v_m$$

Cociente entre el impulso de restitución y el de deformación:

$$e = \frac{\int_{t_m}^{t_f} F_{res}dt}{\int_{t_i}^{t_m} F_{def}dt} = \frac{v_{Af} - v_m}{v_m - v_{Ai}}$$

Idem con B:

$$e = \frac{\int_{t_m}^{t_f} F_{res} dt}{\int_{t_i}^{t_m} F_{def} dt} = \frac{v_{Bf} - v_m}{v_m - v_{Bi}}$$

Eliminando v_m:

$$e = -\frac{v_{Bf} - v_{Af}}{v_{Bi} - v_{Ai}}$$

Coeficiente de restitución

Este coeficiente es positivo y adimensional, y su valor está entre 0 y 1

$$0 \le e \le 1 \begin{cases} e = 0 \ \ \text{choque plástico, A y B se mueven juntos} \\ 0 < e < 1 \ \ \text{choque inelástico} \\ e = 1 \ \ \text{choque elástico, recuperación completa,no hay deformación} \end{cases}$$

- **Si el choque es elástico:**

$$e = 1 \rightarrow -v_{Bf} + v_{Af} = v_{Bi} - v_{Ai} \quad \rightarrow \quad v_{Af} + v_{Ai} = v_{Bf} + v_{Bi} \qquad [1]$$

De la conservación de la cantidad de movimiento $m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}$

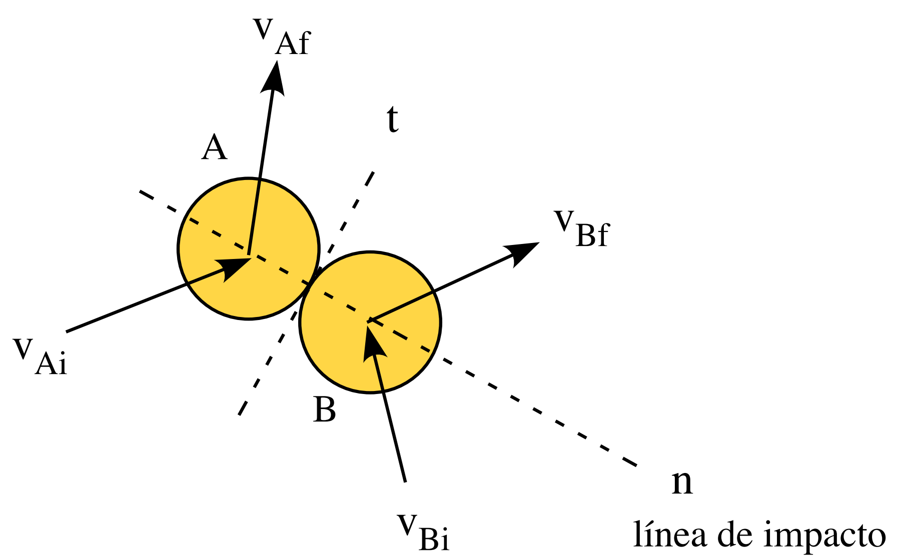
$$m_A \left(v_{Ai} - v_{Af} \right) = m_B \left(v_{Bf} - v_{Bi} \right) \qquad [2]$$

Multiplicando miembro a miembro las ecs 1 y 2: $m_A \left(v_{Ai}^2 - v_{Af}^2 \right) = m_B \left(v_{Bf}^2 - v_{Bi}^2 \right)$

Dividiendo todo por 2 y reordenando: $\frac{1}{2} m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bi}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bf}^2$

En un choque elástico (y sólo en ese caso) se conserva la energía cinética del sistema

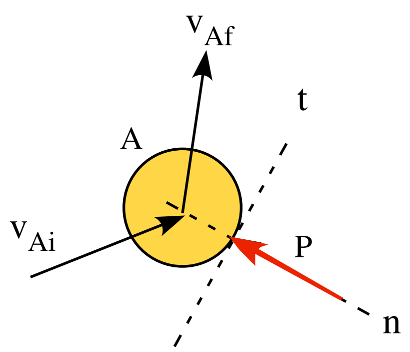
Choque central oblicuo

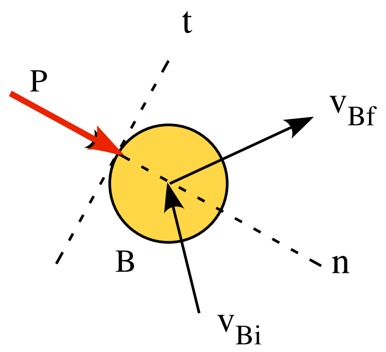


Aplicamos las leyes de las percusiones según las direcciones normal y tangente para cada cuerpo

$$\sum \vec{P} = m\Delta\vec{v}_G$$

Diagrama de percusiones en cada cuerpo:





$$\text{n)} -P = m_A\left(-v_{An}^f - v_{An}^i\right)$$

$$\text{t)}\ 0 = m_A\left(v_{At}^f - v_{At}^i\right) \rightarrow \underline{v_{At}^f = v_{At}^i}$$

$$\text{n)}\ P = m_B\left(v_{Bn}^f + v_{Bn}^i\right)$$

$$\text{t)}\ 0 = m_B\left(v_{Bt}^f - v_{Bt}^i\right) \rightarrow \underline{v_{Bt}^f = v_{Bt}^i}$$

La cantidad de movimiento del conjunto se conserva: $m_A\vec{v}_A^i + m_B\vec{v}_B^i = m_A\vec{v}_A^f + m_B\vec{v}_B^f$

n) $m_A v_{An}^i - m_B v_{Bn}^i = -m_A v_{An}^f + m_B v_{Bn}^f$

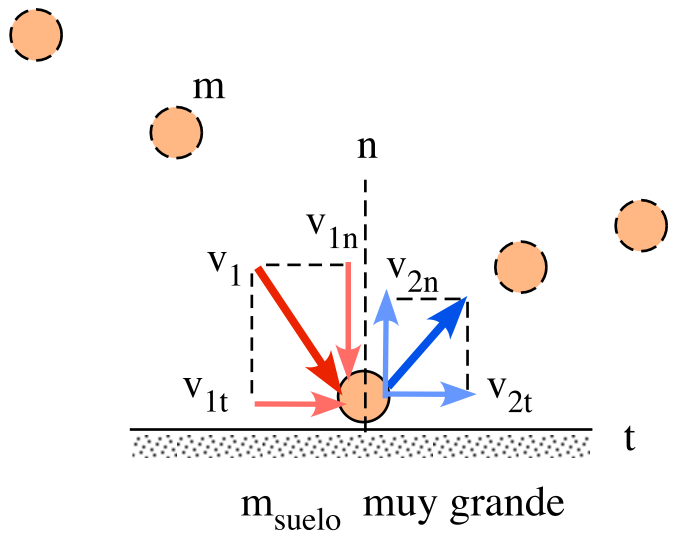
t) $m_A v_{At}^i + m_B v_{Bt}^i = m_A v_{At}^f + m_B v_{Bt}^f$

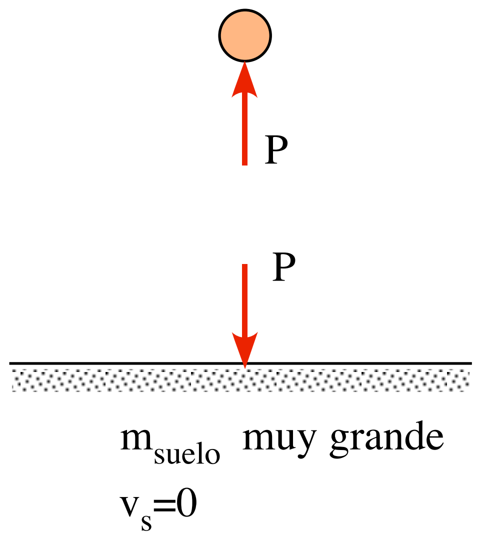
Estas ecuaciones se deducen también de sumar las de cada cuerpo. Ya sabemos que las componentes en la dirección tangente se conservan, pero aún así hace falta una ecuación más para poder determinar las velocidades finales sabiendo las iniciales. Repitiendo la deducción del coeficiente de restitución en este caso se obtiene:

$$e = -\frac{\left(v_{Bn}^f - v_{An}^f\right)}{\left(v_{Bn}^i - v_{An}^i\right)} = -\frac{\left(\vec{v}_B^f - \vec{v}_A^f\right)\bullet\vec{n}}{\left(\vec{v}_B^i - \vec{v}_A^i\right)\bullet\vec{n}}$$

En la expresión del coeficiente de restitución sólo intervienen **las conmponentes normales** de las velocidades de los puntos que chocan

Rebote pelota: choque con cuerpo muy masivo





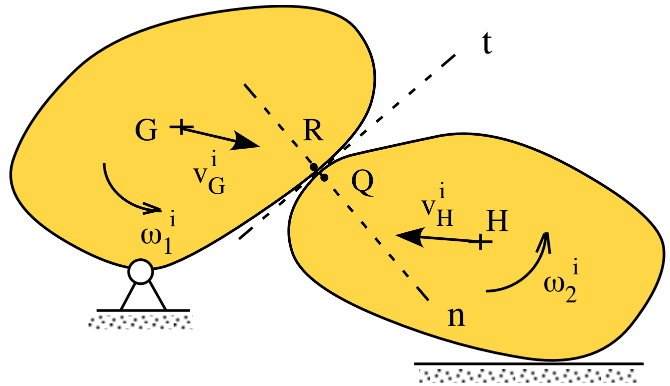
$$\sum P_t = m\left(v_{2t} - v_{1t}\right) \rightarrow \underline{v_{1t} = v_{2t}} \quad (P_t = 0)$$

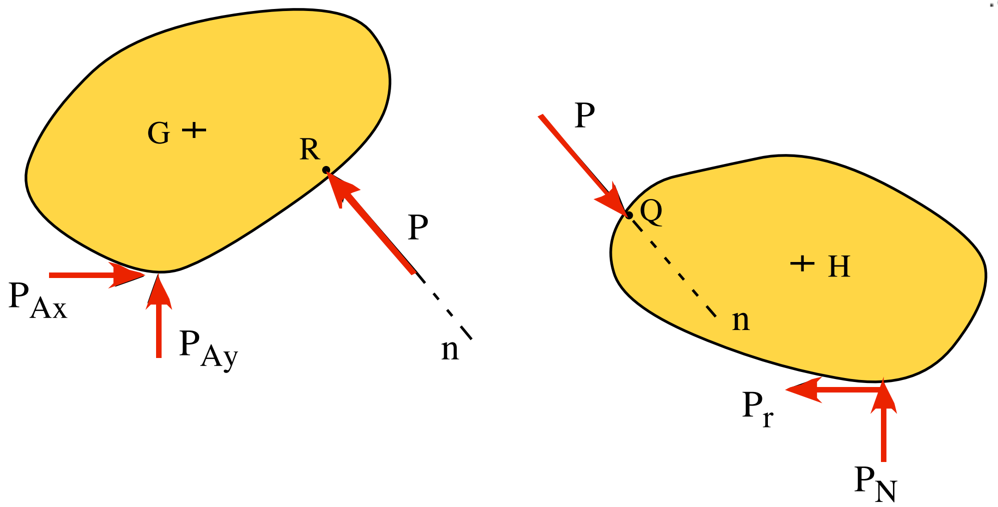
$$e = -\frac{v_{sn}^f - v_{2n}}{v_{sn}^i + v_{1n}} = \frac{v_{2n}}{v_{1n}} \rightarrow \underline{v_{2n} = e\ v_{1n}} \qquad \text{(siempre opuestas en sentido)}$$

Choque entre sólidos

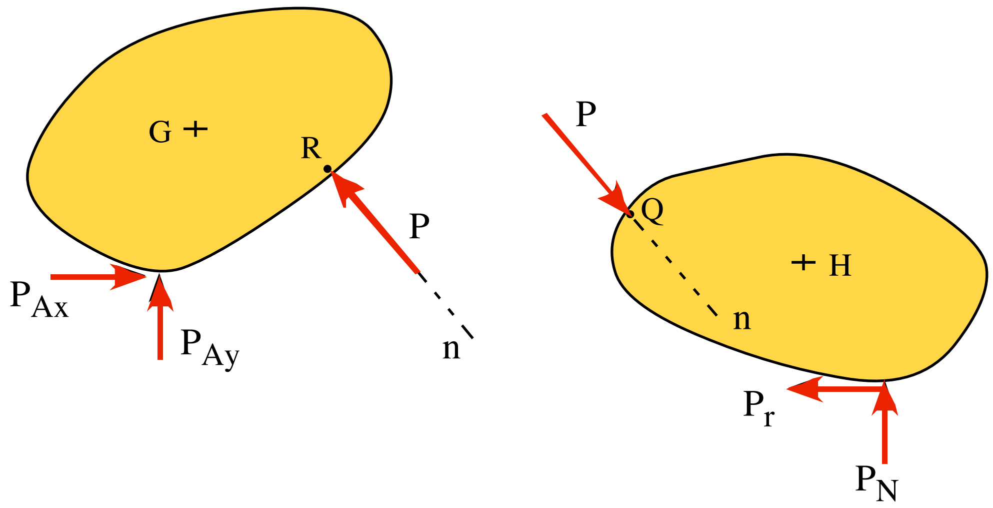
Esquema de percusiones sobre cada sólido, teniendo en cuenta que el contacto se produce en los puntos R y Q

El movimiento de cada sólido está caracterizado mediante mediante la velocidad de su cdm (G y H) y la velocidad angular inmediatamente antes e inmediatamente después del choque





Esquema de percusiones de cada sólido: percusión en el punto de impacto según la línea de impacto (normal)



• Ecuaciones de las percusiones para cada sólido (3 ecs en el plano/sólido)

$$\sum P_x = m\Delta v_{Gx}$$

$$\sum P_y = m\Delta v_{Gy}$$

$$M_A^P = I_A \Delta\omega \quad \text{(A= pto fijo o G)}$$

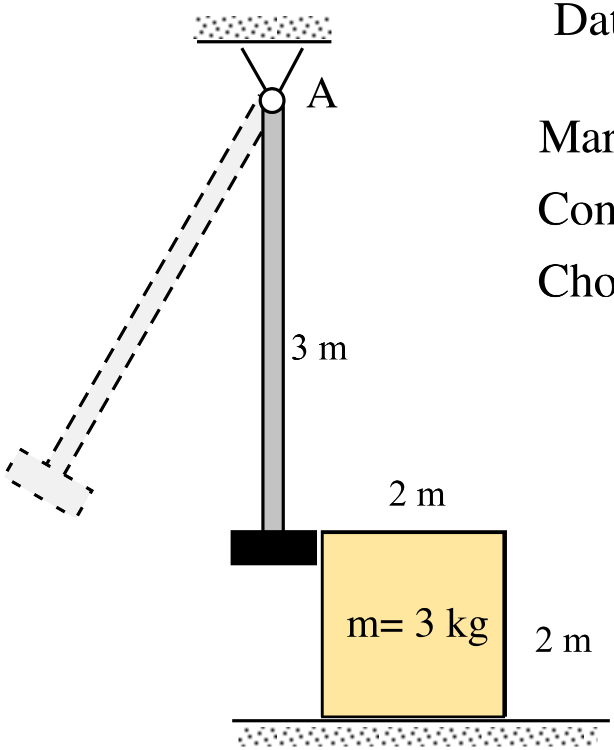
• Coeficiente de restitución: $$e = -\frac{\left(\vec{v}_R^{\,f} - \vec{v}_Q^{\,f}\right)\bullet\vec{n}}{\left(\vec{v}_R^{\,i} - \vec{v}_Q^{\,i}\right)\bullet\vec{n}} \qquad \text{(1 ec)}$$

La energía **no se conserva salvo si e=1** (choque elástico), en cuyo caso se puede plantear la conservación de la energía en lugar de la definición de e.

Si e=0 el choque es perfectamente plástico y las **componentes normales** de las velocidades finales de los puntos del contacto son iguales

• Suele ser necesario relacionar velocidades y velocidades angulares mediante campo de velocidades y a veces hacer alguna hipótesis del movimiento final.

Ejemplo:



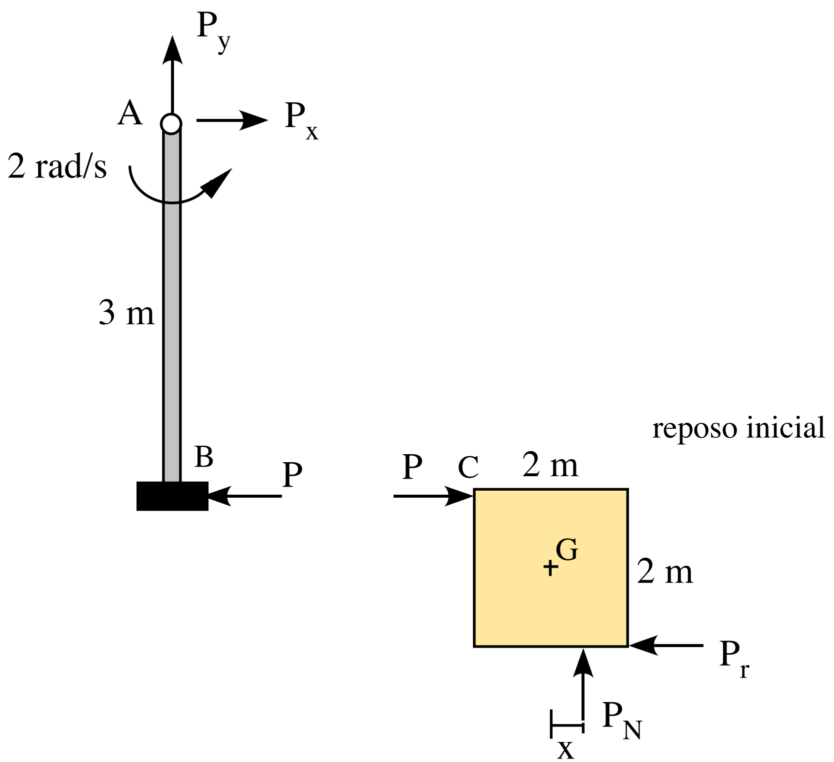
Datos:

Martillo : llega al choque con $\omega_1 = 2 \mathrm{rad/s}$ $\quad I_A = 12\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}$

Contacto bloque suelo: μ=0.5

Choque plástico

Se pide la velocidad angular final de los dos sólidos, suponiendo que el bloque inicie un vuelco sin deslizamiento.



Martillo: $A = \text{punto fijo};\ 2\ \text{rad/s} \rightarrow \omega_2$

$$M_A^P = I_A\left(\omega^f - \omega^i\right) \rightarrow\ -P\cdot 3 = 12\left(\omega_2 - 2\right) \quad [1]$$

Bloque: $I_G = \frac{1}{12}3\left(2^2 + 2^2\right) = 2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$$\text{reposo} \rightarrow \vec{v}_G^f = \left(v_{Gx}, v_{Gy}\right) \quad \omega^f = -\omega$$

$$\sum P_x = m\left(v_{Gx}^f - v_{Gx}^i\right) \rightarrow\ -P_r + P = 3\left(v_{Gx} - 0\right) \quad [2]$$

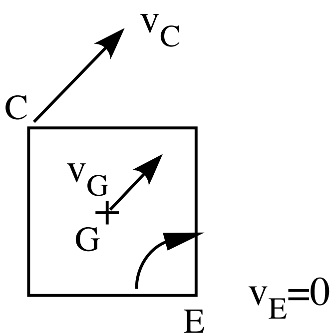
$$\sum P_y = m\left(v_{Gy}^f - v_{Gy}^i\right) \rightarrow\ P_N = 3\left(v_{Gy} - 0\right) \quad [3]$$

$$M_G^P = I_G\left(\omega^f - \omega^i\right) \rightarrow\ -P\cdot 1 - P_r\cdot 1 + P_N\cdot x = 2\left(-\omega - 0\right) \quad [4]$$

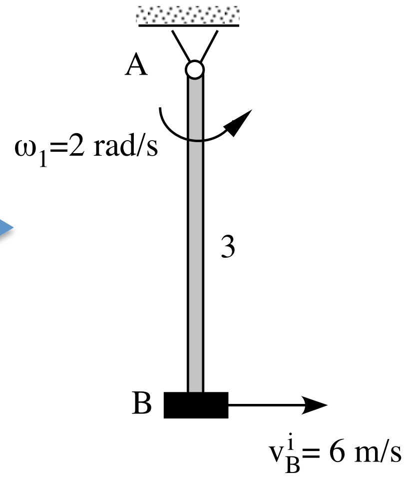
$P_r \leq 0.5P_N \quad P_N \geq 0 \quad P > 0 \quad -1 \leq x \leq 1$

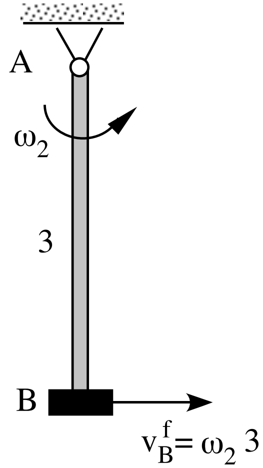
Hipótesis vuelco: x=1

- Cinemática



En martillo →



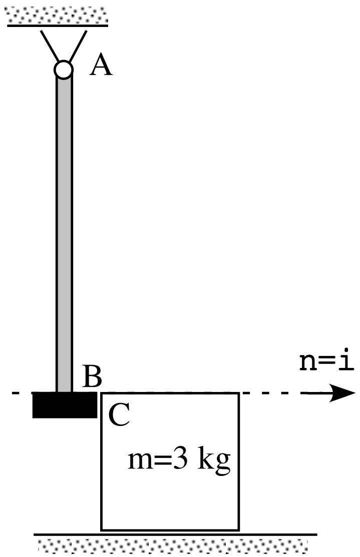


En el bloque:

Hipótesis de vuelco sin deslizamiento en E: $\vec{v}_E = \vec{0}$

$$\vec{v}_G = \cancel{\vec{v}_E} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{EG} \rightarrow \underline{v_{Gx} = v_{Gy} = 1 \cdot \omega}$$

Análogamente para C: $v_{Cx} = v_{Cy} = 2 \cdot \omega$



- Choque plástico: e=0

$$e = -\frac{\left(v_{Bx}^f - v_{Cx}^f\right)}{\left(v_{Bx}^i - v_{Cx}^i\right)} = 0 \rightarrow v_{Bx}^f = v_{Cx}^f$$

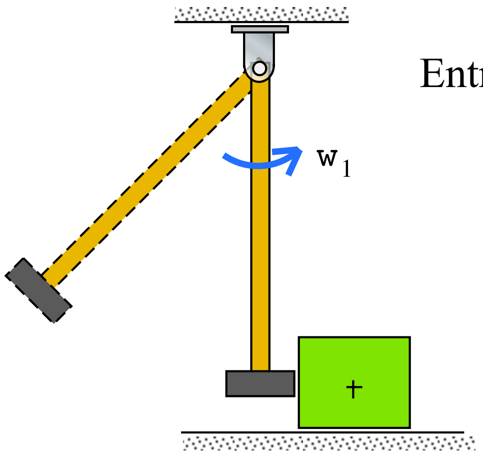
$$\underline{3\,\omega_2 = 2\omega}$$

Las relaciones subrayadas se sustituyen en las ecs numeradas. Resolviendo:

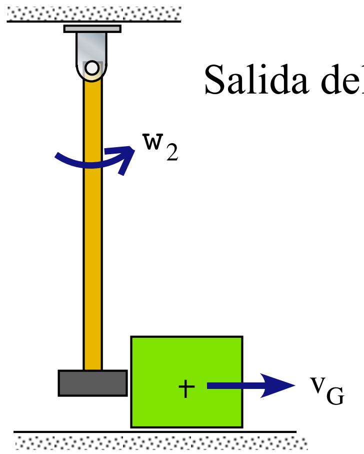
$$\omega = 1.2 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 0.8 \text{ rad/s}$$

$$P = 4.8 \text{ N·s} > 0 \quad P_N = 3.6 \text{ N·s} > 0 \quad P_r = 1.2 \text{ N·s} \quad \left(P_r = 1.2 < 0.5P_N = 1.8\right)$$

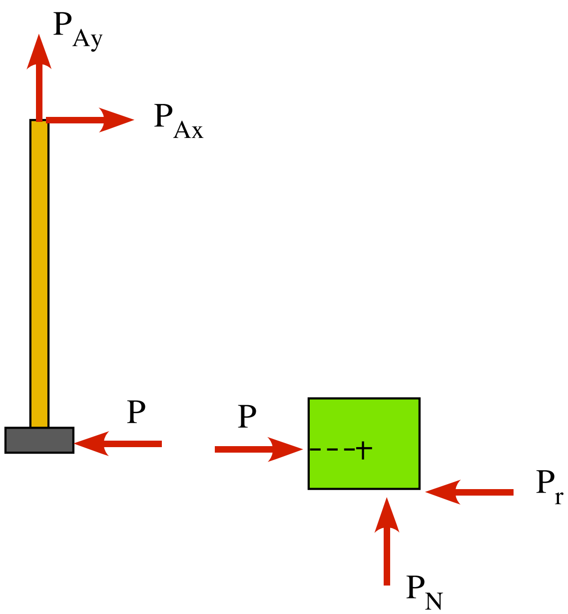
<u>Práctica 4 del Laboratorio</u>



Entrada al choque



Salida del choque



Bloque :

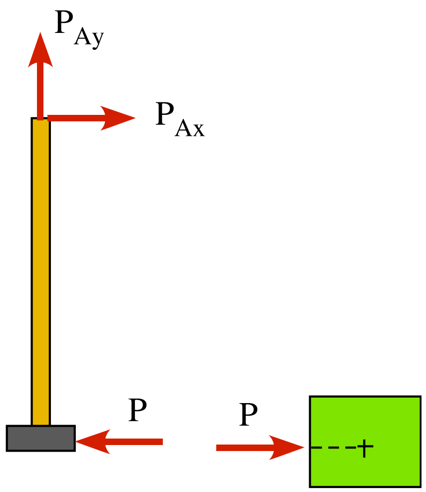
$$\sum P_x = m\Delta v_{Gx} \Big) P - P_r = m\left(v_G - 0\right)$$

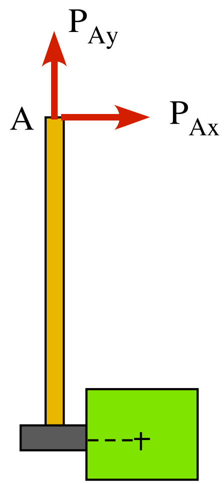
$$\sum P_y = m\Delta v_{Gy} \Big) \underline{P_N = 0}$$

$$P_r \le \mu_e P_N \;\rightarrow\; \underline{P_r = 0} \qquad P = m v_G$$

Martillo: A punto fijo

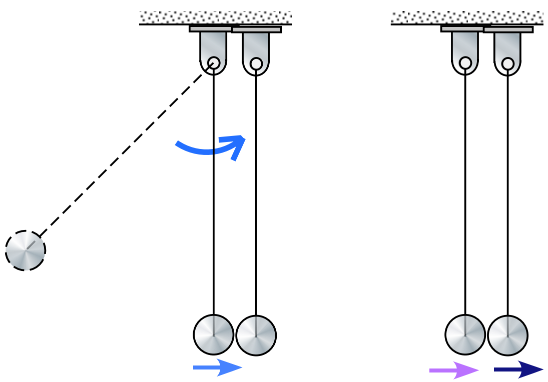
$$M_A^P = I_A \Delta\omega \Big) \; -P\cdot L = I_A\left(\omega_2 - \omega_1\right)$$

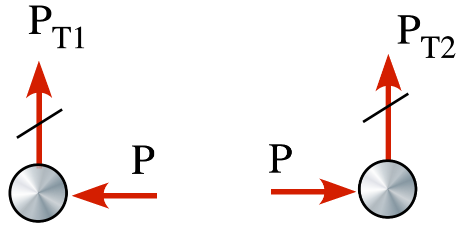




El momento angular respecto a A del **conjunto** se conserva en ese choque

La cantidad de movimiento del conjunto **no se conserva** porque hay percusiones de reacción en A (P_{Ax} es distinta de 0)





Las velocidades antes y después son todas horizontales: $P_{T1}=0$ $P_{T2}=0$

Se conserva la cantidad de movimiento del conjunto en el choque