GRADO EN INGENIERÍA CIVIL

4º Examen Parcial de MECÁNICA. Grupo B
14 de Enero de 2011

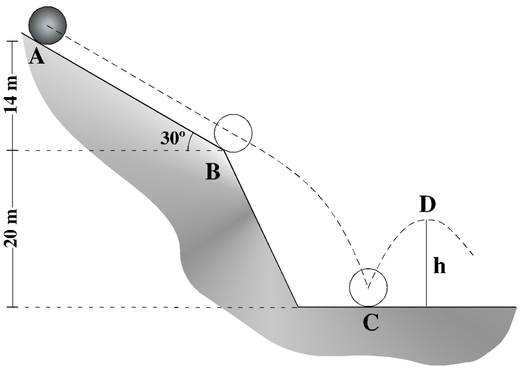
Alumno: Nombre: ______________________________

Apellidos: ____

(*Rellenar las soluciones obtenidas en los correspondientes recuadros*)

Problema 1. [*5 puntos*]

Queremos estimar la altura de la valla de protección que hay que poner junto a una autovía para evitar la caída de piedras en la calzada. Para ello empleamos un modelo idealizado donde las piedras son esferas de radio R. Al desprenderse en A ruedan sin deslizar hasta B, cayendo a continuación y rebotando en C. Se pide:



a) Calcular la razón entre la energía cinética de traslación y la de rotación que tiene la piedra cuando se encuentra en B.

$T_{B,\,tras} / T_{B,\,rot} = \boxed{2{,}5}$

b) Calcular el valor de la velocidad de traslación del centro de gravedad de la piedra en B.

$v_{GB} = \boxed{12{,}12\ \vec{i} + -7\ \vec{j}\ \ m/s}$

c) Calcular la velocidad del c. de g. en C, antes y después de chocar con el terreno.

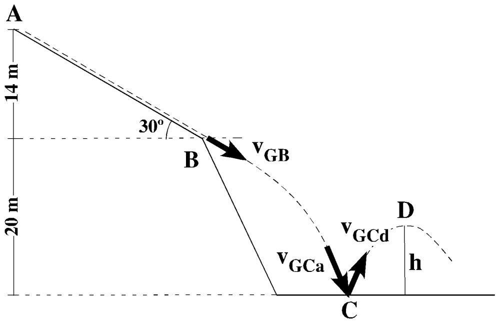
$v_{GC,\,antes} = \boxed{12{,}12\ \vec{i} + -21\ \vec{j}\ \ m/s}$ $v_{GC,\,después} = \boxed{12{,}12\ \vec{i} + 6{,}3\ \vec{j}\ \ m/s}$

d) Calcular la altura h que alcanzará la piedra en D **h =** $\boxed{2{,}025\ \ m}$

Datos: Momento de inercia de una esfera $I_G = \frac{2}{5} mR^2$. Coeficiente de restitución e = 0,3.

Para determinar la posición exacta del centro de gravedad en cada momento, se considerará que el radio R de la esfera es despreciable frente al resto de las dimensiones. No hay resistencia a la rodadura ni rozamiento en la colisión con el suelo.

Solución Problema 1.



a) En el tramo AB rueda sin deslizar y por lo tanto se conserva la energía:

$$V_A = T_{B,tras} + T_{B,rot} \quad \Rightarrow \quad mgh_1 = \frac{1}{2}mv_{GB}^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_B^2$$

Teniendo en cuenta que rueda sin deslizar: $v_G = R\omega$ y nos queda:

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_{GB}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\frac{v_{GB}^2}{R^2} = \frac{1}{2}mv_{GB}^2 + \frac{1}{5}mv_{GB}^2$$

El cociente entre las energías cinéticas será entonces: $\dfrac{T_{B,tras}}{T_{B,rot}} = \dfrac{\frac{1}{2}mv_{GB}^2}{\frac{1}{5}mv_{GB}^2} = \dfrac{5}{2} = 2,5$

$$\boxed{\textbf{La razón entre las energías cinéticas es: } T_{B,\,tras} / T_{B,\,rot} = 2,5}$$

b) Tenemos $gh_1 = \frac{1}{2}v_{GB}^2 + \frac{1}{5}v_{GB}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{GB} = \sqrt{\frac{10gh_1}{7}} = \sqrt{\frac{10\cdot 9,8\cdot 14}{7}} = 14 \ \text{m/s}$ y entonces sus componentes vectoriales serán $\vec{v}_{GB} = v_{GB}\cos(30°)\vec{i} - v_{GB}\text{sen}(30°)\vec{j} = 12,12\vec{i} - 7\vec{j} \ \text{m/s}$

$$\boxed{\textbf{La velocidad de traslación en B es: } \vec{v}_{GB} = 12,12\vec{i} - 7\vec{j} \ \ \text{m/s}}$$

c) Cuando describe el movimiento parabólico entre B y C, se conserva la energía y solamente cambia la componente vertical de la velocidad de traslación, manteniéndose constantes la componente horizontal y la velocidad angular de rotación. Entonces antes del choque:

$$mgh_2 + \cancel{\frac{1}{2}mv_{GBX}^2} + \frac{1}{2}mv_{GBY}^2 + \cancel{\frac{1}{2}I_G\omega_B^2} = \cancel{\frac{1}{2}mv_{GBX}^2} + \frac{1}{2}mv_{GCY,a}^2 + \cancel{\frac{1}{2}I_G\omega_B^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_{GCY,a} = -\sqrt{2gh_2 + v_{GBY}^2} = -\sqrt{2\cdot 9,8\cdot 20 + 7^2} = -21 \ \ \text{m/s}$$

En la percusión solo cambia la componente vertical y por lo tanto después del choque:

$$v_{GCY,d} = -ev_{GCY,a} = -0,3\cdot(-21) = 6,3 \ \ \text{m/s}$$

$$\boxed{\vec{v}_{GC,antes} = 12,12\vec{i} - 21\vec{j} \ \ \text{m/s} \qquad ; \qquad \vec{v}_{GC,después} = 12,12\vec{i} + 6,3\vec{j} \ \ \text{m/s}}$$

c) En el movimiento parabólico entre C y D nuevamente se conserva la energía y:

$$\cancel{\frac{1}{2}mv_{GBX}^2} + \frac{1}{2}mv_{GCY,d}^2 + \cancel{\frac{1}{2}I_G\omega_B^2} = mgh + \cancel{\frac{1}{2}mv_{GBX}^2} + \cancel{\frac{1}{2}I_G\omega_B^2} \quad \Rightarrow$$

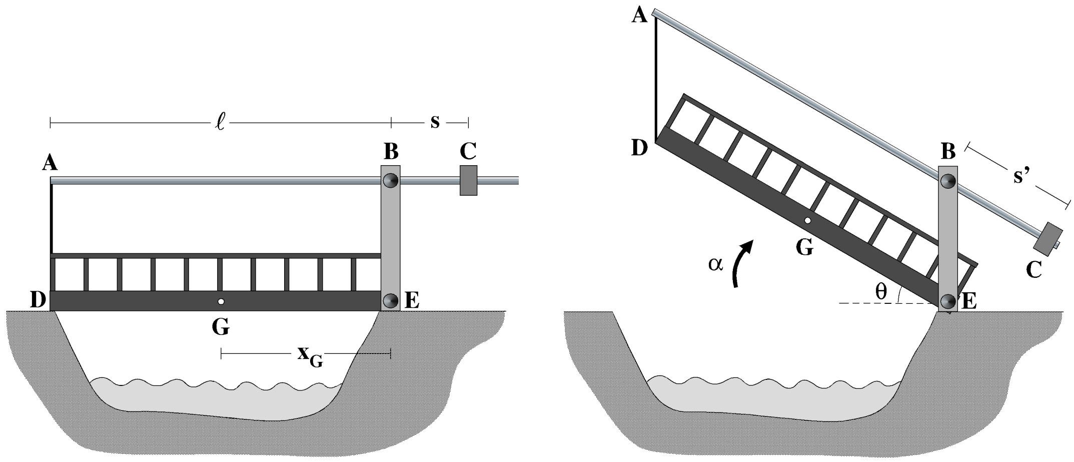
$$\Rightarrow \quad h = \frac{v_{GCY,d}^2}{2g} = \frac{6,3^2}{2\cdot 9,8} = 2,025 \ \text{m}$$

$$\boxed{\textbf{La piedra alcanza una altura h = 2,025 m}}$$

(*Rellenar las soluciones obtenidas en los correspondientes recuadros*)

Problema 2. [*5 puntos*]

El puente levadizo que se muestra en la figura, tiene un tablero DE de longitud $\ell = 10$ m, 2 toneladas de masa y un momento de inercia I_G = 14 000 kg.m^2. El puente se eleva mediante dos vigas AB localizadas a cada lado del puente, existiendo en cada una de ellas un contrapeso C de 2 toneladas. Las masas de los demás elementos son despreciables. El contrapeso C está hecho de un material muy denso y lo consideraremos aproximadamente puntual. El puente se encuentra en equilibrio estático para cualquier valor del ángulo θ, cuando la distancia CB es s = 2,5 m. Para que se levante trasladamos los dos contrapesos hasta que la distancia CB sea s' = 3 m.



Se Pide:

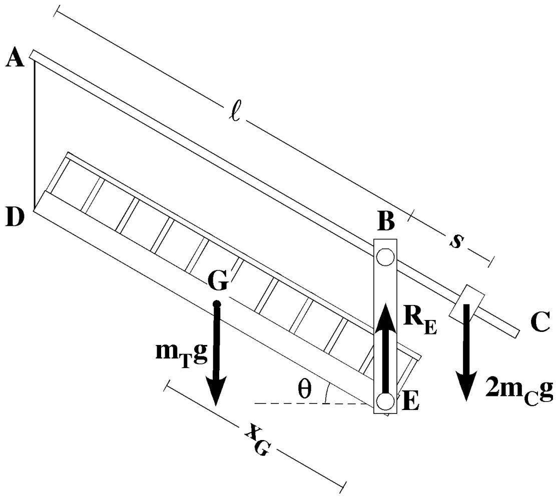
a) Hallar la distancia entre el centro de gravedad del tablero G y el eje de articulación del puente que pasa por E $\quad$ $\mathbf{x_G} =$ $\boxed{\mathbf{5\ m}}$

b) Cuando trasladamos los contrapesos, calcular la aceleración angular con la que inicia el movimiento partiendo de la posición inicial $\theta = \omega = 0$. $\quad$ $\boldsymbol{\alpha} =$ $\boxed{\mathbf{-0{,}196\ rad/s^2}}$

c) Calcular la tensión en cada uno de los 2 cables AD en ese momento. $\quad$ $\mathbf{T} =$ $\boxed{\mathbf{5527{,}2\ N}}$

Tiempo: 1 hora 30 minutos

Solución Problema 2.



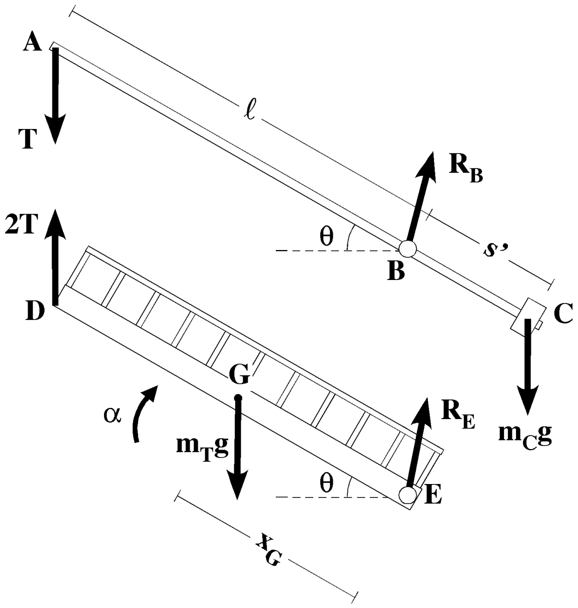
a) Cuando está en equilibrio consideramos todo el puente como un sólido donde las únicas fuerzas externas que actúan son los pesos del tablero y contrapesos, más la reacción en la articulación E. Calculamos m0mentos con respecto a E:

$$\sum \vec{M}_E = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_G \cos\theta \cdot m_T g - 2 \cdot s \cos\theta \cdot m_C g = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_G = 2s\frac{m_C}{m_T} = 2 \cdot 2{,}5\frac{2}{2} = 5 \text{ m}$$

La distancia al centro de gravedad es x_G = 5 m



b) Para estudiar el movimiento cuando se han desplazado los contrapesos, analizamos por separado las vigas y el tablero, aunque tendrán la misma aceleración angular. Cada viga tiene un punto fijo en B y calculando momentos obtenemos:

$$\sum \vec{M}_B = I_B \alpha \quad \Rightarrow$$

$$\ell \cos\theta \cdot T - s'\cos\theta \cdot m_C g = m_C (s')^2 \alpha$$

Mientras que el tablero tiene un punto fijo en E y su ecuación será:

$$\sum \vec{M}_E = I_E \alpha \quad \Rightarrow$$

$$-\ell \cos\theta \cdot 2T + x_G \cos\theta \cdot m_T g = \left(I_G + m_T x_G^2\right)\alpha$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos:

$$\alpha = \frac{x_G m_T - 2s' m_C}{I_G + m_T x_G^2 + 2m_C (s')^2} g\cos\theta = \frac{5 \cdot 2000 - 2 \cdot 3 \cdot 2000}{14000 + 2000 \cdot 5^2 + 2 \cdot 2000 \cdot 3^2} 9{,}8 \cdot \cos(0^\circ) = -0{,}196 \text{ rad/s}^2$$

Inicia el movimiento con una aceleración angular $\alpha = -0{,}196 \text{ rad/s}^2$

c) La tensión en los cables la obtenemos de cualquiera de las dos ecuaciones anteriores:

$$T = \frac{m_C (s')^2 \alpha + s'\cos\theta \cdot m_C g}{\ell \cos\theta} = \frac{2000 \cdot 3^2 (-0{,}196) + 3 \cdot 1 \cdot 2000 \cdot 9.8}{10 \cdot 1} = 5527{,}2 \text{ N}$$

La tensión en cada cable es T = 5527,2 N