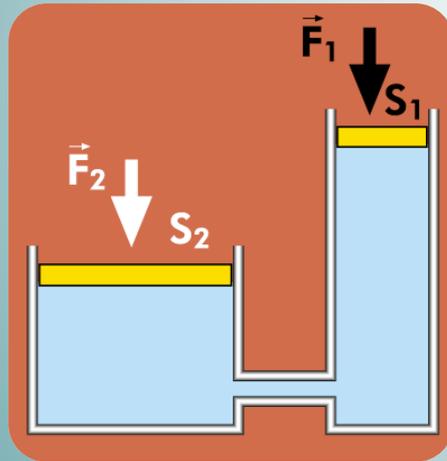


Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas

Tema 04. Dinámica de Fluidos



Severiano F. Pérez Remesal

Carlos Renedo Estébanez

DPTO. DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

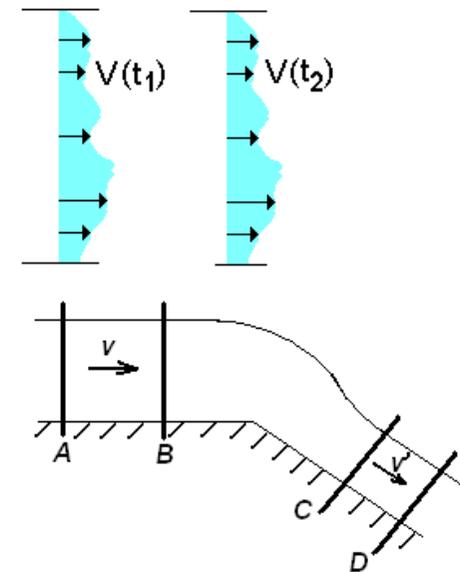


Objetivos:

En este tema se analizan las energías relacionadas con el movimiento de los fluidos, presentando la Ecuación de Bernoulli y el efecto Venturi. Estos conceptos se aplican a la resolución de sifones, y a la salida de líquidos de un depósito

El tema se completa con una práctica de laboratorio en la que se estudiará el efecto venturi, y su aplicación a la medida de un caudal

- 1.- Flujo de Fluidos
- 2.- Conductos y canales
- 3.- Energía de un flujo. Ec de Bernoulli
- 4.- Medidor de caudal tipo Venturi
- 5.- Tubos de Pitot y Prandtl
- 6.- Sifón
- 7.- Teorema de Torricelli



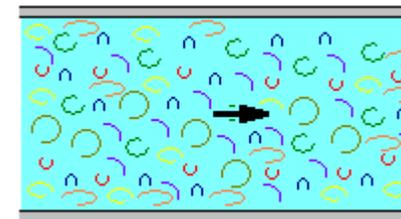
1.- Flujo de Fluidos (I)

- **Flujo uniforme**, si en cualquier sección transversal a la corriente la velocidad en pto homologos es igual en magnitud y dirección., Ej: Flujo de un fluido en un tubo de diámetro constante. Uniforme: AB y CD; No Uniforme: BC
- **Flujo no uniforme** en caso contrario. Como divergente a la salida de una bomba
- **Flujo permanente**, variación nula en el tiempo de presión y velocidad en un pto por donde circula un fluido (puede variar de un pto a otro). Ej: corriente en canal de hormigon de pendiente cte.
- **Flujo variable**, lo contrario. Ej: vaciado de depósito por un orificio de fondo

- 1.- Flujo de Fluidos
- 2.- Conductos y canales
- 3.- Energía de un flujo. Ec de Bernoulli
- 4.- Medidor de caudal tipo Venturi
- 5.- Tubos de Pitot y Prandtl
- 6.- Sifón
- 7.- Teorema de Torricelli

1.- Flujo de Fluidos (I)

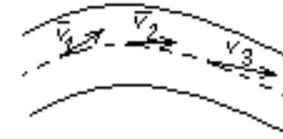
- **Flujo laminar**, el fluido se mueve en capas paralelas o cilíndricas. Ej.: glicerina en tubo circular
- **Flujo turbulento** en caso contrario;



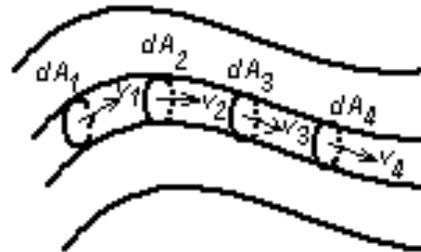
1.- Flujo de Fluidos (II)

Trayectoria: Camino que recorre una partícula

Líneas de Corriente (imaginarias) curva tangente a los vectores velocidad en cada pto



Tubo de corriente tubo imaginario o real cuya pared es una línea de corriente



Caudal volumétrico, Q [m^3/s]: volumen de fluido que atraviesa una sección por unidad de tiempo

$$Q = A V$$

V velocidad media normal a la sección



1.- Flujo de Fluidos (III)

Masa de un flujo, caudal másico, M [kg/s]

$$M = \rho Q$$

Ec de la continuidad de un flujo

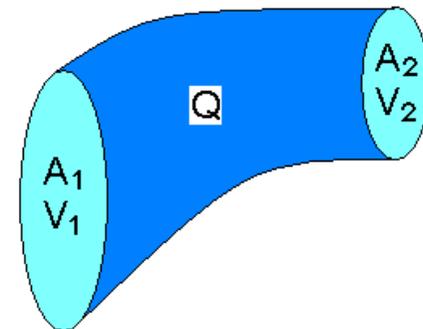
Tubo de corriente de densidad cte, en régimen permanente $M_1 = M_2$

$$Q = A V \quad \rho_1(A_1 V_1) = \rho_2(A_2 V_2) \quad \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2$$

$$[\times g] \Rightarrow \gamma_1 A_1 V_1 = \gamma_2 A_2 V_2$$

Si el fluido es incompresible (V cte), y $\gamma_1 = \gamma_2$

$$Q_1 = Q_2 \quad A_1 V_1 = A_2 V_2 \quad \text{Ecuación de continuidad}$$

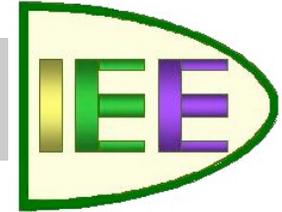




1.- Flujo de Fluidos (IV)

Fuerzas que actúan sobre un fluido

1. La fuerza de la gravedad (externa)
2. La fuerza debida a la diferencia de presiones (interna)
3. La fuerza de la viscosidad (nula en fluido ideal) (interna)
4. La fuerza de la elasticidad (nula en fluido incompresible) (interna)
5. La tensión superficial (despreciable) (interna)



1.- Flujo de Fluidos (V)

ECUACIONES DE EULER (I)

Fluido perfecto (las presiones que se ejercen sobre las caras de este paralelepípedo, son normales a las mismas) en movimiento, y un pequeño paralelepípedo de flujo, fijo, de lados infinitamente pequeños, y de volumen, $dx dy dz$. La resultante F de las fuerzas exteriores que actúan sobre este volumen tiene de componentes, X , Y , Z por unidad de masa. Aplicando la segunda ley de Newton al paralelepípedo:

$$\sum F_x = m a_x = m \frac{du}{dt}$$

$$\sum F_y = m a_y = m \frac{dv}{dt}$$

$$\sum F_z = m a_z = m \frac{dw}{dt}$$

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + X \rho dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{du}{dt}$$

$$p dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz + Y \rho dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{dv}{dt}$$

$$p dy dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dy dx + Z \rho dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{dw}{dt}$$



1.- Flujo de Fluidos (V)

ECUACIONES DE EULER (II)

Resolviendo la primera de las tres ecuaciones:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + X \rho = \rho \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt}$$

Haciendo lo mismo con las demás componentes nos quedan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + X \rho &= \rho \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + Y \rho &= \rho \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{dv}{dt} \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + Z \rho &= \rho \frac{dw}{dt} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{dw}{dt} \end{aligned}$$



1.- Flujo de Fluidos (V)

ECUACIONES DE EULER (III)

Como $u = f(x, y, z, t)$, y ser: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, su derivada respecto de t es:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Si sustituimos en el sistema de ecuaciones tenemos las ecuaciones de EULER

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \left(\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

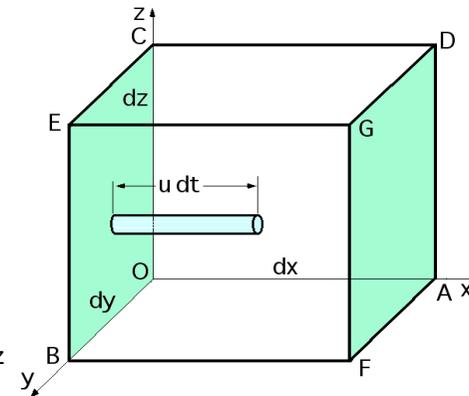
1.- Flujo de Fluidos (V)

ECUACIONES DE NAVIER-STOKES (I)

Si a las ecuaciones de Euler se añaden las que ocasiona la viscosidad, se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes. Para su cálculo y determinación, estudiaremos lo que acontece a lo largo del eje Ox, teniendo en cuenta la ecuación de Newton de la viscosidad para la velocidad u , y que tendrá por componentes $(\tau_{ux}, \tau_{uy}, \tau_{uz})$ según los ejes (x, y, z) respectivamente, en la forma:

$$\tau_{ux} = \eta \frac{\partial u}{\partial x}; \tau_{uy} = \eta \frac{\partial u}{\partial y}; \tau_{uz} = \eta \frac{\partial u}{\partial z}$$

Mecánica de fluidos; P. Fernández Diez, <http://libros.redsauce.net/>



Paralelepípedo elemental para fluidos reales

Estas tensiones de cortadura son correspondientes al flujo entrante por las caras (ECOB) ó $dy dz$, (EGFB) ó $dx dz$, y (ECDG) ó $dx dy$, respectivamente.

1.- Flujo de Fluidos (V)

ECUACIONES DE NAVIER-STOKES (II)

Para las caras opuestas del cubo elemental, a las anteriormente citadas, se tiene:

$$\tau_{ux} - \frac{\partial \tau_{ux}}{\partial x} dx = \eta \frac{\partial u}{\partial x} - \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

$$\tau_{uy} - \frac{\partial \tau_{uy}}{\partial y} dy = \eta \frac{\partial u}{\partial y} - \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$$

$$\tau_{uz} - \frac{\partial \tau_{uz}}{\partial z} dz = \eta \frac{\partial u}{\partial z} - \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz$$

Si las restamos de las primeras y multiplicamos por la sección correspondiente:

1.- Flujo de Fluidos (V)

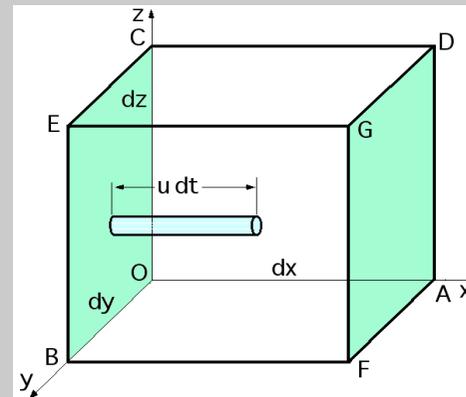
ECUACIONES DE NAVIER-STOKES (III)

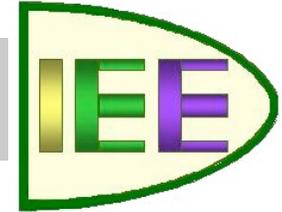
$$e_j e_{Ox} : \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx; e_j e_{Oy} : \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy; e_j e_{Oz} : \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz$$

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy dz = dF_{ux}$$

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy dz = dF_{uy}$$

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dx dy dz = dF_{uz}$$





1.- Flujo de Fluidos (V)

ECUACIONES DE NAVIER-STOKES (IV)

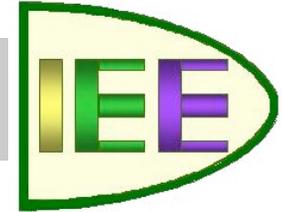
Sumándolas se obtiene la fuerza total debida a la viscosidad, para la velocidad u :

$$dF_u = dF_{ux} + dF_{uy} + dF_{uz} = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz = \eta \nabla^2 u dx dy dz$$

Lo mismo se podría hacer para las velocidades v y w actuando sobre las mismas caras anteriormente definidas quedando:

$$dF_v = \eta \nabla^2 v dx dy dz \quad \text{Fuerza debida a viscosidad para } v$$

$$dF_w = \eta \nabla^2 w dx dy dz \quad \text{Fuerza debida a viscosidad para } w$$



1.- Flujo de Fluidos (V)

ECUACIONES DE NAVIER-STOKES (V)

Añadiendo estas expresiones a las ecuaciones de Euler, se tiene, para la velocidad u :

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = \rho X dx dy dz - \frac{du}{dt} \rho dx dy dz + \eta \nabla^2 u dx dy dz$$

Simplificando:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt} + \eta \nabla^2 u$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \eta \nabla^2 u = X - \nabla u + \eta \nabla^2 u$$



1.- Flujo de Fluidos (V)

ECUACIONES DE NAVIER-STOKES (VI)

Para las velocidades v y w :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \eta \nabla^2 v = Y - \nabla v + \eta \nabla^2 v$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \eta \nabla^2 w = Z - \nabla w + \eta \nabla^2 w$$

En forma vectorial:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \bar{F} - \frac{dV}{dt} + \eta \nabla^2 \bar{V}$$

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\nabla P + \bar{F} + \eta \nabla^2 \bar{V}$$



1.- Flujo de Fluidos (V)

ECUACION DE BERNOULLI (I)

Dadas las ecuaciones de Euler para fluido no viscoso:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \left(\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial t} \right)$$

Reduciendo:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{dw}{dt}$$



1.- Flujo de Fluidos (V)

ECUACION DE BERNOULLI (II)

Si multiplicamos por dx, dy y dz respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx &= X dx - \frac{du}{dt} dx = X dx - \frac{du}{dt} u dt \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy &= Y dy - \frac{dv}{dt} dy = Y dy - \frac{dv}{dt} v dt \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz &= Z dz - \frac{dw}{dt} dz = Z dz - \frac{dw}{dt} w dt \end{aligned}$$

Simplificando y sumando las 3 ecuaciones miembro a miembro teniendo en cuenta que $p=f(x,y,z,t)$:

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial t} dt \\ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right] &= \frac{1}{\rho} \left(dp - \frac{\partial p}{\partial t} dt \right) = X dx + Y dy + Z dz - (u du + v dv + w dw) \end{aligned} \quad 17$$



1.- Flujo de Fluidos (V)

ECUACION DE BERNOULLI (III)

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

$$2V dV = 2(u du + v dv + w dw), d\left(\frac{V^2}{2}\right) = u du + v dv + w dw, \text{luego:}$$

$$\frac{1}{\rho} \left(dp - \frac{\partial p}{\partial t} dt \right) = X dx + Y dy + Z dz - d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

En régimen permanente y campo gravitatorio:

$$\frac{\partial p}{\partial t} dt = 0$$

$$(X, Y, Z) = (0, 0, -g)$$



1.- Flujo de Fluidos (V)

ECUACION DE BERNOULLI (III)

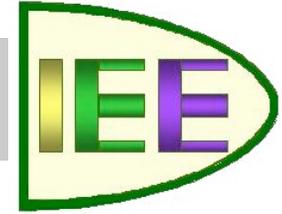
La ecuación fundamental de la hidráulica quedará:

$$\frac{1}{\rho} dp = -g dz - d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

Si el fluido es incompresible: $\rho = cte; \gamma = \rho g$

Integrando nos queda la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{p}{\gamma} + g z + \frac{v^2}{2g} = cte$$



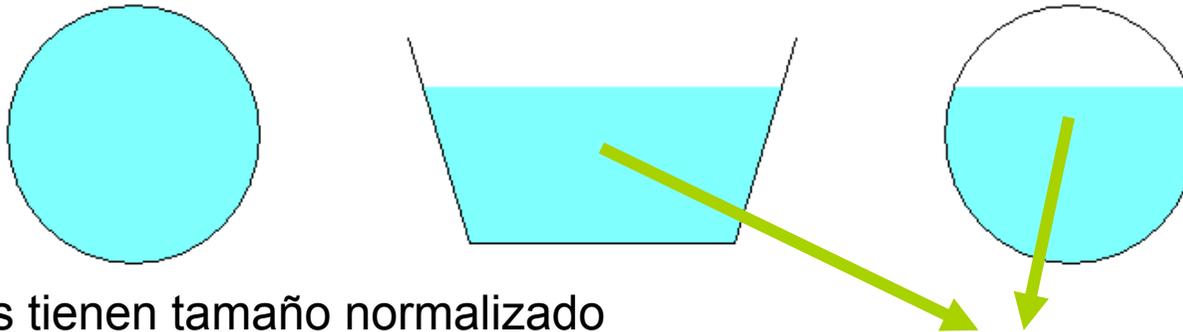
1.- Flujo de Fluidos (VI)

Una manguera de 25 mm de diámetro termina en una boquilla con un orificio de 10 mm de diámetro. Si la velocidad media del agua en la manguera es de 0,75 m/s, calcular:

- El caudal
- La velocidad a la salida

2.- Conductos y canales (I)

- Conductos: el área del flujo ocupa toda el área disponible
- Canales: tiene una superficie libre



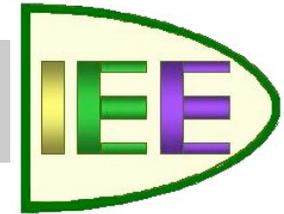
- Tubos tienen tamaño normalizado

La pérdida de energía en ellos depende de:

- la viscosidad del fluido, $f(T)$
- de la rugosidad del tubo
- el cuadrado de la velocidad del fluido

$$\text{Diámetro Hidráulico} = \frac{\text{Área Flujo}}{\text{Perímetro Mojado}}$$

La velocidad es fuente de ruidos [$v < 5 \text{ m/s}$]



3.- Energía de un flujo: Ec de Bernoulli (I)

La energía total de un fluido es:

$$E = E_{pot} + E_c + E_{pres} \quad [J]$$

Se puede expresar, en unidades de altura, y es la altura de carga H

$$H = z + \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} \quad [m] \quad \left\{ \begin{array}{ll} z & \text{cota o cabeza de elevación} \\ V^2/2g & \text{altura de velocidad o cab. de vel.} \\ p/\gamma & \text{altura de presión o cab. de presión} \end{array} \right. \quad [J = Nm]$$

Teorema de *Bernoulli*: la variación de la energía de un flujo incompresible sin transmisión de calor

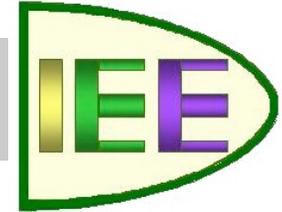
$$E_{entrante} + E_{añadida} - E_{extraída} - E_{perdida} = E_{saliente} \quad [J]$$

$$\left(z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} \right) + H_{añá} - H_{ext} - H_{per} = \left(z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \right) \quad [m]$$


 Bomba


 Turbina


 Tubería



3.- Energía de un flujo: Ec de Bernoulli (II)

La H_{per} en tuberías, válvulas y demás elementos \approx proporcional a V^2

$$H_{\text{per}} = \text{cte} \frac{V^2}{2g} \quad [\text{m}] \quad \text{La cte se determina experimentalmente}$$

- Si en un flujo no se pierde, añade o extrae energía, *ideal* ($H_1 = H_2$)

$$\text{Ec. Bernoulli} \Rightarrow z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad [\text{m}]$$

- Si además no hay diferencia de cotas ($z_1 = z_2$)

$$\text{Ec. Bernoulli} \Rightarrow \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad [\text{m}]$$

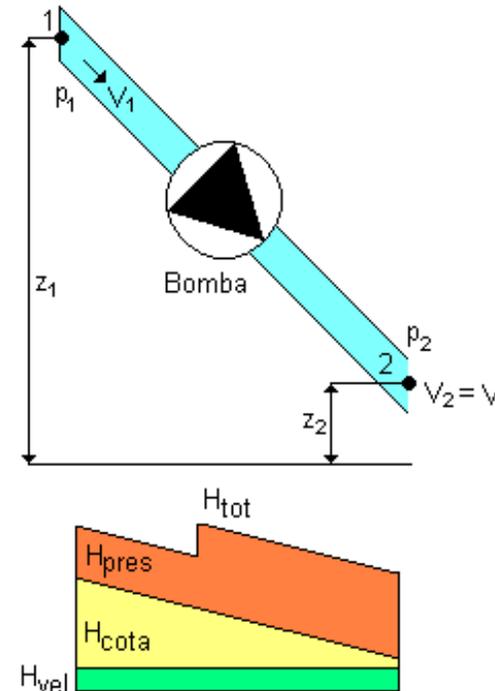
3.- Energía de un flujo: Ec de Bernoulli (III)

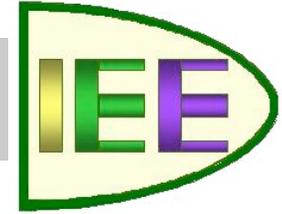
Aplicando *Bernoulli* hay que considerar:

- Las partes expuestas a la atmósfera tienen presión manométrica nula
- En conducto de igual sección los términos de velocidad se cancelan
- Si se aplica entre puntos con igual cota, estos términos se cancelan

Las **líneas de altura o energía total** representan la energía existente en cada punto de una tubería respecto a un plano de referencia

Se suelen representar las líneas que corresponden a los términos de las alturas de cota, velocidad y presión.





3.- Energía de un flujo: Ec de Bernoulli (IV)

Un flujo puede desarrollar una potencia

$$\text{Pot} = \gamma Q H \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \quad \text{m}^3 / \text{seg} \quad \text{m} = \text{N m} / \text{seg} = \text{J} / \text{seg} = \text{W} \right]$$

- La potencia agregada por una bomba, P_B

$$P_B = \gamma Q H \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Rendimiento de la bomba es } \eta_B \\ \text{La potencia que demanda del motor, } P_M \end{array} \right.$$

$$\eta_B = \frac{P_B}{P_M}$$

- La potencia hidráulica transmitida a una turbina, P_H

$$P_H = \gamma Q H \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Rendimiento de la turbina es } \eta_T \\ \text{La potencia que entrega la turbina, } P_T \end{array} \right.$$

$$\eta_T = \frac{P_T}{P_H}$$



3.- Energía de un flujo: Ec de Bernoulli (VI)

A través de una turbina de 1 m de altura circulan $0,214 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua, siendo las presiones a la entrada y salida de $147,5 \text{ kPa}$ y $-34,5 \text{ kPa}$ respectivamente (secciones de 300 y 600 mm). Determinar la potencia comunicada por la corriente a la turbina.

4.- Medidor de caudal tipo Venturi (I)

Si no se pierde, añade o extrae energía y no hay diferencia de cotas ($z_1 = z_2$)

$$\text{Ec. Bernoulli} \Rightarrow \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad [\text{m}]$$

$$\text{Cont. flujo} \Rightarrow A_1 V_1 = A_2 V_2$$

En un estrechamiento la presión disminuye

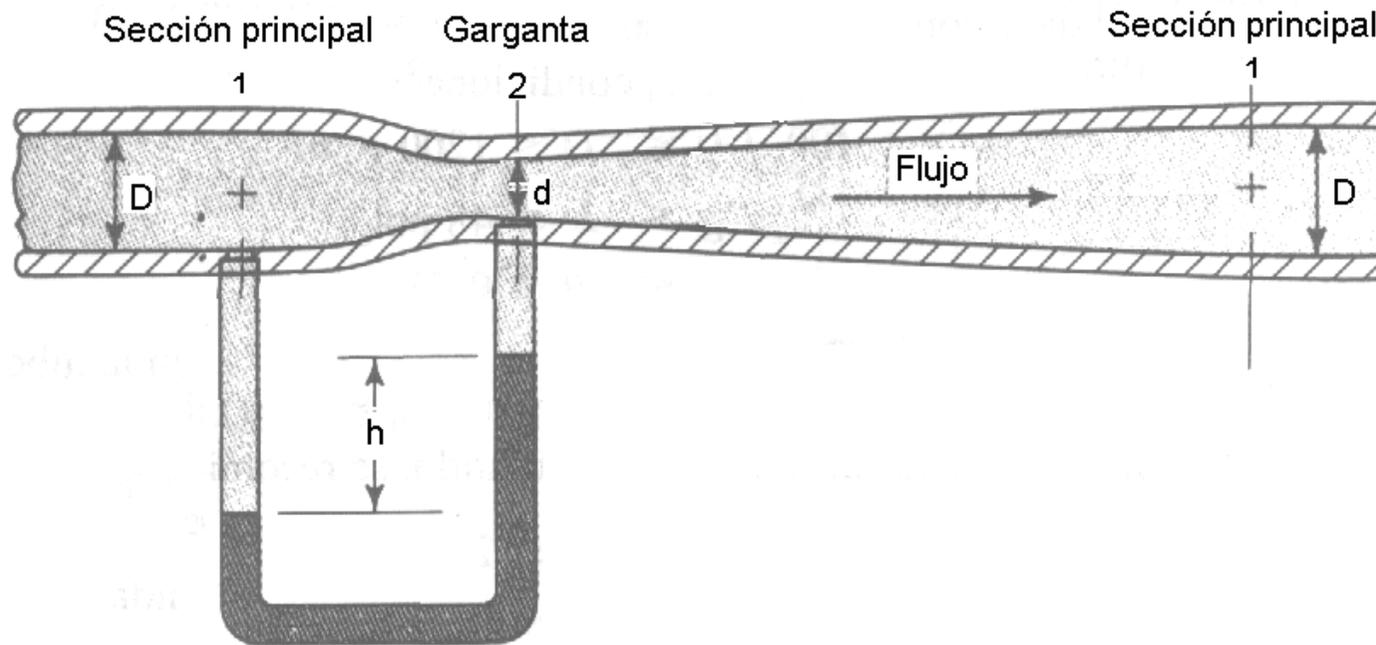
$$A_1 > A_2 \Rightarrow V_1 < V_2 \quad \left. \vphantom{A_1 > A_2} \right\} \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad p_2 < p_1 \Rightarrow \text{Peligro de cavitación}$$

En un ensanchamiento la presión aumenta

$$A_1 < A_2 \Rightarrow V_1 > V_2 \quad \left. \vphantom{A_1 < A_2} \right\} \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad p_2 > p_1$$

4.- Medidor de caudal tipo Venturi (II)

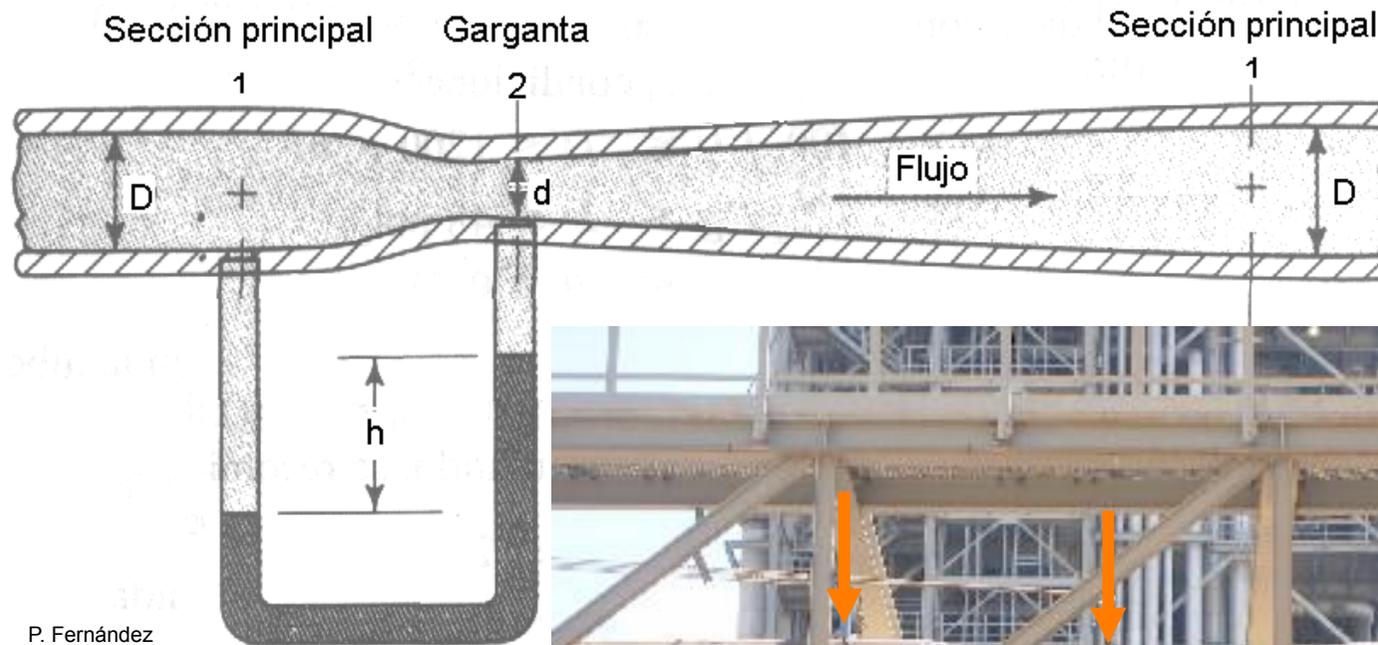
Un estrechamiento calibrado en la tubería con dos tomas de presión



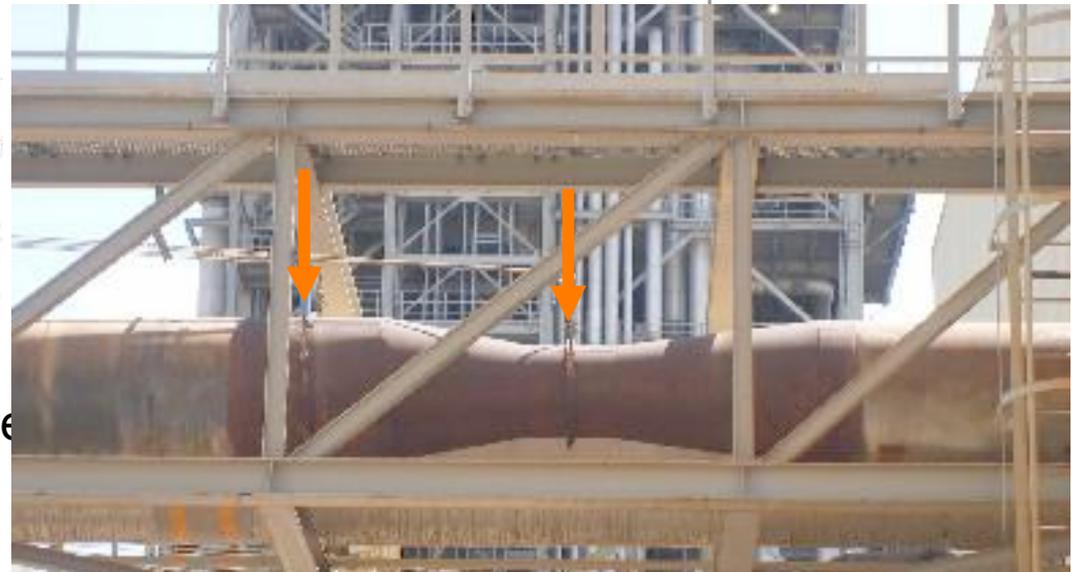
Miden la velocidad indirectamente al medir la diferencia de presiones

4.- Medidor de caudal tipo Venturi (II)

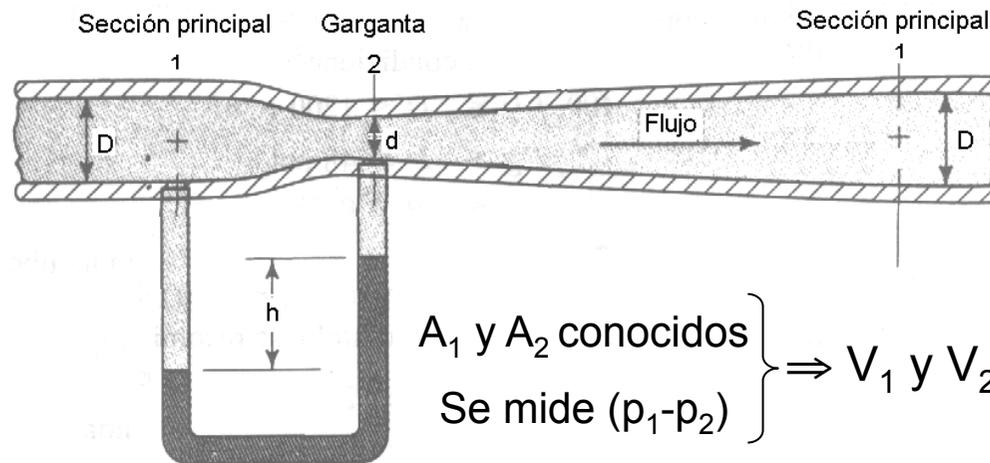
Un estrechamiento calibrado en la tubería con dos tomas de presión



Miden la velocidad indirectamente



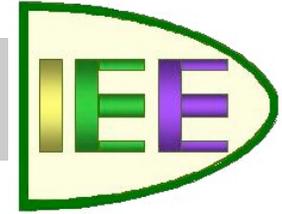
4.- Medidor de caudal tipo Venturi (III)



En la práctica
 $H_2 < H_1$

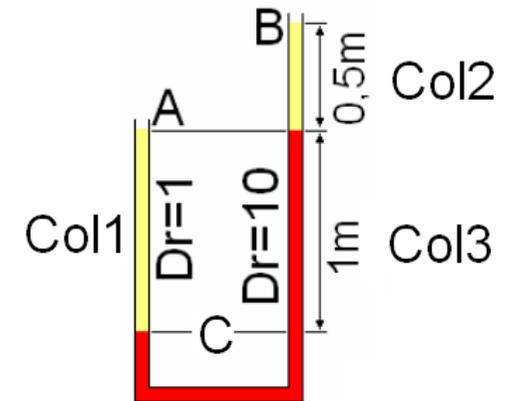
$$\left. \begin{aligned} A_1 V_1 &= A_2 V_2 \\ \left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} \right) &= \left(\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \right) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{A_2}{A_1} V_2 \\ \frac{p_1 - p_2}{\gamma} &= \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \end{aligned} \right\} \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - \left(\frac{A_2}{A_1} V_2 \right)^2}{2g} = \frac{V_2^2 \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right)}{2g}$$

$$V_2 = \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1} \right) \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_1 - p_2)} \Rightarrow V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2$$



4.- Medidor de caudal tipo Venturi (IV)

Cual es la diferencia de presiones, en unidades del sistema internacional, entre los puntos A y B de la figura



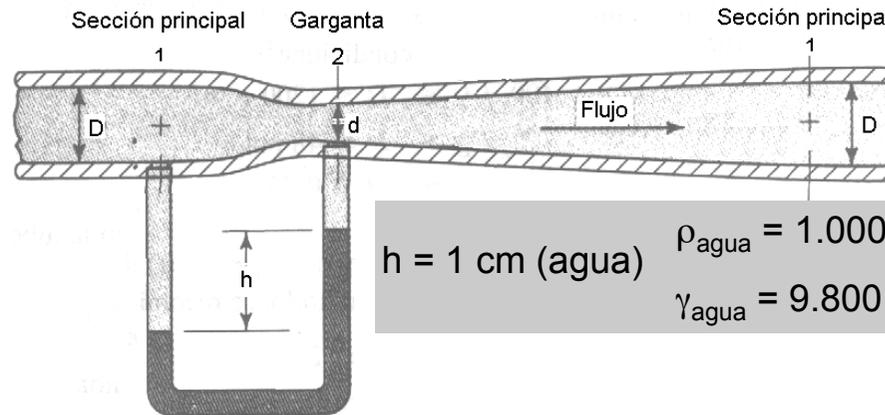
4.- Medidor de caudal tipo Venturi (V)

$\rho_{\text{aire}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$

$\gamma_{\text{aire}} = 11,76 \text{ N/m}^3$

$S = (\pi R^2) = 0,20 \text{ m}^2$

$s = (\pi r^2) = 0,10 \text{ m}^2$



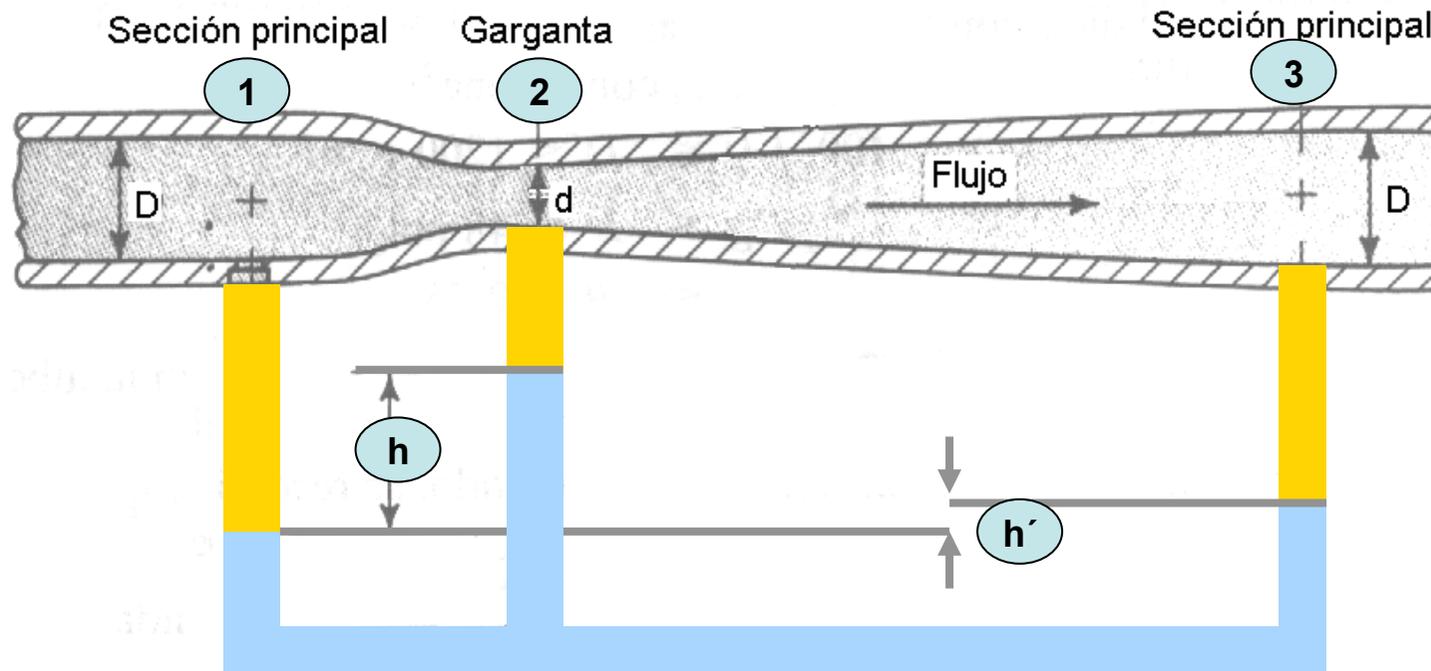
$Z_1 = Z_2$

$h = 1 \text{ cm (agua)}$

$\rho_{\text{agua}} = 1.000 \text{ kg/m}^3$

$\gamma_{\text{agua}} = 9.800 \text{ N/m}^3$

4.- Medidor de caudal tipo Venturi (VI)



En realidad en el estrechamiento y ensanchamiento sí se pierde energía

$$H_2 < H_1$$

En medidas precisas habría que verificar la caída de presión total en el venturi, y realizar las correcciones oportunas

5.- Tubos de Pitot y Prandtl (I)

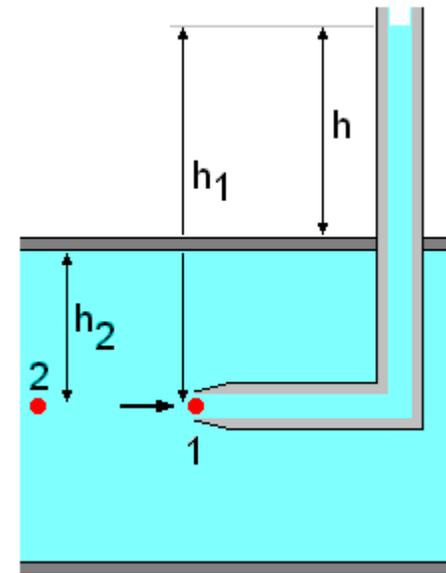
Mide la presión de estancamiento:
(presión total = estática + dinámica)

En **1** se produce un remanso $\Rightarrow V_1 = 0$

$$z_A + \frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma}$$

$p_1 = p_{\text{Pitot}}$

Sin H_{perd}



$$\left. \begin{matrix} z_1 = z_2 \\ V_1 = 0 \end{matrix} \right\} [\text{Bernoulli}_{1 \rightarrow 2}] \quad \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{V_2^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

$$\left. \begin{matrix} p = (\rho g)h \\ p_1 = (\rho g)h_1 = \gamma h_1 \\ p_2 = (\rho g)h_2 = \gamma h_2 \end{matrix} \right\} \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = h_1 - h_2 = h$$

$V_2 = \sqrt{2gh}$

Altura de
presión
dinámica

5.- Tubos de Pitot y Prandtl (II)

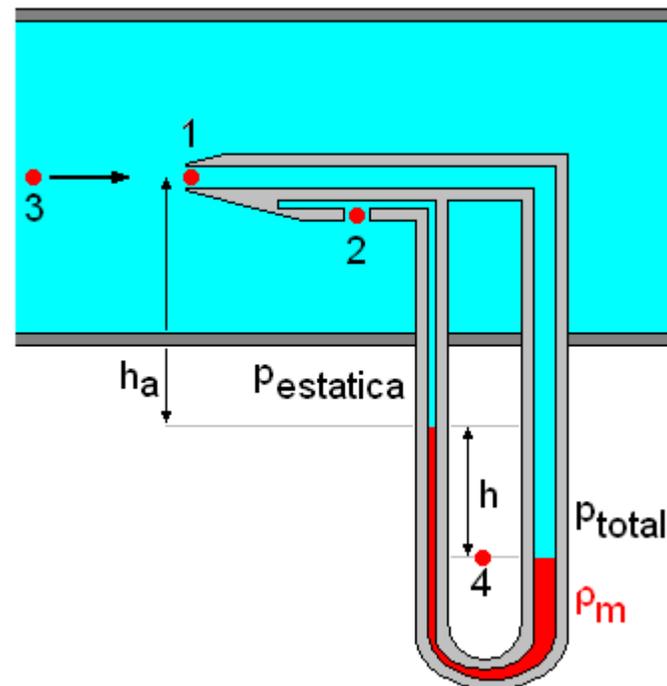
Mide la P_{total} al restar la $P_{estática}$

$$z_A + \frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma}$$

Sin H_{perd}

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = z_3 \approx z_2 \\ V_1 = 0 \\ V_2 \approx V_3 \\ p_2 \approx p_3 \end{array} \right\}$$

[Bernoulli_{1→3}] $\frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma}$



[Man. Dif.] $p_4 = p_1 + \rho g (h + h_a) = p_2 + \rho g h_a + \rho_{man} g h$

[$p_1 - p_2 =$] \Rightarrow

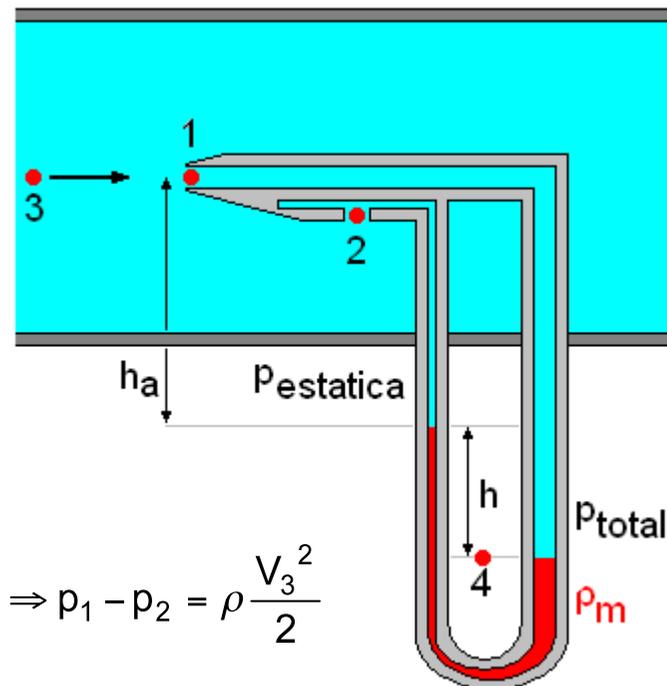
$$V_3 = \sqrt{2 \frac{(\rho_{man} - \rho)}{\rho} g h}$$

5.- Tubos de Pitot y Prandtl (II)

Mide la P_{total} al restar la $P_{estática}$

$$z_A + \frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma}$$

Sin H_{perd}



$$\left. \begin{array}{l} z_1 = z_3 \approx z_2 \\ V_1 = 0 \\ V_2 \approx V_3 \\ p_2 \approx p_3 \end{array} \right\}$$

[Bernoulli_{1→3}]

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{p_1 - p_3}{\gamma} = \frac{V_3^2}{2g} \Rightarrow p_1 - p_3 = \rho \frac{V_3^2}{2} \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho \frac{V_3^2}{2}$$

[Man. Dif.]

$$p_4 = p_1 + \rho g (h + h_a) = p_2 + \rho g h_a + \rho_{man} g h$$

$$p_1 - p_2 = \rho g h_a + \rho_{man} g h - \rho g (h + h_a) = \rho_{man} g h - \rho g h = (\rho_{man} - \rho) g h$$

[$p_1 - p_2 =$] \Rightarrow

$$\rho \frac{V_3^2}{2} = (\rho_{man} - \rho) g h \Rightarrow V_3 = \sqrt{2 \frac{(\rho_{man} - \rho)}{\rho} g h}$$

6.- Sifón (I)

Descarga por encima del nivel del líquido

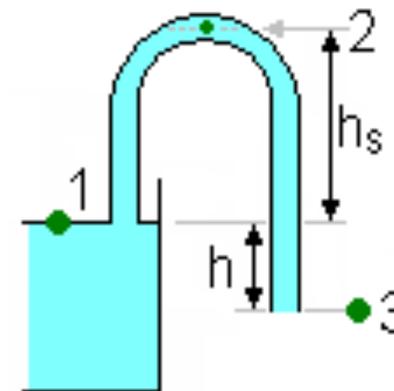
Ec. Bernoulli \Rightarrow
$$z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} = z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma}$$

Sin H_{perd}

[Bernoulli_{1→3}]
$$z_1 = z_3 + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$V_3 = \sqrt{2g(z_1 - z_3)}$$

[Bernoulli_{1→2}]
$$z_1 = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$



$$\left. \begin{aligned} V_1 = 0 ; V_2 = V_3 \\ p_1 = p_3 = p_{atm} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Necesita
cebado

$$p_2 = -\gamma (z_2 - z_3)$$

Si $p_{rel}, p_2 < 0$

Si $p_{asb}, p_2 > 0$

$$p_2[abs] = p_{atm} - \gamma (z_2 - z_3)$$

6.- Sifón (I)

Descarga por encima del nivel del líquido

$$\text{Ec. Bernoulli} \Rightarrow z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} = z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma}$$

Sin H_{perd}

$$[\text{Bernoulli}_{1 \rightarrow 3}] \quad z_1 = z_3 + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$z_1 - z_3 = \frac{V_3^2}{2g} \Rightarrow V_3 = \sqrt{2g(z_1 - z_3)}$$

$$[\text{Bernoulli}_{1 \rightarrow 2}] \quad z_1 = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad \left| \begin{array}{l} V_2 = V_3 \\ V_2 = V_3 \end{array} \right| = z_2 + \frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

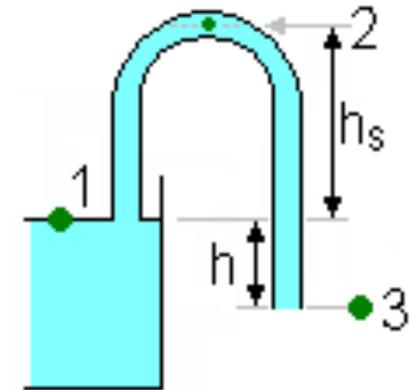
$$z_1 = z_2 + \frac{2g(z_1 - z_3)}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} = z_2 + (z_1 - z_3) + \frac{p_2}{\gamma}$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = -(z_2 - z_3) \Rightarrow p_2 = -\gamma(z_2 - z_3)$$

Si $p_{\text{rel}}, p_2 < 0$

Si $p_{\text{asb}}, p_2 > 0$

$$p_2[\text{abs}] = p_{\text{atm}} - \gamma(z_2 - z_3)$$



$$\left. \begin{array}{l} V_1 = 0 ; V_2 = V_3 \\ p_1 = p_3 = p_{\text{atm}} = 0 \end{array} \right\}$$

Necesita
cebado

6.- Sifón (II)

Para realizar un sellado de aire y evitar malos olores procedentes del desagüe

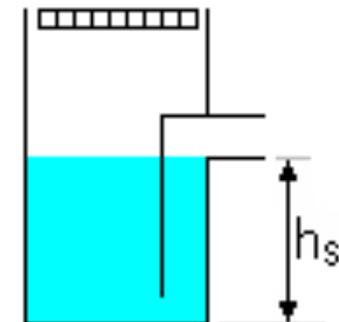
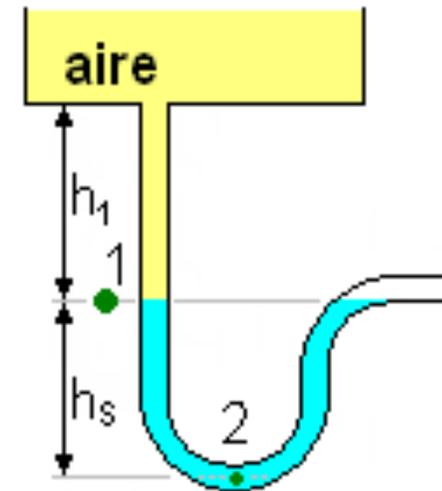
Posibles problemas:

- El agua se evapora y deja sin sello el sifón
- Si hay depresión en el aire, el agua tiende a ser aspirado y dejar si sello el sifón

$$P_{\text{aire}} > -\rho_{\text{H}_2\text{O}} g [h_s + h_1]$$

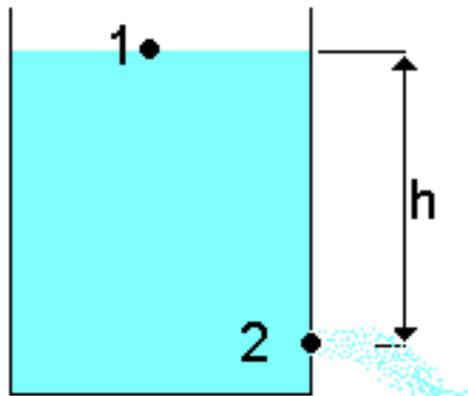
- Si hay presión en el aire, tiende a empujar el agua al desagüe y dejar si sello el sifón

$$P_{\text{aire}} < \rho_{\text{H}_2\text{O}} g h_s$$



7.- Teorema de Torricelli (I)

La velocidad de salida de un flujo de un depósito depende de la diferencia de elevación entre la superficie libre del fluido y la salida del fluido



$$z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

Supuesto h cte

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = 0 \\ p_1 = p_2 = 0 \\ z_1 - z_2 = h \end{array} \right\} V_2 = \sqrt{2gh} \quad [\text{m/seg}]$$

* Si sobre la superficie del fluido hay una presión diferente a la atmosférica, esta se ha de tener en cuenta

7.- Teorema de Torricelli (II)

Si la altura del líquido va disminuyendo en el depósito la velocidad de salida también lo hace

El tiempo requerido para vaciar un tanque:

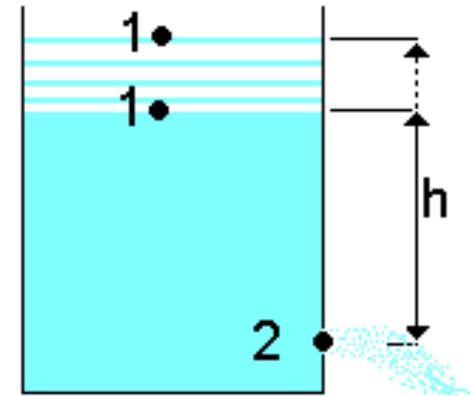
$$\text{Fluido evacuado} = -A_1 dh = A_2 V_2 dt$$

$$dt = \frac{A_1}{A_2 V_2} dh \quad (\text{Torricelli: } V_2 = \sqrt{2gh})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{h_1}^{h_2} -\frac{A_1}{A_2 \sqrt{2gh}} dh$$

$$t_2 - t_1 = -\frac{A_1}{A_2 \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} h^{-1/2} dh = -\frac{A_1}{A_2 \sqrt{2g}} \left[\frac{h^{1/2}}{1/2} \right]_{h_1}^{h_2}$$

$$t_{h_1 \rightarrow h_2} = \frac{\sqrt{2} A_1}{A_2 \sqrt{g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) \quad [\text{seg}]$$

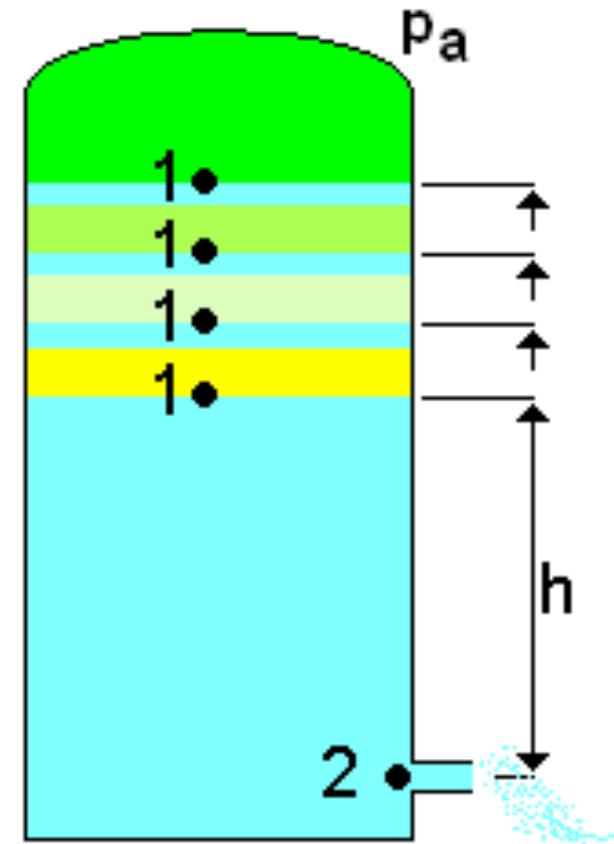


7.- Teorema de Torricelli (III)

Más complejo si:

- El depósito está presionado; $p_1 \neq p_2$
- La altura del líquido va disminuyendo en el depósito; $h = f(t)$
- La presión en el depósito disminuye a medida que sale líquido; $p_1 = f(t)$

...



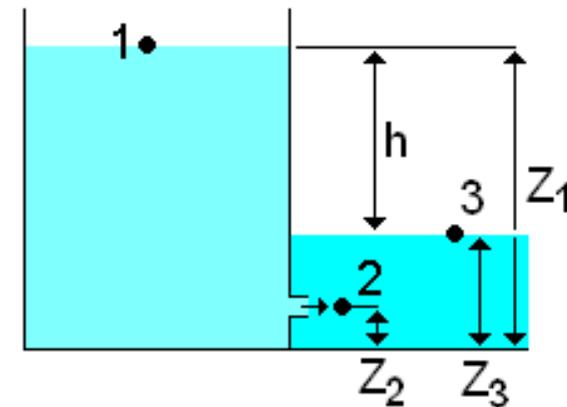
7.- Teorema de Torricelli (IV)

Orificio sumergido en otro recipiente
con alturas ctes

$$z_A + \frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma}$$

$$\left. \begin{aligned} V_1 = V_3 = 0 \\ p_1 = p_3 = 0 \\ h = z_1 - z_3 \end{aligned} \right\}$$

$$p_{\text{salida}} : \begin{aligned} p_2 &= p_3 + \gamma (z_3 - z_2) \\ p_2 &= \gamma (z_3 - z_2) \end{aligned}$$



$$[\text{Bernoulli}_{1 \rightarrow 2}] \quad z_1 = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{\gamma (z_3 - z_2)}{\gamma}$$

$$z_1 = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + (z_3 - z_2)$$

$$V_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_3)} = \sqrt{2gh}$$