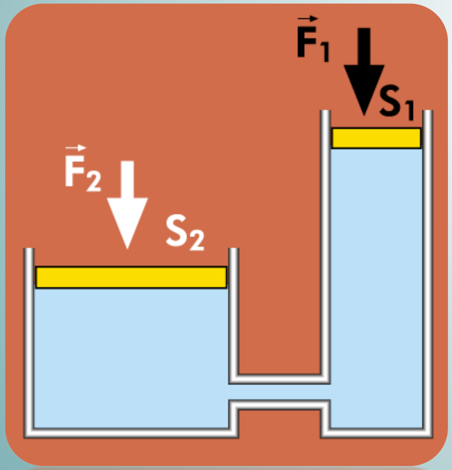
Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas

Tema 03. Cinemática de Fluidos



Severiano F. Pérez Remesal

Carlos Renedo Estébanez

DPTO. DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA

1.- INTRODUCCION (I)

ANALISIS EULERIANO

Fija las coordenadas (x_1, y_1, z_1) de un punto en las funciones que dan el campo de velocidades, expresándose la velocidad de las partículas móviles al pasar por dicho punto en el transcurso del tiempo; matemáticamente viene expresado por (x_1, y_1, z_1, t). Mediante esta técnica, conocido un punto fijo del espacio, las velocidades de las diversas partículas que pasan por ese punto, forman un continuo; este punto de vista se conoce como método de Euler.

ANALISIS LAGRANGIANO

Estudiauna partícula genérica del flujo, siguiendo a dicha partícula, método de Lagrange, lo cual significa que (x, y, z) no permanecen constantes en la expresión V(x, y, z, t), sino que varían de forma continua, dando en cada instante la posición de la partícula genérica. Por lo tanto, en este caso, las coordenadas espaciales serán función del tiempo; ambas consideraciones no dependen de si el campo es permanente o no.

1.- INTRODUCCION (II)

Fluido en movimiento cada partícula tiene una V=f(x,y,z,t) (Euleriana) sus proyecciones : u=u(x,y,z,t); v=v(x,y,z,t); w=w(x,y,z,t).

Movimiento **permanente o estacionario** solo depende de la posición: u=u(x,y,z); v=v(x,y,z); w=w(x,y,z).

Trayectoria lugar geométrico de las posiciones que ocupa una partícula a lo largo del tiempo.

Si a cada punto se le asigna su vector velocidad se obtiene un conjunto de vectores llamado **campo de velocidades**.

La **línea de corriente** ψ las líneas de corriente, es la envolventes de los vectores velocidad de las partículas fluidas del flujo. La línea de corriente satisface la condición:

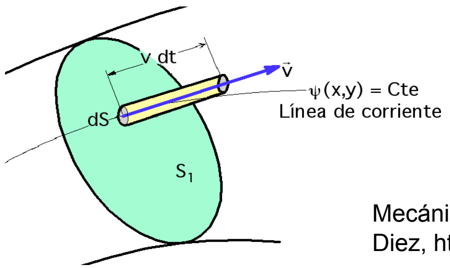
$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}.$$

En un movimiento permanente son fijas y coinciden con las trayectorias.

1.- INTRODUCCION (III)

Se llama manantial, en un punto, línea, superficie o volumen, cuando en dicho punto, línea, superficie o volumen aparecen ciertas cantidades de fluido que a partir del momento en que aparecen participan en la circulación.

Un sumidero en un punto, línea, superficie o volumen es aquel en que desaparecen ciertas cantidades de fluido que antes habían participado en la circulación.
El conjunto de las líneas de corriente que pasan por el contorno de un área infinitesimal, en un instante determinado, forman un tubo de fluido que se conoce como **tubo de corriente** o filete fluido.



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

Un número infinito de tubos de corriente adyacentes, da lugar ase conoce frecuentemente como **vena fluida**.

1.- INTRODUCCION (IV)

Para el flujo bidimensional en coordenadas rectangulares:
El potencial de velocidades φ se define como:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x};\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

La función corriente ψ se define como:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y};\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La derivada total de φ se puede poner en la forma: $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = u\ dx + v\ dy$

Las líneas equipotenciales son aquellas a lo largo de las cuales la función φ es constante, es decir: $d\varphi = u\ dx + v\ dy = 0$

La derivada total de ψ es: $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = -v\ dx + u\ dy$

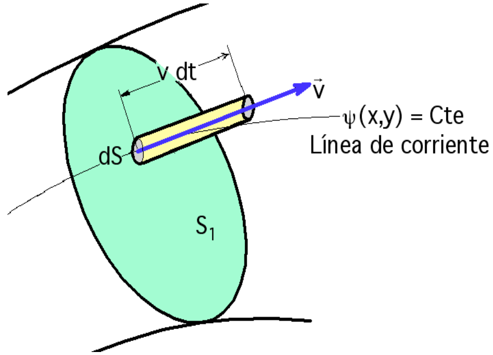
Para una línea de corriente, función de corriente constante ψ, resulta:

$d\psi = 0 = -v\ dx + u\ dy$; $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$ ecuación diferencial de las líneas de corriente para el flujo bidimensional.

2.- CAUDAL A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE ELEMENTAL (I)

El caudal Q de una corriente para una sección determinada, es el volumen de fluido que la atraviesa en la unidad de tiempo, m^3/seg. Si se considera un tubo de corriente de sección S_1 normal en cada uno de sus puntos a la línea de corriente correspondiente, y un elemento infinitesimal de sección dS, el volumen de fluido que pasa por dS en el tiempo dt es *(V dS dt)* ya que *(V dt)* es la longitud de este tubo de corriente infinitesimal.

$$Q = \frac{dW}{dt} = \iint_{S1} V ds$$



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

Si S_1 no es perpendicular a la línea de corriente en cada punto:

$$Q = \int_{S_1} V_n \, dS = \int_{S_1} V \cos\theta \, ds$$

Velocidad media correspondiente a la sección S_1 es:

$$V_{med} = \frac{\int_{S_1} V_n \, dS}{S_1} = \frac{Q}{S_1}$$

3.- ECUACIÓN DE CONTINUIDAD (I)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] = \rho q$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{V}\right) = \rho q$$

Si no existen manantiales ni sumideros, *q = 0*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{V}\right) = 0$$

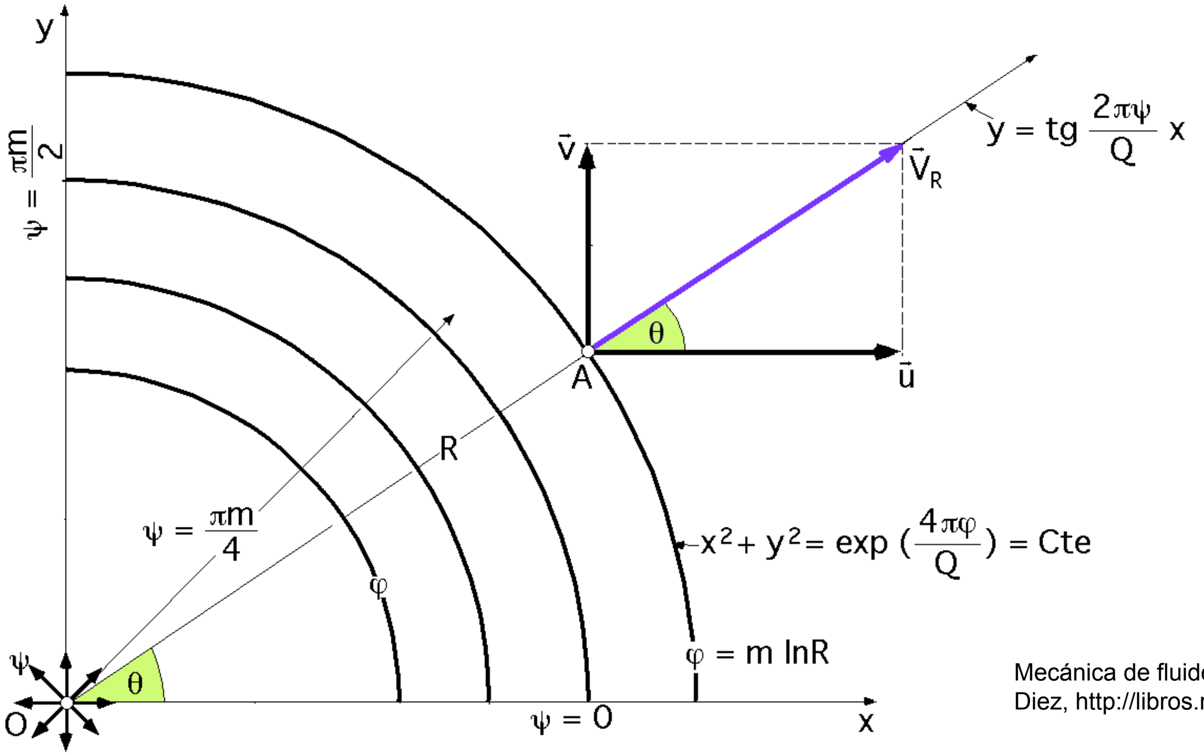
Si el fluido es incompresible, su densidad es constante: $div\vec{V} = 0$

Si el fluido se mueve paralelamente al eje Ox, las componentes de la velocidad son:

$$u = u\,;\, v = 0\,;\, w = 0 \Longrightarrow \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0\,;\, \rho u = cte\,;\, \rho g u = \gamma u = cte$$

4.-POTENCIAL DE VELOCIDADES PARA FUENTES Y SUMIDEROS EN FLUJO BIDIMENSIONAL (I)

En realidad se trata de una abstracción matemática que podría compararse, toscamente, con una toma o una derivación de una conducción por la que discurriese el fluido.

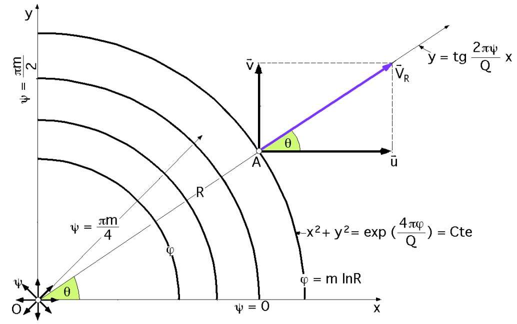


Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

4.-POTENCIAL DE VELOCIDADES PARA FUENTES Y SUMIDEROS EN FLUJO BIDIMENSIONAL (II)

Las líneas de corriente y en este tipo de flujo, son rectas radiales. Las componentes (u, v) de la velocidad resultante son:

$$u = V_R \cos \theta$$
$$v = V_R \,\mathrm{sen}\, \theta$$



Las coordenadas (x,y) del punto A son:

$$x = R \cos \theta$$
$$y = R \,\mathrm{sen}\, \theta$$

Se define el flujo Q por unidad de tiempo, (caudal), de la forma:

$$Q = 2 \pi R V_R \Rightarrow V_R = \frac{Q}{2 \pi R}$$

en la que, la intensidad del manantial se define, para dos y tres dimensiones, en la forma: $m(2dim) = \frac{Q}{2 \pi}$; $m(3dim) = \frac{Q}{2 \pi b}$ (*b* la longitud del manantial, perpendicular al plano del dibujo)

4.-POTENCIAL DE VELOCIDADES PARA FUENTES Y SUMIDEROS EN FLUJO BIDIMENSIONAL (III)

El potencial de velocidades ϕ para la fuente:

$$u = \frac{Q}{2\pi R}\cos\theta = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{R^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$v = \frac{Q}{2\pi R}sen\theta = \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{R^2} = \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\int\frac{x\,dx}{x^2+y^2} = \frac{Q}{4\pi}\ln\left(x^2+y^2\right) = \frac{Q}{4\pi}\ln R^2 = \frac{Q}{2\pi}\ln R$$

Para las líneas de corriente se cumple:

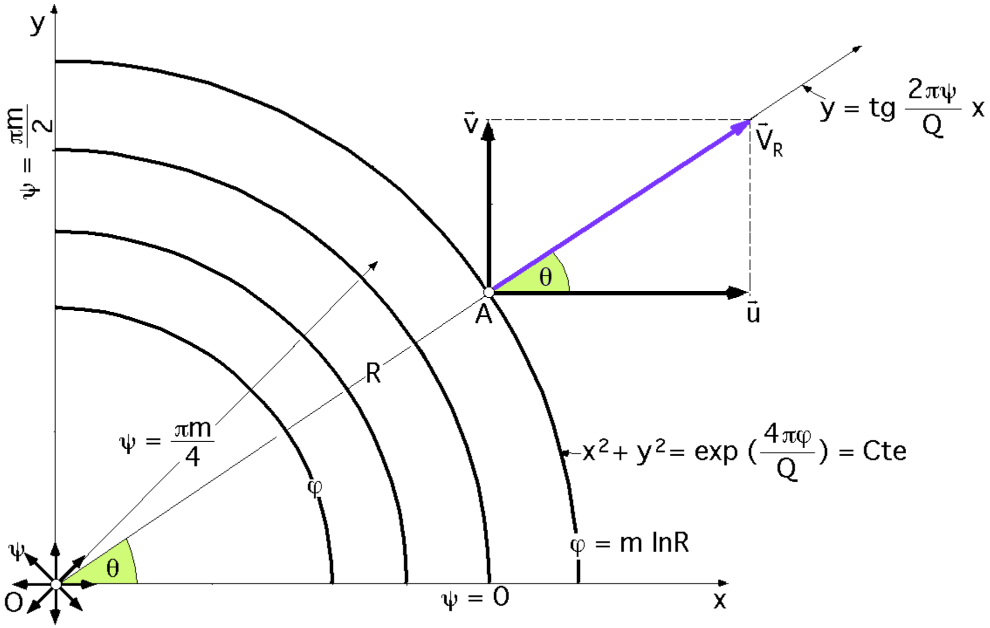
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

4.-POTENCIAL DE VELOCIDADES PARA FUENTES Y SUMIDEROS EN FLUJO BIDIMENSIONAL (IV)

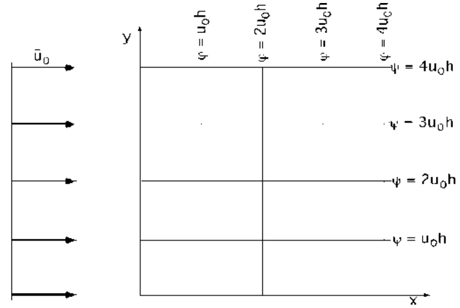
La función corriente toma la forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}; \; \psi = \frac{Q}{2\pi}\int \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \frac{Q}{2\pi} arc\,tg\frac{y}{x} = \frac{Q}{2\pi}\theta$$



5.-COMBINACIÓN DE UN FLUJO RECTILÍNEO Y UN MANANTIAL (I)

El potencial de velocidades para un flujo rectilíneo viene dado por, $\phi_R = u\,x$, y la función corriente por, $\psi_R = u\,y$.



El potencial de velocidades para flujo rectilíneo y fuente es:

$$\varphi = u_0 x + \frac{Q}{4\pi} \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

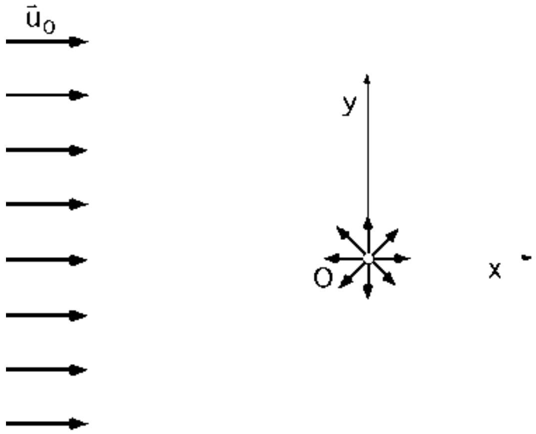
El potencial de la función corriente es: $\psi = u_0 y + \frac{Q}{2\pi} arc\,tg\,\frac{y}{x}$

Las componentes de la velocidad son:

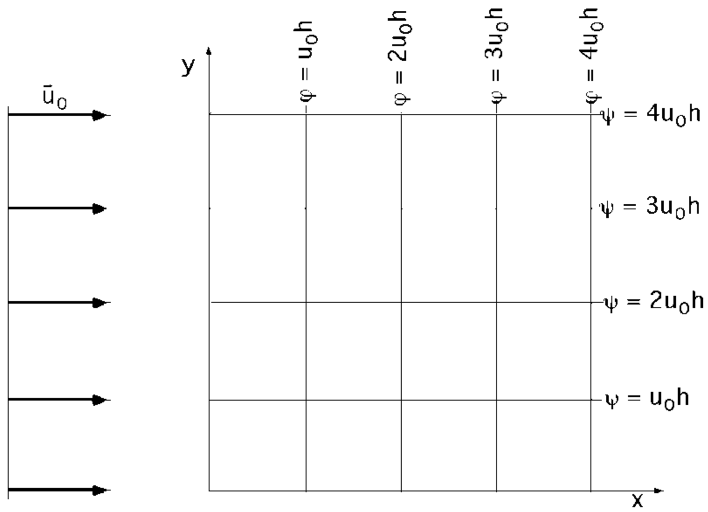
$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_0 + \frac{Q\,x}{2\pi\,(x^2 + y^2)}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{Q\,y}{2\pi\,(x^2 + y^2)}$$

5.-COMBINACIÓN DE UN FLUJO RECTILÍNEO Y UN MANANTIAL (II)



Flujo rectilíneo y fuente



Líneas equipotenciales y de movimiento

Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

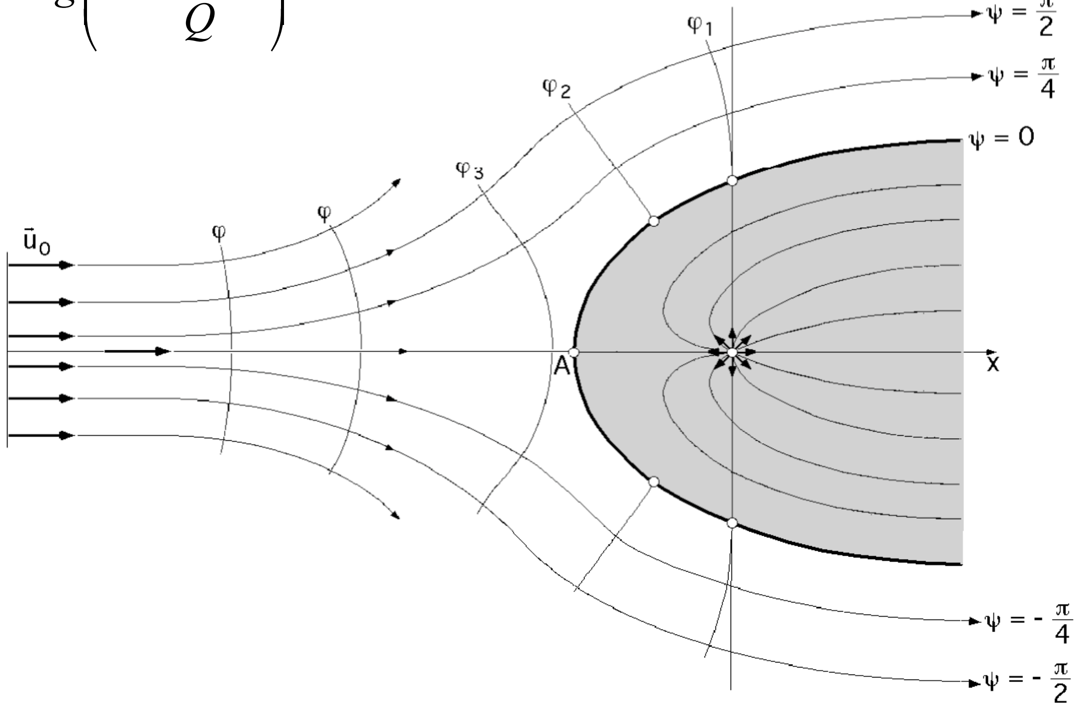
Las líneas de corriente, ψ = Cte, son de la forma: $u_0 y + \frac{Q}{2\pi} arc\,tg \frac{y}{x}$

y se obtienen dando a la constante los valores: $0, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{2}, \ldots$

5.-COMBINACIÓN DE UN FLUJO RECTILÍNEO Y UN MANANTIAL (III)

Se puede escoger como cuerpo sólido el dado por, ψ = 0, semicuerpo de Rankine de la forma:

$$\psi = 0; \frac{y}{x} = tg\left(-\frac{2\pi u_0\, y}{Q}\right)$$



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

También se podría haber tomado como cuerpo sólido cualquiera de los, ψ = Cte, y ser las líneas de corriente los restantes.

5.-COMBINACIÓN DE UN FLUJO RECTILÍNEO Y UN MANANTIAL (IV)

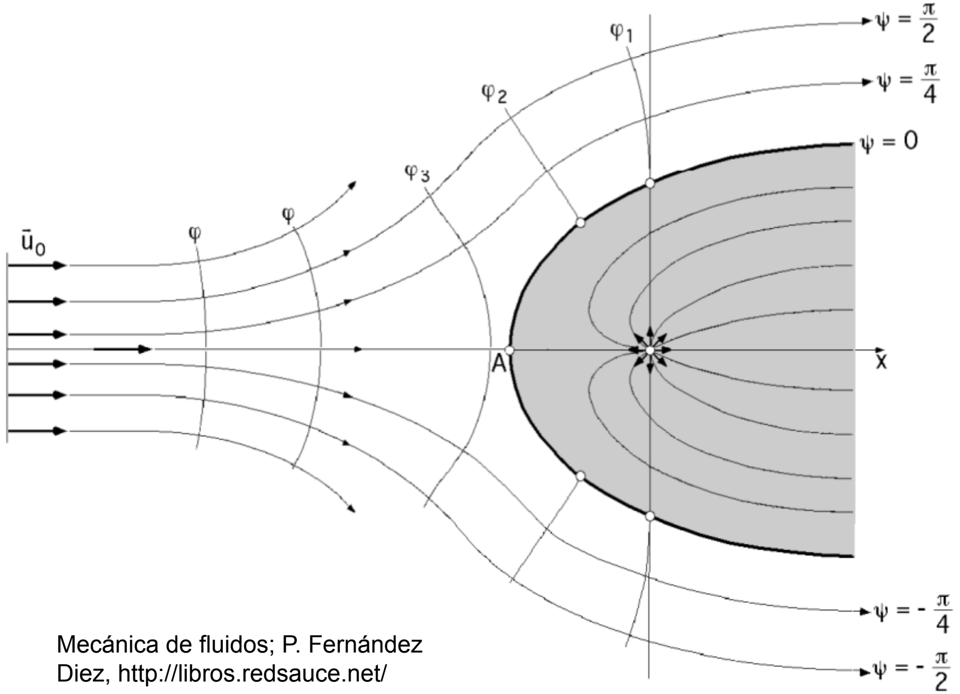
Un cuerpo semiinfinito separa a la corriente uniforme de la fuente; la parte superior y la parte inferior de dicho semicuerpo, coinciden en un punto de remanso, *V= 0*, y en él se tiene:

$$u = 0\,; x = -a$$

$$m = \frac{Q}{2\pi}\,; y = 0$$

$$u = u_0 + \frac{Q\,x}{2\pi\left(x^2 + y^2\right)} = u_0 - \frac{m}{a} = 0$$

$$a = \frac{m}{u_0} = \frac{Q}{2\pi\,u_0}$$



Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

El semicuerpo de Rankine simula muy bien la parte frontal de un cuerpo cilíndrico Inmerso en una corriente fluida (pila de un puente).

5.-COMBINACIÓN DE UN FLUJO RECTILÍNEO Y UN MANANTIAL (V)

Las componentes de la velocidad se pueden poner en coordenadas polares:

$$u = u_0 + \frac{m}{R}\cos\theta$$

$$v = \frac{m}{R} sen\theta$$

Para u = v = 0, se obtiene el punto de remanso A: $\theta = 0^o ; R = -\frac{m}{u_0}$

La velocidad *V* en cualquier punto viene dada por:

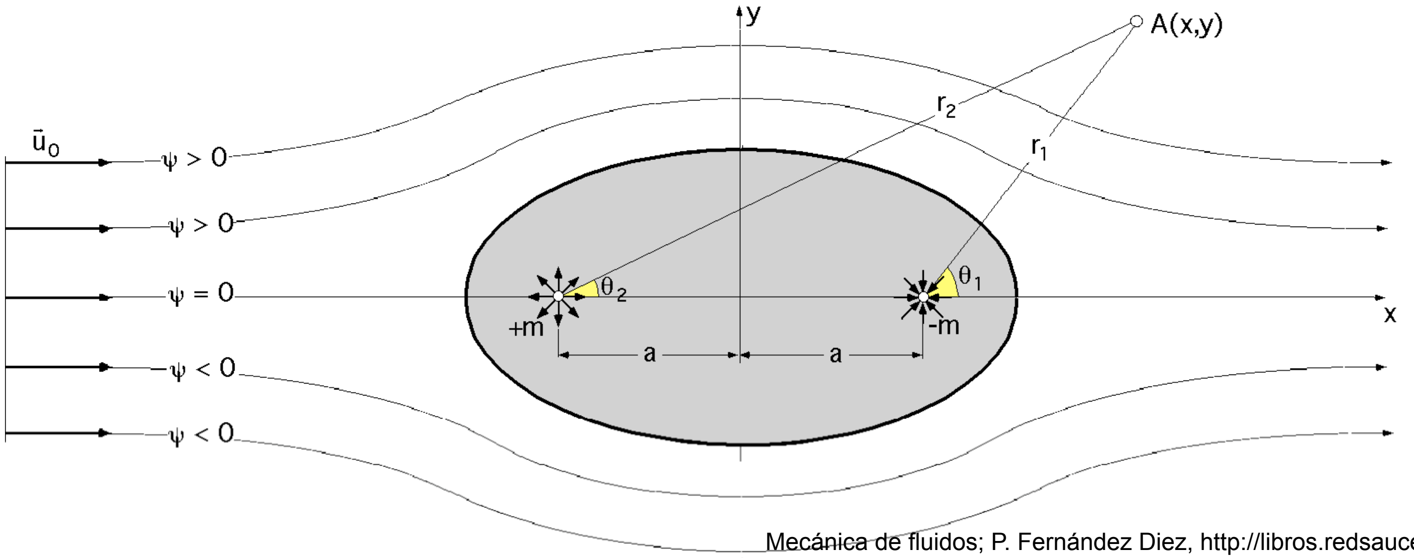
$$V = u^2 + v^2 = u_0^2 + \frac{2mu_0}{R}\cos\theta + \frac{m^2}{R^2}\cos^2\theta + \frac{m^2}{R^2} sen^2\theta =$$

$$u_0^2 + \frac{2mu_0}{R}\cos\theta + \frac{m^2}{R^2} = u_0^2 + \frac{2au_0^2}{R}\cos\theta + \frac{a^2 u_0^2}{R^2} =$$

$$u_0^2\left(1 + \frac{2a}{R}\cos\theta + \frac{a^2}{R^2}\right)$$

6.-ÓVALO DE RANKINE (I)

Cuando una fuente y un sumidero de igual intensidad se colocan equidistantes del origen de coordenadas, inmersos en una corriente uniforme *(u_0 x)* y todo el fluido de la fuente es absorbido por el sumidero, aparece una línea de corriente divisoria, definida entre el fluido de la corriente uniforme y el fluido transferido de la fuente al sumidero, línea que puede considerarse como la intersección con el plano (x,y) de la superficie de un cilindro de forma ovoidal, conocido como ovalo de Rankine.

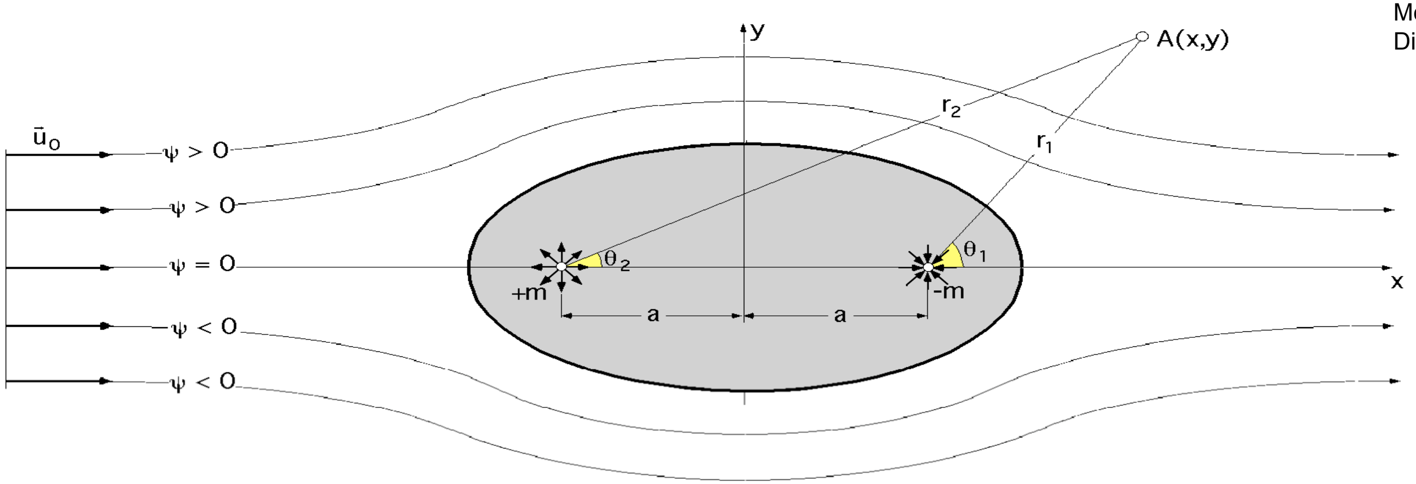


Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/

6.-ÓVALO DE RANKINE (II)

El ovalo de Rankine tiene por ecuaciones, para las líneas equipotenciales y de corriente, las siguientes:

Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, http://libros.redsauce.net/



$$\varphi = u_0 x - \frac{Q}{2\pi}\ln r_1 + \frac{Q}{2\pi}\ln r_2 = u_0 x - \frac{Q}{4\pi}\ln\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

$$\psi = u_0 y - \frac{Q}{2\pi}\theta_1 + \frac{Q}{2\pi}\theta_2 = u_0 y - \frac{Q}{2\pi}\left(arc\,tg\frac{y}{x-a} - arc\,tg\frac{y}{x+a}\right) =$$

$$u_0\, r\, sen\theta - m(\theta_1 - \theta_2) = u_0 y - m\, arc\,tg\frac{2\,a\,y}{x^2 + y^2 - a^2}$$