Errores en las medidas

Una particularidad esencial de la Física y de las Ingenierías es el uso de números y de ecuaciones entre esos números. Cualquier estudio o proyecto serio que se realice tanto en el ámbito de las Ciencias como en el de las Técnicas, necesariamente debe incluir este aspecto cuantitativo. Es imprescindible dar números para describir los tamaños, las intensidades, las magnitudes de lo que se está tratando.

Pero los números que se utilizan no son idénticos a los *números puros* de las Matemáticas. Hay una diferencia substancial: Los números empleados en el ámbito Científico-Tecnológico se obtienen de un proceso de medición. Pero al efectuar una medida, nunca será posible determinar las infinitas cifras decimales que debe poseer el *número real puro* del que nos hablan las Matemáticas. Además, la realización práctica de las medidas será en general imperfecta, realizada con aparatos para los que no es posible garantizar la absoluta ausencia de pequeños defectos y elaborada por personas cuyos sentidos no son infinitamente perspicaces.

Supongamos que una determinada magnitud X, cuyo valor queremos conocer, tiene un valor exacto X_{exacto} representado por un *número real puro* mas la unidad correspondiente. Al medir dicha magnitud con el instrumento adecuado nosotros obtenemos el valor X_{medido}. Debido a todo lo mencionado en el párrafo anterior, estos números probablemente no serán idénticos. Se define el **error absoluto** cometido en la medida como la diferencia entre ambos:

$$\text{Error} = X_{medido} - X_{exacto}$$

A veces no basta con el simple conocimiento del valor de este error. No es lo mismo cometer un error de 1 cm cuando estamos midiendo una distancia de 10 km, que cuando medimos una longitud de 2 cm. Para evaluar la mayor o menor importancia del error cometido conviene introducir el **error relativo** que se define como el cociente entre el error absoluto y el valor de la magnitud:

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error}}{X_{exacto}} = \frac{X_{medido} - X_{exacto}}{X_{exacto}}$$

Este error relativo es un número sin dimensiones, o tanto por uno. Si lo multiplicamos por 100 se convertirá en un tanto por ciento. En el ejemplo anterior, el error absoluto de 1 cm pasará a ser un error relativo de 10^{-6} cuando medimos 10 km, mientras que será de 0,5 (o del 50%) cuando estemos midiendo 2 cm.

Pero como ya dijimos anteriormente, los números empleados por las Ciencias y las Técnicas, no son los de las Matemáticas, y estas dos definiciones no nos son de demasiada utilidad. La única forma que existe de asignar valores a una magnitud física es midiéndola, y en consecuencia no conocemos, ni podremos llegar nunca a conocer con certeza, el valor exacto de ninguna magnitud. Únicamente disponemos de valores medidos. Obviamente, tampoco podemos entonces conocer el error absoluto o relativo de ninguna medida, ni siquiera si ese error es por exceso (positivo) o por defecto (negativo).

Lo que sí podemos hacer es poner límites o cotas al error cometido. Expresar nuestra creencia o nuestra confianza en que el error real cometido en una medida, aunque no lo conozcamos con exactitud, es inferior a una cierta cantidad. Por lo tanto no trabajaremos con los errores reales, sino con sus cotas o límites, y debemos aprender a trabajar con estos números medidos con su cota de error.

Cota de error absoluto

Dado el resultado de una medida X_{medido} se define la cota o límite de error absoluto ΔX como una cantidad, definida positiva, tal que podamos asegurar que el valor absoluto (sin signo) del error absoluto realmente cometido es inferior o igual a dicha cantidad, o sea:

$$|Error| = |X_{medido} - X_{exacto}| \leq \Delta X$$

Lo que esta definición quiere decir, es que podemos asegurar que el valor exacto de una magnitud está comprendido en un intervalo de anchura $2\Delta X$ y centrado en X_{medido}, es decir:

$$X_{medido} - \Delta X \leq X_{exacto} \leq X_{medido} + \Delta X$$

El resultado de una medición no es por tanto un número real sino un intervalo, que generalmente se expresará como $X_{medido} \pm \Delta X$ con sus unidades.

Por ejemplo si medimos una longitud con una regla obteniendo un resultado de 32,3 cm, y podemos asegurar que el error cometido es inferior a 1 mm, tanto por exceso como por defecto, diremos que el resultado de nuestra medición es de 32,3 ± 0,1 cm, lo que quiere decir que el valor exacto es mayor que 32,3 – 0,1 = 32,2 cm pero inferior a 32,3 + 0,1 = 32,4 cm, o sea que está comprendido entre 32,2 y 32,4 cm.

El error real, puede ser tanto positivo como negativo si nuestra medida discrepa por exceso o por defecto del valor exacto. La cota o límite de error ΔX es una cantidad siempre positiva, indicando únicamente que el tamaño del error real es inferior a dicho valor. Como no conocemos nunca el valor exacto, tampoco sabemos si el error es por exceso o por defecto y por eso le ponemos un límite $\pm\Delta X$

Cota de error relativo

Para comparar la importancia de los errores, emplearemos la cota o límite de error relativo, que definiremos como:

$$\frac{\Delta X}{X_{medido}}$$

En este caso lo que afirmamos es que el valor absoluto del error relativo real también será inferior a esta cota o límite. Al tratarse de un error relativo carece de dimensiones o unidades. Se trata de un tanto por 1, o de un tanto por ciento si lo multiplicamos por cien. Al igual que en la cota anterior, tampoco tiene un signo definido porque desconocemos si se trata de un error por exceso o por defecto. Generalmente se expresa como que el límite de error de nuestra medida es del ±2%, o simplemente se dice que es del 2%. Es indiferente.

A continuación analizaremos los tipos más frecuentes de error y sus causas, junto con los procedimientos para estimar sus cotas de error. Podemos clasificar los errores en tres grupos: el inevitable error de escala, los errores sistemáticos y los errores accidentales.

Error o incertidumbre de escala.

Cada aparato o instrumento de medida tiene una determinada precisión, o cifras decimales que nos puede proporcionar, y es completamente imposible obtener más cifras decimales con ese aparato. Por ejemplo con una regla solo podemos precisar la medida hasta los milímetros y nos resulta imposible medir décimas de milímetro, o medir micras. Con un reloj de pulsera podemos precisar hasta los segundos, pero no las milésimas de segundo o los nanosegundos. Siempre puede uno tener la esperanza de poder emplear instrumentos de mayor precisión, pero aun así, nunca llegaremos a ser capaces de determinar las infinitas cifras decimales que en principio posee todo número real.

Siempre existe y existirá un límite a la precisión con que podemos efectuar nuestras medidas. Resulta pues inevitable en toda medida tener un error en las cifras decimales inferiores a la precisión del aparato. Aunque todo el proceso de medición se realice correctamente, el valor medido que hemos obtenido tiene al menos una cota de error dada por la precisión del instrumento empleado. Por eso, a este tipo de error es preferible denominarlo incertidumbre, porque no se está haciendo nada mal, no nos estamos equivocando en nada. Se trata de algo inevitable, ya que nos resulta imposible determinar el valor exacto de una magnitud con todas las cifras decimales que queramos.

Nuestro proceso de medición pueden ser directo o indirecto. Llamamos medida directa a la que se efectúa simplemente comparando la magnitud a medir con una magnitud unidad del mismo tipo. Por ejemplo cundo medimos distancias con una regla, estamos comparando directamente la distancia a medir, con la distancia existente entre las rayas de la regla. También realizamos medidas directas cuando medimos masas con una balanza, o tiempos con un reloj, ya que estamos comparando la masa a medir con la masa de unas pesas calibradas, o comparando la duración temporal de un suceso con la duración de un cierto número de oscilaciones, mecánicas o eléctricas, que han ocurrido internamente en el mecanismo del reloj. La precisión que podemos alcanzar en nuestros aparatos de medida directa, depende de nuestra capacidad para hacer y distinguir rayas en la regla cada vez más juntas, o de hacer pesas cada vez más pequeñas y que no se confundan con motas de polvo, o de provocar en algún medio oscilaciones de duración fija y constante extremadamente rápidas, y ser capaces de contarlas.

Otros instrumentos realizan lo que llamaremos medidas indirectas. Se basan en el empleo de un fenómeno que en principio es distinto, pero que depende de la magnitud que queremos medir. Por ejemplo cuando medimos temperaturas basándonos en la dilatación térmica del mercurio. En realidad cuando usamos un termómetro de mercurio estamos midiendo longitudes, pero sabemos que esa longitud de dilatación es proporcional a la temperatura, y una vez que tenemos el termómetro convenientemente calibrado, podemos expresar el resultado en grados centígrados. Otros ejemplos de medida indirecta podrían ser una bascula mecánica, donde medimos las masas por la deformación que provocan en un resorte, una báscula electrónica, donde en realidad se mide la diferencia de potencial eléctrico que genera un cristal de cuarzo al ser oprimido, o un termómetro de termopar, donde también lo que se mide es un voltaje eléctrico que en este caso aparece en los contactos entre dos metales, voltaje cuyo valor que depende de la temperatura.

En este tipo de instrumentos para realizar medidas indirectas, la precisión que podemos alcanzar en la medida, depende de la ***sensibilidad*** del fenómeno en que se basa, con respecto a la magnitud que queremos medir. Por ejemplo, pensemos en la medida de temperaturas a partir de las dilataciones térmicas producidas. Una barra de metal sería un instrumento muy poco sensible, ya que solo se dilata unas micras por grado, mientras que la dilatación de un líquido en un capilar es un fenómeno mucho más sensible, consiguiéndose algunos milímetros por grado. Entonces se pueden construir termómetros de alcohol o de mercurio, que medirán temperaturas con mucha mayor precisión que la que se podría obtener con un termómetro basado en una barra de hierro.

En los instrumentos más complejos, la precisión final con la que se efectúan las medidas depende de la sensibilidad y la precisión de todos los pasos que se tengan que dar hasta obtener el valor de la magnitud que se quiere medir. Si medimos temperaturas con un termopar, la precisión final dependerá de la sensibilidad del termopar, es decir de los milivoltios por grado que produce, de la precisión del voltímetro que se emplee para medir esos milivoltios, y de la precisión con que se conozca la curva empírica que relaciona los voltajes con las temperaturas en ese termopar en concreto. Pero tampoco hay que asustarse, en cualquier instrumento de medida que uno compre, por muy complejo que sea en su interior, el fabricante casi siempre nos proporciona el valor de la precisión final del aparato. Generalmente obtenemos el resultado final de la medida en una escala analógica o digital, que proporciona únicamente valores con la precisión neta del aparato. Es decir que si usamos un termómetro de termopar comercial, leeremos directamente la temperatura en una escala digital, que nos dará centésimas de grado si tiene la precisión suficiente, o solo nos dará décimas de grado si es que es esa su precisión. En principio no se suelen vender al público estos aparatos dando más cifras decimales de las que en realidad pueden proporcionar con fiabilidad.

Resumiendo, en toda medida que se realice, el instrumento empleado tendrá una precisión determinada. Resulta entonces inevitable que nuestro valor medido tenga un error, o incertidumbre, cuya cota o límite es precisamente esa precisión del aparato.

Errores sistemáticos.

Se llama errores sistemáticos a los que siempre tienen aproximadamente el mismo tamaño y signo, es decir que la causa del error es una causa constante, y que son siempre bien por exceso o bien por defecto. Por ejemplo supongamos que tenemos una cinta métrica que en vez de los 3 m que marca, mide realmente 3,12 m, porque está mal construida o porque se ha deformado. En todas las medidas de longitudes que realicemos con esta cinta, seguramente obtendremos valores inferiores a las longitudes reales que queremos medir. En este caso tendremos un error sistemático por defecto.

Los errores sistemáticos pueden surgir por multitud de causas: defectos de fabricación de los aparatos, mal calibrado de los mismos, envejecimiento, errores de operación del experimentador, un mal contacto que aumenta la resistencia de un aparato eléctrico...etc. En principio estos errores sistemáticos se pueden calcular o estimar su cuantía, y una vez que los conocemos podemos corregir el resultado de las medidas. Por ejemplo, un error sistemático habitual es el llamado ***error de cero***. Existe este error cuando el aparato marca un cierto valor finito "C" cuando no está midiendo nada y debería marcar cero. Por ejemplo una báscula que marca unos gramos cuando su platillo está vacío. Las medidas realizadas con este aparato "X" debemos corregirlas por el error de cero y dar como resultado de la medida "$X^* = X - C$". En ocasiones el propio aparato lleva algún mecanismo regulador que permite corregir este error, por ejemplo la báscula anterior puede tener un tornillo regulador, que nos permite fijar el valor cero cuando el platillo está vacío. Seguidamente ya podemos medir cualquier masa, sin que tengamos que preocuparnos por su error de cero

Otro error sistemático típico es el llamado ***error de paralaje***. En muchos aparatos cuando se mide, lo que se busca es la coincidencia de un índice o aguja con una escala graduada, en la cual hay grabadas unas rayas más o memos finas. Según el ángulo con que estemos mirando al aparato, veremos que hay coincidencia del índice con una raya o con otra. Para medir bien, es necesario que la línea de visión que va de nuestro ojo al índice sea exactamente perpendicular al plano donde está grabada la escala graduada. Si por el contrario siempre estamos mirando el aparato de refilón estaremos cometiendo un error sistemático. El error de paralaje se puede remediar con la colocación de un espejo en el plano de la escala graduada. Cuando el índice y su imagen en el espejo coinciden, sabemos que estamos mirando perpendicularmente y entonces nuestras medidas no se verán afectadas por este error.

En otros casos aparecen errores sistemáticos cuando hay una interacción no despreciable entre el aparato de medida y lo que queremos medir. Este ***error de interacción*** nos aparece cuando la propia presencia del instrumento de medida altera el valor de lo que vamos a medir. Por ejemplo la medida de temperaturas con un termómetro, siempre se efectúa dejando que el cuerpo cuya temperatura queremos medir y el termómetro, lleguen a estar en equilibrio térmico. En este proceso hay una ligera transferencia de calor del cuerpo al termómetro, para que éste aumente su temperatura hasta igualar la del cuerpo. Pero esa transferencia de calor también hace disminuir a su vez la temperatura del cuerpo. La temperatura de equilibrio cuerpo-termómetro, que es la que se mide, es entonces ligeramente inferior a la que tenía el cuerpo antes de que midiéramos. Si el cuerpo es muy grande en relación al termómetro, este error puede ser despreciable, pero cuando son de tamaño comparable puede constituir un error importante. El mismo caso nos aparece cuando medimos voltajes e intensidades de corriente en un circuito, por medio de voltímetros y amperímetros. La conexión de estos aparatos al circuito inevitablemente altera el funcionamiento del mismo, cambiando los valores que queremos medir. Este efecto se procura minimizarlo construyendo los amperímetros con una resistencia eléctrica interna muy baja, mientras que por el contrario los voltímetros se fabrican con un elevado valor de resistencia. De todas formas siempre es posible hacer una estimación de como afectan los aparatos al circuito, y corregir posteriormente los resultados de nuestras mediciones.

Aunque en principio los errores sistemáticos generalmente se puedan corregir, no siempre es fácil detectarlos. Podemos estar años empleando un instrumento antes de que nos demos cuenta de que nos proporciona resultados erróneos, o de que lo estamos utilizando mal. Siempre que se adquiera un nuevo instrumento de medida, una buena costumbre es la de comprobar siempre lo obvio, es decir que marca cero cuando debe marcar cero, que un metro es realmente un metro y un kilogramo, un kilogramo, que se miden 0 °C en el hielo fundiéndose y 100 °C en el agua en ebullición, ..etc.

La existencia de estos errores sistemáticos, nos obliga a distinguir claramente entre los conceptos de ***precisión*** y ***exactitud***. Una medida es muy precisa cuando el instrumento que empleamos nos proporciona muchas cifras decimales, pero dicha medida puede no ser nada exacta, es decir puede tener un gran error, simplemente porque estemos cometiendo un error sistemático al usar dicho instrumento. Una medida para ser exacta debe ser precisa, pero no todas las medidas precisas son exactas.

Errores accidentales o aleatorios

Llamamos errores accidentales o aleatorios, a los que varían en tamaño y signo cada vez que medimos. Estos errores se deben a causas irregulares y son mayores o menores, por exceso o por defecto, obedeciendo a las leyes del azar. Siempre que al medir varias veces la misma magnitud con el mismo aparato, obtenemos valores distintos cada vez, podemos decir que nos encontramos en presencia de un error accidental. Es materialmente imposible repetir exactamente todos los pasos de la operación de medida, y hay muchos factores de muy difícil control: corrientes de aire, variaciones de temperatura y humedad, saltos en la tensión de la red,...etc. Debido a la oscilación de estos factores, el resultado de la medida cuando se repite varias veces, no es siempre el mismo.

Los instrumentos complejos con partes electrónicas, son muy propensos a este tipo de error. Si un instrumento de medida se basa en un fenómeno que produce una señal eléctrica proporcional a la magnitud que se quiere medir, es muy frecuente que sea necesario amplificar esas señales eléctricas para poder medirlas. Pero entonces el amplificador electrónico también puede amplificar todo tipo de perturbaciones eléctricas presentes en la atmósfera, así como las debidas a la agitación térmica de los electrones del propio aparato, fenómeno conocido como ***ruido electrónico***.. Estas perturbaciones amplificadas, provocan que el resultado final de la medida vaya acompañado de un error aleatorio. Un buen instrumento generalmente intenta filtrar estas perturbaciones, para que no perturben el resultado final, pero no siempre se puede conseguir hacerlas desaparecer por completo.

Otra fuente típica de errores aleatorios es el llamado ***error por mala definición***. Por ejemplo cuando queremos medir la longitud de un tablón cuyos bordes no son ni perfectamente rectos, ni paralelos. Según donde y como coloquemos la regla, cada vez obtendremos una medida diferente. En este caso, lo que ocurre es que no existe una definición clara de lo que es la longitud del tablón. Pero si lo que queremos medir es una especie de longitud media, cada medida individual nos dará un resultado distinto por exceso o por defecto con respecto a ese valor medio, de forma prácticamente aleatoria. Otro ejemplo de este tipo de error sería la medición de la longitud de una carretera. Como la carretera no es una línea, sino una superficie más o menos irregular, lo que entendemos exactamente por longitud de esa carretera es algo que no está claramente definido, y no será extraño que cada vez que midamos dicha longitud obtengamos un valor diferente.

En ocasiones el hecho de que se obtenga un valor diferente cada vez que se mide, no significa que se esté cometiendo un error. Podemos estar midiendo un ***fenómeno intrínsecamente aleatorio.*** Por ejemplo si medimos el instante y la dirección espacial con que una fuente radioactiva emite los rayos α, β y γ. O si estamos midiendo la temperatura y presión atmosférica cada día a mediodía, o el número de coches por minuto que atraviesa un determinado cruce. En estos casos de todas formas siempre podemos hablar de un valor medio del fenómeno, con una cierta dispersión alrededor de ese valor medio, que podemos asimilar al error accidental.

La distribución de todos estos errores aleatorios se espera que siga las leyes del azar, es decir que nos alteren la medida tanto por exceso como por defecto con igual probabilidad. Por tanto aunque no pueden corregirse con exactitud, sin embargo es posible aplicando las leyes de la probabilidad, llegar a conclusiones sobre el valor más probable de la medida y su cota de error. Por ejemplo si hallamos la media de muchas medidas individuales, como habrá tantos valores por exceso como por defecto, se compensarán mutuamente y ese valor medio tendrá seguramente un error menor que el de cualquier valor individual.

De forma general, cuando nuestras medidas manifiesten la presencia de un error accidental o aleatorio, por que obtenemos un resultado distinto en cada medida, mediremos esa magnitud un cierto número N de veces, obteniéndose el siguiente conjunto de resultados: $X_1, X_2, X_3, ..., X_i, ..., X_N$. A continuación tomaremos como resultado de la medida o valor más probable de la magnitud X su **valor medio** $\overline{X}$:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

es decir, la suma de todos los valores dividida por el número de medidas. Como cota de error, emplearemos un valor que nos indique la dispersión que hay en los valores medidos, por ejemplo la llamada desviación típica: ΔX:

$$\Delta X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2}{N}}$$

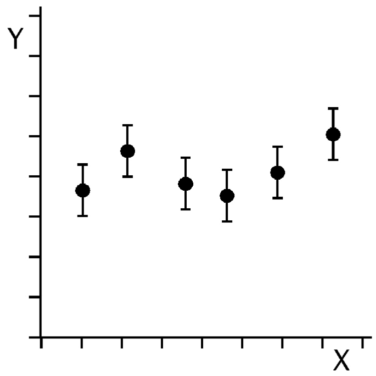
es decir que esta cota de error al cuadrado es la suma de los cuadrados de las diferencias que hay entre cada medida y el valor medio calculado anteriormente, divididas por el número de medidas. En vez de usar esta expresión podríamos estimar nuestra cota de error empleando los valores que más se diferencian del valor medio, pero esto obtendríamos valores para nuestra cota de error injustificadamente altos. Al tomar muchas medidas, el error que cometemos en la determinación del valor medio debe ser cada vez menor, dado que cuantos mas valores tengamos mejor será nuestra estimación de su valor medio real.

Por supuesto que además de todos estos errores muy difíciles o imposibles de evitar, existen las equivocaciones del experimentador. Si se realizan mal las operaciones numéricas, no se coloca correctamente el instrumento de medida, …etc., obtendremos resultados claramente erróneos. Trabajando con cuidado y sabiendo lo que se está haciendo, podemos considerar que en general estas equivocaciones se pueden evitar .

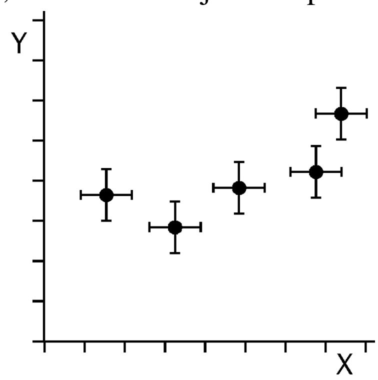
Determinaci6n de errores en medidas Primarias. Procedimiento.

Llamamos medida primaria a la efectuada con un aparato que mide precisamente la magnitud que queremos medir, ya sea de forma directa o indirecta .Por ejemplo: metro para longitudes, cronómetro para tiempos, balanza para masas, termómetro para temperaturas..etc. Aparte de poner cuidado en todo lo que hagamos, para no introducir errores sistemáticos, debemos dar los siguientes pasos:

1. Se observa si el aparato de medida tiene error de cero. En caso afirmativo, si se puede corregir en el aparato se corrige, y si esto no es posible, se obtiene su valor y todas las medidas posteriores deben corregirse con dicho error de cero.
2. Se considera la precisión del aparato, es decir el mínimo incremento de magnitud que se puede medir con él. Por ejemplo: 1 mm en una regla, 1 s en un reloj de pulsera, 1 g en una balanza si esta es la pesa mis pequeña, ...etc. .
3. Si al medir varias veces la misma magnitud se obtiene siempre el mismo valor, daremos como resultado de la medida este valor, y como cota de error la precisión del aparato.
4. Si cada vez que se mide se obtiene un valor distinto, se efectuará una serie de medidas, por ejemplo 10 o 20, y seguidamente se calcula su valor medio y su error cuadrático medio. En este caso daremos como el resultado de la medida y su cota de error estos valores que hemos calculado.
5. Se escribe el resultado de la medida como $X_{medido} \pm \Delta X$ con sus unidades. Solo se escriben las **cifras significativas**. No se deben escribir cifras decimales de más. Es decir, X_{medido} se debe escribir únicamente con todas sus cifras significativas, es decir las cifras decimales que son superiores o iguales al error absoluto. Pero no se deben escribir las que son inferiores al tamaño del error, ya que no son de ninguna utilidad dado que no conocemos su valor real. El valor del error también conviene redondearlo a un valor simple con sólo una o dos cifras significativas. No tiene ningún sentido ser muy preciso con el error. Por ejemplo, en una serie de medidas de la magnitud X hemos obtenido que el valor medio es X_m = 2375,62 u y su cota de error es ΔX = 28,33 u. Entonces escribiremos el resultado de la medida como X = 2370±30 u . Escribir todas las cifras decimales sería absurdo. Si el error de la medida es próximo a 30 u, no tiene ningún sentido hablar de diferencias de 5,62 u .
6. Se estima el error relativo como $\Delta X/ X_m$. También ahora es conveniente redondear los resultados, no estarnos haciendo cálculos exactor de error, empresa ciertamente inútil, sino estimando cotas superiores prácticas. En el ejemplo anterior tendríamos una cota de error relativo $\Delta X/ X_m$ = 30/2370 = 0.012658 = 1,2%.
7. Si se dibujan los resultados de la medición en un gráfico, se deben dibujar siempre las **barras de error.** El valor medido se representa como un punto, que va acompañado de unas barras cuyo tamaño viene dado por la cota de error absoluto



Solo hay error en Y



Hay error en X y en Y

Análisis de errores en medidas Secundarias. Propagación de errores.

Hay magnitudes cuyo valor no se obtiene midiéndolas con un aparato específico, sino a partir de las mediciones de otras magnitudes, que están relacionadas con ellas por medio de una ley física o una ecuación matemática. Por ejemplo el valor de la superficie de un rectángulo, generalmente no se obtiene empleando un medidor de superficies, sino que se miden con una regla su longitud L y su anchura A, obteniéndose entonces la superficie como el producto de estos dos valores S = L.A. Pero los valores de L y A se habrán medido con un cierto error, en realidad lo que tenemos son los intervalos $L\pm\Delta L$ y $A\pm\Delta A$, y no hay más remedio que plantearse la pregunta: ¿ Cual será entonces el intervalo de valores de S, cuál será su cota de error ?

En el caso anterior no conocemos los valores exactos de L y A, pero sí que éstos se encuentran dentro de unos determinados intervalos. El máximo valor que podría tener la superficie S vendrá dado por: $S_{max} = (L + \Delta L)(A + \Delta A) = L \cdot A + L \cdot \Delta A + A \cdot \Delta L + \Delta L \cdot \Delta A$, mientras que el mínimo sería: $S_{min} = (L - \Delta L)(A - \Delta A) = L \cdot A - L \cdot \Delta A - A \cdot \Delta L + \Delta L \cdot \Delta A$. Si los errores relativos son pequeños, $\Delta L << L$ y $\Delta A << A$, en las expresiones anteriores podremos despreciar el término $\Delta L \cdot \Delta A$ frente a todos los demás. Nos queda entonces que el valor de la superficie estará comprendido dentro del intervalo:

$$L \cdot A - (L \cdot \Delta A + A \cdot \Delta L) < S < L \cdot A + (L \cdot \Delta A + A \cdot \Delta L)$$

Podemos entonces decir que la superficie del rectángulo es $S\pm\Delta S$, donde el valor medido es $S = L \cdot A$ mientras que la cota de error es $\Delta S = L \cdot \Delta A + A \cdot \Delta L$.

Si ahora calculamos la cota de error relativo de esta superficie, obtendremos

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{L \cdot \Delta A + A \cdot \Delta L}{L \cdot A} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta L}{L}$$

es decir que el error relativo de la superficie es simplemente la suma de los errores relativos de la longitud y la anchura.

Veamos otro ejemplo sencillo. Queremos calcular el valor de una magnitud Z como la diferencia entre los valores de las magnitudes A y B, o sea Z = A – B. Entonces procedemos a medir A y B, obteniendo los valores $A\pm\Delta A$ y $B\pm\Delta B$. En este caso el máximo valor que puede alcanzar Z vendrá dado por: $Z_{max} = (A + \Delta A) - (B - \Delta B) = (A - B) + (\Delta A + \Delta B)$ mientras que el mínimo será ahora: $Z_{min} = (A - \Delta A) - (B + \Delta B) = (A - B) - (\Delta A + \Delta B)$. Ya tenemos pues determinado $Z\pm\Delta Z$, donde ahora el valor de Z es Z = A – B y su cota de error viene dada por la suma de cotas de error $\Delta Z = \Delta A + \Delta B$.

Con este procedimiento podríamos determinar la cota de error resultante para cualquier función matemática que nos relacione una magnitud con otras. Pero si trabajamos con funciones complicadas, puede no ser tan sencillo hallar los extremos máximo y mínimo del intervalo en el que se encuentra la magnitud que queremos calcular. Además estaríamos repitiendo un trabajo que ya está hecho, dado que en el cálculo diferencial existe un problema muy parecido.

Cuando tenemos una función de una variable y = f(x), y queremos conocer cuanto cambia la función cuando cambiamos el valor de la variable, nos aparece el concepto de la función derivada. Si cambiamos el valor de la variable de ser 'x' a ser 'x+dx', donde el diferencial 'dx' es un incremento infinitamente pequeño, entonces el valor de la función también se incrementará en un valor infinitamente pequeño dado por el diferencial 'dy', pasando de valer 'y' a valer 'y+dy'. Es decir tenemos que $y + dy = f(x + dx)$. La relación que existe entre ambos incrementos o diferenciales, viene dada por $dy = f'(x) \cdot dx$, siendo $f'(x)$ la función derivada de f(x), para cuyo cálculo se dispone de un montón de técnicas.

Nosotros queremos obtener una magnitud Y a partir de la medición de la magnitud X, empleando la relación matemática $Y = f(X)$. El problema de conocer el error ΔY a partir de error ΔX con que hemos medido X, es exactamente el mismo problema del calculo diferencial, salvo que ahora no se trata de incrementos infinitamente pequeños sino de cotas de error finitas. Siempre que estas cotas de error sean pequeñas, podemos realizar la aproximación de considerarlas como diferenciales infinitesimales y entonces escribir:

$$dY = f'(X)dX \quad \Rightarrow \quad \Delta Y = |f'(X)|\Delta X$$

de forma que la relación entre la cota de error ΔX y la cota de error ΔY nos viene dada por la función derivada $f'(X)$. En el paso de diferenciales a cotas de error hemos hecho algo más, hemos sustituido la función derivada por su valor absoluto. La derivada puede ser tanto positiva como negativa, y como ya dijimos anteriormente los errores pueden ser tanto por exceso como por defecto. En todo caso hemos definido la cota de error como una cantidad positiva, y por tanto debemos emplear el valor absoluto de la derivada.

Calculemos por ejemplo el error que cometemos al calcular la magnitud Y, empleando la ecuación $Y = \cos(\theta)$ con un valor medido del ángulo $\theta \pm \Delta\theta$. Tenemos entonces:

$$dY = -\mathrm{sen}(\theta)d\theta \quad \Rightarrow \quad \Delta Y = |\mathrm{sen}(\theta)|\Delta\theta$$

En este tipo de expresiones trigonométricas conviene recordar que únicamente son ciertas si estamos expresando las cotas de error $\Delta\theta$ en radianes.

Cuando tenemos una función de varias variables $z = f(x, y, ..., w)$, el cálculo diferencial nos dice que si incrementamos infinitesimalmente las variables, el incremento infinitesimal que sufre la función viene dado por:

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)dw$$

donde los términos entre paréntesis reciben el nombre de derivadas parciales. Estas derivadas parciales se calculan igual que las derivadas con una sola variable. La derivada parcial con respecto a x, es decir $(\partial f / \partial x)$, se calcula derivando la función considerando que x es la única variable mientras que las demás: y,….,w se comportan como constantes. Del mismo modo $(\partial f / \partial y)$, la derivada parcial con respecto a y, se calcula derivando y como variable, mientras x,….w permanecen constantes.

Si queremos obtener una magnitud Z a partir de la expresión $Z = f(A, B, ..., X)$, empleando los valores medidos $A \pm \Delta A, B \pm \Delta B, ...X \pm \Delta X$, la cota de error de esta magnitud será:

$$\Delta Z = \left|\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)\right|\Delta A + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)\right|\Delta B + ... + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)\right|\Delta X$$

donde hemos substituido los incrementos infinitesimales por los errores pequeños pero finitos. Nótese que todos los términos se suman en valor absoluto, dado que estamos calculando una cota o límite de error y entonces suponemos que los errores de cada magnitud son por defecto o por exceso según contribuyan más a incrementar el error total.

Por ejemplo calculemos el error que cometemos al obtener una velocidad V como el cociente entre una longitud L y el tiempo empleado en recorrerla T

$$V = \frac{L}{T} \quad \Rightarrow \quad dV = \left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right)dL + \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)dT = \frac{1}{T}dL - \frac{L}{T^2}dT \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \frac{1}{T}\Delta L + \frac{L}{T^2}\Delta T$$

Y si ahora calculamos la cota de error relativo

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{T}{L}\left(\frac{\Delta L}{T} + \frac{L}{T^2}\Delta T\right) = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta T}{T}$$

Por tanto, sea cual sea la función que nos relaciona las magnitudes, tenemos un procedimiento general de calcular como se propagan sus errores hasta dar el error en el resultado final. No hay más que ir efectuando las derivadas parciales. Pero no siempre es necesario andar derivando. Es trivial demostrar las expresiones para los casos sencillos que figuran en la tabla siguiente, y en muchos casos no hay más que aplicar este conjunto simple de reglas.

Tabla de errores

	Función $Z =$	Error
Suma y resta	$A+B$ $A-B$	$\Delta Z = \Delta A + \Delta B$
Multiplicación y división	$A \cdot B$ $\frac{A}{B}$	$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$
Potencia y raíz	A^n $\sqrt[n]{A}$	$\frac{\Delta Z}{Z} = n \cdot \frac{\Delta A}{A}$ $\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta A}{A}$
Producto por una constante	kA	$\Delta Z = k\Delta A$; $\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta A}{A}$

Como vemos, estas reglas se reducen a dos:

1. *Cuando tenemos* ***sumas o restas*** *las cotas de error* ***absoluto*** *se suman*

2. *Cuando hay* ***productos o divisiones*** *las cotas de error* ***relativo*** *se suman*

Los otros dos casos de la tabla son en realidad una consecuencia de la segunda regla, cuando tenemos potencias la cota de error relativo se multiplica por el exponente, y el multiplicar por una constante numérica pura, sin error, no altera el error relativo.

Veamos un ejemplo de su aplicación. Supongamos que obtenemos la magnitud Z a partir de la ecuación: $Z = A + \frac{B-C}{D}E^2 + 2\sqrt{F}$ y de las medidas $A \pm \Delta A, B \pm \Delta B, C \pm \Delta C, D \pm \Delta D,$ $E \pm \Delta E$ y $F \pm \Delta F$. Para calcular el error en Z empezamos por considerar que tenemos la suma de tres términos y por tanto: $\Delta Z = \Delta A + \Delta\left(\frac{B-C}{D}E^2\right) + \Delta\left(2\sqrt{F}\right)$

El segundo término está constituido por productos y cocientes, entonces tenemos:

$$\frac{\Delta\left(\frac{B-C}{D}E^2\right)}{\left(\frac{B-C}{D}E^2\right)} = \frac{\Delta(B-C)}{B-C} + \frac{\Delta D}{D} + 2\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta B + \Delta C}{B-C} + \frac{\Delta D}{D} + 2\frac{\Delta E}{E}$$

mientras que el tercero: $\frac{\Delta\left(2\sqrt{F}\right)}{2\sqrt{F}} = \frac{1}{2}\frac{\Delta F}{F}$. Por tanto nos quedará en total:

$$\Delta Z = \Delta A + \left(\frac{B-C}{D}E^2\right)\left(\frac{\Delta B + \Delta C}{B-C} + \frac{\Delta D}{D} + 2\frac{\Delta E}{E}\right) + \frac{\Delta F}{\sqrt{F}}$$

Cuando obtenemos una magnitud a partir de la medida de otras, nos puede aparecer un nuevo tipo de error, de efectos muy difíciles de estimar. Se trata del **error por aproximación teórica**, que se comete cuando la función matemática que se emplea para calcular esa magnitud, o bien es totalmente incorrecta, o bien corresponde a una aproximación que no es del todo aplicable al caso en que se está midiendo. Por ejemplo una práctica habitual de laboratorio consiste en medir la aceleración de la gravedad g a partir del periodo de oscilación de un péndulo. Pero la expresión teórica que se emplea para obtener g a partir de las medidas del periodo y de la longitud del péndulo, corresponde a una situación donde el hilo es inextensible y sin masa, la bola del péndulo es un punto material, las oscilaciones son muy pequeñas, tienen lugar estrictamente en un plano, y por último no existe fricción con el aire. Todas estas condiciones son difícilmente alcanzables en el laboratorio, por lo que dicha expresión teórica constituye únicamente una aproximación al problema. Este hecho nos generará un error en la determinación de g que será mayor o menor, dependiendo de si la aproximación resulta ser más o menos adecuada al caso.

Este tipo de error puede corregirse si empleamos una expresión teórica que represente mejor las condiciones del experimento, pero por desgracia en muchas ocasiones esto es muy fácil de decir y tremendamente complicado de llevar a la práctica.

Determinaci6n de errores en medidas Secundarias. Procedimiento.

Visto lo anterior podemos dar las reglas generales del procedimiento a seguir para la determinación de errores en medidas indirectas. Queremos obtener la magnitud Z a partir de medidas de las magnitudes $A \pm \Delta A, B \pm \Delta B, ... X \pm \Delta X$, relacionadas por una expresión matemática: $Z = f(A,B,....,X)$

1. Se efectúa la medida directa de las magnitudes A,B,…,X y se estiman las cotas superiores de los errores absolutos y relativos de cada una, por los métodos descritos anteriormente al hablar de medidas directas.
2. Con la expresión matemática se calcula el valor de Z empleando los valores medidos o promediados de A,B,…,X
3. De la expresión matemática se obtiene la relación entre las cotas de error de Z y las cotas de error de A,B,…,X por los procedimientos descritos en el apartado anterior. En la expresión matemática aparecerán en general constantes numéricas, no sólo variables. Si el factor numérico es un número como π, e ó $\sqrt{2}$ con infinitas cifras decimales, no podemos emplear su valor exacto. Necesariamente emplearemos en el cálculo un número finito de cifras por ejemplo π = 3.14, y entonces tendrá un error que en este caso sería 0.00159 que podemos aproximar por una cota superior. Δπ = 0.002. En estos casos lo mejor es usar π con el suficiente número de cifras decimales para que su contribución al error total sea despreciable. Es decir si por ejemplo las demás magnitudes tienen cotas de error relativo del 10 %, nos basta con tomar el valor 3 .14, entonces la cota de error relativo de π es inferior al 0.2 % y su contribución no será significativa. Evidentemente si el cálculo se realiza con calculadora que contenga el valor de π con 8 o 10 cifras decimales, no tendremos en general que preocuparnos de su error. Raramente las medidas experimentales de las magnitudes alcanzarán precisiones similares.
4. Una vez hallada la relación entre las cotas de error de Z y las de A,B,…,X, se calculan las cotas de error absoluta y relativa para Z, y se da el resultado final de las mediciones en la forma habitual: Z ± ΔZ unidad.

Nota

Debe tenerse cuidado en no confundir una medida secundaria con una medida primaria. Por ejemplo cuando realizamos la medida del periodo de una vibración midiendo el tiempo t que necesita para efectuar 100 oscilaciones. Lo que se mide directamente es el tiempo t no el periodo, siendo la relación matemática entre ambos T = t/100. Si el tiempo t se mide con una cota de error de un segundo, la cota de error del periodo será de centésimas de segundo. Si hubiéramos considerado que hacíamos una medida primaria medida directa con un reloj, que sólo puede precisar los segundos, y por tanto que medíamos el periodo T con precisión de segundos, estaríamos cometiendo una grave equivocación, ya que el error en la determinación del periodo es en realidad mucho más pequeño.

Por último, finalicemos esta introducción al estudio del error en las medidas con unos ejemplos prácticos.

Ejemplo 1

Un alumno obtiene la densidad de un cable de cobre, midiendo la longitud del mismo con una regla, su diámetro con un micrómetro, y su masa en una báscula electrónica. Los valores obtenidos son:

Longitud del cable	L = 60,0 ± 0,1 cm	(ΔL/L = 0,17%)
Diámetro del cable	D = 0,632 ± 0,002 cm	(ΔD/D = 0,32%)
Masa del cable	M = 162,0 ± 0,1 g	(ΔM/M =0,06%)

La expresión empleada para calcular la densidad es su definición, masa por unidad de volumen, con lo que tenemos: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{L\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{4M}{\pi L D^2}$

Calculamos entonces el valor de la densidad: $\rho = \frac{4 \times 162}{\pi \times 60 \times 0{,}632^2} = 8{,}60676\ \ g/cm^3$

Su error relativo es: $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta D}{D} = 0{,}17 + 2 \times 0{,}32 + 0{,}06 = 0{,}87\% \approx 0{,}009$

Como puede verse la mayor contribución al error procede de la medida del diámetro, que no sólo tiene el mayor error relativo sino que además su efecto es doble al estar elevado al cuadrado. La cota de error absoluto será entonces $\Delta\rho = 0{,}009 \times 8{,}60676 = 0{,}077\ g/cm^3$.El alumno escribirá el resultado final como: densidad ρ= $8{,}61 \pm 0{,}08\ \ g/cm^3$.

Posteriormente el alumno consulta un libro de referencia, donde encuentra que la densidad del cobre es de $8{,}87\ \ g/cm^3$. Entonces piensa que en realidad el error que ha cometido es de $0{,}26\ \ g/cm^3$. Aquí cometería probablemente una equivocación.

La situación que tenemos aquí es la de una **discrepancia experimental**, que es algo completamente diferente de lo que hemos definido como error en las medidas. Tenemos dos medidas: la realizada por el alumno y la realizada por el autor del libro. Cada una de las cuales tendrá su correspondiente error. Evidentemente la medida de la densidad del cobre encontrada en el libro, estará generalmente realizada con una precisión mejor que la del alumno. Una discrepancia experimental en los valores promedio de la magnitud carece de importancia siempre y cuando los intervalos de valor con las cotas de error solapen en algún punto. En este caso el valor del libro, que si no lo indica hay que suponerle una cota de error de $0{,}01\ \ g/cm^3$, nos da un límite inferior del intervalo de $8{,}86\ \ g/cm^3$. Pero el límite superior de los valores obtenidos por el alumno es de $8{,}69\ \ g/cm^3$, demasiado bajo. Ambas medidas son por tanto incompatibles.

Con toda seguridad hay algo que no está bien. Llegados a este punto existen dos opciones, o bien el alumno ha cometido una equivocación o error sistemático, o pudiera ser que el material del cable no sea cobre puro sino una aleación de cobre. En el caso de que decidamos descargar la responsabilidad en la falta de habilidad del alumno, la medida más sospechosa es la del diámetro del cable. No solo porque sea la medida de menor precisión, sino porque también es una medida propicia a que se cometan errores sistemáticos, por ejemplo si deformamos el cable al apretarlo con el micrómetro.

Ejemplo 2

Un estudiante mide la aceleración constante con la que un objeto se desliza por un plano inclinado realizando medidas con una regla y un cronómetro. La ecuación que emplea es $s = (1/2)at^2$. Tras realizar un elevado número de medidas y calcular valores medios y errores estadísticos, los resultados obtenidos son:

Distancia recorrida	$s = 2{,}000 \pm 0{,}002$ m	($\Delta s/s = 0{,}1\%$)
Tiempo transcurrido	$t = 4{,}2 \pm 0{,}1$ s	($\Delta t/t = 2{,}4\%$)

La aceleración la calculará como: $a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \times 2{,}0}{4{,}2^2} = 0{,}226757\ \text{m}/\text{s}^2$

Mientras que su cota de error es: $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta s}{s} + 2\frac{\Delta t}{t} = 0{,}1\% + 2 \times 2{,}4\% = 4{,}9\%$

que como se ve, está dominada por el error en la medida del tiempo, siendo despreciable el error cometido en la medida de la distancia.

La cota de error absoluto será $\Delta a = 0{,}049 \times 0{,}226757 = 0{,}0111\ \text{m}/\text{s}^2$ y por tanto el alumno escribirá como resultado de la medida:

$$\text{Aceleración}\ \ a = 0{,}23 \pm 0{,}01\ \text{m}/\text{s}^2$$

Posteriormente el alumno descubre la existencia de un error sistemático. El cronómetro tiene un retardo y siempre empieza a funcionar 0,5 s más tarde de lo que debería. Por tanto a todas sus medidas de tiempo hay que sumarles 0,5 s. Para corregir el valor encontrado de la aceleración, no es necesario volver a calcular todos los promedios de medidas otra vez. Se puede corregir analizando el efecto de un error sistemático, que es similar a todo lo que hemos visto pero recordando que los errores sistemáticos si tienen un signo definido.

Ahora tenemos un error sistemático de +0,5 s en un tiempo de 4,2 s, es decir un error sistemático relativo del +11,9%. Si en las medidas de distancia no hay ningún error sistemático el error sistemático cometido en el valor de la aceleración será:

$$\frac{\Delta a}{a} = -2\frac{\Delta t}{t} = -2 \times 11{,}9\% = -23{,}8\%$$

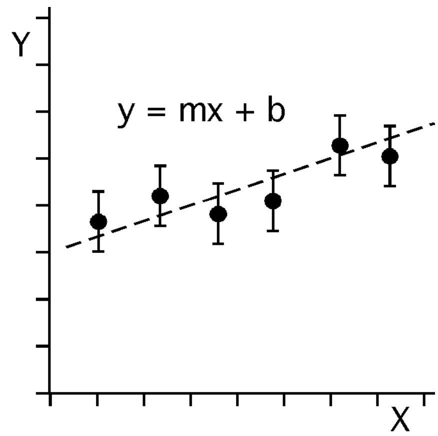
La corrección que se debe hacer a la aceleración es: $\Delta a = -0{,}238 \times 0{,}23 = -0{,}05\ \text{m}/\text{s}^2$ y por tanto el valor corregido de la aceleración será: $a = 0{,}23 - 0{,}05 = 0{,}18\ \text{m}/\text{s}^2$. Una vez corregido el error sistemático, recordemos que seguimos teniendo el error accidental. Por tanto el alumno podrá escribir que el resultado final es:

$$\text{Aceleración}\ \ a = 0{,}18 \pm 0{,}01\ \text{m}/\text{s}^2$$

Ajuste por mínimos cuadrados a una recta

En muchas ocasiones tenemos una ley física que nos relaciona las magnitudes que somos capaces de medir directamente, con otras que queremos determinar. Por ejemplo supongamos que podemos medir las magnitudes X e Y en un cierto sistema, y que existe una ley física que relaciona ambas magnitudes en forma de relación lineal del tipo: $Y = m \cdot X + b$. Si queremos determinar los valores de los parámetros o magnitudes 'm' y 'b', no nos basta con medir una sola vez X e Y, ya que tendríamos dos incógnitas y una sola ecuación. Obviamente necesitamos realizar más mediciones.

Un procedimiento habitual consiste en realizar una serie de medidas, determinando que valor experimental se obtiene para Y con su error $y_i \pm \Delta y$ cuando la magnitud X vale x_i . Si realizamos N mediciones tendremos entonces un conjunto de puntos $\left\{(x_i, y_i)\right\}_{i=1,N}$. Como la ley física que tenemos es: $y = m \cdot x + b$, en el espacio de puntos (x,y) esta ley quedará representada como una recta de pendiente 'm' y valor en el origen 'b'. Podemos usar entonces nuestros valores medidos para determinar los valores de estos dos parámetros 'm' y 'b'.



Como todas las mediciones tienen un cierto error, si representamos nuestros puntos medidos, no estarán exactamente todos en la misma recta, pero podemos determinar 'm' y 'b' como los correspondientes a la recta que mejor se ajusta a nuestro conjunto de puntos. Si todo va bien existirán muchas rectas cuya distancia a los puntos medidos sea siempre menor que las barras de error de nuestras mediciones. Pero, ¿ cual es la recta que mejor se ajusta a nuestros datos ? Necesitamos definir un criterio.

Claramente lo que queremos es que las distancias entre nuestra recta y los puntos medidos sea lo más pequeña posible, y también queremos tener en cuenta todos nuestros datos medidos. Con este fin introducimos la función: $\chi^2(m,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - b)^2$, donde sumamos los cuadrados de todas las desviaciones con respecto a la recta $y = m \cdot x + b$, y exigimos que 'm' y 'b' tomen el valor que haga que esta función alcance su valor mínimo. Derivando e igualando a cero obtenemos:

$$\frac{\partial \chi^2(m,b)}{\partial m} = 0 = -\sum_{i=1}^{N} 2(y_i - mx_i - b)x_i \quad ; \quad \frac{\partial \chi^2(m,b)}{\partial b} = 0 = -\sum_{i=1}^{N} 2(y_i - mx_i - b)$$

tenemos entonces dos ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{i=1}^{N} y_i x_i\right) = m\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) + b\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) \\ \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right) = m\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) + b\left(\sum_{i=1}^{N} 1\right) \end{array} \right.$ cuya solución nos da el valor de 'm' y 'b' que mejor se ajusta a nuestros datos:

$$m = \frac{N\left(\sum_{i=1}^{N} y_i x_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)}{N\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \quad ; \quad b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right) - m\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)}{N}$$

Entonces cuando necesitemos hacer un ajuste por mínimos cuadrados haremos una tabla como la siguiente:

Medida nº	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{y_i}$	$\mathbf{x_i \cdot y_i}$	$\mathbf{x_i^2}$
1	2	3	6	4
2	4	5	20	16
3	5	4	20	25
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
N	10	8	80	100
Suma	21+…	20+….	126+…	145+…
	$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)$	$\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)$	$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right)$	$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)$

y sumando los valores en todas las columnas, tenemos todos los términos que necesitamos para aplicar las expresiones anteriores y determinar ‘m’ y ‘b’.