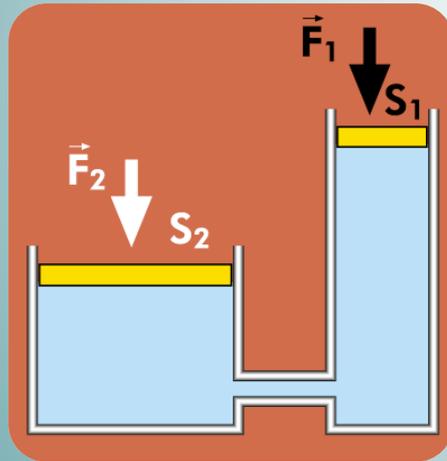


# Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas

## Tema 06. Flujo de Fluidos en Tuberías



**Severiano F. Pérez Remesal**

**Carlos Renedo Estébanez**

DPTO. DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA

Este tema se publica bajo Licencia:

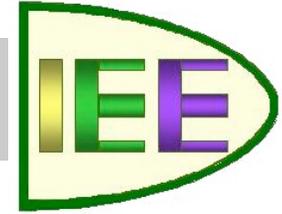
[Creative Commons BY-NC-SA 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

**MF. T6.- Flujo de Fluidos en Tuberías**

**Objetivos:**

En este tema, el más extenso del bloque, se analiza el flujo de un fluido por un conducto, por lo que se estudian las pérdidas de carga continuas y accidentales, aprendiendo a utilizar el ábaco de Moody. Se explica en este tema la forma de resolver los problemas derivados del cálculo de sistemas de tuberías

El aprendizaje se completa con una práctica de laboratorio en la que se determinará la pérdida de carga en tuberías y accesorios



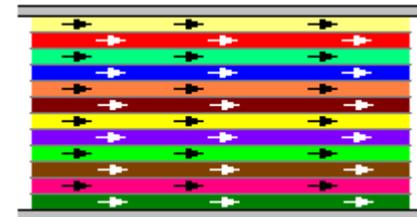
- 1.- Flujo laminar y turbulento
- 2.- Pérdidas de energía por fricción
- 3.- Perfiles de velocidad
- 4.- Tensiones y fuerzas en la tubería
- 5.- Sistemas de tuberías en serie
- 6.- Sistemas de dos tuberías paralelas
- 7.- Sistemas de ramales de tuberías
- 8.- Sistemas ramificados y redes de tuberías (*Hardy Cross*)
- 9.- Equilibrado hidráulico
- 10.- Diseño de conductos

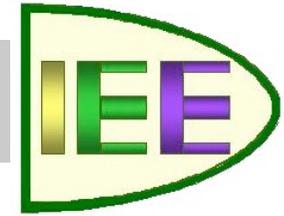
## 1.- Flujo laminar y turbulento (I)

**Flujo laminar:** las partículas se mueven en direcciones paralelas formando capas o láminas, el fluido es uniforme y regular.

La viscosidad domina el movimiento del fluido, donde

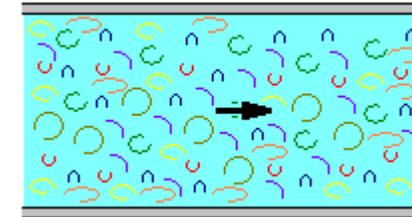
$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau \text{ es el cortante, } (=F / A) \\ \mu \text{ es la viscosidad dinámica (Pa s)} \end{array} \right.$$





## 1.- Flujo laminar y turbulento (II)

**Flujo turbulento** las partículas se mueven de forma desordenada en todas las direcciones; es imposible conocer la trayectoria individual de cada partícula



La caracterización del movimiento debe considerar los efectos de la viscosidad ( $\mu$ ) y de la turbulencia ( $\eta$ ); se hace con:

$$\tau = (\mu + \eta) \frac{dv}{dy}$$

$\eta$  depende de  $\rho$  y del movimiento

$$0 \leq \eta \leq 10.000\mu =$$

Se determina con resultados experimentales

Prandtl  $\tau = \rho l^2 \left( \frac{dv}{dy} \right)^2$

Von Karman  $\tau = \tau_0 \left( 1 - \frac{y}{r_0} \right) = \rho 0,4^2 \frac{(dv/dy)^4}{(d^2v/dy^2)^2}$

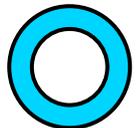
1.- Flujo laminar y turbulento (III)

¿Flujo laminar o turbulento? **Reynolds**, Re

$$Re = \frac{V L_c}{\nu} \quad \left[ \frac{m/s \cdot m}{m^2/s} \right]$$

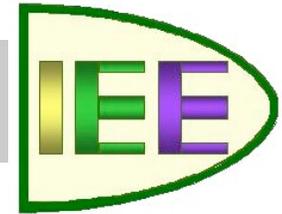
- v es la velocidad (m/s)
- $\nu$  es la viscosidad cinemática (m<sup>2</sup>/s)
- $L_c$  es la longitud característica

Para el interior de una tubería circular es el diámetro  
 Para una sección que no es circular  $L_c = 4 D_H$   
 [ $D_H = \text{Area del flujo} / \text{Perímetro mojado}$ ]

Circular radio $R$	$D_H = \frac{\pi R^2}{2 \pi R} = \frac{R}{2}$	$L_c = 4 \frac{R}{2} = 2R = D$	
Cuadrado lado $L$ :	$D_H = \frac{L^2}{4L} = \frac{L}{4}$	$L_c = 4 \frac{L}{4} = L$	
Rectángulo lados $a$ y $b$	$D_H = \frac{a b}{2(a+b)}$	$L_c = \frac{2 a b}{(a+b)}$	
Sección circular $r_i$ y $r_e$	$D_H = \frac{\pi (r_e^2 - r_i^2)}{2 \pi (r_i + r_e)} = \frac{(r_e^2 - r_i^2)}{2 (r_i + r_e)}$	$L_c = \frac{2 (r_e^2 - r_i^2)}{(r_i + r_e)}$	

En conductos: { Si Re < 2.000 flujo laminar  
 Si Re > 4.000 flujo turbulento

$$Re_{\text{Crítico}} = 2.000 \Rightarrow V_{\text{Crítica}}$$



### 1.- Flujo laminar y turbulento (IV)

Determinar la velocidad crítica en una tubería de 20 mm de diámetro para:

a) gasolina a 20°C,  $\nu = 6,48 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

b) agua a 20°C,  $\nu = 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

2.- Pérdidas de energía por fricción (I)

La ecuación de *Darcy* marca las pérdidas por fricción,  $H_L$ , tanto en régimen laminar como turbulento

$$H_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{m})$$

$f$  ( $\lambda$ ) el factor de fricción  
 $L$  es la longitud de una tubería  
 $v$  la velocidad  
 $D$  el diámetro de la tubería  
 $g$  la gravedad

Conducto no circular:  $L_c$

Flujo laminar:

$$f = \frac{64}{Re}$$

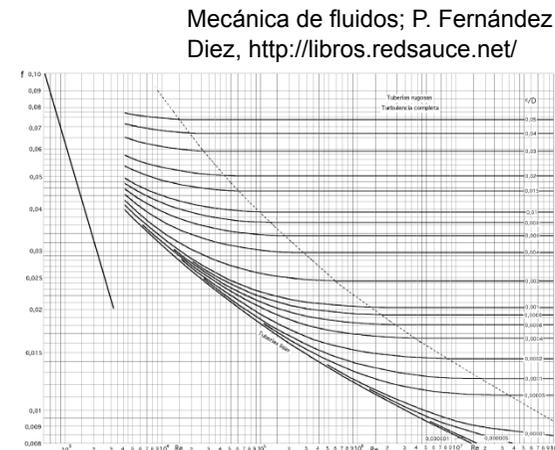
$$H_L = \frac{32 \mu L v}{\gamma D^2} \quad (\text{m})$$

Flujo turbulento:

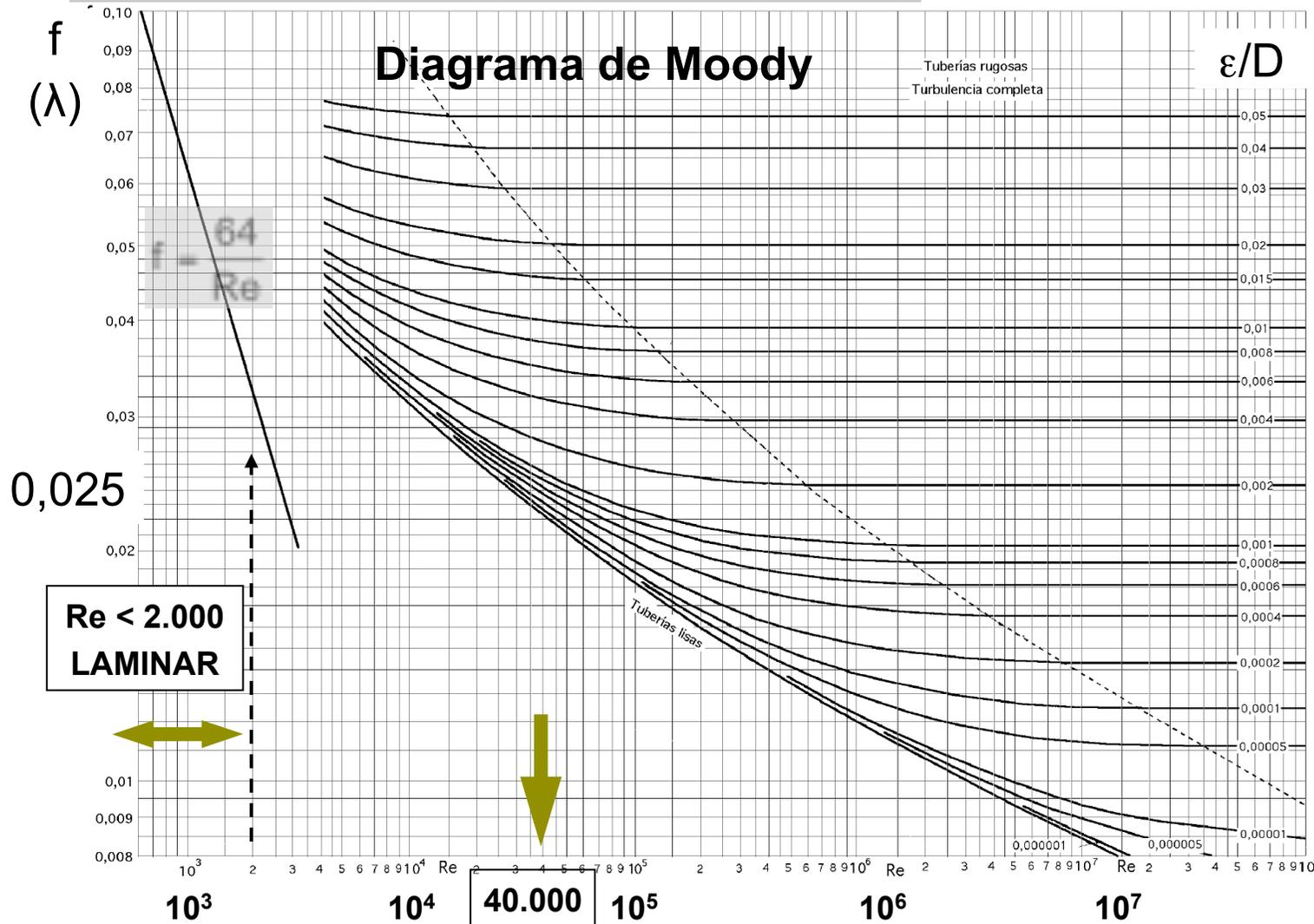
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[ \frac{\epsilon}{3,7 D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right]$$

$\epsilon$  la rugosidad de la tubería

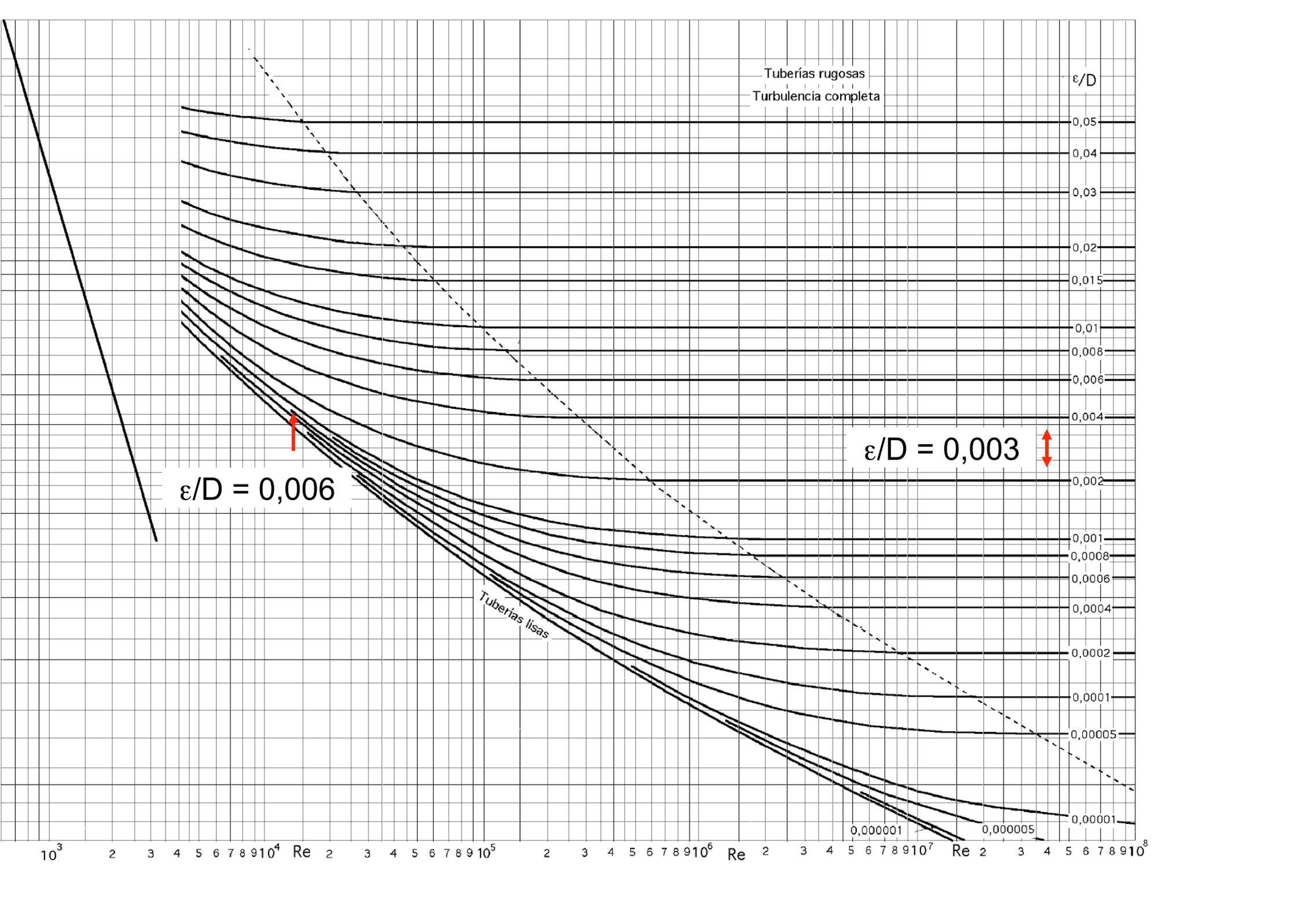
Diagrama de *Moody*

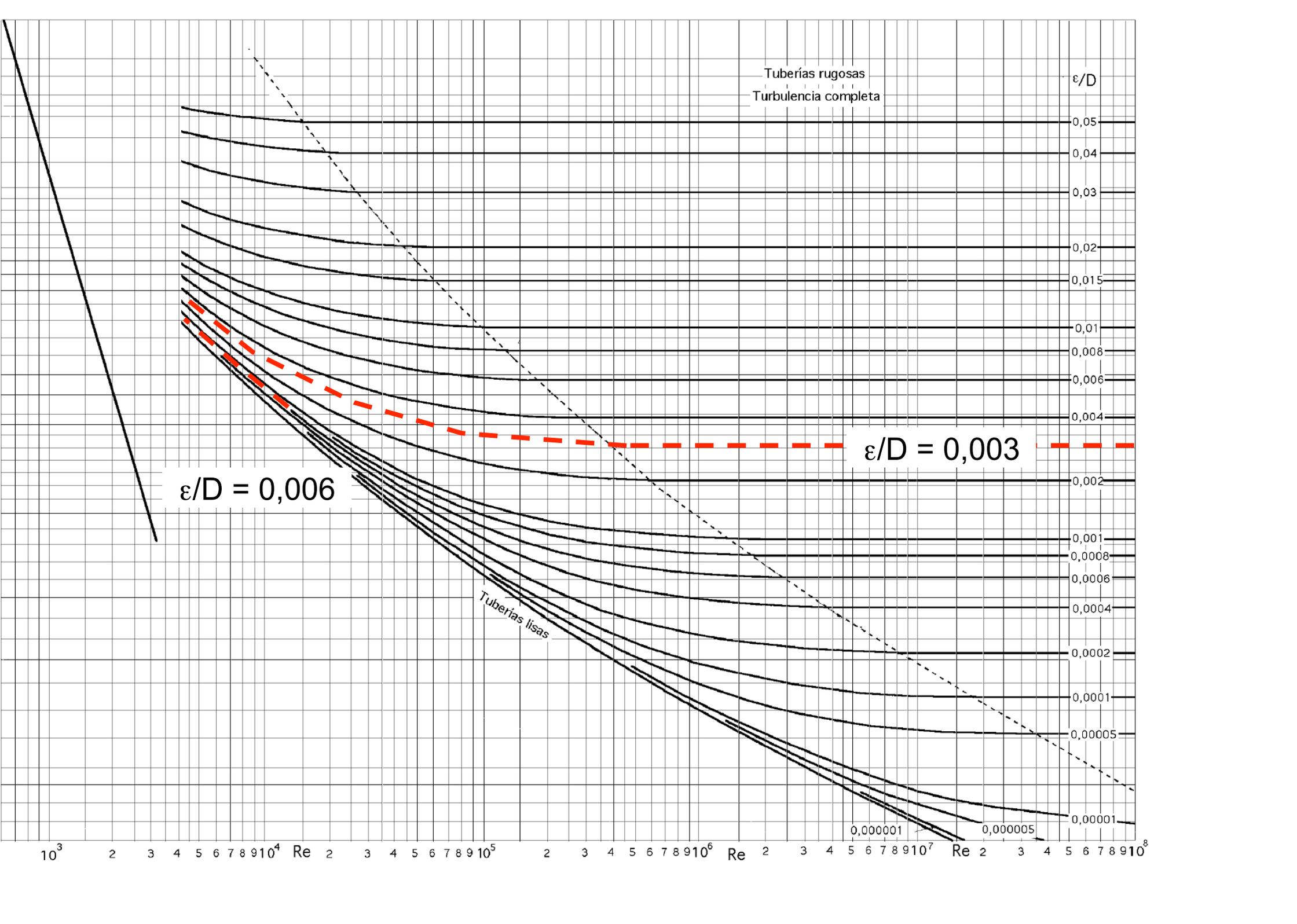


2.- Pérdidas de energía por fricción (II)



= unidades





## 2.- Pérdidas de energía por fricción (III)

Salida de depósito	A ras de pared	$0,5 \frac{V_2^2}{2g}$
	Tubería entrante	$\frac{V_2^2}{2g}$
	Tubería abocinada	$0,05 \frac{V_2^2}{2g}$
Entrada a depósito		$\frac{V_1^2}{2g}$
Ensamblamiento brusco		$\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$

Ensamblamiento gradual		$K_c \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
Vénturis, boquillas y orificios		$\left(\frac{1}{c_v^2} - 1\right) \frac{V_2^2}{2g}$
Contracción brusca		$K_c \frac{V_2^2}{2g}$
Codos, accesorios, válvulas		$K \frac{V^2}{2g}$
Codos 45°	0,4	
Codos 90° Tes	0,62 1,75	

Contracción brusca	
$d_1/d_2$	$K_c$
1,2	0,08
1,4	0,17
1,6	0,26
1,8	0,34
2	0,37
2,5	0,41
3	0,43
4	0,45
5	0,46

Ensamblamiento gradual para un ángulo total del cono						
4°	10°	15°	20°	30°	50°	60°
0,02	0,04	0,09	0,16	0,25	0,35	0,37
0,03	0,06	0,12	0,23	0,36	0,5	0,53
0,03	0,07	0,14	0,26	0,42	0,57	0,61
0,04	0,07	0,15	0,28	0,44	0,61	0,65
0,04	0,07	0,16	0,29	0,46	0,63	0,68
0,04	0,08	0,16	0,3	0,48	0,65	0,7
0,04	0,08	0,16	0,31	0,48	0,66	0,71
0,04	0,08	0,16	0,31	0,49	0,67	0,72
0,04	0,08	0,16	0,31	0,5	0,67	0,72

2.- Pérdidas de energía por fricción (IV)

$$H_L = K \frac{V^2}{2g} \quad (\text{m})$$

$$K = f_{\text{tubo}} \frac{L_e}{D}$$

	$L_e / D$	
Válvula de globo abierta	340	
Válvula de ángulo abierta	150	
Válvula de compuerta	abierta	8
	75% a	35
	50% a	160
	25% a	900
Válvula de bola abierta	150	
Válvula de mariposa abierta	45	

	$L_e / D$
Codo 90°	30
Codo 90° (gran radio)	20
Codo 90° de calle	50
Codo de 45°	16
Codo de 45° de calle	25
T, flujo en el tramo	20
T, flujo en rama	60

2.- Pérdidas de energía por fricción (V)

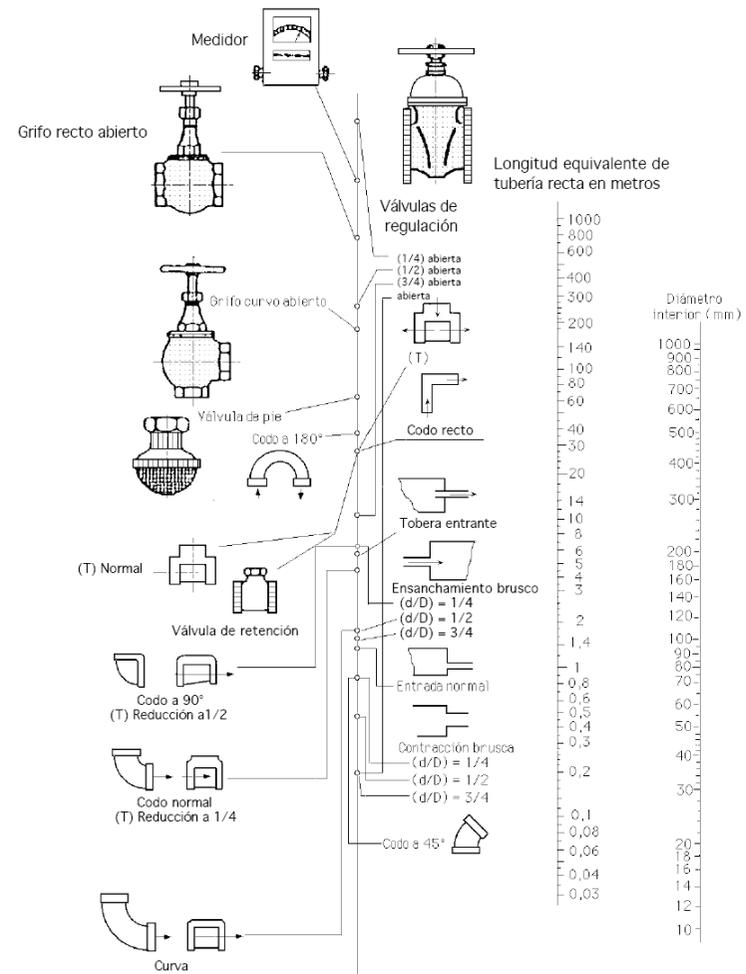
**Longitud equivalente  $L_{eq}$**   
(en Tablas y ábacos)

$$L_{eq\_tub} = L_{tub} + L_{eq\_accesorios}$$

$$H_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (m)$$

Tablas del coeficiente de pérdida en: Redes Industriales de Tubería, A. Luszczewski, Ed Reverté

ABACO PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS PERDIDAS DE CARGA EN ACCESORIOS en metros de longitud de tubería equivalente



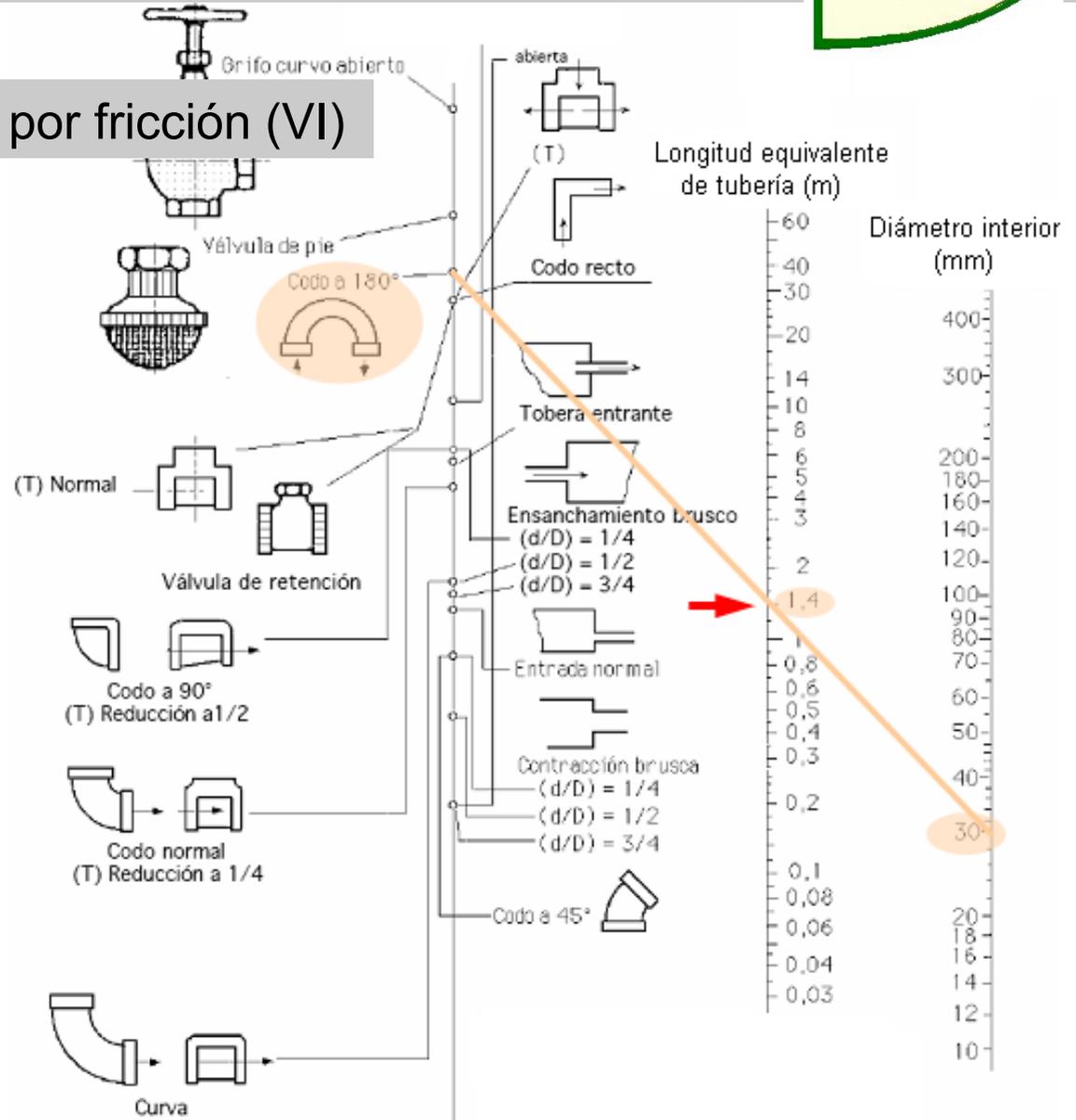
2.- Pérdidas de energía por fricción (VI)

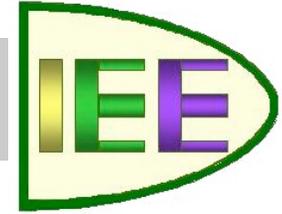
**Longitud equivalente  $L_{eq}$**   
(en Tablas y ábacos)

$$L_{eq\_tub} = L_{tub} + L_{eq\_accesorios}$$

$$H_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (m)$$

Ej: Codo 180°,  $\varnothing_i = 30$  mm





2.- Pérdidas de energía por fricción (VI)

**Longitud equivalente  $L_{eq}$**   
(en Tablas y ábacos)

$$L_{eq\_tub} = L_{tub} + L_{eq\_accesorios}$$

$$H_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (m)$$



Tubería de  $\varnothing_i = 30 \text{ mm}$ , 10 m y un codo de  $180^\circ$   
tiene las mismas pérdidas de carga ( $H_L$ ) que otra  
tubería de  $\varnothing_i = 30 \text{ mm}$  y 11,4 m

2.- Pérdidas de energía por fricción (VII)

$$L_{eq\_tub} = L_{tub} + L_{eq\_accesorios}$$

$$H_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (m)$$

$$H_L = cte v^2 \quad (m)$$

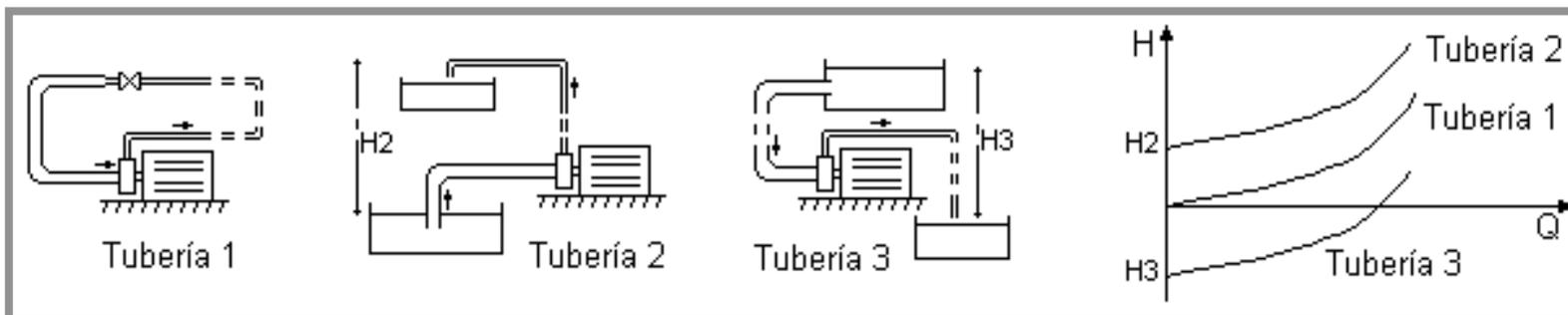
$$cte = f \frac{L_{eq\_tub}}{D} \frac{1}{2g}$$

$$cte_2 = f \frac{L_{eq\_tub}}{D}$$

$$cte = cte_2 \frac{1}{2g}$$

- Ec. Tubería en circuito cerrado o tubería sin cota de elevación:  $H_L = cte v^2 \quad (m)$
- Ec. Tubería de elevación:  $H_L = H_{elevación} + cte v^2 \quad (m)$
- Ec. Tubería de evacuación:  $H_L = cte v^2 - H_{evacuación} \quad (m)$

$$H_L = cte_2 \frac{v^2}{2g} \quad (m)$$





## 2.- Pérdidas de energía por fricción (VIII)

Un caudal de 44 l/s de aceite de viscosidad absoluta  $0,101 \text{ N s/m}^2$  y densidad relativa 0,850 está circulando por una tubería de fundición de 30 cm de diámetro, rugosidad de 0,05 mm y 3.000 m de longitud. ¿Cuál es la pérdida de carga?

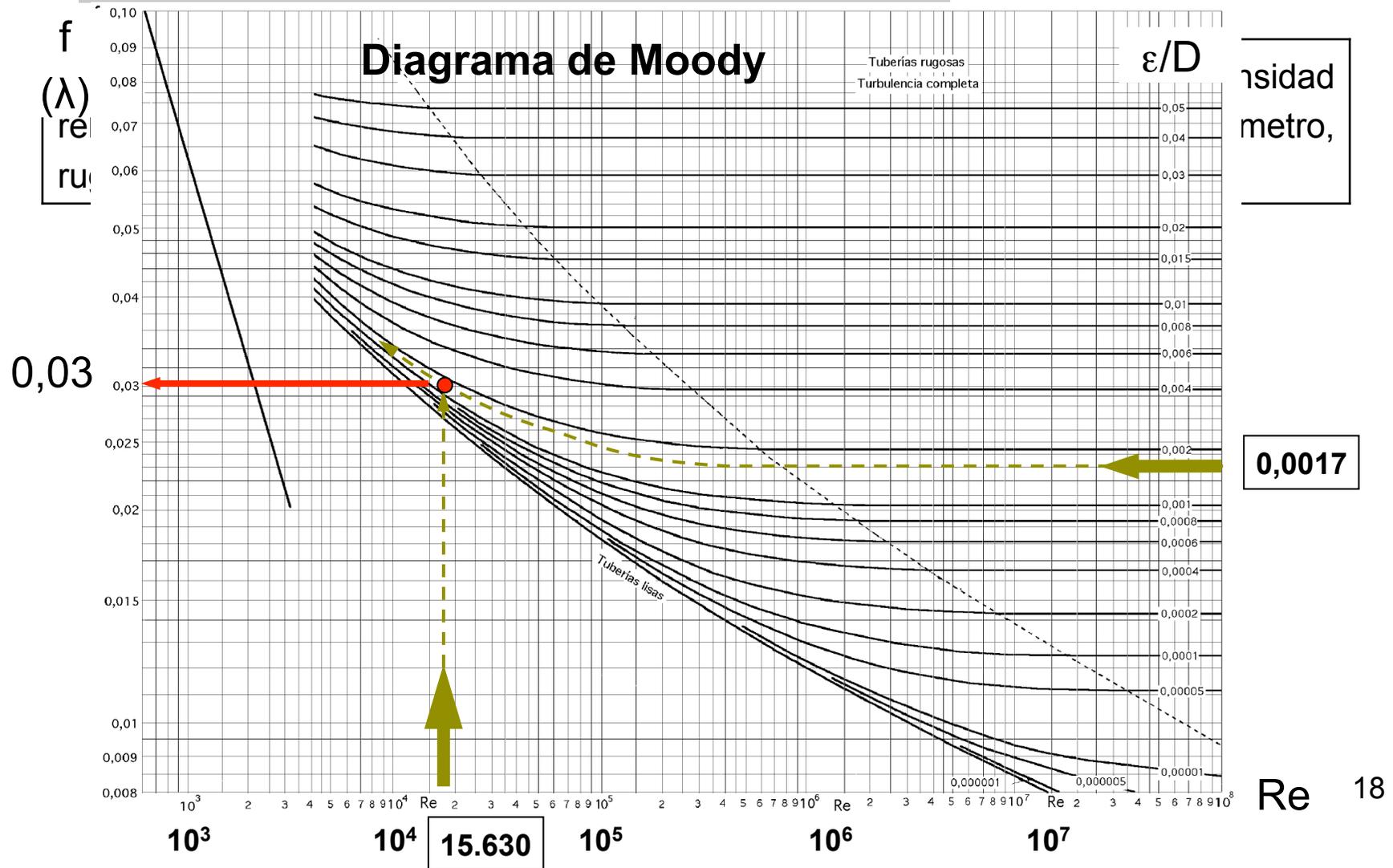


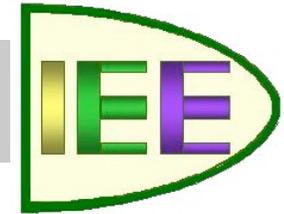
## 2.- Pérdidas de energía por fricción (IX)

Un caudal de **440** l/s de aceite de viscosidad absoluta  $0,101 \text{ N s/m}^2$  y densidad relativa  $0,850$  está circulando por una tubería de fundición de  $30 \text{ cm}$  de diámetro, rugosidad de  $0,05 \text{ mm}$  y  $3.000 \text{ m}$  de longitud. ¿Cuál es la pérdida de carga?



2.- Pérdidas de energía por fricción (IX)





## 3.- Perfiles de velocidad (I)

**Laminar:** parabólico

$$U = 2 v \left( 1 - \left[ \frac{r}{r_0} \right]^2 \right)$$

$U$  es la velocidad local  
 $r$  el radio local  
 $r_0$  el radio máximo  
 $v$  la velocidad promedio

**Turbulento:** más homogéneo  $\Rightarrow$  mayor  $V$  en pared

$$U = v \left[ 1 + 1,43 \sqrt{f} + 2,15 \sqrt{f} \log \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right) \right]$$

Agua: *Hazen-Williams* :

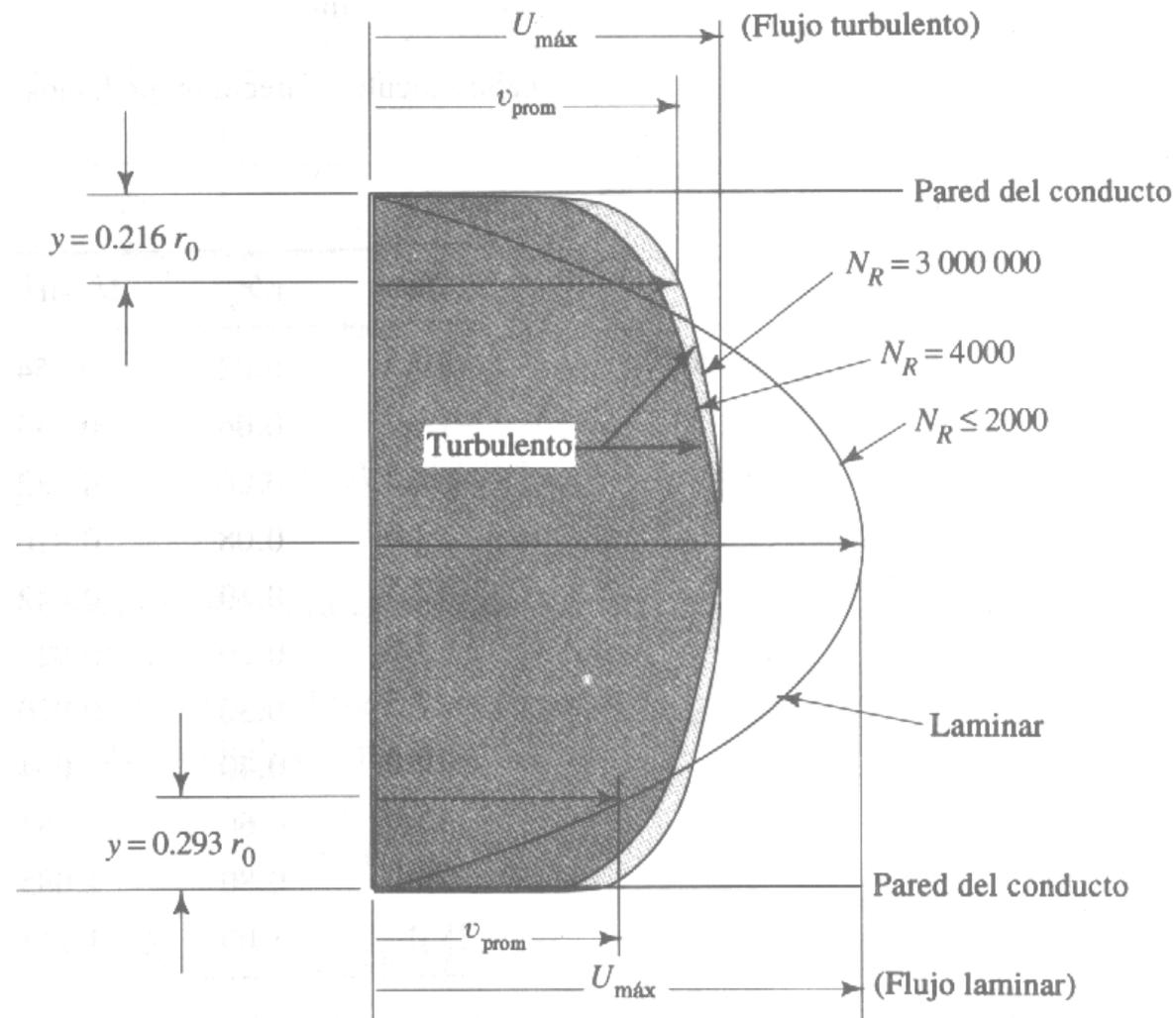
$$v = 0,85 C_h D_H^{0,63} \left( \frac{h_L}{L} \right)^{0,54}$$

$$h_L = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

$D_H$  = Diámetro hidráulico

$C_h$	Acero, hierro dúctil o hierro fundido	Plástico, cobre o vidrio	Acero o hierro fundido	Acero corrugado
Tubo nuevo	150	140	130	60
Valor de diseño	140	130	100	60

3.- Perfiles de velocidad (II)

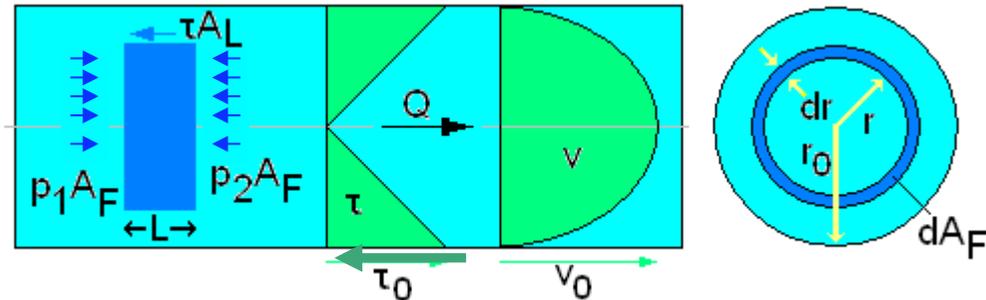


3.- Perfiles de velocidad (III)

Velocidades medias más usuales			
<b>Agua</b>	B. Embolos	Succión	0,5 a 1 m/s
		Expulsión	1 a 2 m/s
	B. Centrífugas	Succión	0,5 a 2,5 m/s
		Expulsión	1,5 a 4,5 m/s
<b>Vapor</b>	Turbinas	Alimentación	30 a 80 m/s
<b>Aire</b>	Comp. alternativo	Succión	16 a 20 m/s
		Expulsión	25 a 30 m/s
	Turbocompresor	Suc. y exp.	20 a 25 m/s
	Motores combust.	Alimentación	10 a 20 m/s
	Conductos aire acondicionado		
<b>Gases</b>	Motor combust.	Escape	10 a 40 m/s
<b>Aceite lubricación</b>		Tuberías	0,5 a 1,5 m/s

4.- Tensiones y fuerzas en la tubería (I)

La fuerza ejercida por la diferencia de presiones es igual y opuesta a la fuerza debida al rozamiento entre capas de fluido:



$$p_1 A_{\text{Frontal}} - p_2 A_{\text{Frontal}} - \tau A_{\text{Lateral}} = 0$$

$$(p_1 - p_2) (\pi r^2) - \tau (2 \pi r L) = 0 \Rightarrow \tau = \frac{p_1 - p_2}{2L} r \cdot \frac{\gamma}{\gamma} \left[ H_L = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \right] \Rightarrow \tau = \frac{\gamma}{2L} r H_L$$

La tensión cortante,  $\tau$ , en una sección recta de tubería

\* Si  $r = r_0 \Rightarrow \tau_{\text{en la pared}} = \tau_0$

$$\tau = \frac{\gamma}{2L} r_0 H_L \left| H_L = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \right| \Rightarrow \tau = \frac{\gamma}{2L} r_0 \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = \frac{\gamma}{2} \frac{r_0}{2r_0} \frac{\lambda}{2g} \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{\gamma}{g} \frac{v^2}{8}$$

$$\tau_0 = \lambda \rho \frac{V^2}{8}$$

4.- Tensiones y fuerzas en la tubería (I)

1ª ley de newton aplicable a estática y a movimiento uniforme

$$p_1 A_{\text{Frontal}} - p_2 A_{\text{Frontal}} - \tau A_{\text{Lateral}} = 0$$

$$\pi r^2 (p_1 - p_2) - 2 \pi L \eta \frac{dv}{dr} = 0$$

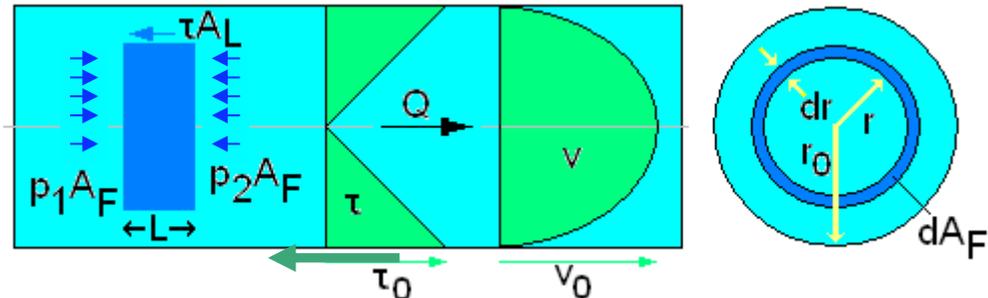
$$r \Delta p = 2 L \eta \frac{dv}{dr} \Rightarrow dv = \frac{\Delta p}{2 L \eta} r$$

$$v = \frac{\Delta p}{4 L \eta} \int_r^{r_0} r^2 dr;$$

$$v = \frac{\Delta p}{4 L \eta} (r_0^2 - r^2) \text{ Distribución parabólica}$$

$$dQ = 2 \pi r dr v = 2 \pi r dr \frac{\Delta p}{4 L \eta} (r_0^2 - r^2)$$

$$Q = \int_0^{r_0} 2 \pi r \frac{\Delta p}{4 L \eta} (r_0^2 - r^2) dr = \frac{\Delta p \pi r_0^4}{8 L \eta}$$



$\rho_1$

$$v_{\text{max}} = \frac{\Delta p}{4 L \eta} r_0^2$$

$$v_{\text{med}} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{\Delta p \pi r_0^4}{8 L \eta \pi r_0^2} = \frac{\Delta p r_0^2}{8 L \eta} = \frac{v_{\text{max}}}{2}$$

$$\Delta p = \frac{32 L \eta v_{\text{med}}}{D^2} \Rightarrow H_L = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{64 L v^2}{\text{Re } D 2g}$$

#### 4.- Tensiones y fuerzas en la tubería (II)

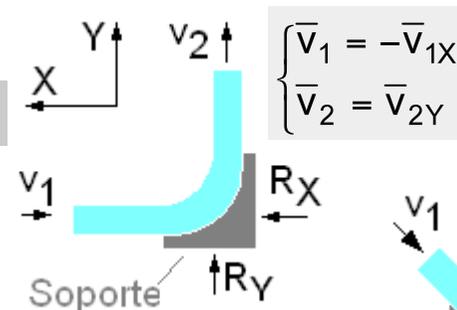
**Fuerza de una corriente:**  $F = m da = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow$  [Impulso]  $F dt = m dv$

$$F = m [\text{kg}] a [\text{m/s}^2] = m [\text{kg}] \frac{v [\text{m/s}]}{t [\text{s}]} = \frac{m [\text{kg}]}{t [\text{s}]} v \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = \left( \rho \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] Q \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] \right) v \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = \rho Q v$$

**Fuerza a soportar por un objeto estático sometido a un chorro de líquido :**

- Si tiene un giro de  $90^\circ$

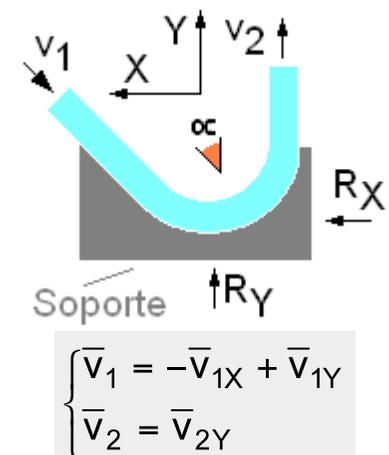
$$\begin{cases} R_X = \rho Q (v_{2X} - v_{1X}) = \rho Q (-v_{1X}) = \rho Q v_1 \\ R_Y = -\rho Q (v_{2Y} - v_{1Y}) = -\rho Q v_{2Y} = -\rho Q v_2 \end{cases}$$



- Si tiene un giro de  $\alpha^\circ$

$$\begin{cases} R_X = \rho Q (v_{2X} - v_{1X}) = \rho Q v_{1X} = \rho Q v_1 \sin \alpha \\ R_Y = -\rho Q (v_{2Y} - v_{1Y}) = -\rho Q (v_2 - v_1 \cos \alpha) \end{cases}$$

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}$$



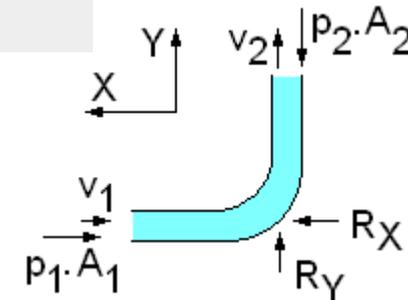
4.- Tensiones y fuerzas en la tubería (III)

**Fuerza a soportar por un codo:**

$$\begin{cases} P = F/A \Rightarrow F = P A \\ F = \rho Q \Delta V \end{cases}$$

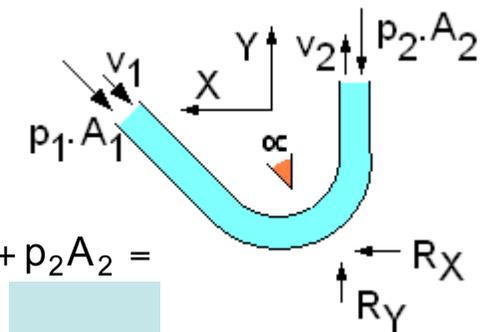
- Si tiene un giro de 90°

$$\begin{cases} R_x = F_x + p_1 A_1 = \rho Q v_{1x} + p_1 A_1 = \rho Q v_1 + p_1 A_1 \\ R_y = -F_y + p_2 A_2 = -\rho Q v_{2y} + p_2 A_2 = -\rho Q v_2 + p_2 A_2 \end{cases}$$



- Si tiene un giro de α°

$$\begin{cases} R_x = F_x + p_1 A_1 \sin \alpha = \rho Q v_{1x} + p_1 A_1 \sin \alpha = \\ = \rho Q v_1 \sin \alpha + p_1 A_1 \sin \alpha = (\rho Q v_1 + p_1 A_1) \sin \alpha \\ R_y = F_y + p_1 A_1 \cos \alpha + p_2 A_2 = \rho Q (v_{1y} - v_{2y}) + p_1 A_1 \cos \alpha + p_2 A_2 = \\ = \rho Q (v_1 \cos \alpha - v_2) + p_1 A_1 \cos \alpha + p_2 A_2 \end{cases}$$



$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

**Fuerza a soportar por un cuerpo en movimiento:**

Considerar velocidades relativas, ej: álabe de turbina ...

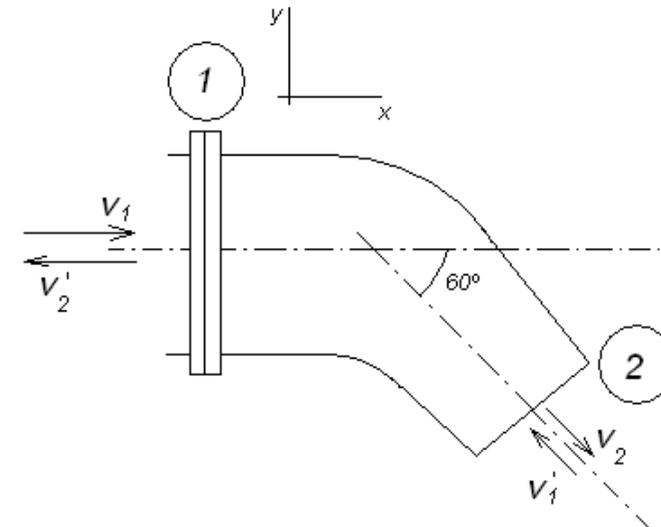
4.- Tensiones y fuerzas en la tubería (III)

Codo reductor de 300 a 150mm

Caudal 1800 l/min

Presión relativa en tubería de 300 mm=2 bar

Calcular la fuerza a que está sometida la brida



$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}$$

$$Q = \frac{1,8}{60} = 0,03 \frac{m^3}{s};$$

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = 0,4244 \frac{m}{s}; v_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = 1,6977 \frac{m}{s}$$

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = 2 \cdot 10^5 - \frac{1000}{2} (v_2^2 - v_1^2) = 198649 Pa$$

26

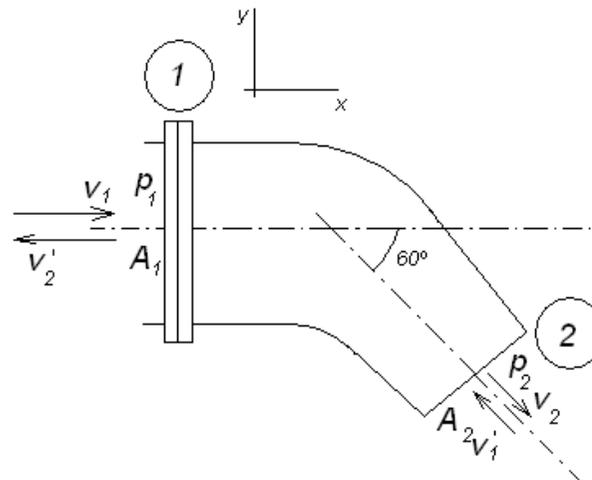
4.- Tensiones y fuerzas en la tubería (III)

$F_x$  componente  $x$  de la resultante de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el fluido aislado

$F_y$  componente  $y$  de la resultante de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el fluido aislado

$$F_x = Q \rho (v_{2_x} - v_{1_x}) = 0,03 \cdot 1000 \cdot (\cos 60^\circ \cdot v_2 - v_1) = 12,7324 \text{ N}$$

$$F_y = 0,03 \cdot 1000 \cdot (-\cos 30^\circ \cdot v_2 - 0) = -44,1063 \text{ N}$$



4.- Tensiones y fuerzas en la tubería (III)

En equilibrio:

$$F_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos 60^\circ + R_x$$

$$F_y = p_2 A_2 \cos 30^\circ + R_y$$

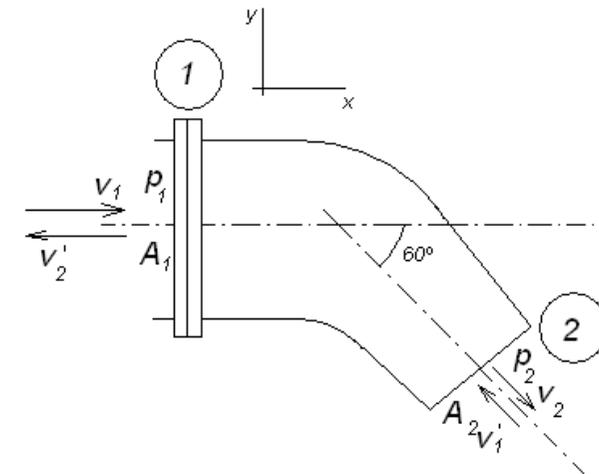
Por tanto,

$$R_x = F_x - 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 0,3^2}{4} + p_2 \pi \frac{0,150^2}{4} \cos 60^\circ = -12369 \text{ N (tracción)}$$

$$R_y = F_y - p_2 \pi \frac{0,150^2}{4} \cos 30^\circ = -3084 \text{ N (cortante)}$$

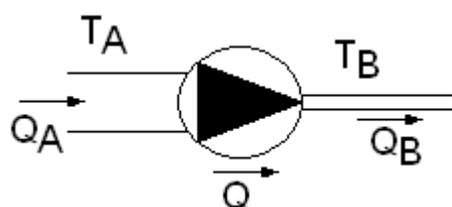
$$R = \sqrt{(R_x^2 + R_y^2)} = 12747 \text{ N}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{R_y}{R_x} = 14^\circ$$



5.- Sistemas de tuberías en serie (I)

**Tuberías con igual caudal y diferente sección (Ec Bernoulli)**



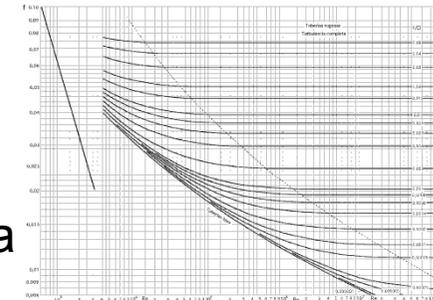
$$\left( z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} \right) + H_{\text{añã}} - H_{\text{ext}} - H_{\text{per}} = \left( z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \right)$$

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 \\ A_1 V_1 = A_2 V_2 \end{cases} \quad \text{Re} = \frac{V L_c}{\nu} \quad H_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{m})$$

**Tres tipos de *problemas*:**

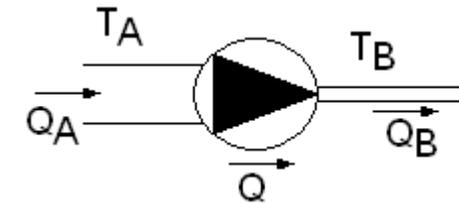
**1. Calcular una bomba:** conocidas las tuberías (D, ε) hay que determinar la energía requerida para el bombeo de un determinado Q

- Se calculan  $L_{\text{equ\_tubA}}$  y  $L_{\text{equ\_tubB}}$
- Se calcula  $H_L (= H_{LA} + H_{LB})$   
( $\nu, \text{Re}, [\epsilon/D], f, \dots$ )<sub>AB</sub>
- La energía añadir es la disponible menos la perdida



5.- Sistemas de tuberías en serie (II)

2. **Calcular el caudal:** conocida las tuberías ( $D$ ,  $\varepsilon$ ) determinar el caudal conocida la pérdida de energía disponible ( $H_{LD}$ ) (iteración)

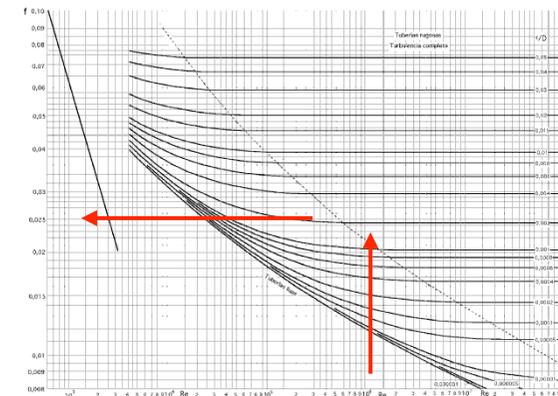


(2a)

- Se presupone un caudal  $Q_1$  (recomendado  $v$  entre 1 a 3 m/s)
- Se determinan las velocidades  $v_A$  y  $v_B$ ; y Reynolds  $Re_{A1}$  y  $Re_{B1}$
- Se calculan  $f_{A1}$  y  $f_{B2}$  (Moddy)
- Se calcula  $H_{L1}$  ( $=H_{LA1} + H_{LB1}$ )  
(incluidos accesorios,  $L_{eq\_tub}$ )

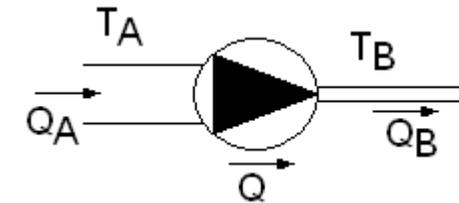
- Si  $H_{LD} = H_{L1} \Rightarrow Q = Q_1$  ( $\leftarrow =$ )
- Si  $H_{LD} > H_{L1} \Rightarrow Q > Q_1$ , ( $v > v_1$ )
- Si  $H_{LD} < H_{L1} \Rightarrow Q < Q_1$ , ( $v < v_1$ )

- Se presuponen nuevos valores  $Q_2 \dots$



5.- Sistemas de tuberías en serie (III)

2. **Calcular el caudal:** conocida las tuberías ( $D$ ,  $\varepsilon$ ) determinar el caudal conocida la pérdida de energía disponible ( $H_{LD}$ ) (iteración)

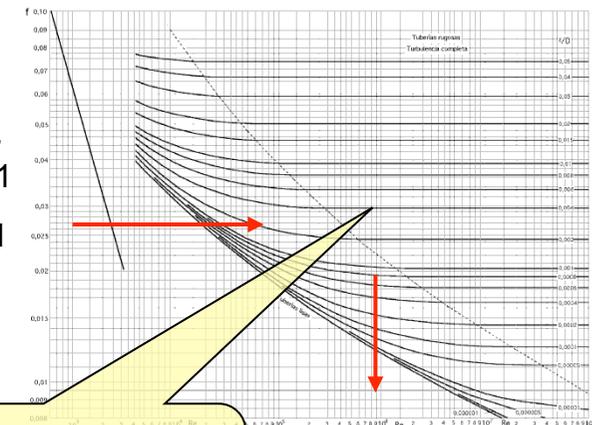


(2b)

- Se presuponen valores para los coef. fric. ( $f_{A1}$  y  $f_{B1} = 0,02 - 0,025$ )
- Se determinan  $Re_{A1}$  y  $Re_{B1}$  (Moody), y con ellos  $v_{A1}$  y  $v_{B1}$
- Se calcula  $H_{L1} (= H_{LA1} + H_{LB1})$   
(incluidos accesorios,  $L_{eq\_tub}$ )

- Si  $H_{LD} = H_{L1}$  se determina  $Q$  con  $v_1$  ( $\leftarrow =$ )
- Si  $H_{LD} > H_{L1} \Rightarrow v > v_1 \Rightarrow Re > Re_1 \Rightarrow f < f_1$
- Si  $H_{LD} < H_{L1} \Rightarrow v < v_1 \Rightarrow Re < Re_1 \Rightarrow f > f_1$

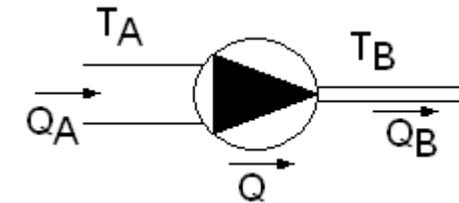
- Se suponen nuevos valores  $f_{A2}$  y  $f_{B2}$   
o ( $v_2$  caso =) ...



Este método no sirve si se cae en la parte horizontal de las curvas

5.- Sistemas de tuberías en serie (IV)

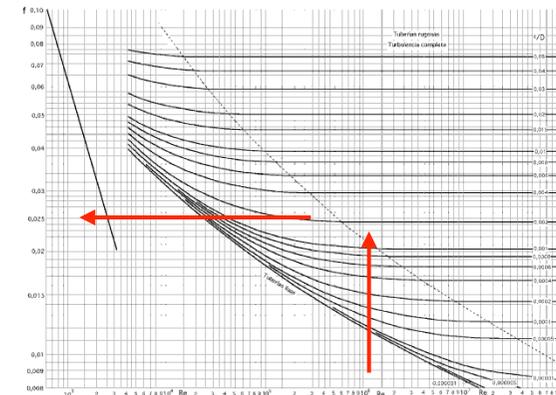
3. **Calcular la tubería:** determinar el diámetro necesario en las tuberías para un  $Q$  y una pérdida de presión admisible máxima,  $H_{LD}$ , (iteración)



- Se presuponen valores de  $v_{A1}$  y  $v_{B1}$  (con  $v_1 = 1$  a 3 m/s)
- Se calculan los diámetros  $D_{A1}$  y  $D_{B1}$
- Se determinan  $Re_{A1}$ ,  $Re_{B1}$  y los coef. fric. (Moody)  $f_{A1}$  y  $f_{B1}$
- Se calcula  $H_{L1}$  ( $= H_{LA1} + H_{LB1}$ )  
(incluidos accesorios.  $L_{eq\_tub}$ )

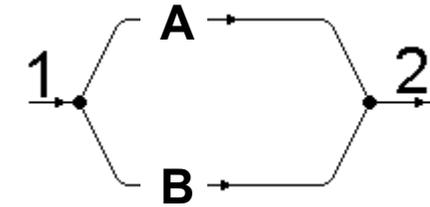
- Si  $H_{LD} = H_{L1} \Rightarrow D = D_1$  ( $\leftarrow =$ )
- Si  $H_{LD} > H_{L1} \Rightarrow D < D_1 \Rightarrow v > v_1$
- Si  $H_{LD} < H_{L1} \Rightarrow D > D_1 \Rightarrow v < v_1$

• Se suponen nuevos valores de  $v_2 \dots$



6.- Sistemas de dos tuberías en paralelo (I)

$$\left( z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} \right) + H_{\text{añã}} - H_{\text{ext}} - H_{\text{per}} = \left( z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \right)$$



PRINCIPIOS:

– En un nudo la suma de caudales es nula  $Q_1 = Q_A + Q_B + Q_C + \dots = Q_2$

– La pérdida de carga entre dos nudos es idéntica por todas las tuberías (codos, Tes, ...)

[tubería equivalente]

$$H_{LA} = H_{LB} = \dots = f_A \frac{L_A}{D_A} \frac{V_A^2}{2g} = f_B \frac{L_B}{D_B} \frac{V_B^2}{2g} = \dots \quad (m)$$

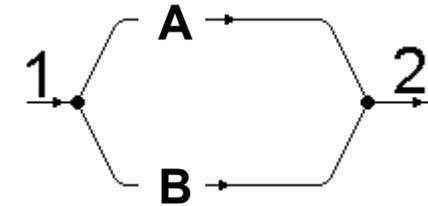
– El porcentaje de caudal por cada rama es independiente del caudal total

$$\left. \frac{Q_A}{Q_1} \right|_{\forall H_{LA}} = \text{cte} \quad ; \quad \left. \frac{Q_B}{Q_1} \right|_{\forall H_{LB}} = \text{cte} \quad ; \quad \dots$$



6.- Sistemas de dos tuberías en paralelo (II)

**Sistemas con 2 ramas**, existen dos tipos de problemas:



**1.- Calcular la caída de presión y los caudales por rama** conocidos el caudal total y las tuberías ( $D$ ,  $\varepsilon$ )

- Se presupone un caudal en cada rama,  $Q_A$  y  $Q_B$
- ...
- Comprobar que la  $H_{LA} = H_{LB}$ , e iterar modificando los caudales

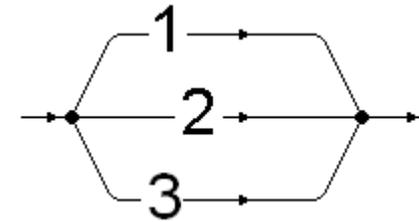
**2.- Calcular los caudales** conocidos la caída de presión y las tuberías ( $D$ ,  $\varepsilon$ )

- Como tuberías individuales



6.- Sistemas de dos tuberías en paralelo (III)

Determinar la distribución del flujo.  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$   
si el  $Q_{\text{Total}} = 0,02 \text{ m}^3/\text{s}$

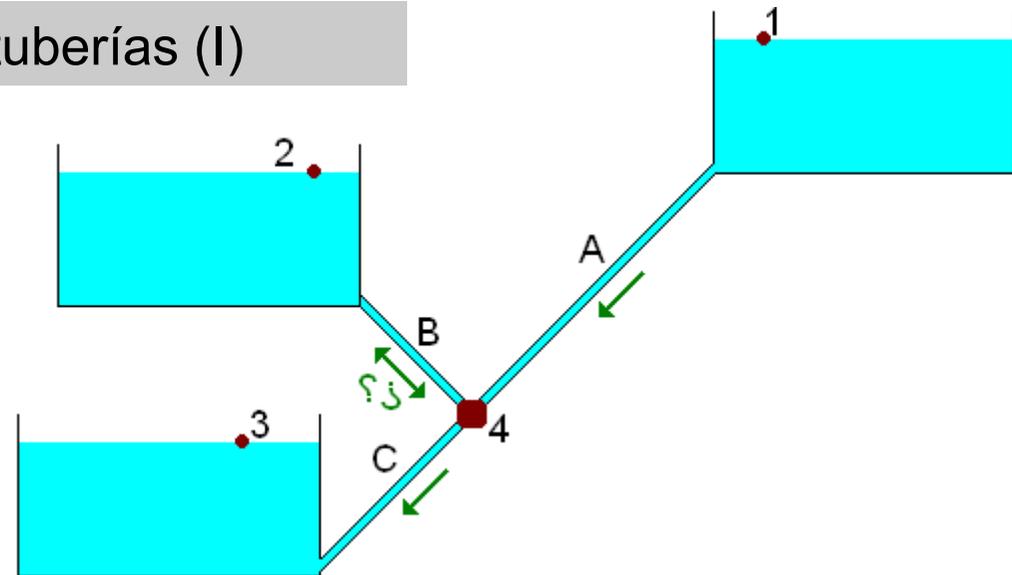


Tubería	L (m)	D (m)	e (mm)
1	100	0,05	0,1
2	150	0,075	0,2
3	200	0,085	0,1

7.- Sistemas de ramales de tuberías (I)

**Sistemas con 3 ramas (I)**

¿Q<sub>A</sub>? ¿Q<sub>B</sub>? ¿entra o sale de 2? ¿Q<sub>C</sub>?



$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \right] - H_{L1-2} = \left[ z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \right] \\ \left[ z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \right] - H_{L1-3} = \left[ z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} \right] \\ \left[ z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \right] - H_{L2-3} = \left[ z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} \right] \end{array} \right.$$

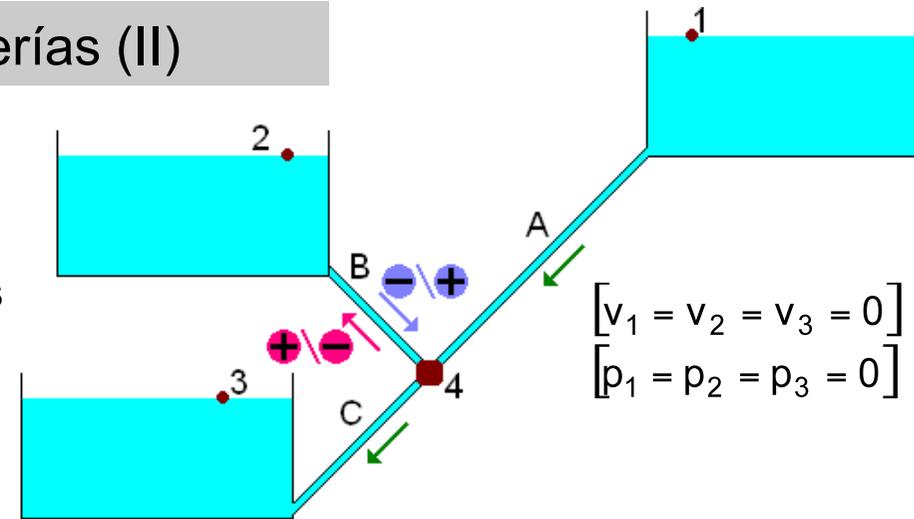
$$\begin{array}{l} [v_1 = v_2 = v_3 = 0] \\ [p_1 = p_2 = p_3 = 0] \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [z_1] - H_{L1-2} = [z_2] \\ [z_1] - H_{L1-3} = [z_3] \\ [z_2] - H_{L2-3} = [z_3] \end{array} \right.$$

7.- Sistemas de ramales de tuberías (II)

**Sistemas con 3 ramas (II)**

- Suponer caudales ( $Q \Rightarrow v$ ) y direcciones (balance de continuidad de las masas)
- $v \Rightarrow Re \Rightarrow \lambda \Rightarrow H_L$
- Iterar ...



$$\begin{cases} [z_1] - H_{L1-2} = [z_2] \\ [z_1] - H_{L1-3} = [z_3] \\ [z_2] - H_{L2-3} = [z_3] \end{cases}$$

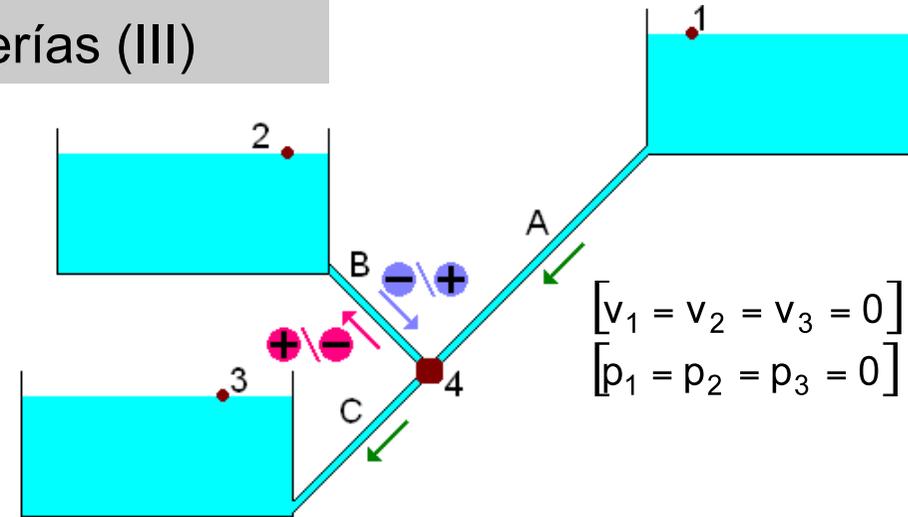
$$\begin{cases} H_{L1-2} = H_{L1-4} + H_{L4-2} = H_{LA} \pm H_{LB} \\ H_{L1-3} = H_{L1-4} + H_{L4-3} = H_{LA} + H_{LC} \\ H_{L2-3} = H_{L2-4} + H_{L4-3} = \pm H_{LB} + H_{LC} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{LA} = f_A \frac{L_A}{D_A} \frac{v_A^2}{2g} \\ H_{LB} = f_B \frac{L_B}{D_B} \frac{v_B^2}{2g} \\ H_{LC} = f_C \frac{L_C}{D_C} \frac{v_C^2}{2g} \end{cases}$$

7.- Sistemas de ramales de tuberías (III)

**Sistemas con 3 ramas (III)**

- Una suposición inicial recomendable para simplificar cálculos es:  $Q_B = 0$
- Calcular  $v_A (= v_C)$  y  $Q_A (= Q_C)$



$$\begin{cases} [v_1 = v_2 = v_3 = 0] \\ [p_1 = p_2 = p_3 = 0] \end{cases}$$

$$\{ [z_1] - H_{L1-3} = [z_3] \Rightarrow H_{L1-3} = [z_1] - [z_3]$$

$$\{ H_{L1-3} = H_{LA} + H_{LC}$$

$$\begin{cases} H_{LA} = f_A \frac{L_A}{D_A} \frac{v_A^2}{2g} \\ H_{LC} = f_C \frac{L_C}{D_C} \frac{v_C^2}{2g} \end{cases} \quad (\text{suponer } f_A \text{ y } f_C = 0,025)$$

$$[z_1 - z_3] = \left( f_A \frac{L_A}{D_A} + f_C \frac{L_C}{D_C} \right) \frac{v_A^2}{2g} \Rightarrow v_A \quad (\text{comprobar } f_A \text{ y } f_C, \text{ iterar si necesario})$$

7.- Sistemas de ramales de tuberías (IV)

**Sistemas con 3 ramas (IV)**

- Calcular:  $Q_B$

$$\{ [z_1] - H_{L1-2} = [z_2] \} \Rightarrow H_{L1-2} = [z_1] - [z_2]$$

$$\{ H_{L1-2} = H_{LA} + H_{LB} \}$$

$$\left\{ H_{LA} = f_A \frac{L_A}{D_A} \frac{v_A^2}{2g} \quad H_{LB} = f_B \frac{L_B}{D_B} \frac{v_B^2}{2g} \right\}$$

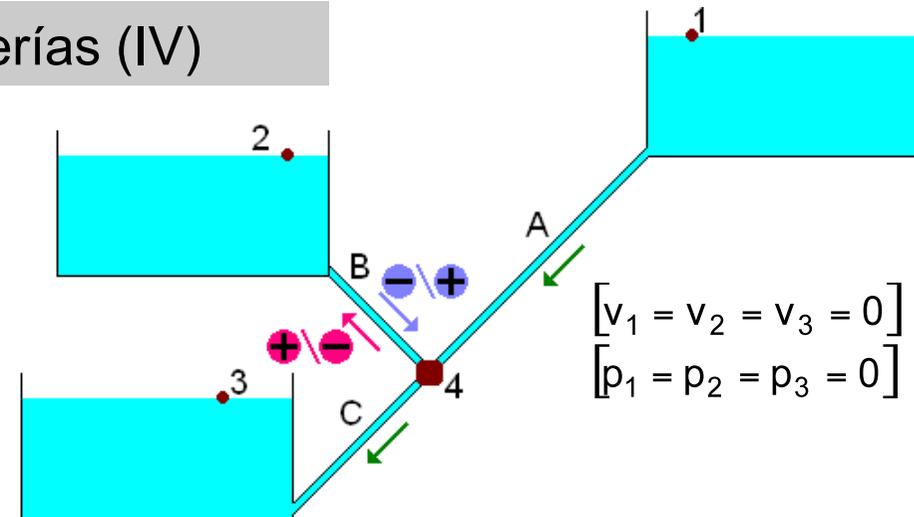
(suponer  $f_A$  y  $f_B = 0,025$ )

$$[z_1 - z_2] = \left( f_A \frac{L_A}{D_A} \frac{v_A^2}{2g} \right) \mp f_B \frac{L_B}{D_B} \frac{v_B^2}{2g} \Rightarrow v_B \text{ (con dirección)}$$

(comprobar  $f_A$  y  $f_B$ , iterar si necesario)

- Calcular:  $Q_{C2}$

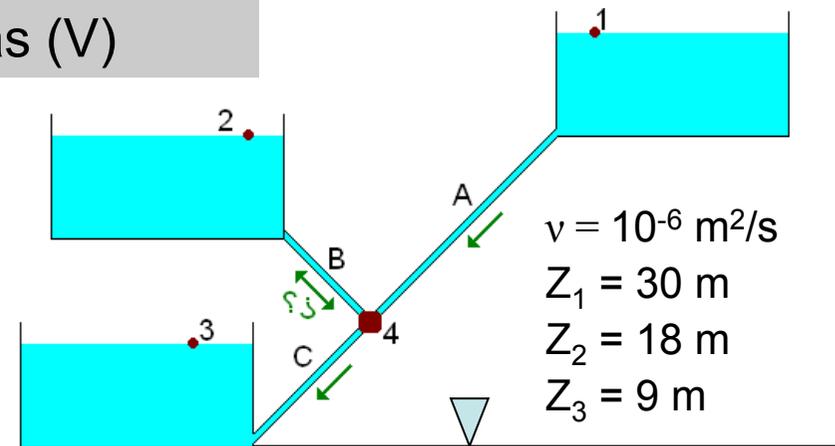
$$\{ Q_A + Q_B + Q_C = 0 \}$$



7.- Sistemas de ramales de tuberías (V)

Determinar los caudales si la altura del agua en los depósitos se mantiene cte

Tubería	L (m)	D (m)	$\epsilon/D$
1 (A)	3.000	1	0,0002
2 (B)	600	0,5	0,002
3 (C)	1.200	0,75	0,001

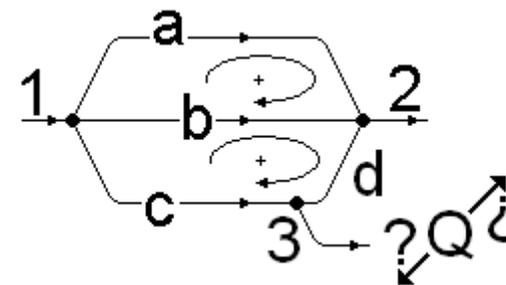
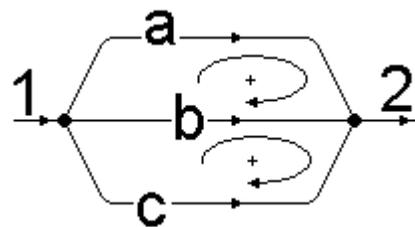


## 8.- Sistemas ramificados: (Hardy Cross) (I)

Sistema de una tubería que se separa y no vuelve a juntar, o de dos tuberías distintas que se unen

El problema suele radicar en calcular los caudales y su dirección, en cada tubería

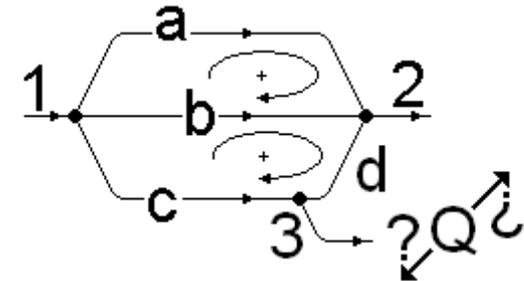
La solución depende de las presiones de entrada (salida), de las alturas geométricas, de los diámetros



8.- Sistemas ramificados: (Hardy Cross) (III)

– Las pérdidas de presión se deben expresar en función de Q

$$\left| Q = v/A \Rightarrow v^2 = (Q/A)^2 \right| \quad H_L = R Q^2$$



$$\left. \begin{array}{l} H_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{m}) \\ v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi D^2/4} \quad (\text{m/s}) \end{array} \right\} H_L = f \frac{L}{D} \frac{\left( \frac{4Q}{\pi D^2} \right)^2}{2g} = f \frac{L}{D^5} \frac{16 Q^2}{2g \pi^2} = \left[ \frac{f 8 L}{D^5 g \pi^2} \right] Q^2 = R Q^2 \quad R = \left[ \frac{f 8 L}{D^5 g \pi^2} \right]$$

Para redes de distribución de agua se suele simplificar con la ecuación:

$$R = \frac{10,6}{C^{1,85}} \frac{L}{D^{4,87}}$$



Material de la tubería	C
Extremadamente lisa	140
Muy lisa, hierro colado	130
Nueva de acero recién soldado	120
Nueva de acero roblonado	110
Tubería vieja	95-100
Vieja en mal estado	60-80

8.- Sistemas ramificados: (Hardy Cross) (II)

Ley de nudos:  $\sum Q = 0$

Ley de mallas:  $\sum H_L = 0$ ;  $\sum H_L = \sum R Q^2$

**Analogía eléctrica**

En primera aproximación la ley de mallas no se cumple debe corregirse el caudal

Factor corrector del caudal para que se cumpla la ley de mallas  $\Delta Q$

Cálculo del  $\Delta Q$

$$\sum H_L = 0; \sum R (Q + \Delta Q)^2 = \sum (R Q^2 + 2 R Q \Delta Q) = 0$$

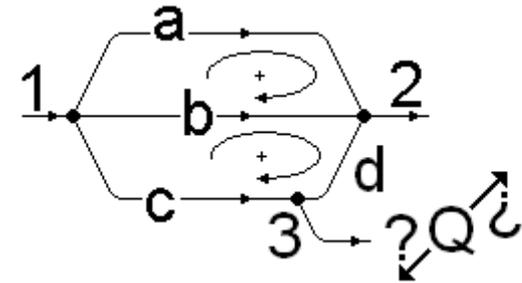
$$\Delta Q = -\frac{\sum R Q^2}{\sum 2 R Q}$$

### 8.- Sistemas ramificados: (Hardy Cross) (IV)

- Se deben suponer los caudales en cada rama,  $Q'$
- La red se divide en circuitos de lazo cerrado
- En cada tubería se calcula la pérdida de carga

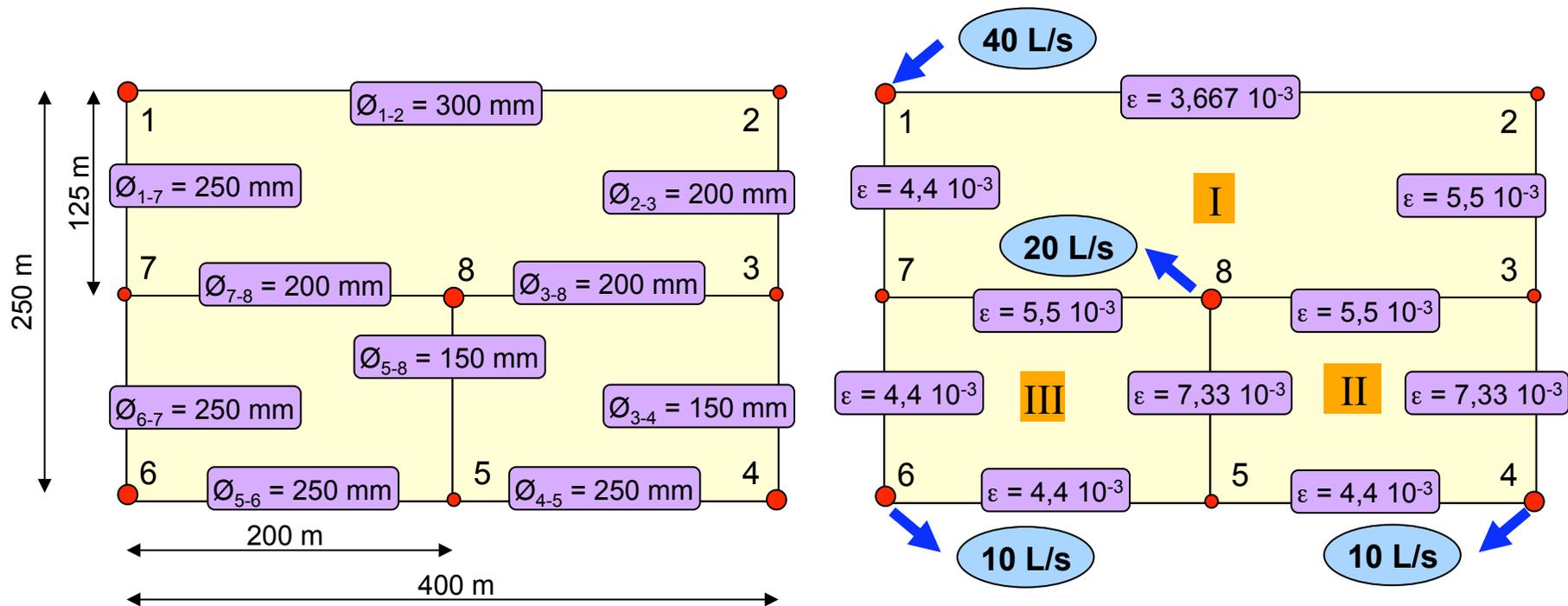
$$H_L = R Q^2$$

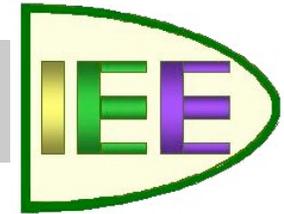
- Se suman los valores de  $H_L$  de todas las ramas del lazo  $\sum H_L$   
[si el flujo es horario  $H_L$  es positiva, si el flujo es antihorario  $H_L$  es negativa]
- En cada tubería se calcula el producto:  $2 R Q$
- Se suman, asumiéndolos como positivos:  $\sum 2 R Q$
- En cada lazo se calcula  $\Delta Q$  como:  $\Delta Q = \sum H_L / \sum 2 R Q$
- Se calcula el nuevo caudal de la tubería,  $Q'$  como:  $Q' = Q - \Delta Q$
- Repetir el proceso con  $Q'$  hasta que el valor de  $\Delta Q$  sea pequeño



8.- Sistemas ramificados: (Hardy Cross) (V)

Según los esquemas y datos de las figuras (longitudes, diámetros, caudales y rugosidades relativas), determinar la distribución de caudales





Se consideran los tramos de cada lazo con sentido horario

Considerando el "signo" horario

$$\Delta Q = \frac{\sum RQ^2}{\sum 2RQ}$$

LAZO	Tramo	R	Q	R Q <sup>2</sup>	∑ R Q <sup>2</sup>	2 R Q	∑ 2 R Q	ΔQ
------	-------	---	---	------------------	--------------------	-------	---------	----

Q estimado con "signo" horario

No tiene signo

Habría que comprobar el factor de fricción

La siguiente iteración se realiza con:  $Q = Q - \Delta Q$   
(considerando el sentido)