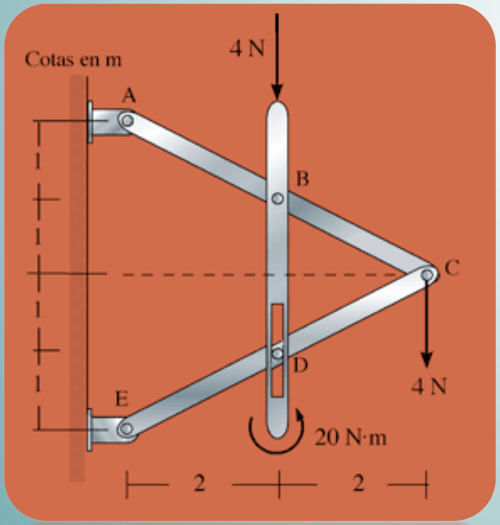
Mecánica

Tema 12. Oscilaciones: vibraciones mecánicas.



Cecilia Pardo Sanjurjo

DPTO. DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

Vibraciones

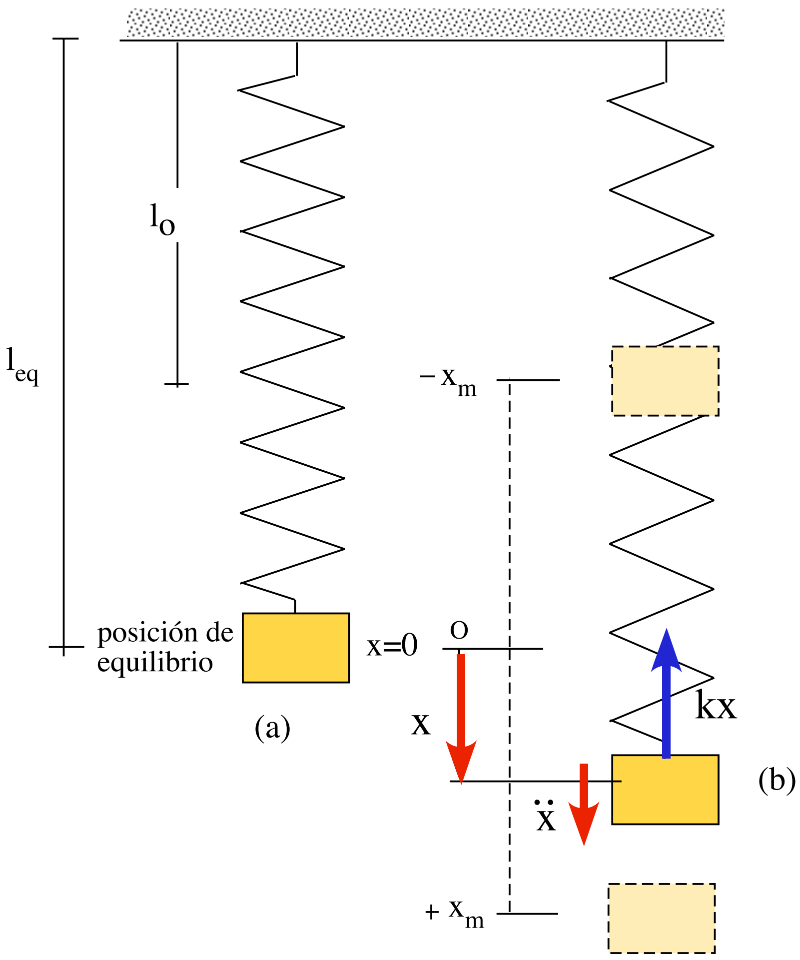
Por vibración mecánica se entiende el movimiento oscilatorio de una partícula, sólido o sistema de sólidos en torno a una posición de equilibrio.

Nos limitaremos a un solo grado de libertad

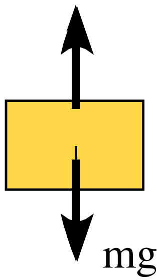
- Vibraciones libres. Movimiento armónico simple
- Vibraciones amortiguadas
- Vibraciones forzadas. Resonancia

Vibraciones libres. Movimiento armónico simple

Bloque que cuelga de un resorte de constante elástica k



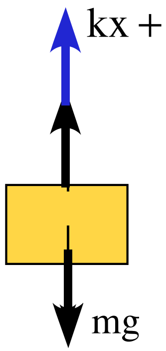
$F_m = k\,(l_{eq} - l_o)$



posición de equilibrio

$mg = k(l_{eq} - l_o)$

Desplazando el bloque de su posición de equilibrio una distancia x:



$\sum F = ma$

$$\underbrace{mg - k\left(l_{eq} - l_o + x\right)}_{-kx} = m\ddot{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

Ec diferencial del movimiento

$$m\ddot{x} + kx = 0$$ ec. diferencial de 2º orden con coeficientes constantes

La solución es una combinación de exponenciales

$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ siendo λ_1 y λ_2, las raíces del polinomio característico

El **polinomio característico** es el obtenido sustituyendo en la ec. diferencial

$$\ddot{x} \to \lambda^2 \qquad \dot{x} \to \lambda \qquad x \to 1$$

En nuestro caso $$m\lambda^2 + k = 0 \to \lambda^2 = -\frac{k}{m} \to \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Definiendo: $$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ $$x = A \cdot \mathrm{sen}\,\omega_n t + B \cdot \cos\omega_n t$$

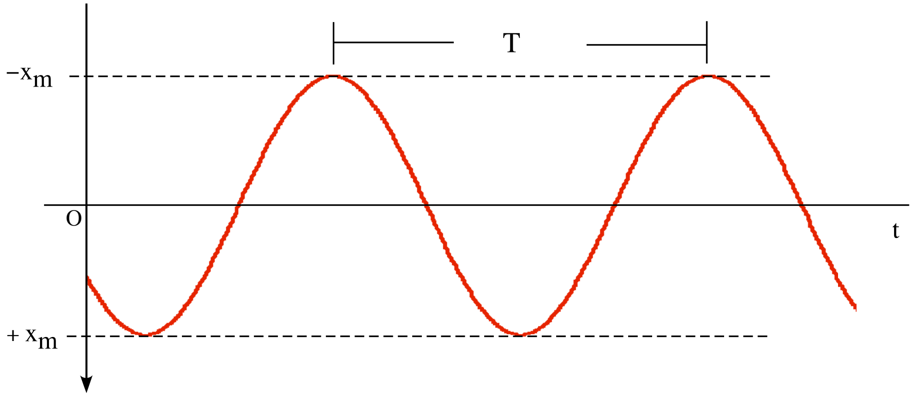
Derivando respecto al t: $$v = \dot{x} = A\omega_n \cdot \cos\omega_n t - B\omega_n \cdot \mathrm{sen}\,\omega_n t$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_n^2 \cdot \mathrm{sen}\,\omega_n t - B\omega_n^2 \cdot \cos\omega_n t = -\omega_n^2 \cdot x$$

A y B son constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales del problema

Otra forma de expresar la solución: $x = x_m \mathrm{sen}(\omega_n t + \phi)$

$$A = x_m \cos\phi$$
$$B = x_m \mathrm{sen}\phi$$
$$\mathrm{tg}\phi = \frac{B}{A}$$



x_m **Amplitud** o valor máximo del de

ω_n = **frecuencia angular o pulsación** natural de la vibración; en rad/s

ϕ ángulo de fase o **desfase**

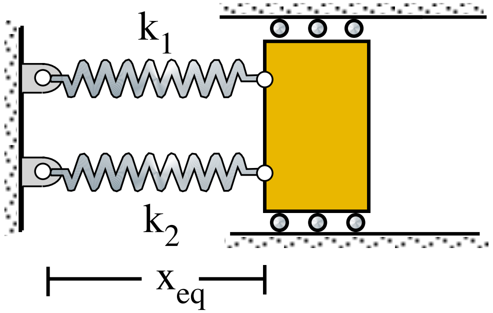
T es el **periodo** o tiempo en que hace una oscilación completa: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Frecuencia, f, es el número de oscilaciones por unidad de tiempo:

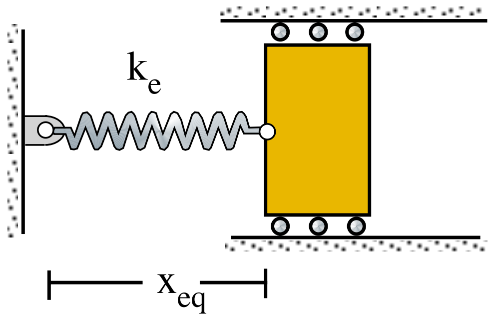
f=1/T unidades SI: Hz (hercios o ciclos/s)

Muelles en paralelo

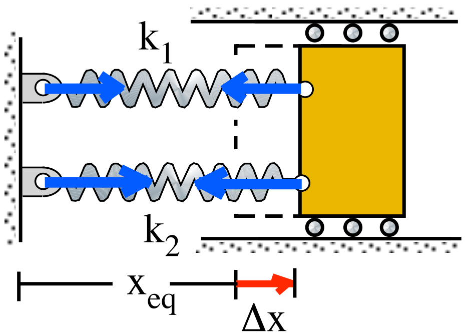
Sistema en la posición de equilibrio:

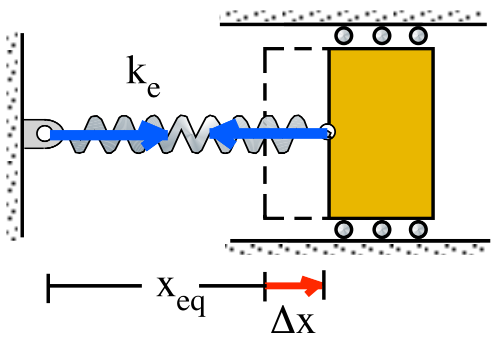


Muelle único equivalente:



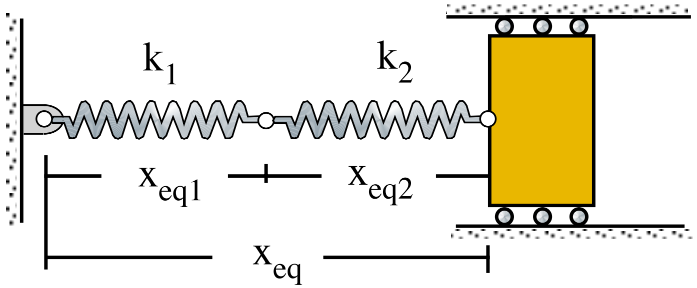
Separado ligeramente de la posición de equilibrio: ambos muelles se estiran la misma longitud

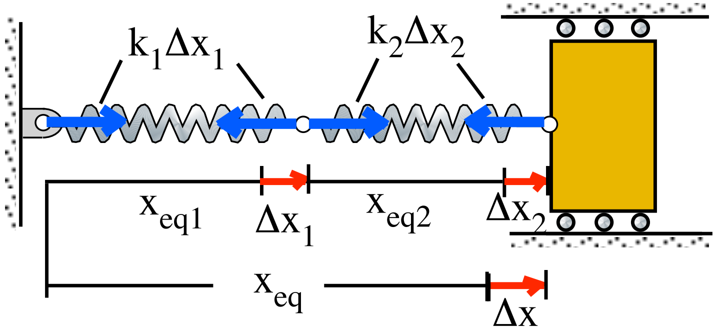


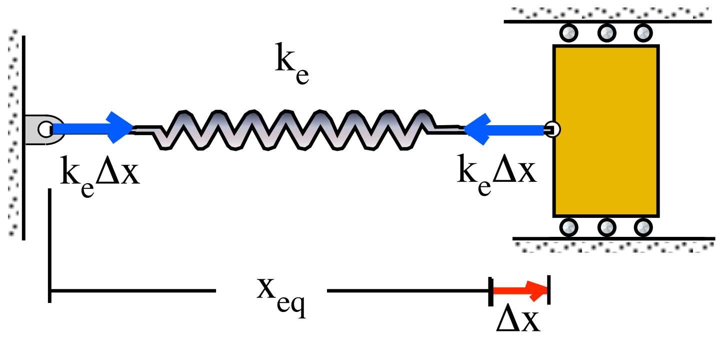


$$F_{m_1} + F_{m2} = F_{me} \rightarrow \underline{k_e = k_1 + k_2}$$

Muelles en serie







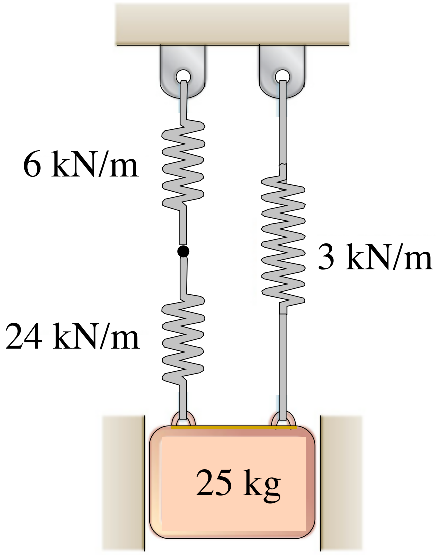
$$k_1\Delta x_1 = k_2\Delta x_2 = k_e\Delta x = F_m$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

$$\frac{F_m}{k_e} = \frac{F_m}{k_1} + \frac{F_m}{k_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

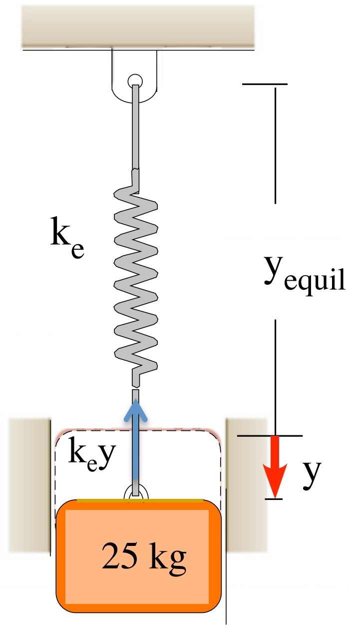
Un bloque de 25 kg se sostiene mediante la disposición de que se muestra. Si el bloque se desplaza verticalmente de su posición de equilibrio hacia abajo, determínense: a) el periodo y frecuencia del movimiento resultante y b) la velocidad y aceleración máximas del bloque si la amplitud del movimiento es 30 mm



Muelle equivalente :

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \rightarrow k_s = 4.8 \text{ kN / m}$$

$$k_e = k_s + 3 = 7.8 \text{ kN / m}$$



Ecuación del movimiento al desplazarlo una distancia (y) de la posición de equilibrio (2ª ley de Newton)

$$m\ddot{y} + k_e y = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{k_e}{m} y = 0 \quad \rightarrow y = y_o \cos(\omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \sqrt{\frac{7800\ N/m}{25\ kg}} = 17.66\ \text{rad/s}$$

Frecuencia angular o pulsación

Frecuencia $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 2.81\ \text{Hz}$ **Periodo** $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0.36\ \text{s}$

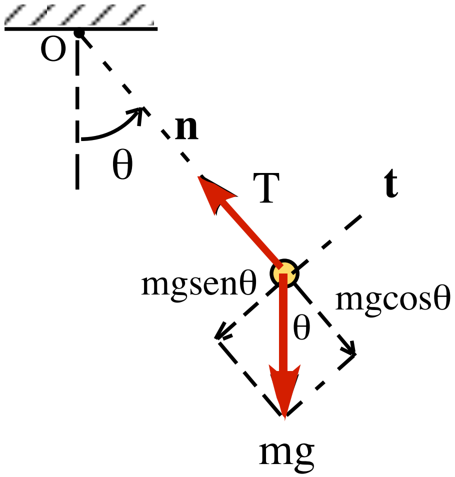
b) Derivando respecto al tiempo la coordenada y(t) hallamos la velocidad y aceleración del bloque en cualquier instante

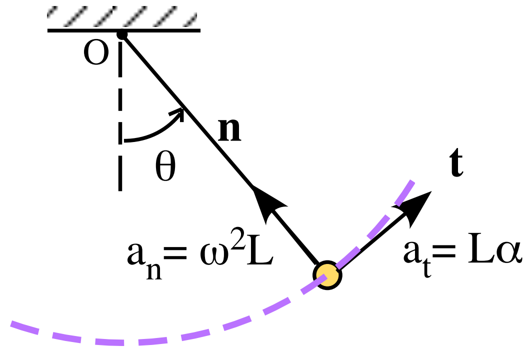
$$y = y_o \cos(\omega t) \qquad \dot{y} = -y_o \omega\ \text{sen}(\omega t) \qquad \ddot{y} = -y_o \omega^2\ \cos(\omega t)$$

$v_{máx} = y_o\omega = 0.03 \cdot 17.66 = 0.53\ \text{m/s}$ (cuando pasa por la posición de equilibrio)

$a_{máx} = y_o\omega^2 = 0.03 \cdot 17.66^2 = 9.36\ m/s^2$ (en los extremos de $y = \pm\, y_o$)

Péndulo simple





$$\sum F_t = ma_t) \quad -mg\ \text{sen}\theta = m\ a_t$$ Ecs dinámica

$$\sum F_n = ma_n) \quad T - mg\ \cos\theta = m\ a_n$$

Cinemática:

$$v = L\omega = L\cdot\frac{d\theta}{dt} \qquad a_t = L\alpha = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad a_n = \frac{v^2}{L} = L\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\sum F_t = ma_t) \quad -mg\ \text{sen}\theta = m\ L\frac{d^2\theta}{dt^2} \longrightarrow \theta = \theta(t)$$ ec del movimiento

$$L\ddot{\theta} + g\,\mathrm{sen}\theta = 0$$

Para ángulos θ muy pequeños, el sen $\theta \simeq \theta$ (en radianes)

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0}$$

Ec. de movimiento armónico simple

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0 \quad \text{siendo } \omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Frecuencia angular del péndulo simple

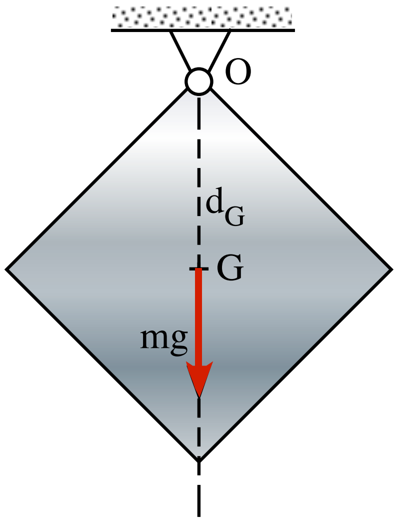
Solución para el desplazamiento angular :

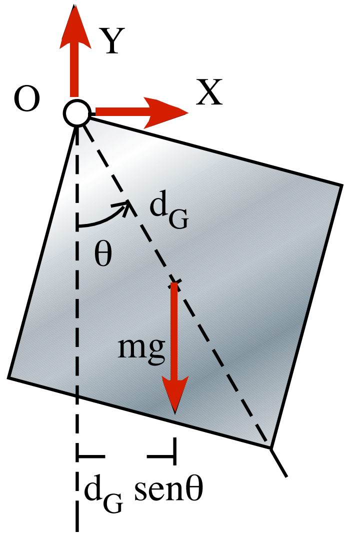
$$\theta = \theta_m \mathrm{sen}(\omega_n t + \phi)$$

De periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$$

Péndulo físico: Sólido oscilando en torno a un punto fijo





Teorema del momento angular:

$$M_O = I_O\alpha) \quad -mgd_G \cdot \mathrm{sen}\theta = I_O\ddot{\theta}$$

Para ángulos θ muy pequeños, el sen $\theta \simeq \theta$ (en radianes)

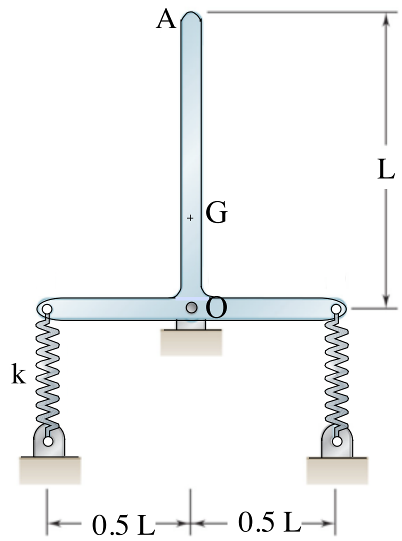
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgd_G}{I_O}\theta = 0}$$

Movimiento armónico simple con frecuencia natural:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgd_G}{I_O}}$$

periodo: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgd_G}}$$

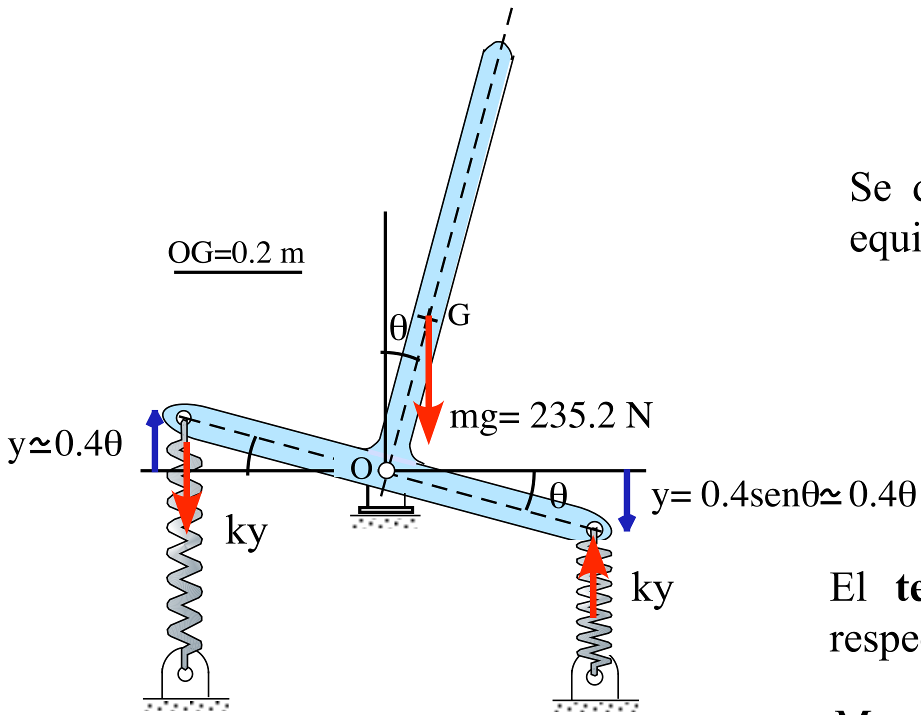
Dos barras uniformes, cada una de masa 12 kg y longitud L=800 mm, se sueldan para formar la “T” del dibujo. La constante de cada resorte es k=500 N/m y al extremo A se le da un pequeño desplazamiento y se suelta. Calcular la frecuencia del movimiento resultante.



m=24 kg

$$OG = \frac{12 \cdot 0 + 12 \cdot 0.4}{24} = 0.2\text{m}$$

$$I_O = \frac{1}{12} 12 \cdot 0.8^2 + \frac{1}{3} 12 \cdot 0.8^2 = 3.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$



Se desplaza ligeramente de la posición de equilibrio

El **teorema del momento angular** respecto al punto fijo O: $\alpha = \ddot{\theta}$

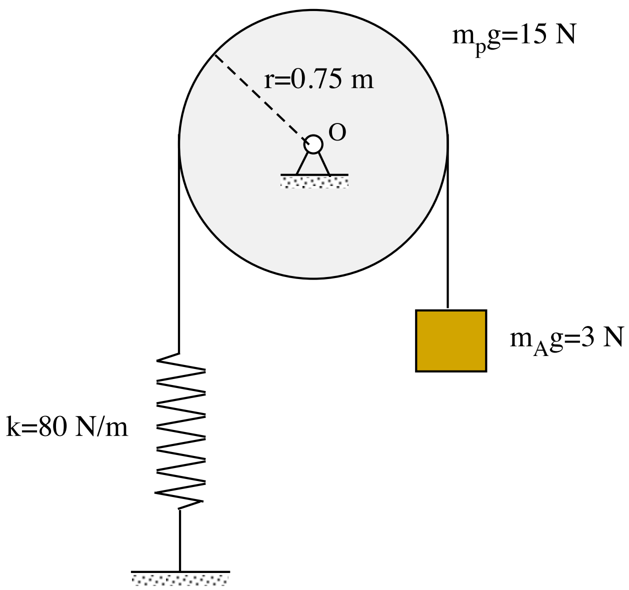
$$M_O = I_O \alpha \big) \; mg\, OG\, \mathrm{sen}\theta - 2ky \cdot 0.4 \cos\theta = I_O \ddot{\theta}$$

Para θ pequeño : $\mathrm{sen}\theta \simeq \theta \quad \cos\theta \simeq 1 \quad y \simeq 0.4\theta$

$$47\,\theta - 160\,\theta = 3.2\ddot{\theta} \qquad \underline{\ddot{\theta} + 35.3\,\theta = 0}$$

$\omega = \sqrt{35.3} = 5.94 \text{ rad / s}$ pulsación

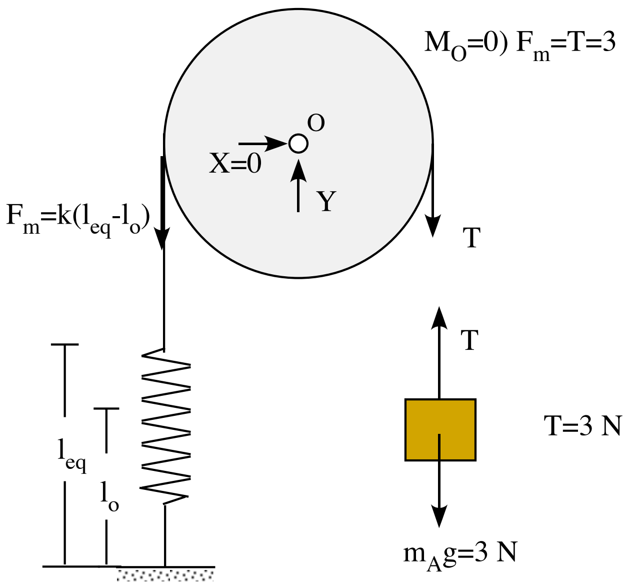
Frecuencia $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 0.94 \text{ Hz}$



Ejemplo :

Hallar el periodo natural de oscilación del sistema cuando apartamos al bloque A hacia debajo de su posición de equilibrio

$$m_A = \frac{3}{9.8} = 0.306 \text{ kg} \quad m_p = \frac{15}{9.8} = 1.53 \text{ kg}$$



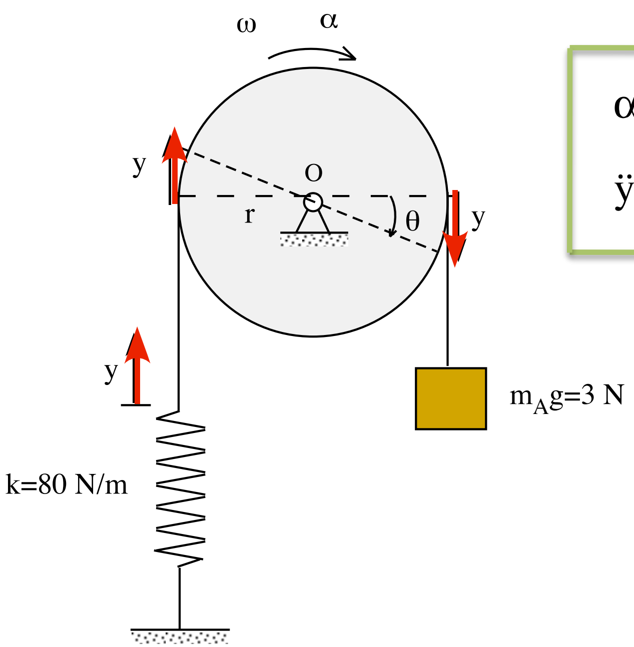
En la posición de equilibrio:

$$\text{Polea}: M_O = 0)\ T\cdot r - F_{eq}\cdot r = 0 \rightarrow T = F_{eq}$$

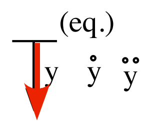
$$\text{Bloque}: \sum F_y = 0)\ m_A g = T$$

$$m_A g = F_{eq}$$

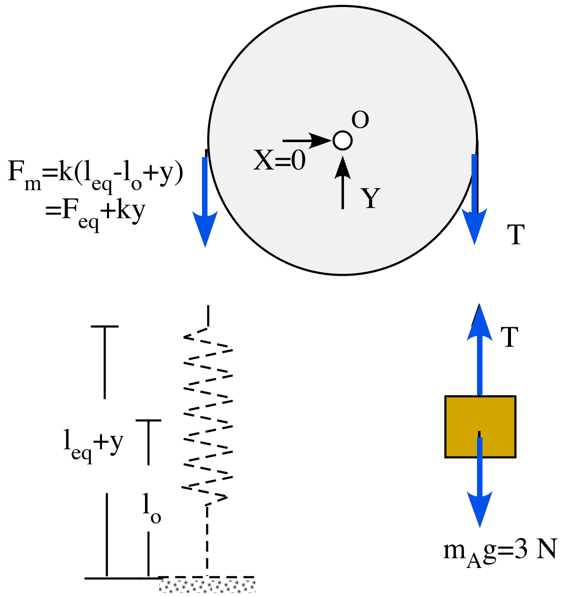
Sistema desplazado una distancia y del equilibrio



$$\boxed{\begin{aligned}\alpha &= \ddot{\theta}\\ \ddot{y} &= r\ddot{\theta}\end{aligned}}$$



Esquema de fuerzas



$$\left.\begin{aligned}&\text{Polea: } M_O = I_O\alpha\big)\ T\cdot r - F_m\cdot r = \left(\frac{1}{2}m_p r^2\right)\ddot{\theta}\\ &\text{Bloque}: \sum F_y = ma\big)\ m_A g - T = m_A\ddot{y}\end{aligned}\right\}$$

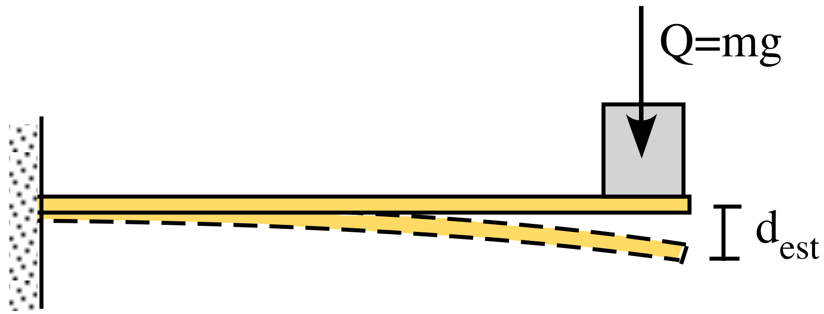
Eliminando T

$$\cancel{m_A g} - 0.5m_p \underbrace{r\ddot{\theta}}_{\ddot{y}} - \cancel{F_{eq}} - ky = m_A\ddot{y}$$

$$\left(m_A + 0.5m_p\right)\ddot{y} + ky = 0 \longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_A + 0.5m_p}} = 8.64\,\text{rad/s} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_n} \simeq 0.73\ \text{s}$$

Vibración de una viga

Una viga sobre la que actúa una carga sufre una deformación.
El desplazamiento de sus puntos se calcula a partir de la resistencia de materiales, siendo proporcional a la carga aplicada.



Si la carga Q ha producido un desplazamiento del punto en que se ha colocado d_{est} significa que la viga ha respondido con una fuerza recuperadora que la iguala. Podemos calcular entonces la constante recuperadora k:

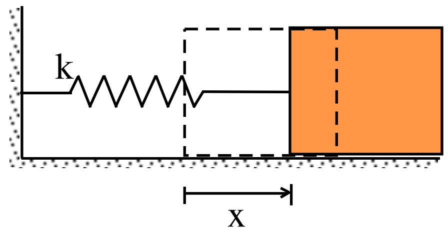
$$Q = k \cdot d_{est} \rightarrow k = \frac{Q}{d_{est}}$$

Separando el sistema de esa posición de equilibrio, la viga vibrará en torno a ella en un movimiento armónico simple de frecuencia natural

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Aplicación de la conservación de la energía en vibraciones

Otra forma de encontrar la ec. diferencial del movimiento armónico si todas las fuerzas son conservativas



$$E_{cin} + E_{pot} = cte$$

$$x = A\,\text{sen}(\omega_n t + \phi) \qquad \dot{x} = -A\omega_n \cos(\omega_n t + \phi)$$

$$E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

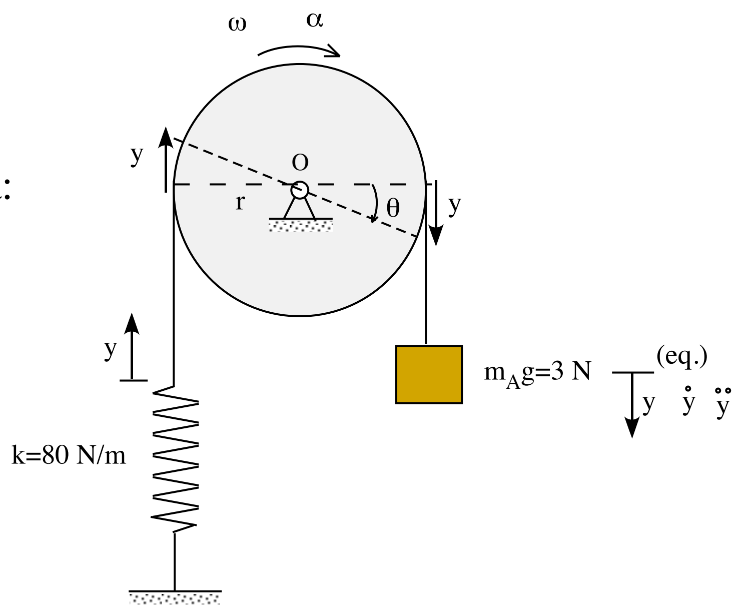
Derivando respecto al t : $\dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0 \rightarrow \underline{m\ddot{x} + kx = 0}$

Este procedimiento se puede aplicar a cualquier sistema conservativo haciendo desplazamiento del sistema respecto a su posición de equilibrio.

Como ejemplo, para el sistema bloque-polea anterior:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m_A \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m_A \dot{y}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(m_A + 0.5m\right)\dot{y}^2$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k\left(l - l_o + y\right)^2 - m_A g y$$



En la posición de equilibrio y=0, la E_{pot} es mínima:

$$\left(\frac{dE_{pot}}{dy}\right)_{y=0} = 0 \rightarrow k\left(l - l_o\right) = m_A g$$

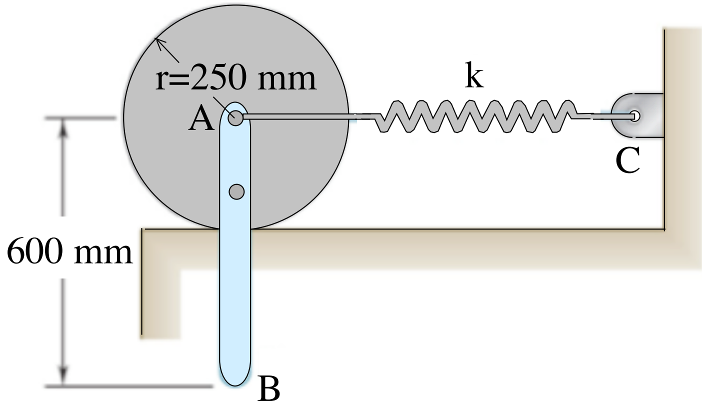
La energía mecánica es constante:

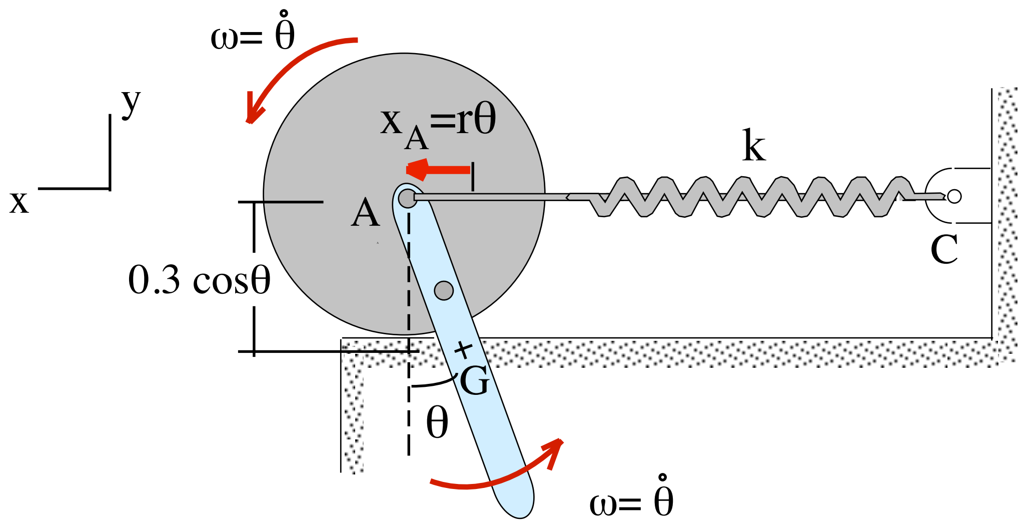
$$\frac{d\left(E_{cin} + E_{pot}\right)}{dt} = 0 \longrightarrow \left[\left(m_A + 0.5m\right)\ddot{y} + k\left(l - l_o + y\right) - m_A g\right]\dot{y} = 0$$

$$\underline{\left(m_A + 0.5m\right)\ddot{y} + k y = 0}$$

Una barra de 800g está atornillada a un disco de 1.2 kg. Un resorte de constante k= 12 N/m une el centro del disco y la pared. Si el disco rueda sin deslizar, determinar el periodo de pequeñas oscilaciones del sistema.

Radio del disco=250 mm; AB=600 mm





Desplazamientos pequeños:

$$\text{sen}\theta \simeq \theta \qquad \cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$

Disco:

Rueda sin deslizar sobre el suelo: $\omega = \dot{\theta}$ $\quad v_A = r\,\dot{\theta} = 0.25\,\dot{\theta}$ $\quad E_p = 0$

$$E_c = \frac{1}{2}m\,v_A^2 + \frac{1}{2}I_A\omega^2 = \frac{1}{2}1.2\cdot\left(0.25\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}1.2\cdot 0.25^2\right)\dot{\theta}^2 = 0.05625\dot{\theta}^2$$

Barra: gira como el disco $\quad \omega = \dot{\theta}$

$$\left.\begin{array}{ll} x_G = x_A - AG\,\text{sen}\theta \simeq 0.25\theta - 0.3\theta & v_{Gx} = \dfrac{dx_G}{dt} = -0.05\,\dot{\theta} \\ y_G = -AG\cos\theta = -0.3\left(1 - \dfrac{1}{2}\theta^2\right) & v_{Gy} = \dfrac{dy_G}{dt} = 0.3\,\dot{\theta}\,\theta \end{array}\right\} v_G \simeq v_{Gx}$$

$$v_{Gy} = O(2) \ll v_{Gx} = O(1)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_b v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} 0.8\left(0.0025\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} 0.8 \cdot 0.6^2\right)\dot{\theta}^2 = 0.013\ \dot{\theta}^2$$

$$E_p = -m_b g AG \cos\theta \simeq -m_b g AG\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) = cte + 1.176\theta^2$$

Resorte elástico: $$E_p = \frac{1}{2} k x_A^2 = \frac{1}{2} 12\left(0.25\theta\right)^2 = 0.375\theta^2$$

La energía total: $$E = 0.06925\dot{\theta}^2 + 1.551\theta^2$$

La energía mecánica es constante del movimiento:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow 0.06925 \cdot 2\dot{\theta}\ \ddot{\theta} + 1.551 \cdot 2\theta\ \dot{\theta} = 0$$

$$\left(0.1385\ \ddot{\theta} + 3.102\ \theta\right)\ \dot{\theta} = 0$$ $$0.1385\ \ddot{\theta} + 3.102\ \theta = 0$$ Ec. del movimiento vibratorio

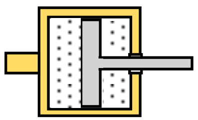
De frecuencia angular $$\omega = \sqrt{\frac{3.102}{0.1385}} = 4.73 \text{ rad / s}$$ periodo $$T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 1.33 \text{ s}$$

Vibraciones libres amortiguadas

Los sistemas reales no se mantienen indefinidamente en vibración, ya que siempre hay rozamientos que hacen que pierdan energía hasta que se paran.

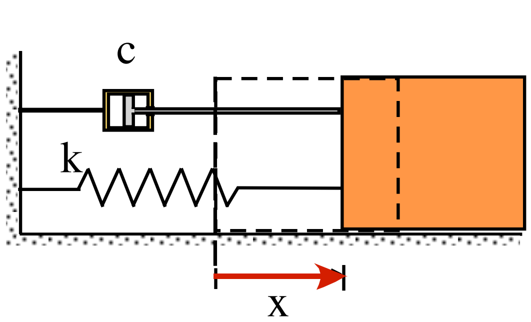
De entre los tipos de fuerzas de rozamiento que puede haber, vamos a considerar únicamente el rozamiento fluido o amortiguamiento viscoso, que tiene lugar cuando un cuerpo se mueve dentro de un fluido.
Este tipo de rozamiento puede ser de origen natural e inevitable como el debido movimientos en el aire o en agua, o bien puede ser buscado a propósito para eliminar vibraciones indeseadas

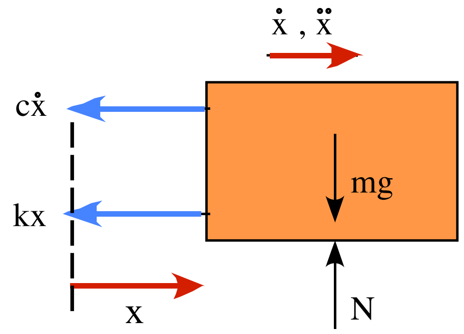
Nos limitaremos a amortiguadores lineales: la fuerza de amortiguación se opone a la velocidad y es directamente proporcional al módulo de la velocidad con que se extiende o comprime el amortiguador



$$\vec{F} = -c\vec{v}$$

siendo c : **constante de amortiguamiento** viscoso (unidades S.I. $\rightarrow$ N·s/m)





2^a Ley de Newton: $\sum F_x = ma_x\,)\qquad -kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$

Ec. diferencial del movimiento:
(de 2º orden con coeficientes constantes)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Polinomio característico:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Vamos a escribir estas raíces en función de las siguientes variables:

$\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ pulsación natural del sistema

$\zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{mk}} = \dfrac{c}{2m\omega_n}$ o razón de amortiguamiento (adimensional)

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

El valor de c tal que la raíz es cero se llama **coeficiente de amortiguamiento crítico, c_r** :

$$c_r = 2m\omega_n = 2\sqrt{mk}$$

La solución $$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Se comporta de forma muy distinta según c sea mayor, menor o igual que c_r

• **Sistema sobreamortiguado (o fuerte):** $c > c_r \quad (\text{o } \zeta > 1)$

$0 < \sqrt{\zeta^2 - 1} < \zeta \quad \rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ reales y negativas $\rightarrow x(t)$ exponencial decreciente

No hay movimiento vibratorio

• **Sistema con amortiguamiento crítico** $c = c_r \quad (\zeta = 1)$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$ 1 raíz doble

La solución es de la forma → $x(t) = (B + Ct)e^{-\omega_n t}$

(se puede comprobar sustituyendo en la ec. diferencial)

No oscilatoria, cae rápidamente a 0

Tiene interés en ingeniería porque **el sistema regresa a su posición de equilibrio, sin oscilar, en el menor tiempo posible**.

• **Sistemas subamortiguados (o débil)** $c < c_r \quad (\zeta<1)$

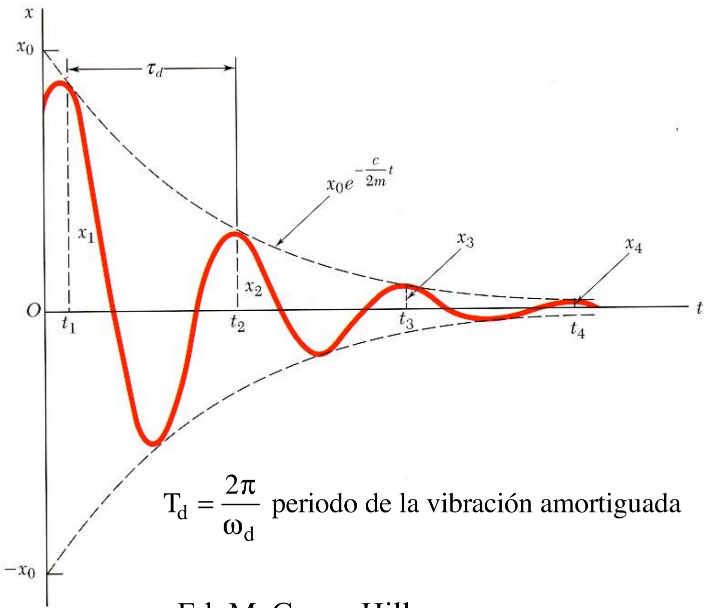
$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_d}$$

La solución quedaría: $x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(C_1 e^{+i\omega_d t} + C_2 e^{-i\omega_d t}\right)$

O bien:

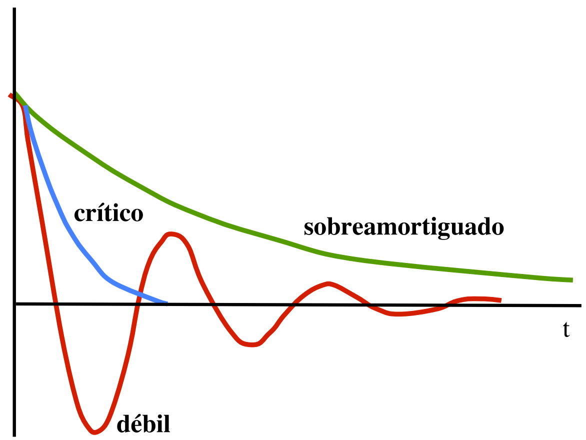
$$x(t) = x_m e^{-(c/2m)t}\,\mathrm{sen}(\omega_d t + \phi)$$

Vibraciones con amplitud exponencialmente decreciente en el tiempo

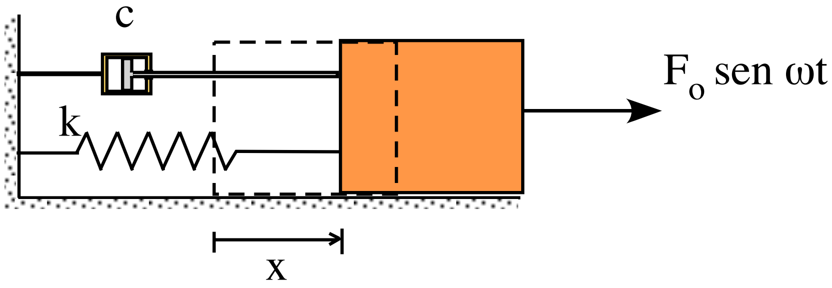


$T_d = \dfrac{2\pi}{\omega_d}$ periodo de la vibración amortiguada

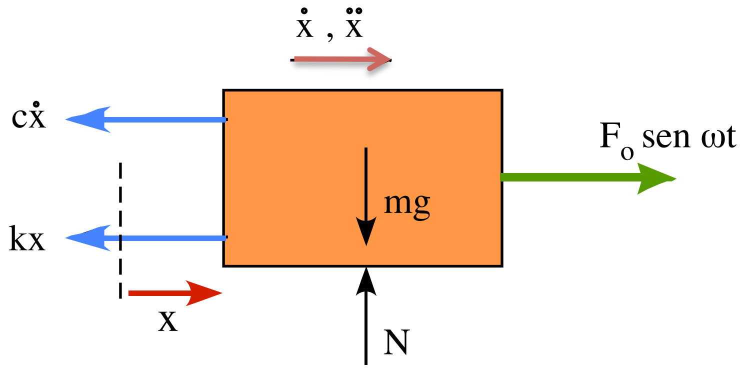
Ed. McGraw- Hill



Vibraciones forzadas



Se llaman así cuando hay una fuerza periódica aplicada al sistema o una perturbación periódica de alguna distancia



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_o \ \text{sen}\ \omega t$$

La solución general es: $x(t) = x_h + x_p$

x_h : solución ec. homogénea $\quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

x_p : solución particular de la ec. completa

x_h sería la solución del movimiento libre amortiguado y en cualquier caso representaría un movimiento transitorio que desaparecería al cabo de un tiempo.

Una solución particular en cambio es la vibración estacionaria:

$$x_p = x_o \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

Sustituyendo en la ec. diferencial se obtiene que es solución si:

$$x_o = \frac{F_o}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + (c\omega)^2}} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

Teniendo en cuenta que:

la frecuencia natural de la vibración libre $\qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Y el coef. de amortiguamiento crítico es $\qquad c_r = 2m\omega_n$

$$x_o = \frac{F_o}{k}\frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2(c/c_r)(\omega/\omega_n)\right]^2}}$$

Amplitud de la vibración estacionaria

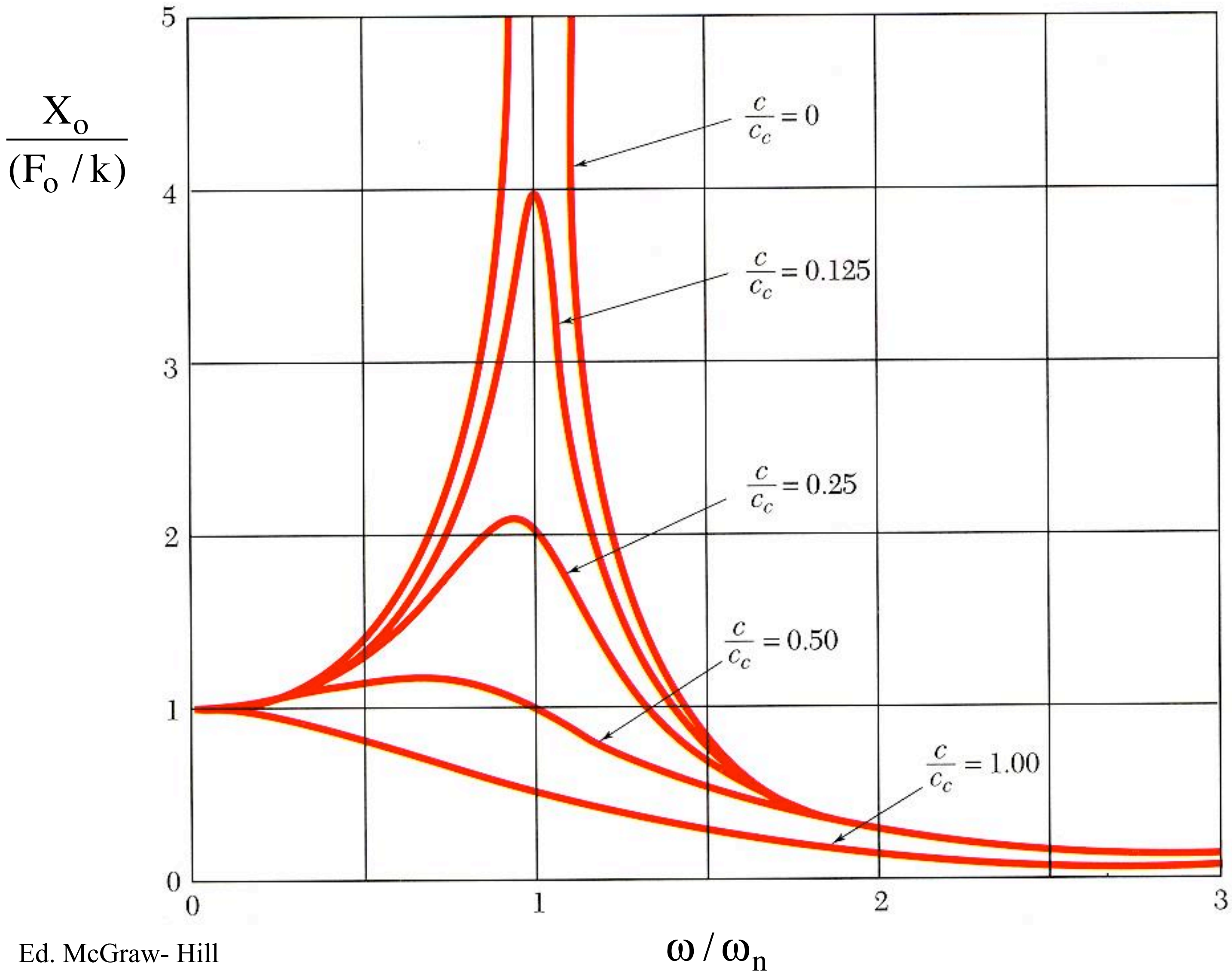
$$tg\varphi = \frac{2(c/c_r)(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

Desfase entre la vibración estacionaria y la libre amortiguada

siendo c/c_r el factor de amortiguamiento

ω/ω_n la razón entre la frecuencia de la fuerza aplicada y la natural del oscilador

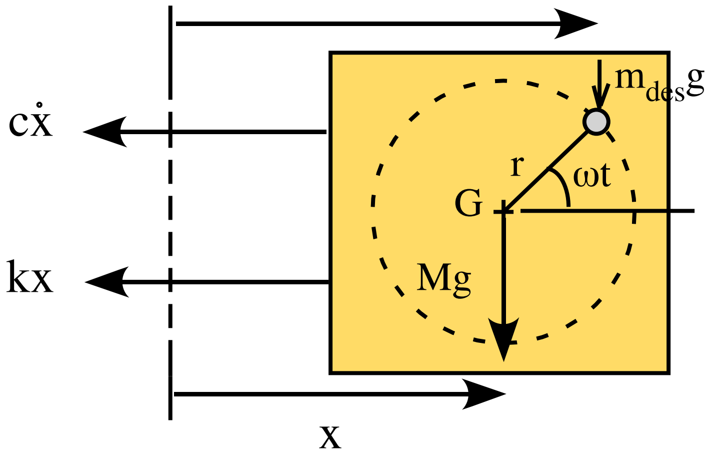
Como se puede ver de la expresión de la amplitud, en ausencia de amortiguación (c=0), si la frecuencia angular de la fuerza aplicada coincide con la natural, la amplitud se hace infinita. Se dice entonces que hay **resonancia**



Ed. McGraw- Hill

Una vibración forzada puede provenir del **exterior** (por ejemplo, un suelo que se mueva como ocurre en los terremotos) o **interior** como ocurre cuando en una máquina hay una rotación descompensada.

Desequilibrio de una pieza giratoria de una máquina:



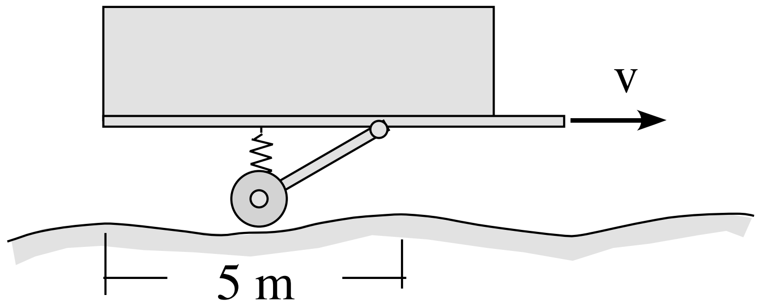
$$-c\dot{x}-kx=M\ddot{x}+m_{des}\frac{d^2\left(x+r\cos\omega t\right)}{dt^2}$$

$$\left(M+m_{des}\right)\ddot{x}+c\dot{x}+kx=m_{des}r\omega^2\cos\omega t$$

Es la misma ec. forzada que hemos visto antes con

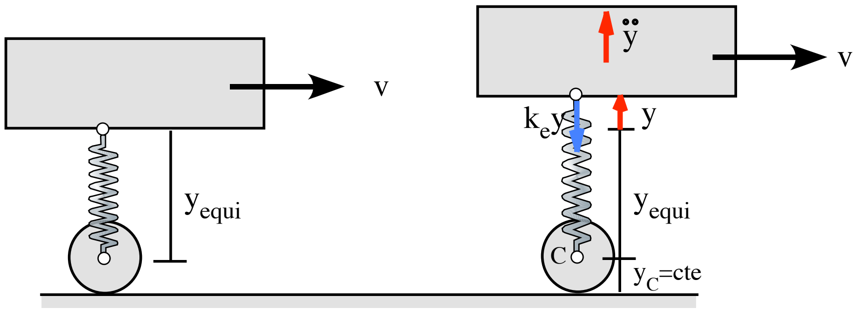
$$F_o=m_{des}r\omega^2 \qquad m=M+m_{des}$$

Un remolque y su carga tienen una masa de 250 kg. El remolque se sostiene por medio de dos resortes de constante k=10 kN/m y se arrastra sobre un camino aproximadamente senoidal, siendo su oscilación vertical de mínimo a máximo de 80 mm y la distancia entre dos máximos de 5 m. Determinar a) a que velocidad ocurrirá la resonancia y b) la amplitud de la vibración a una velocidad de 50 km/h.



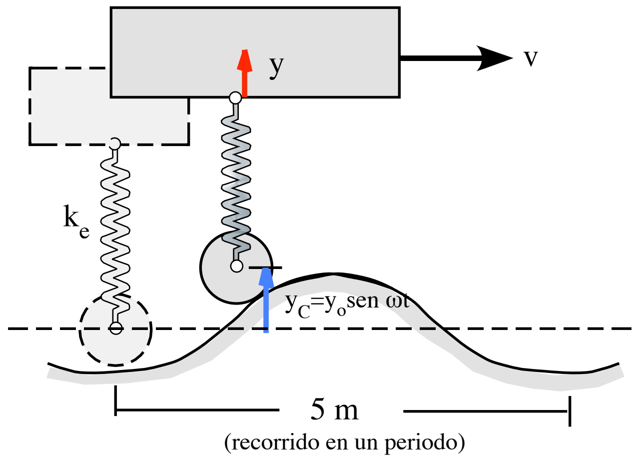
Remolque con dos ruedas y 2 muelles en paralelo, muelle equivalente con $k_e = 2k$

Si en lugar de un muelle hubiese un enlace rígido, el movimiento del remolque tendría una amplitud de 40 mm



Suelo horizontal:
movimiento oscilatorio en torno a la posición de equilibrio

$$m\ddot{y} = -k_e y \quad \rightarrow \quad m\ddot{y} + k_e y = 0$$



Suelo senoidal:

La variación de la longitud del muelle es el resultado del desplazamiento del carrito (y) y de la oscilación del suelo (y_C):

$$-k_e y \quad \rightarrow \quad -k_e\left(y\text{-}y_C\right)$$

$$m\ddot{y} = -k_e\left(y - y_C\right) \quad \rightarrow \quad m\ddot{y} + k_e y = k_e y_o \,\text{sen}\, \omega t$$

Características de la sinusoide del suelo: $T = \dfrac{5}{v} = \dfrac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = \dfrac{2\pi v}{5}$

a) Valor de v para el que ocurre la resonancia

$$m\ddot{y} + k_e y = k_e y_o \operatorname{sen}\omega t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10000\ \text{N/m}}{250\ \text{kg}}} = 8.95\ \text{rad/s}$$

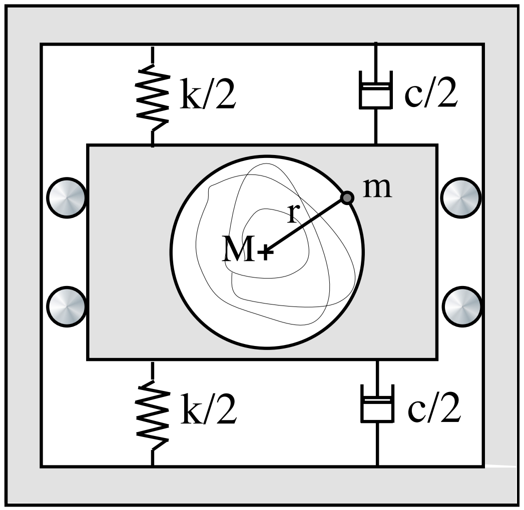
La resonancia ocurre cuando: $\omega_n = \omega \rightarrow 8.95 = \dfrac{2\pi v}{5} \rightarrow v = 7.12\ \text{m/s} = 25.6\ \text{km/h}$

b) Amplitud de la vibración para v=50 km/h → $\omega = \dfrac{2\pi v}{5} = 17.45\ \text{rad / s}$

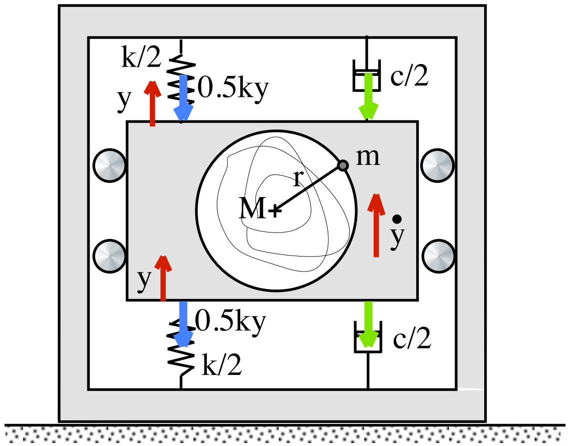
$$y_{part} = A\operatorname{sen}\left(\omega t - \cancel{\phi}\right) \quad \text{con } \varphi = 0 \text{ ya que } c = 0$$

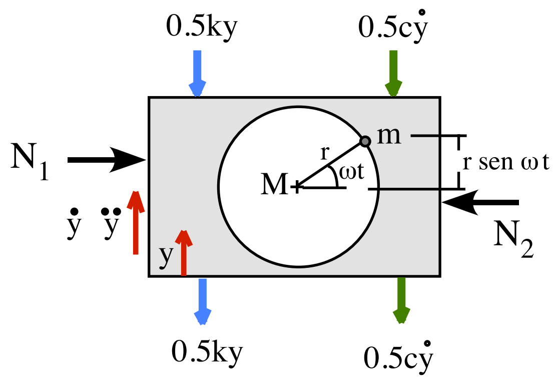
$$A = \frac{F_o}{\sqrt{\left(k_e - m\omega^2\right)^2 + c^2\omega^2}} = \frac{k_e y_o}{\left|k_e - m\omega^2\right|} = \frac{0.04\cdot 20\cdot 10^3}{\left|20\cdot 10^3 - 250\cdot 17.45^2\right|} \simeq 0.014\ \text{m} = \underline{14\ \text{mm}}$$

En la figura se muestra un modelo simplificado de lavadora. Un bulto de ropa mojada forma una masa de m=10 kg dentro de la máquina y ocasiona un desequilibrio giratorio. La masa giratoria es de 20 kg (ropa incluida) y el radio del tambor es de 25 cm. La lavadora tiene una constante del resorte equivalente a k=1000 N/m y una razón de amortiguamiento de 0.05. Si durante el ciclo de lavado, el tambor rota a 250 rpm, determinar la amplitud del movimiento y la magnitud de la fuerza transmitida a los lados de la lavadora.



$M=10$ kg $\qquad m=10$ kg $\qquad m_t=M+m=20$ kg





Movimiento en el eje y en torno a la posición de equilibrio:

$$y_M = y \rightarrow \ddot{y}_M = \ddot{y}$$

$$y_m = y_M + r \ \text{sen}\omega t \rightarrow \ddot{y}_m = \ddot{y} - r \ \omega^2 \text{sen}\omega t$$

2ª ley de Newton aplicada al conjunto:

$$M\ddot{y}_M + m\ddot{y}_m = -ky - c\dot{y}$$

$$\underline{(M+m)\ddot{y} + c\dot{y} + ky = mr\omega^2 \text{sen} \ \omega t}$$

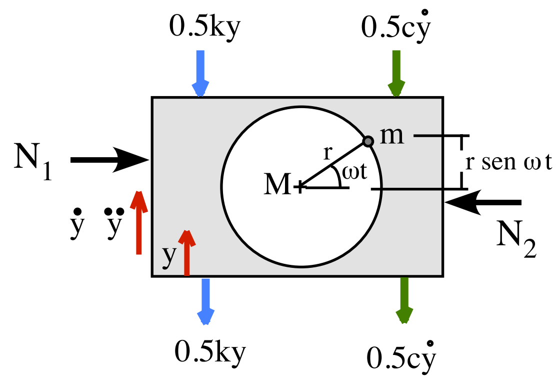
Análogamente **en la dirección x** :

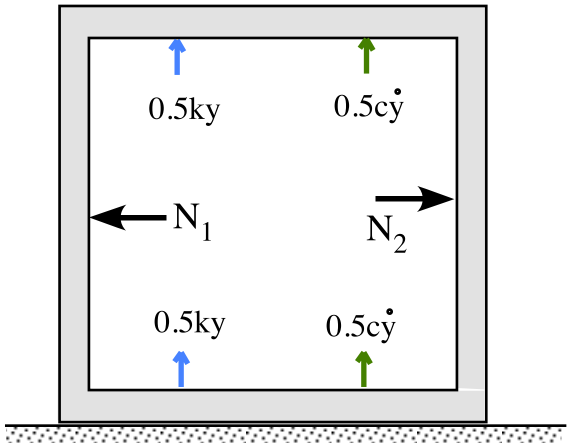
$$M\ddot{x}_M + m\ddot{x}_m = N_1 - N_2$$

$$\ddot{x}_M = \ddot{x}$$

$$x_m = x_M + r\ \cos\omega t \rightarrow \ddot{x}_m = \ddot{x} - r\ \omega^2 \cos\omega t$$

$$(M+m)\ddot{x} = N_1 - N_2 + mr\omega^2 \cos\ \omega t$$





Suponiendo que la lavadora no avanza en la dirección x:

$$\ddot{x} = 0 \rightarrow N_2 - N_1 = mr\omega^2 \cos\ \omega t = 1713.48 \cos\ \omega t$$

$(N_2 - N_1)_{máx} = 1713.48$ N

(para calcularlas separadamente habría que utilizar la ecuación del momento, pero harían falta cotas que no sabemos)

Solución estacionaria: $y = A\,\mathrm{sen}(\omega t - \varphi)$ $\dot{y} = A\omega\cos(\omega t - \varphi)$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_t}} = \sqrt{\frac{1000}{20}} = \sqrt{50}\ \text{rad/s} \qquad \omega = 250\ \text{rpm}\cdot\frac{2\pi}{60} = 26.18\ \text{rad/s}$$

$$F_o = mr\omega^2 = 10\cdot 0.25\cdot 26.18^2 = 1713.48\ \text{N}$$

$$\xi \equiv \frac{c}{2m_t\omega_n} = 0.05 \rightarrow c = 0.1\ m_t\omega_n = 0.1\ 20\sqrt{50} = 14.14$$

$$A = \frac{F_o}{\sqrt{\left(k - m_T\omega^2\right)^2 + c^2\omega^2}} = \frac{1713.48}{\sqrt{\left(10^3 - 20(26.18)^2\right)^2 + (14.14\cdot 26.18)^2}} \simeq 0.135\ \text{m}$$

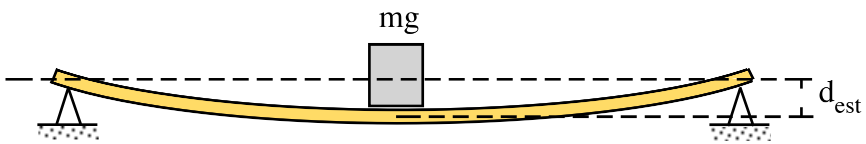
$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{c\omega}{k - m_t\omega^2} = \frac{14.14(26.18)}{10^3 - 20(26.18)^2} = -0.029 \rightarrow \varphi \simeq -0.029\ \text{rad} \simeq -1.7^{\circ}$$

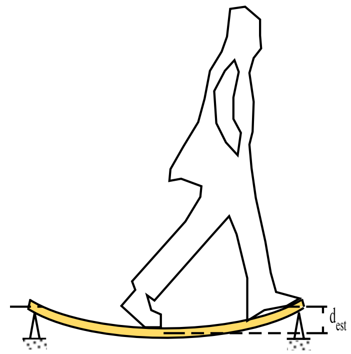
Fuerzas máximas sobre la carcasa: cuando una es máxima la otra es 0

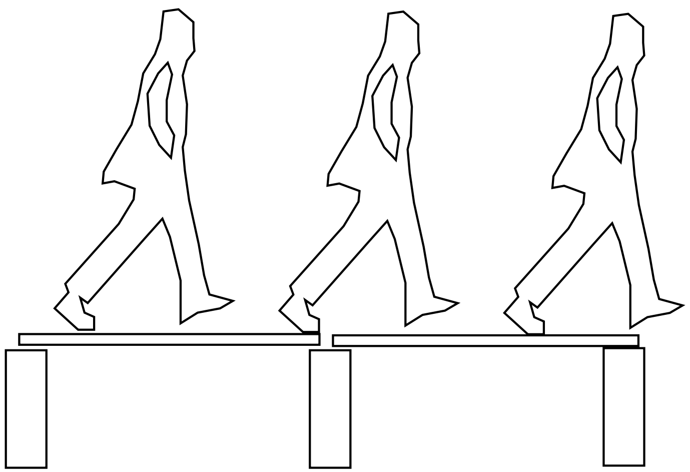
$$ky_{\text{máx}} \simeq A\cdot 10^3 = 135\text{N} \qquad c\dot{y}_{\text{máx}} \simeq cA\omega \simeq 50\ \text{N}$$

Las resonancias son importantes en ingeniería porque pueden tener **efectos destructivos** y los diseños han de procurar evitarlos.

Algunas son de origen natural: terremotos, vientos
Otras se generan por su uso







Si el ritmo de los pasos coincide con la frecuencia natural del sólido, la amplitud resultante es grande

Pasarela del milenio

La alta vibración con el tránsito de gente el día de su inauguración hizo que se revisase el diseño para incorporar amortiguadores

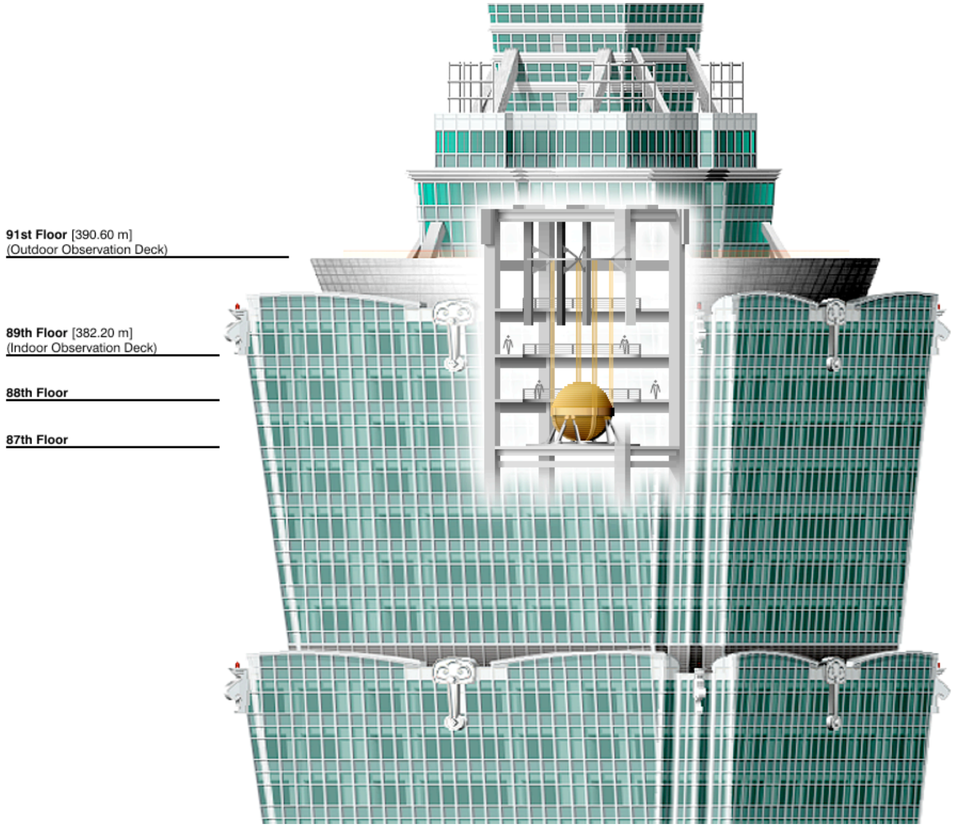
ww2. eng.cam.ac.uk

Wikipedia

Dave Farrance

En zonas sísmicas los edificios altos se diseñan para aguantar los terremotos y evitar frecuencias resonantes


Freephotos.biz



Someformofhuman Rascacielos Taipei

Centro Nyedermeyer

La vibración de la pasarela es claramente apreciable para los paseantes. El apoyo está en un extremo

No todos los efectos de la resonancias son destructivos

En multitud de aplicaciones interesa seleccionar y amplificar, entre muchas, una frecuencia particular

Resonancias eléctricas (Sintonización de frecuencias de radio o TV)

Ópticas (láseres)

Acústicas (música, aplicaciones médicas como destrucción de piedras)