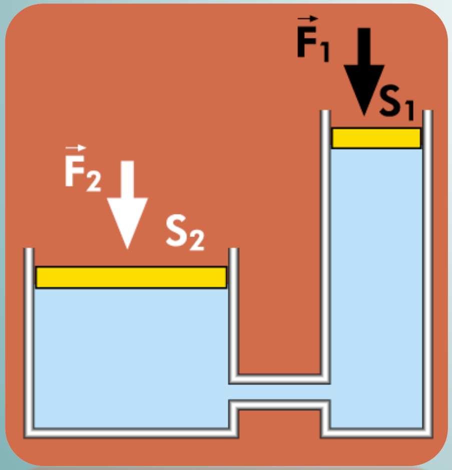
Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas

Tema 02. Estática de Fluidos



Severiano F. Pérez Remesal

Carlos Renedo Estébanez

DPTO. DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA

1.- Presión (I)

Presión, Pascal: (F / Superficie) [Pa = Nw/m^2]

- En el interior de un fluido se transmite igual en todas las direcciones
- Se ejerce perpendicularmente a las superficies que lo contienen

Tipos de Presión:

- ***Atmosférica;*** p_{atm} (nivel del mar y 0ºC) = 1,013 bar
- ***Absoluta***; p_{abs} (>0)
- ***Relativa***; p_{rel} (si <0 P de vacío)

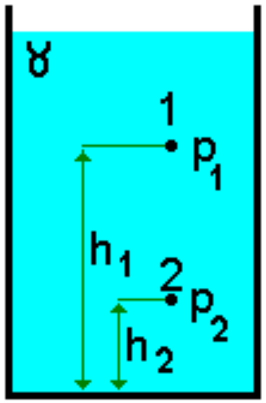
$$p_{abs} = p_{atm} + p_{rel}$$

$$p_{abs} \approx 1 + p_{rel} \text{ (bar)}$$

Vacío: $P < P_{atm}$

1.- Presión (II)

Elevación: distancia vertical medida a partir de un nivel de referencia



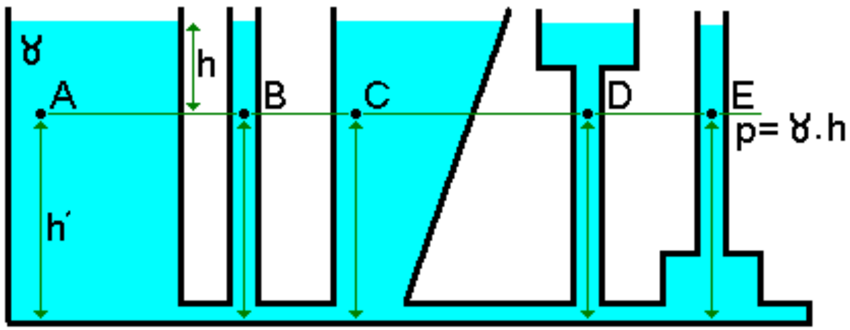
La diferencia de presión dentro de un fluido

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \gamma\,(h_2 - h_1) = \rho\, g\, \Delta h$$

La altura de presión, ***H***: representa la altura del fluido de γ que produce una *P* dada

$$H(m) = \frac{P\,(Pa)}{\gamma\,(Nw/m^3)}$$

En un fluido en reposo:

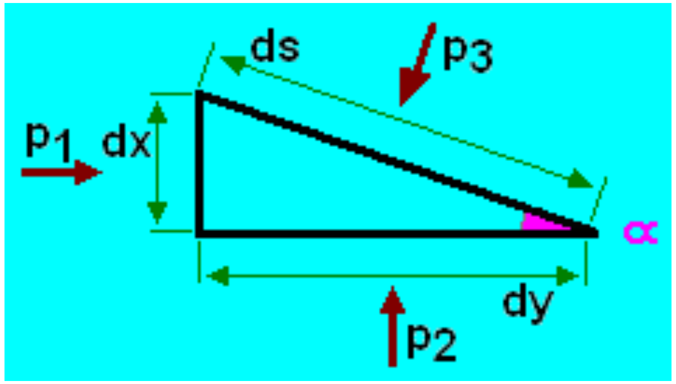


$$\text{Si}: h_A = h_B = h_C = h_D = h_E$$
$$P_A = P_B = P_C = P_D = P_E$$

1.- Presión (III)

Hidrostática: fluidos en reposo (v = 0)
Si está en reposo no se le aplica cortante (deslizaría)
Las tensiones son normales a la superficie

Elemento infinitesimal



Equilibrio de F:

$$\left.\begin{array}{l} H:\ p_1\, dx = p_3\, ds\, sen\alpha \\ V:\ p_2\, dy = p_3\, ds\cos\alpha \end{array}\right\}$$

Trigonometría:

$$\left.\begin{array}{l} dx = ds\, sen\alpha \\ dy = ds\cos\alpha \end{array}\right\}$$

$$p_1 = p_2 = p_3$$

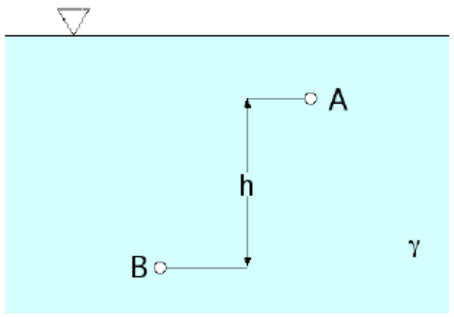
La presión es la misma en todas las direcciones

1.- Presión (IV)

Principio de Pascal

Si sobre la porción plana de la superficie libre de un líquido, se ejerce una cierta presión, esta se transmite integra y por igual en todas direcciones

$$P_B - P_A = \gamma\ h$$
$$P_B + \Delta P_B - (P_A + \Delta P_A) = \gamma\ h$$
$$P_B - P_A + \Delta P_B - \Delta P_A = \gamma\ h$$
$$\gamma\ h + \Delta P_B - \Delta P_A = \gamma\ h \Rightarrow \Delta P_B = \Delta P_A$$



Si la presión aumenta en un punto (A) quedará incrementada en el mismo valor en otro punto del líquido (B)

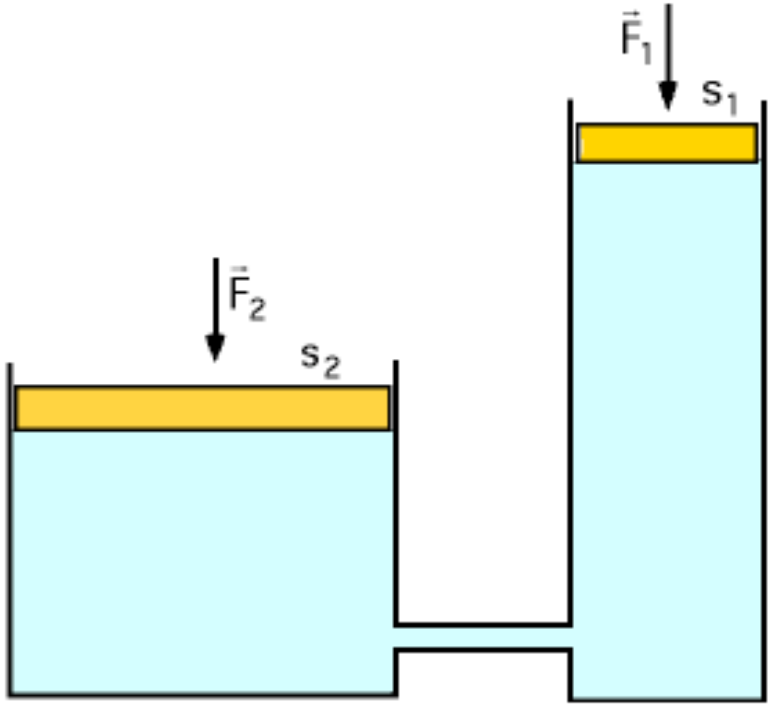
1.- Presión (V)

Principio de Pascal

Multiplicador de fuerzas

$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$



La fuerza en punto dos F_2 es F_1 por la relación de superficies

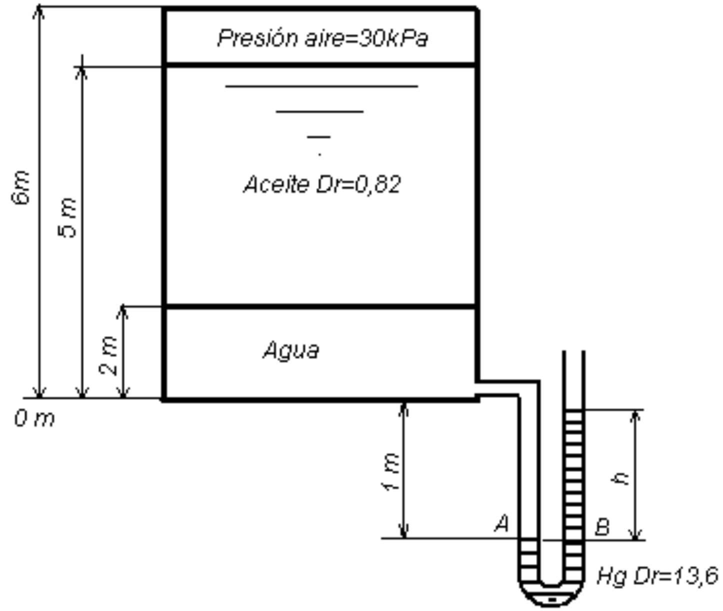
1.- Presión (VI)

Un depósito cerrado con un manómetro acoplado contiene tres fluidos diferentes. Determinar la diferencia de niveles en altura en la columna de mercurio

$$\textit{presión } A = \textit{presión } B$$

$$30 + (0{,}82 \cdot 9{,}79)(3) + (9{,}79)(3) = (13{,}6 \cdot 9{,}79)\,y$$

$$y = 0{,}627\ m$$



RECORDATORIO

Momento estático de una sección o momento de primer orden

Momento de inercia de una sección o momento de segundo orden

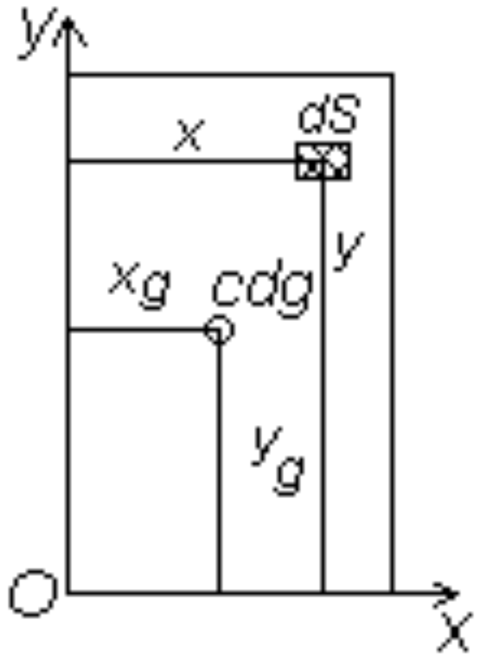
Teorema de Steiner o momentos de inercia de una sección respecto a ejes paralelos contenidos en la misma

RECORDATORIO (I)

Momento estático de una sección o momento de primer orden

$$x_g = \frac{\sum_1^i x_i \cdot S_i}{\sum_1^i S_i} = \frac{\int x\, ds}{\int ds} \Rightarrow \int x\, ds = x_g \int ds = x_g\, S_T$$

$$y_g = \frac{\sum_1^i y_i \cdot S_i}{\sum_1^i S_i} = \frac{\int y\, ds}{\int ds} \Rightarrow \int y\, ds = y_g \int ds = y_g\, S_T$$



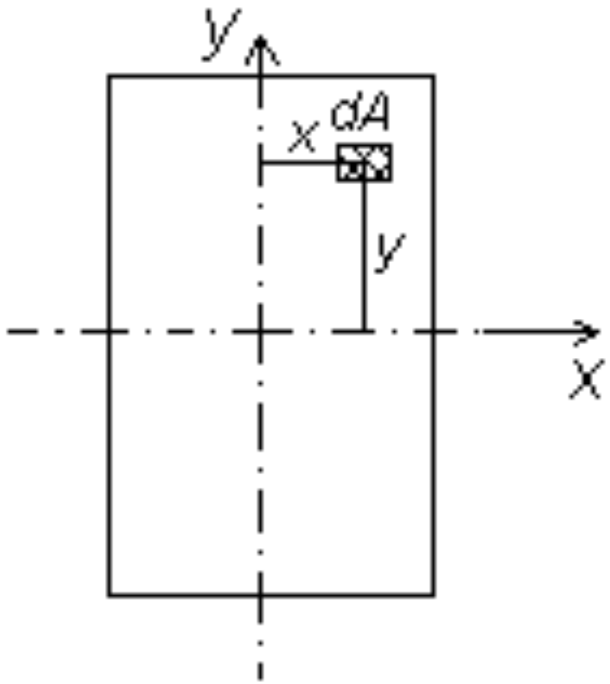
RECORDATORIO (II)

Momento de inercia de una sección o momento de segundo orden

$$I_{xx} = \int y^2 dA$$

$$I_{yy} = \int x^2 dA$$

$$I_{xy} = \int (x^2 + y^2)\, dA$$



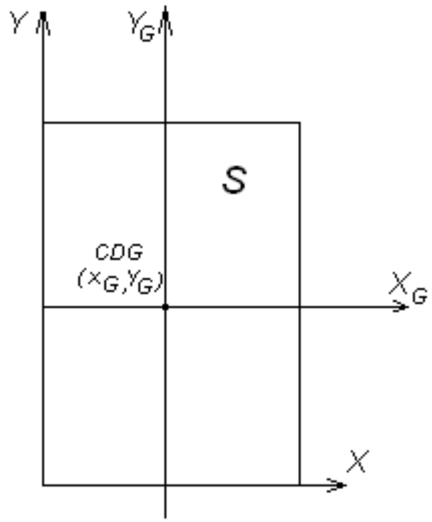
RECORDATORIO (III)

Teorema de Steiner o momento de inercia entre ejes paralelos

El momento de inercia de una superficie respecto a un eje cualquiera contenido en el plano de la superficie es igual al momento de inercia de la superficie respecto a un eje **paralelo que pase por el c.d.g.** de la superficie más el producto del valor de esta superficie por el cuadrado de la distancia.

$$I_y = I_{y_G} + x_G^2 \, S$$

$$I_x = I_{x_G} + y_G^2 \, S$$



5.- Esfuerzos sobre pared plana sumergida

SUPERFICIE PLANA SUMERGIDA

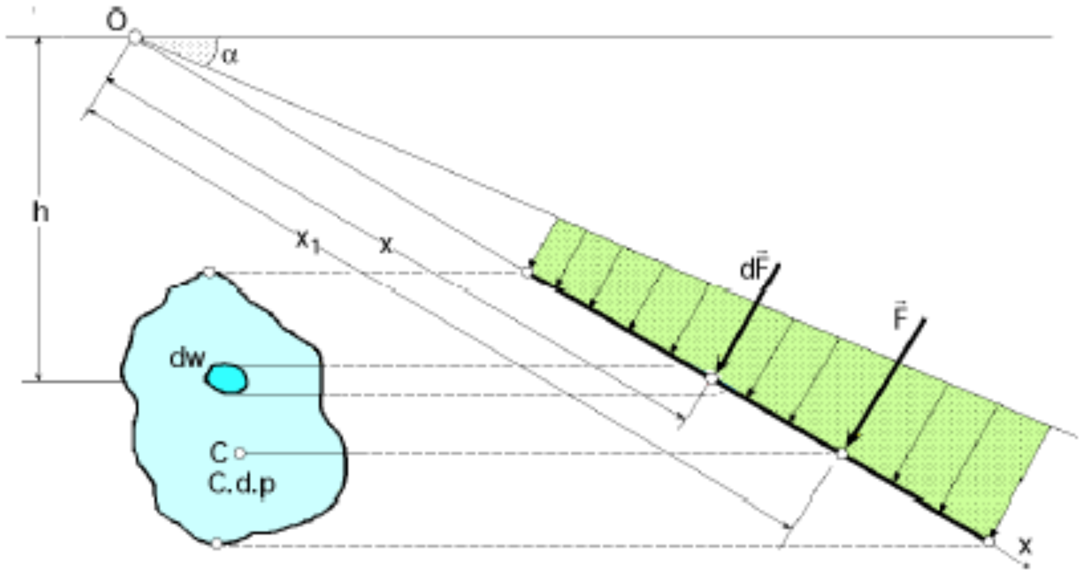
1.- Cálculo del módulo. Elegimos un elemento de superficie dw. Sobre dw actúa una fuerza dF de valor:

$$dF = p\ dw = \gamma\ h\ dw = \gamma\ x\ sen\alpha\ dw \Rightarrow F = \gamma\ sen\alpha \int x\ dw$$

$\int x\ dw = S\ x_g$ (momento estático de la sección)

$$F = \gamma\ sen\alpha\ S\ x_g = \gamma\ h_g\ S = p_g\ S$$

El módulo de la fuerza es igual a la presión en el centro de gravedad por el valor de la superficie



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

5.- Esfuerzos sobre pared plana sumergida

SUPERFICIE PLANA SUMERGIDA

2.- Cálculo del punto de aplicación de F (centro de presiones)

Para encontrar su situación, tomamos momentos respecto el punto O:

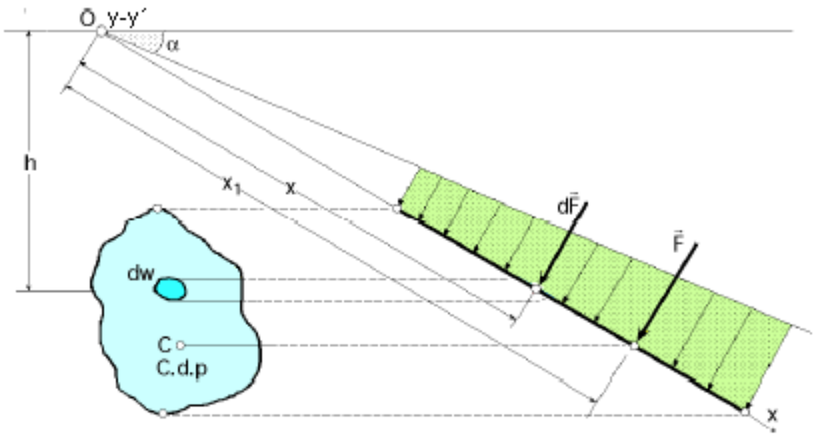
$$F\ x_1 = \int x\ dF = \int x\left(\gamma\ x\ sen\alpha\ d\omega\right) = \gamma\ sen\alpha \int x^2 d\omega = \gamma\ sen\alpha\ I_{yy'}$$

$\int x^2 d\omega = I_{yy'}$ (momento de inercia de la sección respecto el eje yy´ (pasa por O perpendicular al plano del cuadro)

$$\gamma\ x_g\ S\ sen\alpha\ x_1 = \gamma\ sen\alpha\ I_{yy'} \Rightarrow x_1 = \frac{I_{yy'}}{x_g\ S}$$

$I_{yy'} = I_g + x_g^2\ S$ (T. Steiner) $\Rightarrow x_1 = \dfrac{I_g}{x_g\ S} + x_g$

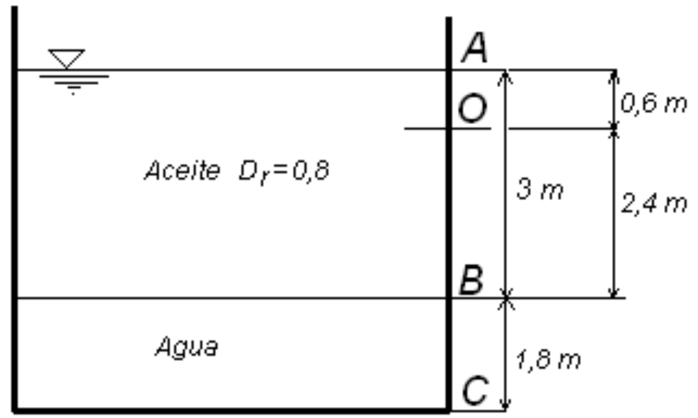
Ig (momento de inercia de la sección respecto a un eje perpendicular al plano del cuadro que pasa por su cdg)



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

5.- Esfuerzos sobre pared plana sumergida

Determinar esfuerzo sobre la pared ABC de 1.2m de ancha



$$F_{ABC} = F_{AB} + F_{BC}$$

$$F_{AB} = (0,8 \cdot 1000) \cdot 1,5 \cdot (3 \cdot 1,2) = 4320\ kg$$

$$Z_{AB} = \frac{2}{3} 3 = 2\ m\ de\ A$$

Para calcular el esfuerzo sobre BC ===> Altura de agua equivalente

$$\gamma_{agua}\ h_{agua} = \gamma_{aceite}\ h_{aceite}$$

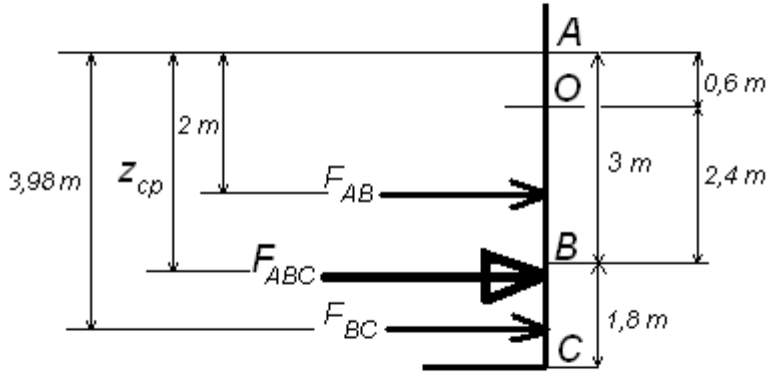
$$h_{agua} = \frac{\gamma_{aceite}}{\gamma_{agua}} h_{aceite} = 0,8 \cdot 3 = 2,4\ m$$

$$F_{BC} = 1000\ (2,4 + 0,9)\ (1,8 \cdot 1,2) = 7128\ kg$$

$$Z_{BC} = \frac{\frac{1,2 \cdot 1,8^3}{12}}{3,3\ (1,2 \cdot 1,8)} + 3,3 = 3,38\ de\ O\ ó\ (0,6 + 3,38) = 3,98\ m\ de\ A$$

5.- Esfuerzos sobre pared plana sumergida

Determinar esfuerzo sobre la pared ABC de 1.2m de ancha



$$F_{ABC} = F_{AB} + F_{BC} = 4320 + 7128 = 11448\ kg$$

Tomando momentos respecto de A calcularemos el punto de aplicación de la resultante

$$\sum M_A = 0; 11448\ z_p = 4320 \cdot 2 + 7128 \cdot 3{,}98$$

$$z_p = 3{,}23\ m\ de\ A$$

5.- Esfuerzos sobre pared curva sumergida (I)

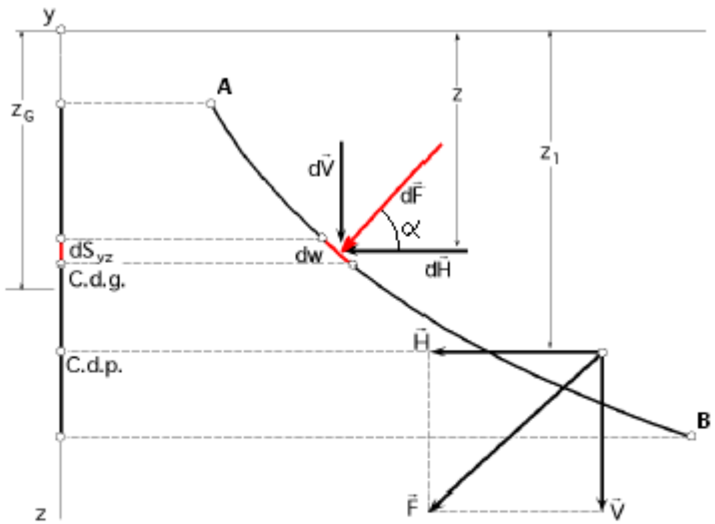
AB: intersección de superficie alabeada cortada por un plano x-z. Sobre cada elemento de esta superficie dw actúa una fuerza normal dF.

$$\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{dH} + \overrightarrow{dV}$$

$$dH = dF \cos\alpha = p \, d\omega \cos\alpha = \gamma \; z \; d\omega \cos\alpha = \gamma \; z \; dS_{yz}$$

dS_{yz} (proyección de dw sobre plano y-z)

$$H = \int \gamma \; z \; dS_{yz} = \gamma \; S_{yz} z_g = p_g \; S_{yz}$$



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

5.- Esfuerzos sobre pared curva sumergida (II)

Para determinar el punto de aplicación de H tomamos momentos respecto a x-x

$$H\ z_1 = \int dH\ z = \int \gamma\ z\ dS_{yz}\ z = \gamma \int z^2\ dS_{yz} = \gamma\ I_{y-y'}$$

$$I_{y-y'} = I_{g(y-y')} + z_g^2\ S_{yz}$$ (T Steiner)

$$H\ z_1 = \gamma\ I_{g(y-y')} + z_g^2\ S_{yz};\ H = \gamma\ z_g\ S_{yz}$$

$$z_1 = \frac{I_{g(y-y')}}{z_g\ S_{yz}} + z_g$$

5.- Esfuerzos sobre pared curva sumergida (III)

Para calcular el esfuerzo vertical V tenemos:

$$dV = dF\ sen\alpha = \gamma\ z\ d\omega\ sen\alpha$$

$$dS_{xy} = d\omega\ sen\alpha$$

$$dV = \gamma\ z\ dS_{xy} = \gamma\ dV_{vol} \Rightarrow V = \int \gamma\ dV_{vol} = \gamma\ V_{vol}$$

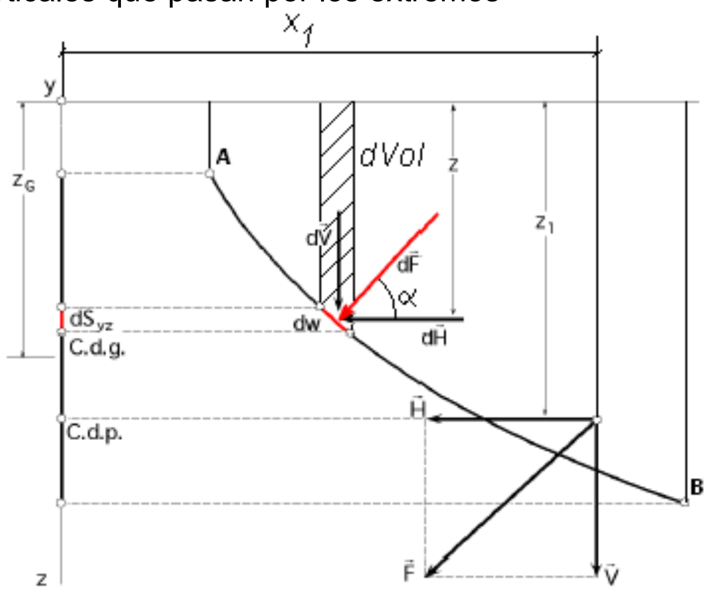
Componente vertical igual al peso del líquido comprendido entre las verticales que pasan por los extremos de la curva y la superficie libre del líquido

El punto de aplicación de V se determina tomando momentos

$$V\ x_1 = \int dV_{vol}\ x$$

$$x_1 = \frac{\int dV_{vol}\ x}{V}$$

Coordenada x del cdg del volumen comprendido entre las verticales que pasan por los extremos de la curva y la superficie libre del líquido



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

5.- Esfuerzos sobre pared curva sumergida (IV): Corolario

Si se supone una superficie cerrada sumergida en un fluido tal como la de la figura tenemos:

Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

Componentes horizontales

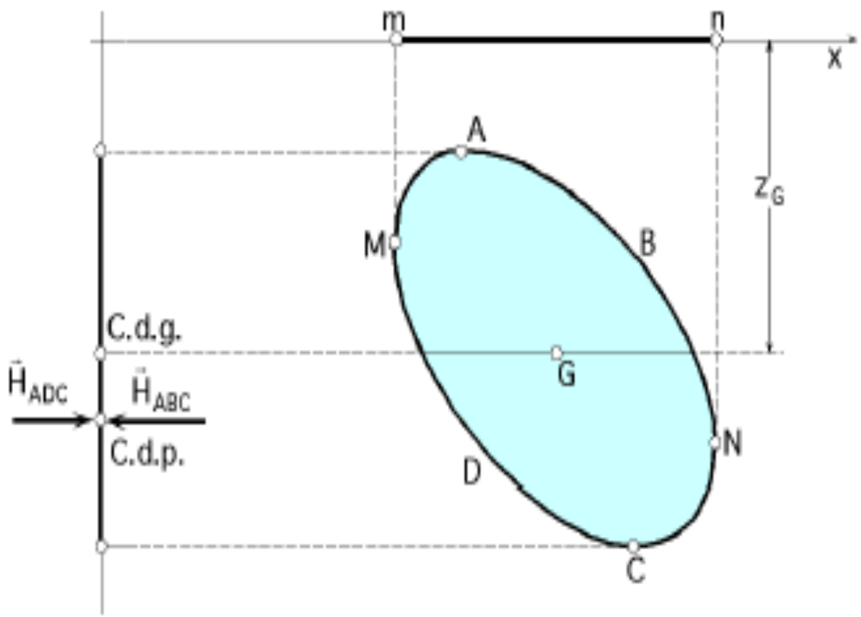
$$H_{ABC} = P_g\ S_{ABC}\ ; H_{ABD} = P_g\ S_{ABD}$$

$$S_{ABC} = S_{ABD} \Rightarrow H_{ABC} = H_{ABD}$$

Componentes verticales

$$V_{MBN} = \gamma\ Vol_{MBN}\ ; V_{MDN} = \gamma\ Vol_{MDN}$$

$$V = V_{MBN} - V_{MDN} = -\gamma(\ Vol_{MBN} - Vol_{MDN})$$

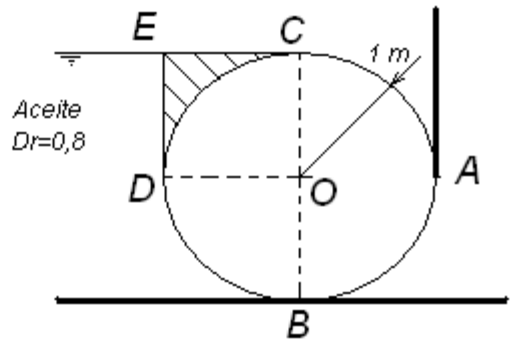


Principio de Arquímedes

El empuje hacia arriba que experimenta un cuerpo sumergido es igual al peso del volumen de líquido que desaloja

5.- Esfuerzos sobre pared curva sumergida (V)

El cilindro pesa 2500 kg y tiene una longitud de1,5 m. Determinar:
Reacciones en A y B



$$R_A = F_H = (0{,}8 \cdot 1000) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1{,}5 = 2400\ kg$$

La reacción en B será la suma algebraica del peso del cilindro y la componente vertical neta debida a la acción del líquido

$$F \uparrow = Peso\ líquido\ DB = 800 \cdot 1{,}5 \cdot (área\ DOB + área\ DOCE)$$

$$F \downarrow = 800 \cdot 1{,}5 \cdot (área\ rayada\ DEC)$$

$$F_{neta} = F \uparrow - F \downarrow = 800 \cdot 1{,}5\ \left[(área\ DOB + área\ DOCE) - (área\ rayada\ DEC) \right] = 800 \cdot 1{,}5\ área\ (CDB)$$

$$F_{neta} = 800 \cdot 1{,}5 \left(\frac{1}{2} \pi \cdot 1^2 \right) = 1894\ kg \uparrow$$

$$\sum Y = 0\ ;\ 2500 - 1894 - B = 0$$

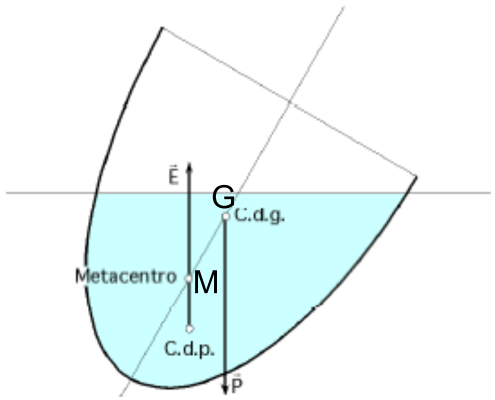
$$B = 606\ kg$$

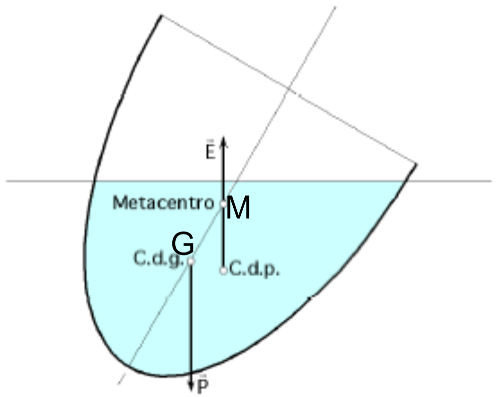
5.- Estabilidad y flotación (I)

Definiciones

- Equilibrio estable: el c.d.p. (centro de carena) está por encima del c.d.g. $GM > 0$
- Equilibrio inestable: el c.d.p. (centro de carena) está por debajo del c.d.g. $GM < 0$
- Equilibrio indiferente: el c.d.p. (centro de carena) coincide con el c.d.g. $GM = 0$
- Metacentro (M): punto intersección del centro de carena con el eje de simetría del flotador.

Si M está por encima del c.d.g. aparece un par de fuerzas equilibradoras.
Si M está por debajo del c.d.g. aparece un par de fuerzas desequilibradoras.





Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

5.- Estabilidad y flotación (II)

Cálculo de la distancia entre el metacentro y el cdg de un flotador

Giro ángulo α muy pequeño ➔ centro de carena se desplaza de forma que puede desequilibrar aun más el flotador. Aparecen un par de fuerzas que tienden a equilibrar el flotador.

En posición de desequilibrio se tiene el peso aplicado en G y el empuje aplicado en el nuevo centro de carena C' cuya vertical pasa por M. Este sistema de fuerzas, es equivalente al que se tenía en la posición de equilibrio inicial (peso en G y empuje en C) más el efecto de las dos cuñas simétricas.

Por ser equivalentes sus momentos respecto cualquier punto son los mismos. Tomando respecto a G

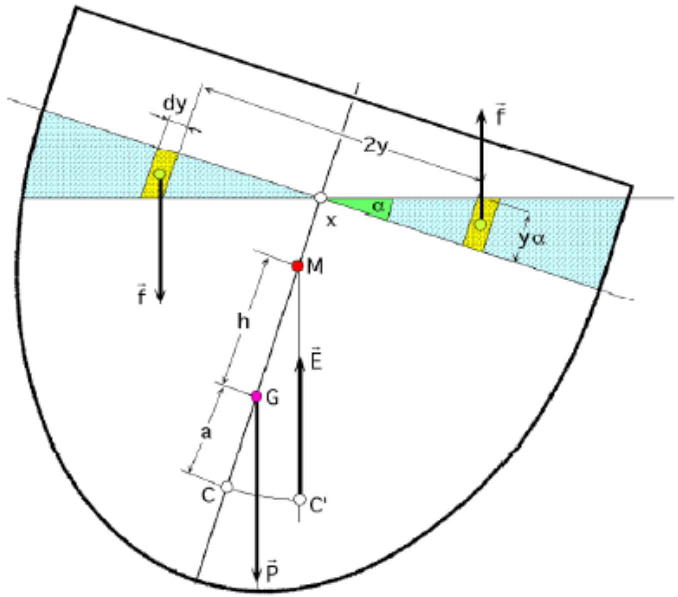
$$E \cdot GM \cdot sen\alpha = -E \cdot CG \cdot sen\alpha + M_{cuñas}$$

$$M_{cuñas} = \int y\, dF = \iint_{A_{LF}} y\, \gamma\, y\, sen\alpha\, dA = \gamma\, sen\alpha \iint_{A_{LF}} y^2 dA$$

$$M_{cuñas} = \gamma\, sen\alpha\, I_x$$

$$E \cdot GM \cdot sen\alpha = -E \cdot CG \cdot sen\alpha + \gamma\, sen\alpha\, I_x ; E = \gamma\, V_c$$

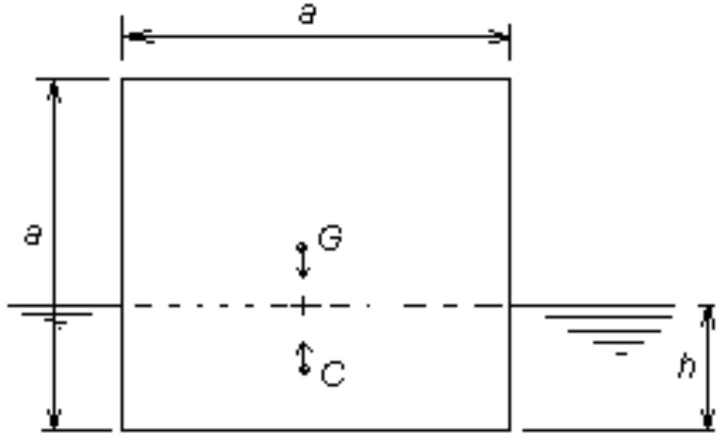
$$GM \pm GC \geq \frac{I_x}{V_c};$$ Condición de estabilidad



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

5.- Estabilidad y flotación (III)

Dado un cubo de lado a y peso específico γ_1 determinar las condiciones de flotabilidad y estabilidad en un fluido de peso específico γ



Flotabilidad

$$P = E$$

$$P = \rho \cdot g \cdot V = \gamma_1 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 \cdot a^3$$

$$E = \gamma \cdot V_{carena} = \gamma \cdot 1000 \cdot 9{,}81 \cdot a^2 h$$

$$h = \frac{\gamma_1 \cdot a}{\gamma}$$

Estabilidad

$$GM = CM - GC \geq 0$$

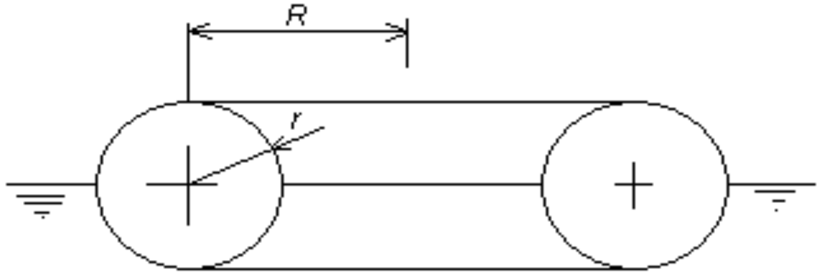
$$CM = \frac{I_{xx}}{Vc} = \frac{\frac{1}{12} b\, h^3}{a^2\, h} = \frac{a^2}{12\, h}; \quad GC = \frac{a-h}{2}$$

$$GM = \frac{a^2}{12\, h} - \frac{a-h}{2} \geq 0; \quad \frac{a^2 - 6ah + 6h^2}{12h} \geq 0$$

5.- Estabilidad y flotación (IV)

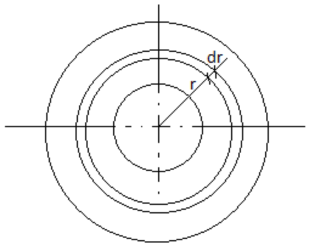
Determinar la altura metacéntrica del flotador tórico de la figura sumergido hasta el centro de su sección recta.

R=50 cm y r=30cm



Volumen sumergido Vs = 0,5 Volumen total

$$V_{carena} = \frac{\pi\, r^2}{2} 2\,\pi\, R = \pi^2\, r^2\, R$$

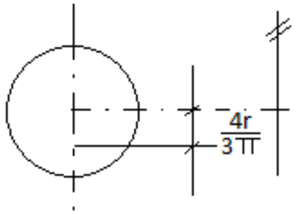


$$I_o = \int_{R-r}^{R+r} 2\pi\, r\, dr\, r^2 ; I_x = \frac{I_0}{2} ; CM = \frac{I_x}{V_{carena}} = \frac{\frac{\pi}{4}\left((R+r)^4 - (R-r)^4\right)}{\pi^2\, r^2\, R}$$

$$CM = 0{,}721$$

$$GC = \frac{4\, r}{3\, \pi} = 0{,}1273$$

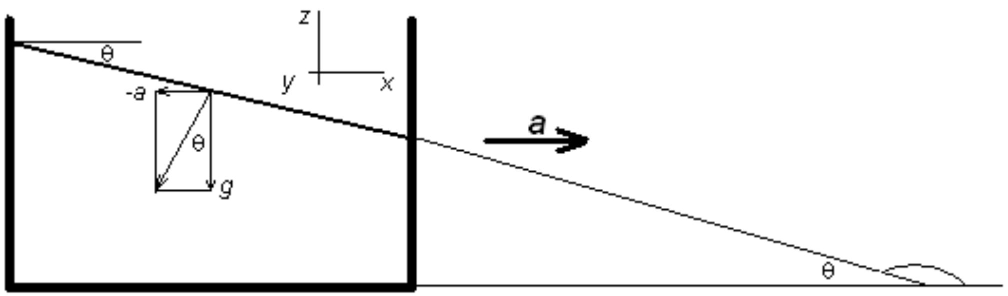
$$GM = CM - GC = 0{,}594 \geq 0 \Rightarrow estable$$



6.- Equilibrio relativo de líquidos

6.1.- Recipiente con aceleración lineal constante

$$\sum X_i = 0 - a = -a;$$
$$\sum Y_i = 0 - 0 = 0;$$
$$\sum Z_i = -g - 0 = -g;$$



$$\frac{dp}{\rho} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$ Ecuación de la hidrostática

$$\frac{dp}{\rho} = -a\,dx - g\,dz\,;\ \frac{p}{\rho} = -a\,x - g\,z + K$$ Presión en un punto $\frac{dp}{\rho} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$

$$-a\,x - g\,z = 0\,;\ -a\,x - g\,z = K'$$ Ecuación de las superficies de nivel Pr = 0

6.1.- Recipiente con aceleración lineal constante

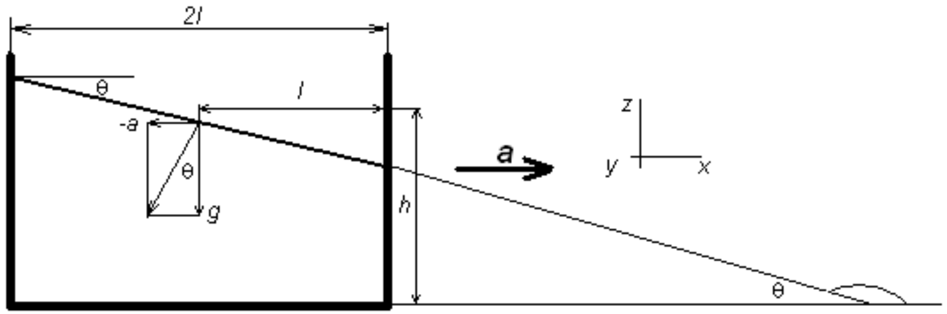
6.1.1.- Cálculo de las constantes

Para fluidos perfectos vol $_{inicial}$ = vol $_{final}$
Parte desplazada arriba = parte desplazada abajo respecto superficie libre inicial
Punto de intersecciόin de ambas superficies a la mitad de la superficie libre

Cálculo de las constantes se cumple para x=l => y=0, z=h

$$\frac{P_{atm}}{\rho} = -a\,l - g\,h + K ; K = \frac{P_{atm}}{\rho} + a\,l + g\,h$$

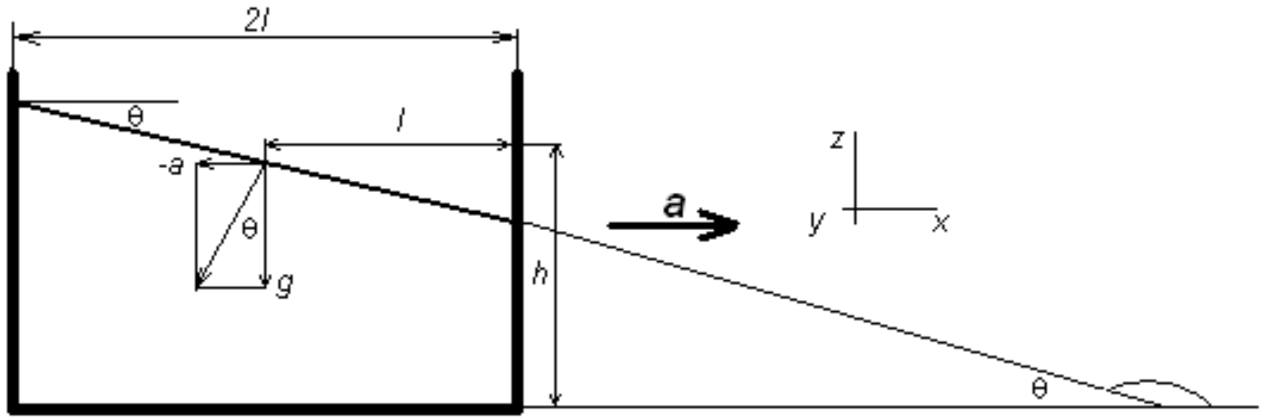
$$K' = -a\,l - g\,h$$



6.1.- Recipiente con aceleración lineal constante

6.1.2.- Angulo de la nueva superficie con la inicial

$$tg\theta = \frac{a}{g};\ \theta = arctg\left(\frac{a}{g}\right)$$



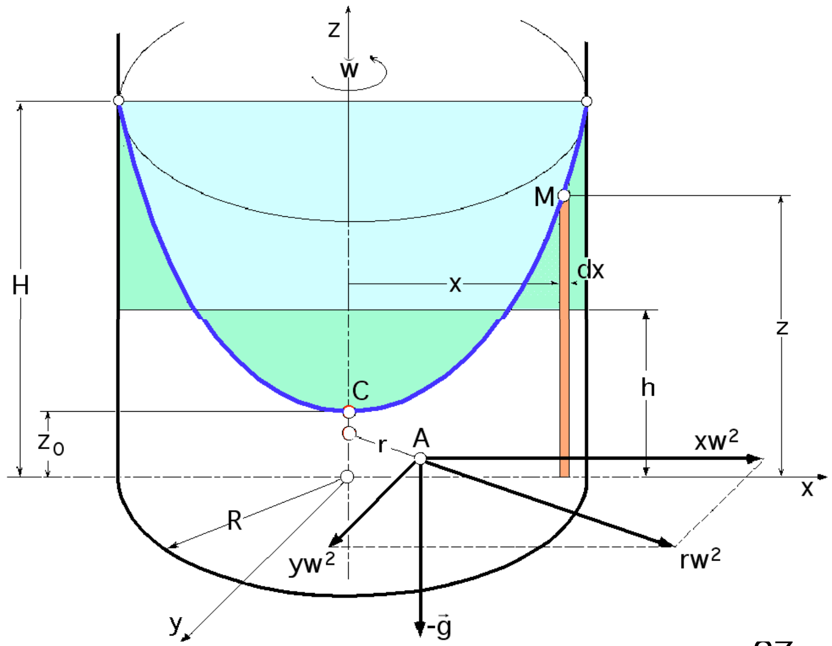
6.2.- Recipiente con líquido que gira alrededor de un eje vertical

Cada uno de los puntos del líquido estará sometido a dos fuerzas por unidad de masa: la centrífuga ($r\omega^2$) y la gravedad (g)

$$X = \sum X_i = x\,\omega^2$$

$$Y = \sum Y_i = y\,\omega^2$$

$$Z = \sum Z_i = g$$



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

6.2.- Recipiente con líquido que gira alrededor de un eje vertical

Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

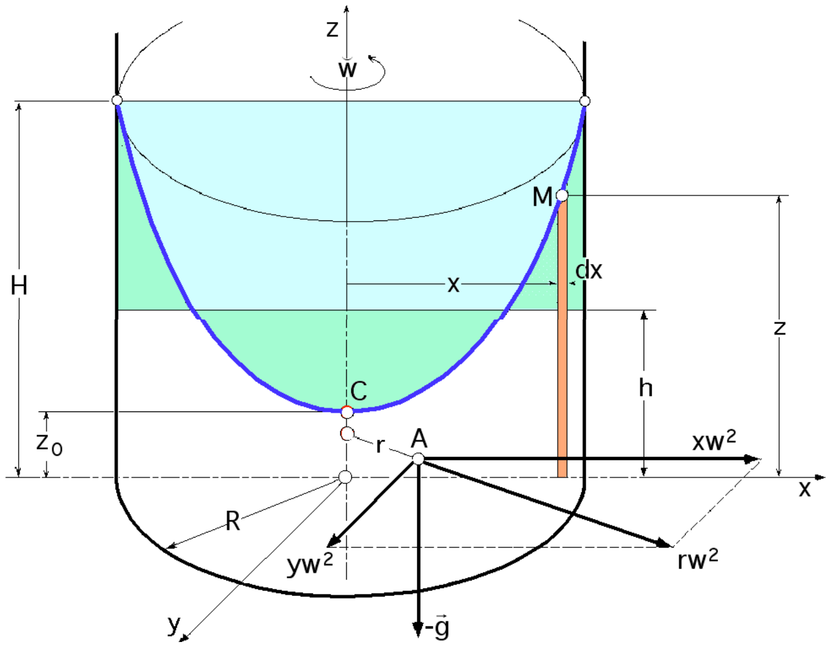
$$\frac{dp}{\rho} = x\,\omega^2 dx + y\,\omega^2 dy - g\,dz$$

$$x\,\omega^2 dx + y\,\omega^2 dy - g\,dz = 0$$

Integrándolas

$$\frac{p}{\rho} = \omega^2 \frac{x^2}{2} + \omega^2 \frac{y^2}{2} - g\,z + K$$

$$\omega^2 \frac{x^2}{2} + \omega^2 \frac{y^2}{2} - g\,z = K'$$



Paraboloide de revolución de eje vertical que coincide con el eje del cilindro

6.2.- Recipiente con líquido que gira alrededor de un eje vertical

Cálculo de las constantes

En el punto C => x=0, y=0, z=z_0, p=p_{atm}

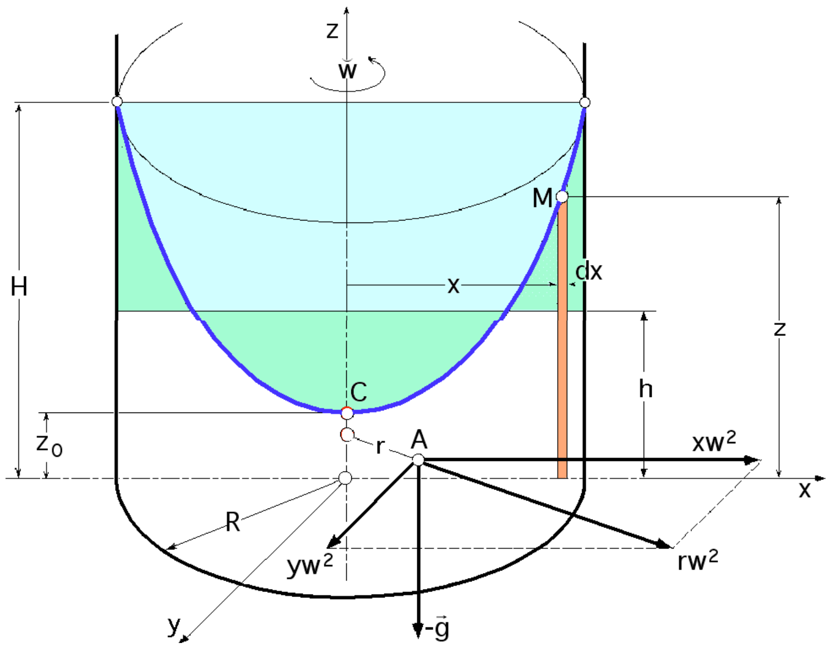
$$\frac{p_{atm}}{\rho} = -g\ z_0 + K \Rightarrow K = \frac{p_{atm}}{\rho} + g\ z_0$$

$$K' = -g\ z_0$$

Sustituyéndolas

$$\frac{p}{\rho} = \omega^2 \frac{x^2}{2} + \omega^2 \frac{y^2}{2} - g\ z + \frac{patm}{\rho} + g\ z_0$$

$$\omega^2 \frac{x^2}{2} + \omega^2 \frac{y^2}{2} - g\ z + g\ z_0 = 0$$



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

6.2.- Recipiente con líquido que gira alrededor de un eje vertical

Cálculo de z_0

Volumen de fluido en movimiento (V_{inic}) = Volumen de fluido en reposo (V_{fin})

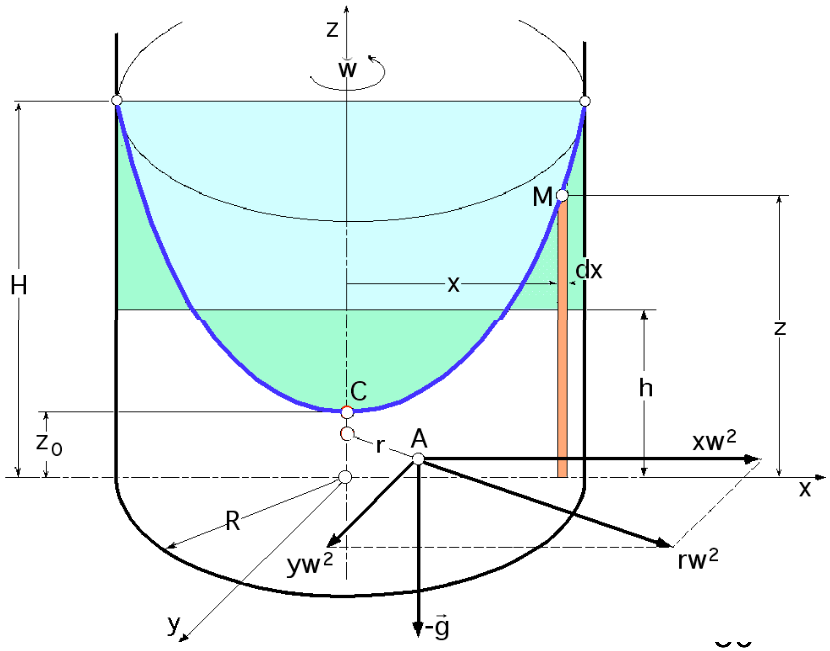
$$V_{inic} = \pi R^2 h$$

$$V_{fin} = \int 2\pi\ x\ z\ dx = \int_0^R 2\pi\ x \left(z_0 + \frac{\omega^2 x^2}{2g} \right) dx =$$

$$\left[2\pi\ z_0 \frac{x^2}{2} + \frac{2\pi\ \omega^2\ x^4}{4\ g} \right]_0^R = \pi\ z_0 R^2 + \frac{\pi\ \omega^2 R^4}{4\ g}$$

$$\pi\ R_2\ h = \pi\ z_0 R^2 + \frac{\pi\ \omega^2 R^4}{4\ g}$$

$$z_0 = h - \frac{\omega^2 R^4}{4\ g}$$



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

6.3.- Líquido que gira alrededor de un eje horizontal

Las componentes de las fuerzas que actúan sobre punto M por unidad de masa

$$X = \sum X_i = x\,\omega^2$$

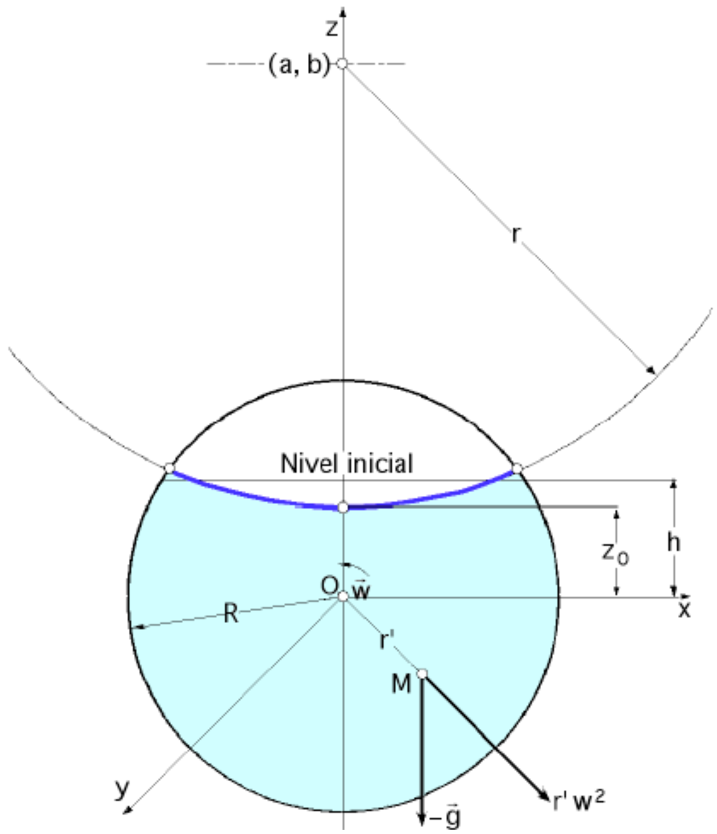
$$Y = \sum Y_i = 0$$

$$Z = \sum Z_i = -g + z\,\omega^2$$

Sustituyendo

$$\frac{dp}{\rho} = x\,\omega^2 dx + \left(-g + z\,\omega^2\right)dz\ ;$$

$$x\,\omega^2 dx + \left(-g + z\,\omega^2\right)dz = 0$$



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

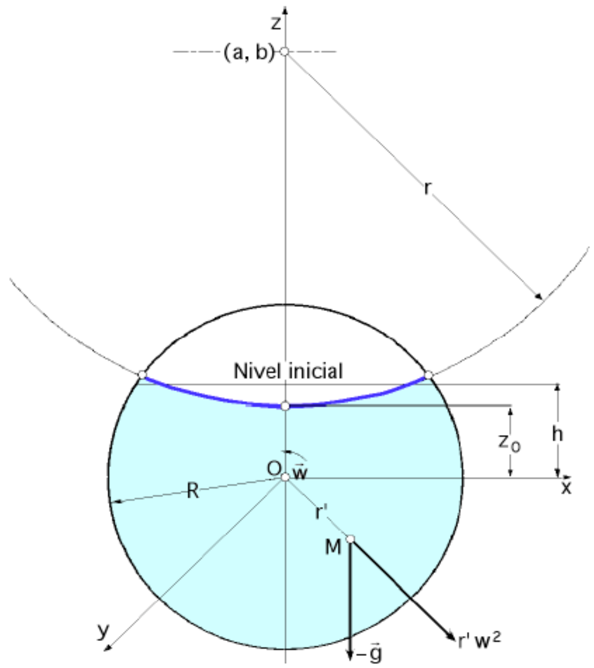
6.3.- Líquido que gira alrededor de un eje horizontal

Integrándolas

$$\frac{p}{\rho} = \omega^2 \frac{x^2}{2} + \left(-g\ z + \frac{z^2}{2}\ \omega^2 \right) + K$$

$$\omega^2 \frac{x^2}{2} + \left(-g\ z + \frac{z^2}{2}\ \omega^2 \right) = K' \ ;$$

$$x^2 + z^2 - \frac{2g}{\omega^2}\ z = \frac{2\ K'}{\omega^2}$$ Ecuación de circunferencia



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

Comparando con la ecuación de una circunferencia

$$\left.\begin{array}{l} (x-a)^2 + (z-b)^2 = r^2 \\ x^2 + z^2 - 2\ a\ x - 2\ b\ z + b^2 + a^2 = r^2 \end{array}\right\} \quad a = 0 \qquad b = \frac{g}{\omega^2}$$

6.3.- Líquido que gira alrededor de un eje horizontal

Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

El valor del radio r será

$$r^2 = b^2 + \frac{2K'}{\omega^2} = \frac{g^2}{\omega^4} + \frac{2K'}{\omega^2}$$

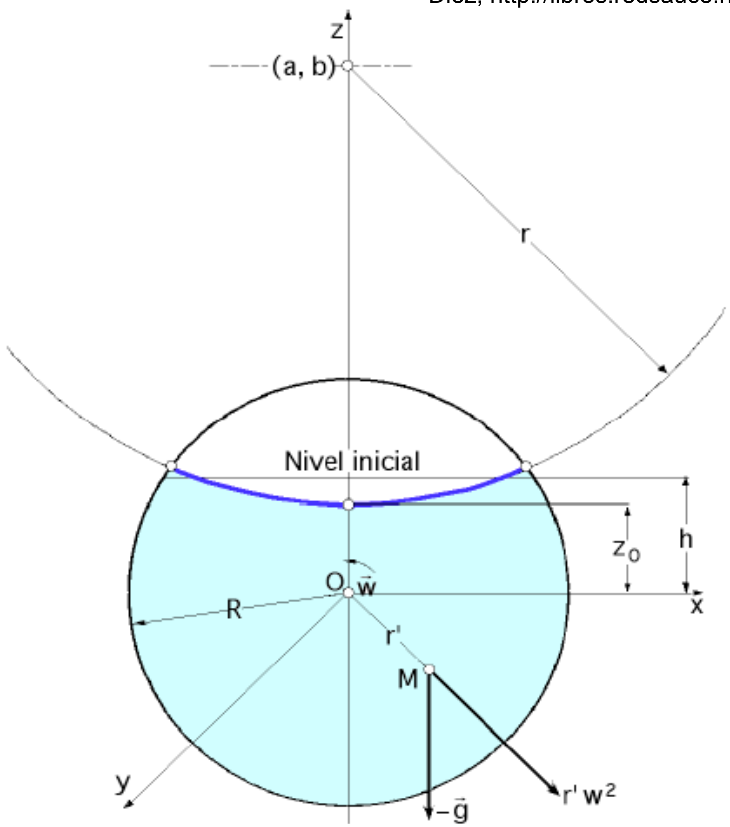
$$r = \frac{\sqrt{\left(\frac{g^2}{\omega^2}\right) + 2K'}}{\omega}$$

Para hallar z_0 $\Longrightarrow b - r = \frac{g}{\omega^2} - r = z_0$

Puntos de corte de las 2 circunferencias

$$x^2 + z^2 = R^2 = \frac{2g}{\omega^2} z + \frac{2K'}{\omega^2} = \frac{2}{\omega^2}(g\,z + K')$$

$$z = \frac{R^2\,\omega^2}{2g} - \frac{K'}{g}$$



Para ω=0, el radio superficie nivel infinito
Para ω=infinito, superficie nivel circunferencias concéntricas

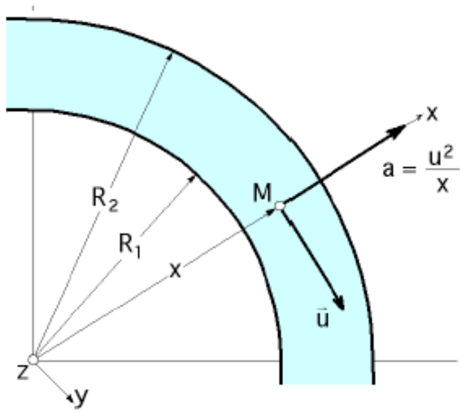
6.4.- Líquido con velocidad tangencial constante

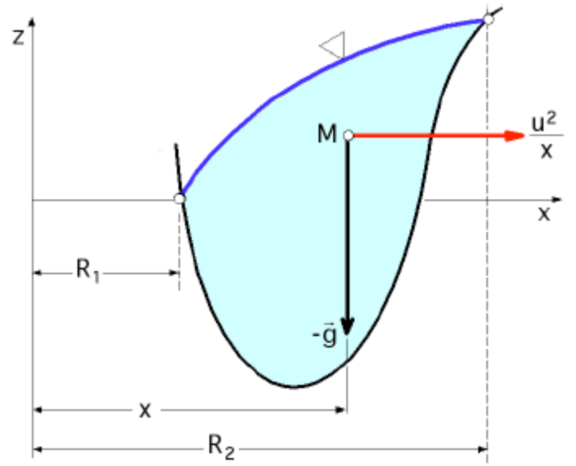
Para un punto M las fuerzas que actúan sobre el mismo por unidad de masa

$$X = \sum X_i = \frac{u^2}{x}$$

$$Y = \sum Y_i = 0$$

$$Z = \sum Z_i = -g$$





Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

6.4.- Líquido con velocidad tangencial constante

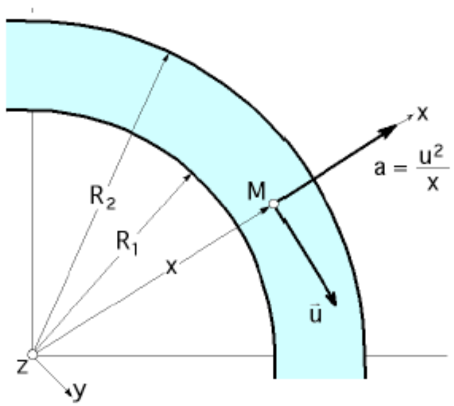
Superficies de nivel

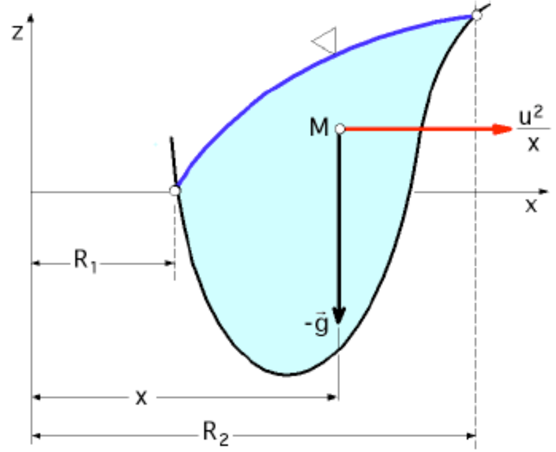
$$\frac{u^2}{x}\,dx - g\,dz = 0 \Rightarrow u^2 \ln x - g\,z = K$$

Para z=0; x=R_1

$$K = u^2 \ln R_1$$

$$u^2 \ln \frac{x}{R_1} = g\,z$$





Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

El punto más elevado se corresponde para X=R_2

$$z_{max} = \frac{u^2}{g} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

6.4.- Líquido con velocidad tangencial constante

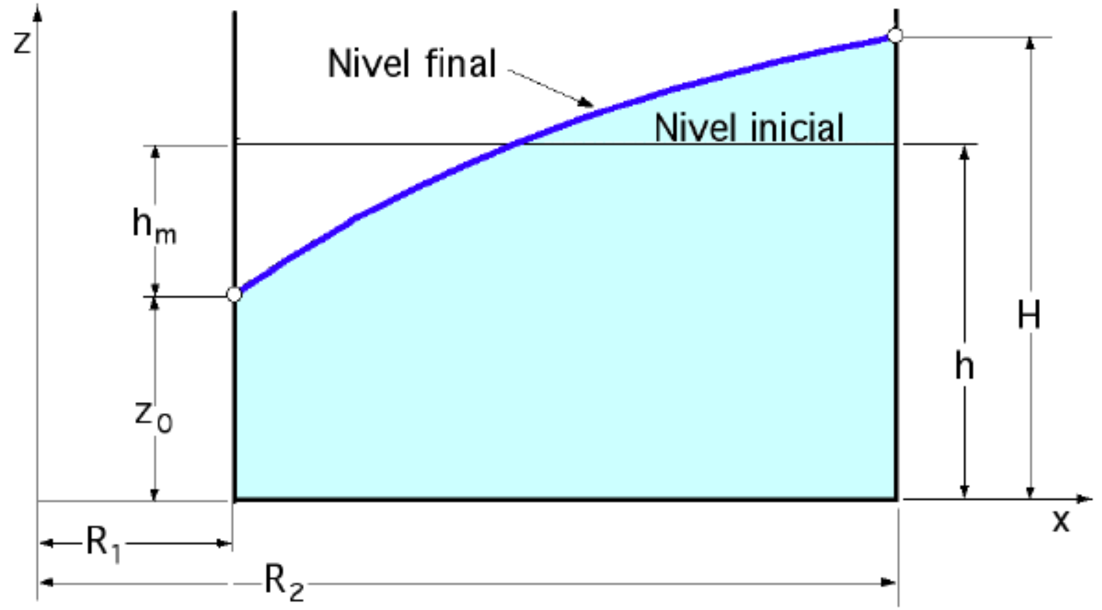
Aplicación

Giro de un líquido en un canal rectangular por el que circula agua a una altura inicial h

Ecuación de la superficie libre con los ejes según figura

$$z = z_0 + \frac{u^2}{g} \ln \frac{x}{R_1}$$

Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/



6.4.- Líquido con velocidad tangencial constante

Igualando secciones inicial y final

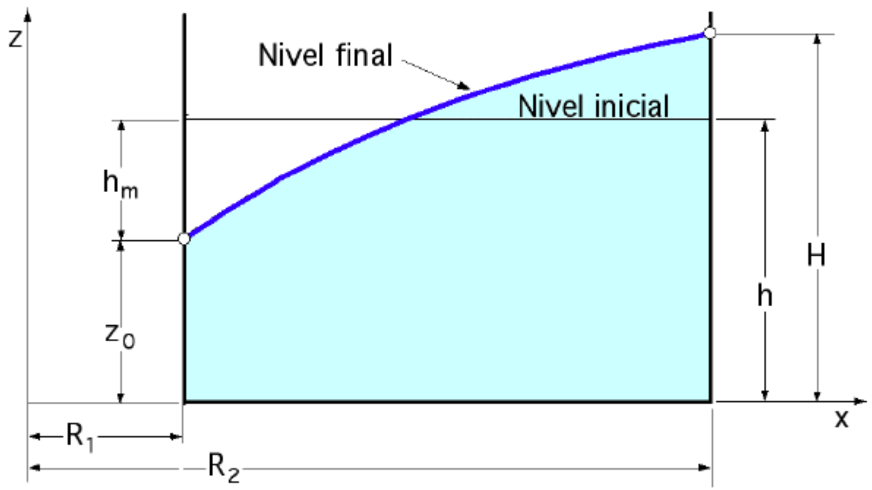
$$(R2 - R1)h = \int z\,dz = \int_{R_1}^{R_2}\left(z_0 + \frac{u^2}{g}\ \ln\frac{x}{R_1}\right)dx = z_0\ (R_2 - R_1) + \frac{u^2}{g}\left(R_2\ \ln\frac{R_2}{R_1} - R_2 + R_1\right)$$

$$h = z_0 + \frac{u^2}{g}\left(\frac{R_2}{R_2 - R_1}\ \ln\frac{R_2}{R_1} - 1\right) = z_0 + h_m$$

El punto más alto del agua en el canal se cumple para $x=R_2$ y $z=H$

$$z = z_0 + \frac{u^2}{g}\ln\frac{x}{R_1}$$

$$H = z_0 + \frac{u^2}{g}\ln\frac{R_2}{R_1} = h - \frac{u^2}{g}\left(\frac{R_2}{R_2 - R_1}\ \ln\frac{R_2}{R_1} - 1\right) + \frac{u^2}{g}\ \ln\frac{R_2}{R_1}$$



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/