GRADO EN INGENIERÍA CIVIL

3er Examen Parcial de MECÁNICA. Grupo B
3 de Diciembre de 2010

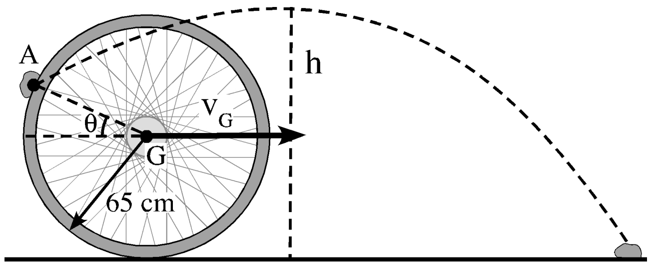
Alumno: Nombre: ______________________________

Apellidos: ____

(*Rellenar las soluciones obtenidas en los correspondientes recuadros*)

Problema 1. [*5 puntos*]

Una bicicleta avanza sin deslizar con una velocidad $v_G = 7$ m/s . Un trozo de barro que iba pegado al borde exterior del neumático se desprende cuando el ángulo mostrado en la figura es $\theta = 30°$



Se pide:

a) Calcular el valor en ese momento de la velocidad del punto A de la rueda.

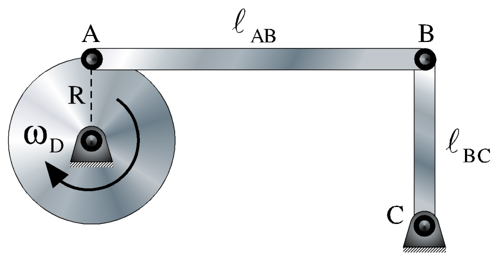
$\mathbf{v_A} =$ $\boxed{10{,}5\ \vec{i} + 6{,}06\ \vec{j}\ \ \text{m/s}}$

b) Hallar la altura h que alcanzará el trozo de barro **h =** $\boxed{2{,}85\ \text{m}}$

c) Determinar cuánto tendría que valer el ángulo θ , para que la altura h que alcanza el trozo de barro sea lo más grande posible $\theta =$ $\boxed{7{,}47°}$

Problema 2. [*5 puntos*]

Un disco, de radio $R = 1$ m gira alrededor de su centro que está fijo, con velocidad angular constante $\omega_D = 4$ rad/s . Está unido a dos barras articuladas, de longitud $\ell_{AB} = 4$ m y $\ell_{BC} = 2$ m siendo fijo el extremo de una de ellas C. En el instante mostrado en la figura, la barra AB se encuentra completamente horizontal. Se pide:



a) Hallar las velocidades angulares de las dos barras en ese instante

$\omega_{AB} =$ $\boxed{0}$ $\omega_{BC} =$ $\boxed{2\ \text{rad/s}}$

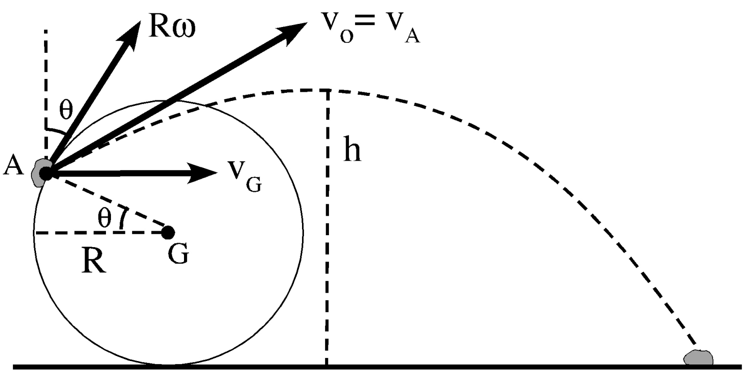
b) Hallar también las aceleraciones angulares de las dos barras.

$\alpha_{AB} =$ $\boxed{2\ \text{rad/s}^2}$ $\alpha_{BC} =$ $\boxed{0}$

Tiempo: 1 hora 30 minutos

Solución Problema 1.

a) El punto A de la rueda tendrá una velocidad igual a la traslación del centro más la rotación alrededor de él: $\vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/G}$



Como rueda sin deslizar: $v_G = R\omega$ y nos queda:

$$\vec{v}_A = R\omega\vec{i} + R\omega\left(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\right)$$

En definitiva: $\vec{v}_A = 7\cdot\left(\left(1+\operatorname{sen}30^\circ\right)\vec{i} + \cos 30^\circ\,\vec{j}\right) = 10{,}5\vec{i} + 6{,}06\vec{j}$ m/s

La velocidad del punto A es: $\vec{v}_A = 10{,}5\vec{i} + 6{,}06\vec{j}$ m/s

b) El trozo de barro describirá la típica parábola de un proyectil, con velocidad inicial $\vec{v}_0 = \vec{v}_A$ y partiendo de una altura: $y_0 = R\left(1+\operatorname{sen}\theta\right)$. Su velocidad y posición en la dirección vertical en cada instante de tiempo t vendrán dadas por:

$$v_y = R\omega\cos\theta - gt \qquad ; \qquad y = R\left(1+\operatorname{sen}\theta\right) + R\omega\cos\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

Dejará de subir cuando: $v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad t_m = \frac{R\omega}{g}\cos\theta$ y en ese momento su altura es:

$$h = R\left(1+\operatorname{sen}\theta\right) + R\omega\cos\theta\cdot\frac{R\omega}{g}\cos\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{R\omega}{g}\cos\theta\right)^2 = R\left(1+\operatorname{sen}\theta\right) + \frac{(R\omega)^2}{2g}\cos^2\theta$$

Cuando $\theta = 30^\circ$ nos queda $h = R\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{v_0^2}{2g}\cdot\frac{3}{4} = 0{,}65\cdot 1{,}5 + \frac{7^2\cdot 3}{2\cdot 9{,}8\cdot 4} = 2{,}85$ m

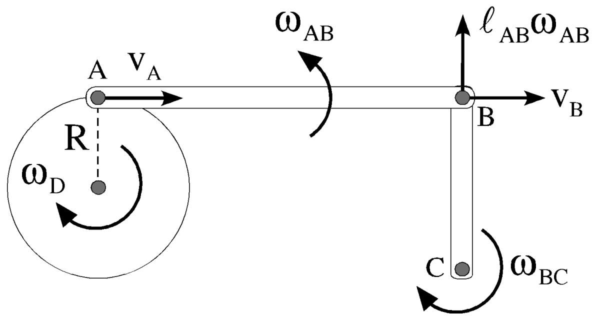
El trozo de barro alcanza una altura h = 2,85 m

b) Anteriormente obtuvimos que la altura viene dada por: $h = R\left(1+\operatorname{sen}\theta\right) + \frac{v_0^2}{2g}\cos^2\theta$.

Esta altura será máxima cuando: $\frac{\partial h}{\partial\theta} = 0 = R\cos\theta - \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$. La solución que nos interesa es $\operatorname{sen}\theta = \frac{Rg}{v_0^2} = \frac{0{,}65\cdot 9{,}8}{7^2} = 0{,}13 \quad \Rightarrow \quad \theta = 7{,}47^\circ \quad \Rightarrow \quad h_{max} = 3{,}19$ m

La altura será lo mas grande posible cuando θ = 7,47º = 0,13 rad

Solución Problema 2.



a) El punto B solo puede realizar un movimiento circular con centro en C, por lo tanto en el instante del problema su velocidad será horizontal y tendremos:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_B \vec{i} = v_A \vec{i} + \ell_{AB}\omega_{AB}\vec{j}$$

Igualando componentes obtenemos :

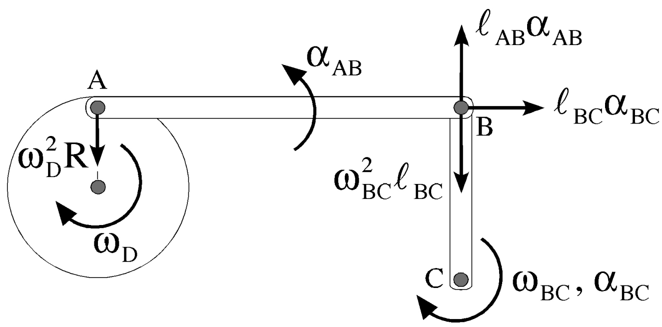
$$\omega_{AB} = 0 \quad ; \quad v_B = v_A \quad \Rightarrow \quad \ell_{BC}\omega_{BC} = R\omega_D \quad \Rightarrow \quad \omega_{BC} = \frac{R}{\ell_{BC}}\omega_D = \frac{1}{2}4 = 2 \text{ rad/s}$$

La velocidad angular de la barra AB es $\omega_{AB} = 0$
y la de la barra BC es $\omega_{BC} = 2$ rad/s

b) La aceleración del punto B, al girar alrededor de C será:

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha}_{BC} \times \vec{r}_{B/C} - \omega_{BC}^2 \vec{r}_{B/C} =$$

$$= \ell_{BC}\alpha_{BC}\vec{i} - \omega_{BC}^2 \ell_{BC}\vec{j}$$



Por otra parte su aceleración también puede escribirse con referencia al punto del disco A:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2 \vec{r}_{B/A} =$$

$$= -\omega_D^2 R\vec{j} + \ell_{AB}\alpha_{AB}\vec{j} - 0$$

Igualando ambas expresiones tenemos:

$$\ell_{BC}\alpha_{BC}\vec{i} - \omega_{BC}^2\ell_{BC}\vec{j} = -\omega_D^2 R\vec{j} + \ell_{AB}\alpha_{AB}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ell_{BC}\alpha_{BC} = 0 \\ -\omega_{BC}^2\ell_{BC} = -\omega_D^2 R + \ell_{AB}\alpha_{AB} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_{BC} = 0 \\ \alpha_{AB} = \dfrac{\omega_D^2 R - \omega_{BC}^2\ell_{BC}}{\ell_{AB}} = \dfrac{4^2 \cdot 1 - 2^2 \cdot 2}{4} = 2 \text{ rad/s}^2 \end{cases}$$

La aceleración angular de la barra AB es $\alpha_{AB} = 2$ rad/s^2
y la de la barra BC es $\alpha_{BC} = 0$