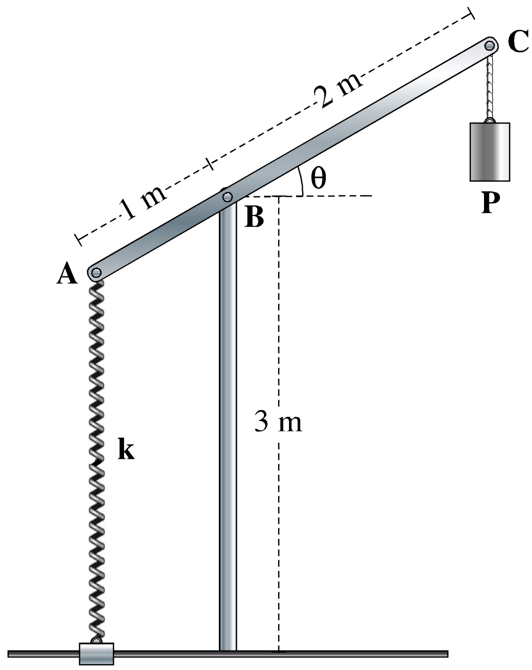
GRADO EN INGENIERÍA CIVIL

2º Examen Parcial de MECÁNICA. Grupo A
11 de Noviembre de 2011

<u>Problema 1</u>. [*5 puntos*]

Sobre la barra ABC, articulada en el punto fijo B, cuelga un peso P = 100 N de uno de sus extremos, mientras que el otro está unido a un muelle que permanece siempre vertical, de constante k = 400 N/m y longitud natural $\ell_0 = 2$ m. La disposición del conjunto permite que la barra ABC pueda girar completamente alrededor de B de forma que el ángulo θ puede tomar cualquier valor comprendido entre 0º y 360º



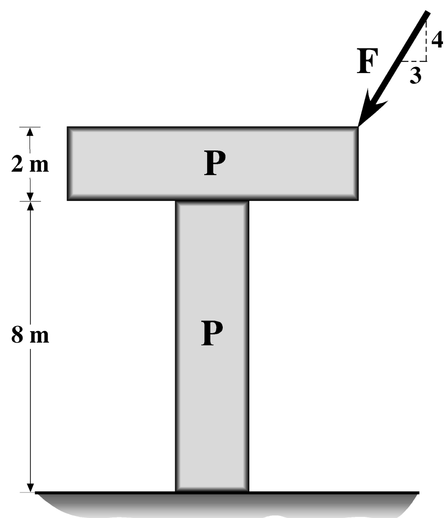
Se pide:

a) Determinar las posiciones de equilibrio del sistema, indicando el valor correspondiente del ángulo θ.

b) Estudiar la estabilidad de cada una de las posiciones de equilibrio obtenidas en el apartado anterior.

<u>Problema 2</u>. [*5 puntos*]

Tenemos dos bloques idénticos con un peso $P = 120$ N y sección rectangular de dimensiones 8×2 m. Se colocan uno encima del otro formando una "T", tal como se indica en la figura. En la arista superior derecha aplicamos una fuerza de módulo $F = 50$ N, dirigida hacia abajo y formando un ángulo con la vertical de tangente 3/4. El coeficiente de rozamiento estático entre ambos bloques o con el suelo es $\mu_e = 0{,}5$. Suponiendo que hay equilibrio estático, se pide:



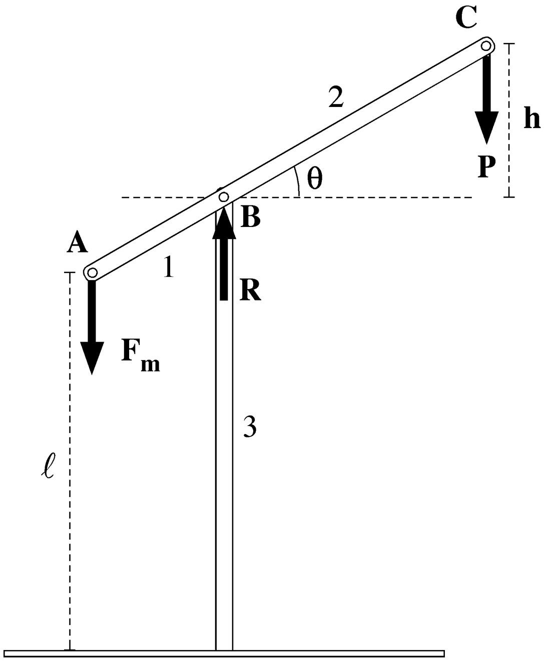
a) Calcular la fuerza de interacción entre los dos bloques, con sus componentes normal y de rozamiento, así como su punto de aplicación.

b) Calcular lo mismo para la fuerza de interacción entre el bloque vertical y el suelo .

c) Si vamos aumentando poco a poco el módulo de la fuerza aplicada F, determinar para qué valor de la misma se rompe el equilibrio, indicando si lo hace por vuelco de algún bloque, o por deslizamiento, o por ambas cosas a la vez.

Tiempo: 1 hora 30 minutos

Solución Problema 1.



a) *Al girar la barra* ABC *las únicas fuerzas que generan trabajo son el peso y la fuerza del muelle, ambas conservativas. La energía potencial total la podemos escribir entonces:*

$$V = Ph + \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2$$

Teniendo en cuenta $h = 2 \cdot \text{sen}\theta$ y $\ell = 3 - 1 \cdot \text{sen}\theta$ *nos queda la siguiente expresión de la energía potencial:*

$$V = 100 \cdot 2 \cdot \text{sen}\theta + \frac{1}{2}400\left(3 - \text{sen}\theta - 2\right)^2 =$$
$$= 200\left[\text{sen}\theta + \left(1 - \text{sen}\theta\right)^2\right]$$

Para hallar las posiciones de equilibrio derivamos:

$$\frac{dV}{d\theta} = 200\left[\cos\theta - 2\left(1 - \text{sen}\theta\right)\cos\theta\right] = 200\left(2\text{sen}\theta - 1\right)\cos\theta$$

y aplicamos la condición de equilibrio: $$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 90^\circ,\ 270^\circ \\ \text{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 30^\circ,\ 150^\circ \end{cases}$$

El sistema está en equilibrio cuando θ = 30°, 90°, 150° y 270°

b) *Para analizar la estabilidad, calculamos la derivada segunda:*

$$\frac{d^2V}{d^2\theta} = 200\left[2\cos\theta\cos\theta - \left(2\text{sen}\theta - 1\right)\text{sen}\theta\right] = 400\left(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta\right) + 200\text{sen}\theta = 400\cos 2\theta + 200\text{sen}\theta$$

Entonces en cada posición de equilibrio:

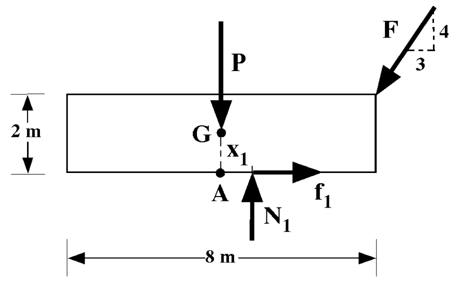
$$\theta = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2V}{d^2\theta} = 400 \cdot (-1) + 200 \cdot 1 = -200 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{El equilibrio es inestable}$$

$$\theta = 270^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2V}{d^2\theta} = 400 \cdot (-1) - 200 \cdot 1 = -600 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{El equilibrio es inestable}$$

$$\theta = 30^\circ,\ 150^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2V}{d^2\theta} = 400 \cdot \frac{1}{2} + 200 \cdot \frac{1}{2} = 300 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{El equilibrio es estable}$$

En las posiciones θ = 30° y 150° el equilibrio es estable,
Cuando θ = 90° y 270° el equilibrio es inestable.

Solución Problema 2.

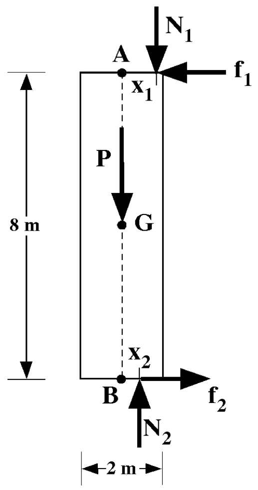


a) *Considerando las fuerzas que actúan sobre el bloque superior, las ecuaciones de equilibrio son:*

$$\left.\begin{aligned} \sum F_x &= f_1 - F\frac{3}{5} = 0 \\ \sum F_y &= N_1 - P - F\frac{4}{5} = 0 \\ \sum M_A &= x_1\cdot N_1 + 2\cdot F\frac{3}{5} - 4\cdot F\frac{4}{5} - - = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} f_1 &= F\frac{3}{5} = 30\ \text{N} \\ N_1 &= P + F\frac{4}{5} = 160\ \text{N} \\ x_1 &= \frac{10F}{5P+4F} = \frac{500}{800} = 0{,}625\ \text{m} \end{aligned}\right.$$

Las componentes de la fuerza de interacción entre ambos bloques son:
N_1 = 160 N ***y*** **f_1 = 30 N**
y está aplicada en un punto situado a un distancia **x_1 = 0,625 m** ***a la derecha del centro***

b) *Las ecuaciones de equilibrio para el bloque inferior son:*



$$\left.\begin{aligned} \sum F_x &= f_2 - f_1 = 0 \\ \sum F_y &= N_2 - P - N_1 = 0 \\ \sum M_B &= x_2\cdot N_2 + 8\cdot f_1 - x_1\cdot N_1 - = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} f_2 &= f_1 = F\frac{3}{5} = 30\ \text{N} \\ N_2 &= P + N_1 = 2P + F\frac{4}{5} = 280\ \text{N} \\ x_2 &= \frac{x_1N_1 - 8f_1}{N_2} = -\frac{14F}{10P+4F} = -\frac{70}{140} = -0{,}5\ \text{m} \end{aligned}\right.$$

Las componentes de la fuerza de interacción entre el bloque vertical y el suelo son:
N_2 = 280 N ***y*** **f_2 = 30 N**
y está aplicada en un punto situado a un distancia **x_2 = 0,5 m** ***a la izquierda del centro***

c) *Para que el bloque superior deslice debe ocurrir que:*

$$f_1 = F\frac{3}{5} > \mu_e N_1 = \mu_e\left(P + F\frac{4}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad F > P\frac{5\mu_e}{3-4\mu_e} = 300\ \text{N}$$

Mientras que el bloque inferior deslizará sobre el suelo para fuerzas aplicadas mayores.
El bloque superior volcará sobre el inferior cuando el punto de aplicación x_1 *se salga de la zona de contacto con el bloque inferior.* $x_1 = \frac{10F}{5P+4F} > 1 \quad \Rightarrow \quad F > \frac{5P}{6} = 100\ \text{N}$

Igualmente, todo el conjunto volcará cuando el punto de aplicación x_2 *se salga de la base de apoyo y sea imposible que el bloque inferior se mantenga en equilibrio.*

$$x_2 = -\frac{14F}{10P+4F} < -1 \quad \Rightarrow \quad F > P = 120\ \text{N}$$

El bloque superior volcará en sentido horario pivotando alrededor del extremo superior derecho del bloque vertical, cuando la fuerza aplicada supere el valor **F > 100 N**