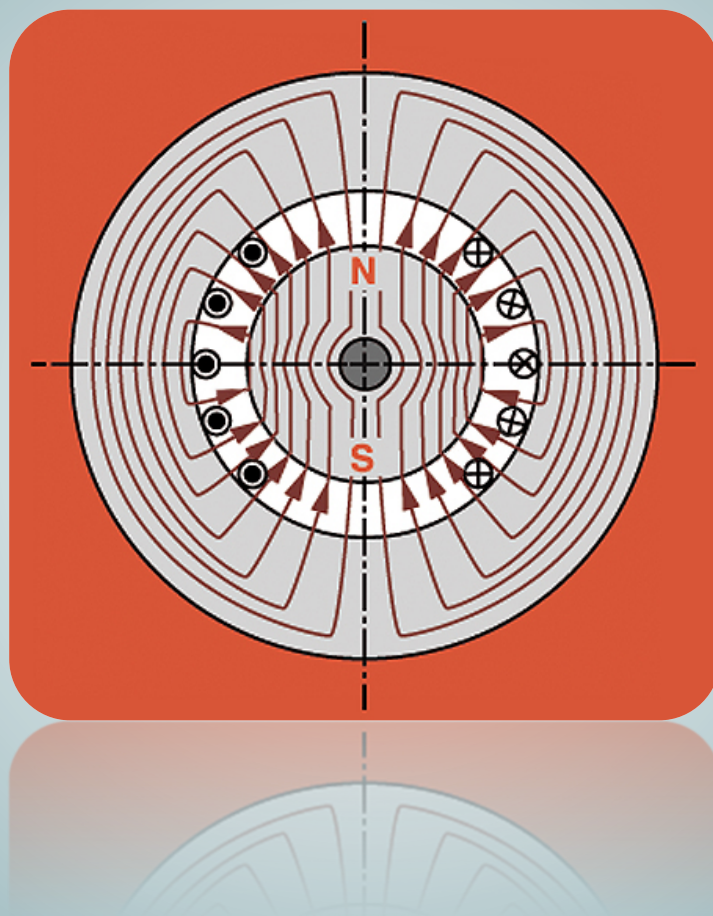


Máquinas Eléctricas I - G862

Tema 5. Máquinas eléctricas de Corriente Continua. Problemas resueltos



Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

PRESENTACIÓN

Esta colección de problemas resueltos está estructurada de forma que ayude al alumno a resolver por sí mismo los problemas propuestos. Por esta causa este texto comienza con los enunciados de todos los problemas, seguidos de sus resultados, y finaliza con la resolución de cada problema según el siguiente esquema:

- 1) Se da el enunciado del problema.
- 2) Se muestran los resultados del problema.
- 3) Se proporcionan unas sugerencias para la resolución del problema.
- 4) Se expone la resolución detallada del problema.

Se sugiere al alumno que sólo lea el enunciado del problema y que trate de resolverlo por su cuenta. Si lo necesita, puede utilizar las sugerencias que se incluyen en cada problema.

El alumno sólo debería leer la resolución detallada de cada problema después de haber intentado resolverlo por sí mismo.

© 2017, Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Universidad de Cantabria (España)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.



Está permitida la reproducción total o parcial de este documento bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Unported que incluye, entre otras, la condición inexcusable de citar su autoría (Miguel Angel Rodríguez Pozueta - Universidad de Cantabria) y su carácter gratuito.

Puede encontrar más documentación gratuita en la página web del autor:
<http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm>

MÁQUINAS DE CORRIENTE CONTINUA **(Máquinas Eléctricas I)**

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS DE MÁQUINAS DE CORRIENTE CONTINUA

C.1 MÁQUINAS DE EXCITACIÓN INDEPENDIENTE Y SHUNT (O DERIVACION)

C.1.3 Un motor de corriente continua de excitación independiente tiene un devanado inductor de resistencia 400 Ohms, una resistencia total del inducido (resistencia del inducido más la de los devanados auxiliares) de 1 Ohm y su caída de tensión entre delga y escobilla vale 0,8 V. Sus devanados auxiliares anulan totalmente la reacción de inducido y se pueden despreciar las pérdidas magnéticas y mecánicas. En condiciones asignadas el inductor se alimenta con 400 V y el inducido con 200 V, la máquina gira a 1000 r.p.m. y la corriente en el rotor es de 20 A.

Si la máquina funciona en la zona lineal de la curva de magnetización (flujo proporcional a la corriente inductora) para corrientes de excitación comprendidas entre 0 y 0,9 A y con saturación (flujo constante e igual al flujo asignado) para corrientes de excitación mayores que 0,9 A, calcular:

- a) el valor al que hay que reducir la tensión del inducido (manteniendo constante la tensión del inductor e igual a 400 V) para que la máquina gire a 700 r.p.m., si el motor estaba inicialmente en condiciones asignadas y la carga mecánica a mover tiene un par proporcional al cuadrado de la velocidad.
- b) la resistencia que hay que colocar en serie con el inductor para aumentar su velocidad a 1200 r.p.m. si tanto el inducido como el inductor se alimentan con sus respectivas tensiones asignadas y la carga mecánica a vencer es la misma que en el apartado anterior.
- c) el par asignado.
- d) la resistencia de arranque (que se conecta en serie con el inducido) necesaria para que el inducido no consuma al arrancar más de 30 A cuando los devanados del motor están conectados a sus respectivas tensiones asignadas.

Máquinas de corriente continua

C.1.5 Un motor de corriente continua shunt o derivación en condiciones asignadas gira a 1000 r.p.m., consume 10 A y está a una tensión de 1000 V. La resistencia del devanado de excitación es de 1000 Ohms y la total del inducido 2 Ohms.

Si se desprecian las pérdidas magnéticas y mecánicas, la tensión delga-escobilla y la reacción del inducido, calcular:

- a) el par asignado.
- b) la velocidad a la que girará cuando está a la tensión asignada y la carga a vencer tiene un par que varía linealmente con la velocidad según la ley

$$M = 0,1 n \quad (M \text{ en Nm y } n \text{ en r.p.m.})$$

- c) la velocidad a la que girará si debe vencer un par constante e igual al asignado y se coloca una resistencia en serie con el inducido de 10 Ohms. La máquina se conecta a una tensión de 1000 V.
- d) la resistencia de arranque (que se conecta en serie con el inducido) necesaria para que la máquina no consuma más de 20 A al arrancar.

C.2 MÁQUINAS DE EXCITACIÓN SERIE

C.2.1 Un motor serie de corriente continua de 2000 V y 1000 r.p.m. consume 20 A en condiciones asignadas. La caída de tensión entre delga y escobilla es de 0,7 V, la resistencia total de la máquina (inductor + inducido + devanados auxiliares) es de 1 Ohm. Si el efecto de la reacción de inducido es despreciable, calcular:

- a) el par asignado cuando se desprecian las pérdidas en el hierro y mecánicas.
- b) la nueva corriente y la nueva velocidad si el par que debe vencer la máquina se reduce a la mitad del asignado y se supone que la máquina trabaja en la zona lineal de la curva de magnetización y, por lo tanto, el flujo magnético es proporcional a la intensidad.
- c) la tensión de alimentación necesaria para reducir la velocidad a 800 r.p.m. si el par se conserva igual al asignado.
- d) la resistencia del reóstato de arranque (que se conecta en serie con la máquina) para conseguir que la corriente de arranque no sea superior a 1,5 veces la intensidad asignada.

C.2.3 Un motor de corriente continua de excitación serie tiene una tensión de 200 V, una corriente de 15 A y proporciona un par de 24,35 Nm en condiciones asignadas. Su resistencia total del inducido (incluyendo la resistencia del inductor) vale 2 Ohms.

En esta máquina se pueden despreciar las pérdidas mecánicas y magnéticas, el efecto de la reacción de inducido y la caída de tensión entre delgas y escobillas.

- a) Calcular la f.e.m. en el inducido, la velocidad y la potencia absorbida de la red en condiciones asignadas.

Suponiendo que la máquina funciona en la zona lineal de la curva de magnetización ($\Phi = K_I I$) y que debe vencer un par resistente constante de 15 Nm, calcular:

- b) la velocidad y la corriente del motor cuando se alimenta a su tensión asignada.
- c) la tensión de alimentación para reducir la velocidad a un 80% de la asignada.
- d) la resistencia hay que añadir en serie con el motor si se quiere reducir la velocidad al 80% de la asignada y se mantiene la tensión igual a la asignada.
- e) la tensión que hay que aplicar en el inducido para que la corriente en el arranque no sea superior a 25 A si no se utiliza ningún reóstato de arranque.

Máquinas de corriente continua

C.3 MÁQUINAS DE EXCITACIÓN COMPOUND (O COMPUESTA)

C.3.2 En un motor de corriente continua de excitación compuesta larga derivación la resistencia total del circuito del inducido (que incluye también la resistencia del inductor serie) vale 5 Ohms y la del circuito del inductor shunt vale 500 Ohms. En condiciones asignadas este motor está alimentado a 1000 V, gira a 600 r.p.m. y consume una corriente total de 22 A. En vacío y a la tensión asignada este motor gira a 833 r.p.m.

Se sabe que para flujos inferiores al asignado esta máquina funciona en la zona lineal de la curva de magnetización y que se pueden despreciar la reacción de inducido y la caída de tensión delga-escobilla, así como las pérdidas magnéticas y mecánicas.

Calcular el par y la velocidad de este motor cuando está conectado a la tensión asignada y consume una corriente total de 12 A.

RESULTADOS DE LOS PROBLEMAS DE MAQUINAS DE CORRIENTE CONTINUA

C.1 MÁQUINAS DE EXCITACIÓN INDEPENDIENTE Y SHUNT (O DERIVACION)

Problema C.1.3:

- a) $V' = 136,3 \text{ V}$
- b) $R_{re} = 195,2 \text{ Ohms}$
- c) $M_N = 34,1 \text{ Nm}$
- d) $R_{arr} = 5,61 \text{ Ohms}$

Problema C.1.5:

- a) $M_N = 84,4 \text{ Nm}$
- b) $n' = 996,8 \text{ r.p.m}$
- c) $n'' = 908,4 \text{ r.p.m}$
- d) $R_{arr} = 50,6 \text{ Ohms}$

C.2 MÁQUINAS DE EXCITACIÓN SERIE

Problema C.2.1:

- a) $M = 377,9 \text{ Nm}$
- b) $I' = 14,1 \text{ A}; n' = 1418 \text{ r.p.m.}$
- c) $V'' = 1604 \text{ V}$
- d) $R_{arr} = 65,6 \text{ Ohms}$

Problema C.2.3:

- a) $E_N = 170 \text{ V}; n_N = 1000 \text{ r.p.m.}; P_{1N} = 3000 \text{ W}$
- b) $n' = 1319 \text{ r.p.m.}; I_i = 11,8 \text{ A}$
- c) $V'' = 130,6 \text{ V}$
- d) $R_{ri} = 5,88 \text{ Ohms}$
- e) $V_a = 50 \text{ V}$

C.3 MÁQUINAS DE EXCITACIÓN COMPOUND (O COMPUESTA)

Problema C.3.2:

$M = 129 \text{ Nm}; n = 703,7 \text{ r.p.m.}$

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

PROBLEMA C.1.3

ENUNCIADO

Un motor de corriente continua de excitación independiente tiene un devanado inductor de resistencia 400 Ohms, una resistencia total del inducido (resistencia del inducido más la de los devanados auxiliares) de 1 Ohm y su caída de tensión entre delga y escobilla vale 0,8 V. Sus devanados auxiliares anulan totalmente la reacción de inducido y se pueden despreciar las pérdidas magnéticas y mecánicas. En condiciones asignadas el inductor se alimenta con 400 V y el inducido con 200 V, la máquina gira a 1000 r.p.m. y la corriente en el rotor es de 20 A.

Si la máquina funciona en la zona lineal de la curva de magnetización (flujo proporcional a la corriente inductora) para corrientes de excitación comprendidas entre 0 y 0,9 A y con saturación (flujo constante e igual al flujo asignado) para corrientes de excitación mayores que 0,9 A, calcular:

- a) el valor al que hay que reducir la tensión del inducido (manteniendo constante la tensión del inductor e igual a 400 V) para que la máquina gire a 700 r.p.m., si el motor estaba inicialmente en condiciones asignadas y la carga mecánica a mover tiene un par proporcional al cuadrado de la velocidad.
- b) la resistencia que hay que colocar en serie con el inductor para aumentar su velocidad a 1200 r.p.m. si tanto el inducido como el inductor se alimentan con sus respectivas tensiones asignadas y la carga mecánica a vencer es la misma que en el apartado anterior.
- c) el par asignado.
- d) la resistencia de arranque necesaria para que el inducido no consuma al arrancar más de 30 A cuando los devanados del motor están conectados a sus respectivas tensiones asignadas.

RESULTADOS

- a) $V' = 136,3 \text{ V}$
- b) $R_{re} = 195,2 \text{ Ohms}$
- c) $M_N = 34,1 \text{ Nm}$
- d) $R_{arr} = 5,61 \text{ Ohms}$

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

- * Recuerde que en una máquina de corriente continua el devanado del rotor es el inducido.
- * La caída de tensión V_{esc} es la correspondiente a dos escobillas, es decir, es el doble a la caída de tensión en una escobilla.
- * El devanado de excitación también se denomina devanado inductor o de campo.
- * Como la reacción de inducido se puede despreciar, el flujo por polo sólo depende de la corriente de excitación I_e . Según el enunciado, para corrientes de excitación menores de 0,9 A el cociente entre el flujo y el flujo asignado (este cociente se le denominará x) se puede calcular como función lineal de I_e .
- * Mediante las ecuaciones eléctricas de los circuitos del inductor y del inducido calcule los valores de la corriente de excitación y de la f.e.m. inducida cuando la máquina está en condiciones asignadas.
- * Se pretende que la máquina gire a 700 r.p.m. reduciendo la tensión del inducido. La tensión y la resistencia del inductor no se modifican, luego la corriente de excitación es la misma que en condiciones asignadas y el flujo también será el asignado.
- * Mediante la ley que expresa la f.e.m. inducida en función de la constante K_E de la máquina, del flujo y de la velocidad, comparar la f.e.m. en este nuevo estado con la f.e.m. asignada. Esto permite obtener la f.e.m. cuando gira a 700 r.p.m.
- * Mediante la ley que expresa el par en función de la constante K_M de la máquina, del flujo y de la corriente del inducido, comparar el par en este nuevo estado con el asignado. Ahora indicar que cada par es proporcional al cuadrado de su velocidad. Esto permite obtener una relación de la cual se puede despejar la corriente del inducido cuando el motor gira a 700 r.p.m.
- * Ya se conocen la f.e.m. y la corriente del inducido cuando el motor gira a 700 r.p.m. La tensión del inducido que corresponde a esta situación se obtiene mediante la ecuación eléctrica del inducido.
- * Ahora se va a estudiar un nuevo estado del motor en el que gira a 1200 r.p.m. porque se ha reducido el flujo. Las tensiones del inductor y del inducido son las asignadas. Lo primero es calcular cuánto vale el cociente entre el flujo que tiene ahora la máquina y el flujo asignado. Se denominará x a este cociente.
- * Comparando la f.e.m. de la máquina a 1200 r.p.m. y en condiciones asignadas se puede expresar la f.e.m. a 1200 r.p.m. en función de x .
- * Comparando el par de la máquina a 1200 r.p.m. y cuando está en condiciones asignadas y teniendo en cuenta que el par es proporcional al cuadrado de la velocidad, se puede expresar la corriente del inducido a 1200 r.p.m. en función de x .

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

- * Sustituyendo las expresiones que dan la f.e.m. y la corriente del inducido a 1200 r.p.m. en función de x en la ecuación eléctrica del inducido se obtiene una ecuación de segundo grado cuya incógnita es x . De las dos soluciones de esta ecuación, la correcta es aquella que, siendo x menor que 1, no se aleja demasiado de dicho valor. (ya que si x fuera muy pequeña la máquina tendría muy poco flujo y necesitaría unas corrientes de inducido demasiado grandes).
- * Conocido el cociente entre el flujo actual y el que había en condiciones asignadas (variable x) se puede obtener la corriente de excitación que debe haber en el inductor. Para ello se utiliza la relación lineal que hay entre x e I_e cuando la corriente de excitación es menor de 0,9 A.
- * Dividiendo la tensión del circuito del inductor entre la corriente I_e obtenida en la sugerencia anterior, se calcula el valor de la resistencia que debe tener el circuito del inductor para conseguir que la máquina gire a 1200 r.p.m. La diferencia entre esta resistencia y la que había en condiciones asignadas será la resistencia del reóstato que se conectará en serie con el devanado de excitación.
- * Si se desprecian las pérdidas magnéticas (es decir, las pérdidas en el hierro) y mecánicas resulta que la potencia útil del motor es igual a su potencia electromagnética (que se calcula mediante el producto de su f.e.m. por su corriente del inducido). El par es igual al cociente de la potencia útil (medida en vatios) entre la velocidad (medida en radianes por segundo).
- * El reóstato de arranque se calcula obteniendo primero la resistencia total del inducido mediante la ecuación eléctrica del circuito del inducido cuando la f.e.m. vale cero (en el arranque la velocidad es nula y, en consecuencia, la f.e.m. también) y la corriente del inducido es la indicada en el enunciado (30 A). La resistencia total del inducido ahora es igual a la del conjunto de los devanados inducido y auxiliares más la del reóstato de arranque, lo cual permite calcular el valor óhmico de dicho reóstato.

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA C.1.3

Datos:

Motor de excitación independiente	$R_e = 400 \text{ Ohms}$	
$R_i = 1 \text{ Ohm}$	$\frac{V_{esc}}{2} = 0,8V$	Despreciar la reacción de inducido
$P_{Fe} \approx 0$	$P_m \approx 0$	Par de carga proporcional a n^2

Condiciones asignadas:

$V_{eN} = 400 \text{ V}$	$V_N = 200 \text{ V}$	$n_N = 1000 \text{ r.p.m.}$	$I_{iN} = 20A$
--------------------------	-----------------------	-----------------------------	----------------

Curva de magnetización:

$\Phi = K_I I_e$	si	$I_e \leq 0,9 \text{ A}$
$\Phi = \Phi_N$	si	$I_e \geq 0,9 \text{ A}$

Resolución:

a)

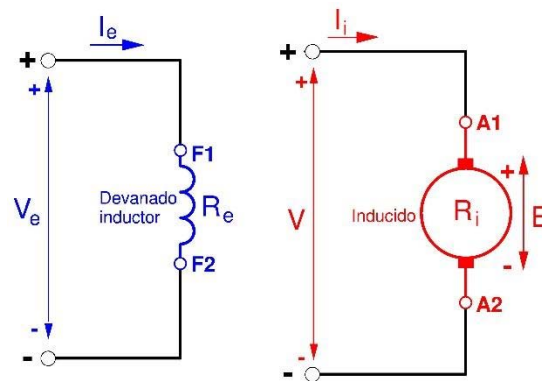


Fig. 1: Circuito de un motor de excitación independiente

En la Fig. 1 se ha representado este motor. De ella se deduce que:

$$I_e = \frac{V_e}{R_e} \quad (1)$$

$$V = E + I_i R_i + V_{esc} \rightarrow I_i = \frac{V - E - V_{esc}}{R_i} \quad (2)$$

En estas expresiones el parámetro R_i representa la resistencia del circuito del inducido e incluye no sólo la resistencia del devanado inducido sino también la de los devanados auxiliares, si los hubiera, (porque se conectan en serie con el inducido) y de los reóstatos que haya conectados en serie con el inducido. Análogamente, el parámetro R_e representa la resistencia total del circuito inductor e incluye no sólo la resistencia del devanado inductor sino también la de los reóstatos que haya conectados en serie con él.

Recuérdese que el devanado de excitación también se denomina inductor o de campo y que el devanado del rotor es el inducido.

Máquinas de corriente continua**C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)**

En las máquinas de corriente continua la f.e.m. inducida se puede obtener mediante la siguiente relación:

$$E = K_E n \Phi \quad (3)$$

donde K_E es una constante de la máquina que depende de sus números de polos, de ramas en paralelo y de conductores del inducido.

En las máquinas de corriente continua el par desarrollado se puede obtener mediante la siguiente relación:

$$M = K_M \Phi I_i \quad (4)$$

donde K_M es otra constante de la máquina que también depende de sus números de polos, de ramas en paralelo y de conductores del inducido.

La caída de tensión V_{esc} es la correspondiente a dos escobillas, luego:

$$V_{esc} = 2 \cdot 0,8 = 1,6V$$

El enunciado señala que los devanados auxiliares anulan la reacción de inducido, por lo que el flujo Φ sólo dependerá de la corriente de excitación I_e . El enunciado también indica que para este motor se va a emplear la curva de magnetización aproximada que aparece representada en la Fig. 2.

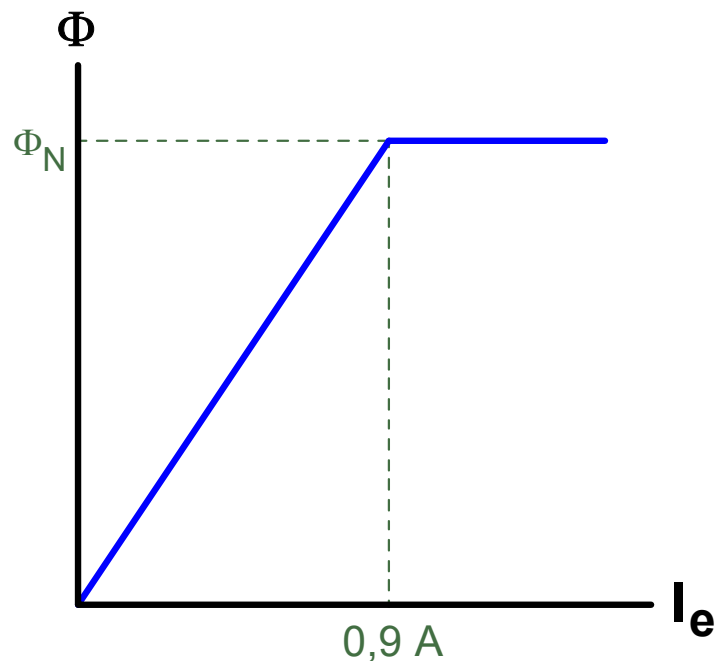


Fig. 2: Curva de magnetización aproximada

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

De la Fig. 2 se deduce que:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\Phi_N}{0,9} I_e \rightarrow \frac{\Phi}{\Phi_N} = \frac{I_e}{0,9} \quad \text{si} \quad I_e \leq 0,9 \text{ A} \\ \Phi &= \Phi_N \rightarrow \frac{\Phi}{\Phi_N} = 1 \quad \text{si} \quad I_e \geq 0,9 \text{ A} \end{aligned} \quad (5)$$

En condiciones asignadas se tiene lo siguiente:

Corriente de excitación asignada (se obtiene de (1)):

$$I_{eN} = \frac{V_{eN}}{R_e} = \frac{400}{400} = 1 \text{ A}$$

F.e.m. asignada (sale de (2)):

$$E_N = V_N - R_i I_i - V_{esc} = 200 - 1 \cdot 20 - 1,6 = 178,4 \text{ V}$$

Para la nueva situación, en la que la máquina va a girar a 700 r.p.m. al reducir la tensión del inducido, las variables se van a denominar con un apóstrofo '.

En este nuevo estado de funcionamiento de la máquina, el circuito del devanado inductor tiene la misma resistencia y está conectado a la misma tensión que en condiciones asignadas. Por lo tanto, ahora la corriente de excitación sigue siendo la asignada y, en consecuencia, el flujo tampoco cambia y es igual al asignado:

$$I'_e = I_{eN} = 1 \text{ A} \rightarrow \Phi' = \Phi_N$$

De la relación (3) se deduce que:

$$\frac{E'}{E_N} = \frac{K_E n' \Phi'}{K_E n_N \Phi_N} = \frac{K_E n' \Phi_N}{K_E n_N \Phi_N} = \frac{n'}{n_N} \quad (6)$$

Es decir,

$$E' = E_N \frac{n'}{n_N} = 178,4 \frac{700}{1000} = 124,9 \text{ V}$$

Por otra parte, de la relación (4) se obtiene que:

$$\frac{M'}{M_N} = \frac{K_M \Phi' I'_i}{K_M \Phi_N I_{iN}} = \frac{K_M \Phi_N I'_i}{K_M \Phi_N I_{iN}} = \frac{I'_i}{I_{iN}} \quad (7)$$

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

La carga que tiene que mover este motor tiene un par proporcional al cuadrado de la velocidad, luego:

$$\frac{M'}{M_N} = \frac{n'^2}{n_N^2} = \left(\frac{n'}{n_N} \right)^2 \quad (8)$$

De las relaciones (7) y (8) se deduce que:

$$\frac{I'_i}{I_{iN}} = \left(\frac{n'}{n_N} \right)^2 \rightarrow I'_i = \left(\frac{n'}{n_N} \right)^2 I_{iN} = \left(\frac{700}{1000} \right)^2 \cdot 20 = 9,8 \text{ A}$$

Ahora ya se puede aplicar la expresión (2) para obtener la tensión que es preciso aplicar al inducido:

$$V' = E' + I'_i R_i + V_{esc} = 124,9 + 9,8 \cdot 1 + 1,6 = 136,3 \text{ V}$$

Para que este motor gire a 700 r.p.m. hay que reducir la tensión a 136,3 V.

- b) A continuación se va a estudiar un nuevo estado de carga en el que se aumenta la resistencia del circuito inductor colocando un reóstato en serie con el devanado de excitación (ver la Fig. 3); lo que conlleva una disminución de la corriente de excitación I_e y, consecuentemente, el flujo Φ también se reduce. Esto consigue que la velocidad del motor aumente hasta 1200 r.p.m. Los devanados inductor e inducido se alimentan a sus respectivas tensiones asignadas. Las variables correspondientes a este estado de carga se van a denominar con comillas “.

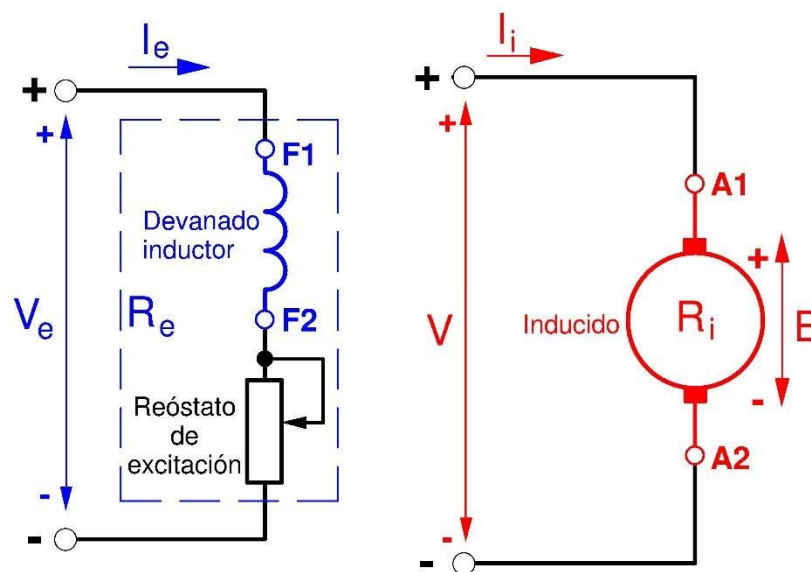


Fig. 3: Circuito de un motor de excitación independiente con un reóstato para regular la velocidad por variación de la corriente de excitación I_e

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

Si se denomina x a este cociente:

$$x = \frac{\Phi''}{\Phi_N}$$

de (3) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{E''}{E_N} &= \frac{K_E n'' \Phi''}{K_E n_N \Phi_N} = \frac{n'' \Phi''}{n_N \Phi_N} = \frac{n''}{n_N} x \\ E'' &= E_N \frac{n''}{n_N} x = 178,4 \frac{1200}{1000} x = 214,1 x \rightarrow \boxed{E'' = 214,1 x} \end{aligned} \quad (9)$$

de (4) y del hecho de que el par resistente sea proporcional al cuadrado de la velocidad se deduce que:

$$\begin{aligned} \frac{M''}{M_N} &= \frac{K_M \Phi'' I''_i}{K_M \Phi_N I_{iN}} = \frac{\Phi'' I''_i}{\Phi_N I_{iN}} = \frac{I''_i}{I_{iN}} x \\ \frac{M''}{M_N} &= \left(\frac{n''}{n_N} \right)^2 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{I''_i}{I_{iN}} = \left(\frac{n''}{n_N} \right)^2 \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

$$I''_i = I_{iN} \left(\frac{n''}{n_N} \right)^2 \frac{1}{x} = 20 \left(\frac{1200}{1000} \right)^2 \frac{1}{x} = \frac{28,8}{x} \rightarrow \boxed{I''_i = \frac{28,8}{x}} \quad (10)$$

Luego, sustituyendo (9) y (10) en (2) se llega a esta ecuación:

$$V'' = E'' + I''_i R_i + V_{esc} \rightarrow 200 = 214,1 x + \frac{28,8}{x} \cdot 1 + 1,6$$

$$\boxed{214,1 x^2 - 198,4 x + 28,8 = 0} \quad (11)$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado se obtienen estas dos soluciones:

$$x = \frac{\Phi''}{\Phi_N} = \begin{cases} 0,747 \rightarrow I''_i = \frac{28,8}{0,747} = 38,55 \text{ A} \\ 0,180 \rightarrow I''_i = \frac{28,8}{0,180} = 160 \text{ A} \end{cases}$$

La segunda solución da una reducción muy acusada del flujo lo que exige una corriente de inducido mucho mayor que la asignada. Por lo tanto, la solución correcta es la primera:

Máquinas de corriente continua**C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)**

$$x = \frac{\Phi''}{\Phi_N} = 0,747 \rightarrow \begin{cases} \Phi'' = 0,747 \Phi_N \\ I''_i = \frac{28,8}{0,747} = 38,55 \text{ A} \\ E'' = 124,1 \cdot 0,747 = 159,9 \text{ V} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la Fig. 2 y la primera de las relaciones (5) se llega a:

$$\Phi'' = \frac{\Phi_N}{0,9} I''_e \rightarrow I''_e = \frac{0,9 \Phi''}{\Phi_N} = \frac{0,9 \cdot 0,747 \Phi_N}{\Phi_N} = 0,672 \text{ A}$$

Lo que, por (1), exige que ahora la resistencia del circuito inductor valga:

$$I''_e = \frac{V''_e}{R''_e} \rightarrow R''_e = \frac{V''_e}{I''_e} = \frac{400}{0,672} = 595,2 \Omega$$

Esto significa que la resistencia del circuito inductor ha aumentado en

$$R''_e - R_e = 595,2 - 400 = 195,2 \Omega$$

En consecuencia, la resistencia que hay que colocar en serie con el devanado inductor para que la velocidad aumente a 1200 r.p.m. es $R_{re} = 195,2 \text{ Ohms}$.

- c) La potencia electromagnética de la máquina cuando funciona en condiciones asignadas vale:

$$P_{emN} = E_N \cdot I_{iN} = 178,4 \cdot 20 = 3568 \text{ W}$$

que coincide con el valor de la potencia útil si se desprecian las pérdidas magnéticas (o en el hierro) y mecánicas:

$$\left. \begin{array}{l} P_u = P_{em} - P_{Fe} - P_m \\ P_m \approx 0; \quad P_{Fe} \approx 0 \end{array} \right\} P_u \approx P_{em} \rightarrow P_{uN} \approx P_{emN} = 3568 \text{ W}$$

El par asignado vale pues:

$$M = \frac{P_u}{\Omega} = \frac{P_u}{\frac{2\pi}{60} n} \approx \frac{P_{em}}{\frac{2\pi}{60} n} \rightarrow M_N \approx \frac{P_{emN}}{\frac{2\pi}{60} n_N}$$

$$M_N \approx \frac{3568}{\frac{2\pi}{60} 1000} = 34,1 \text{ Nm}$$

El par asignado vale $M_N = 34,1 \text{ Nm}$.

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

- d) En la Fig. 4 se muestra el circuito de este motor cuando se le conecta una resistencia de arranque.

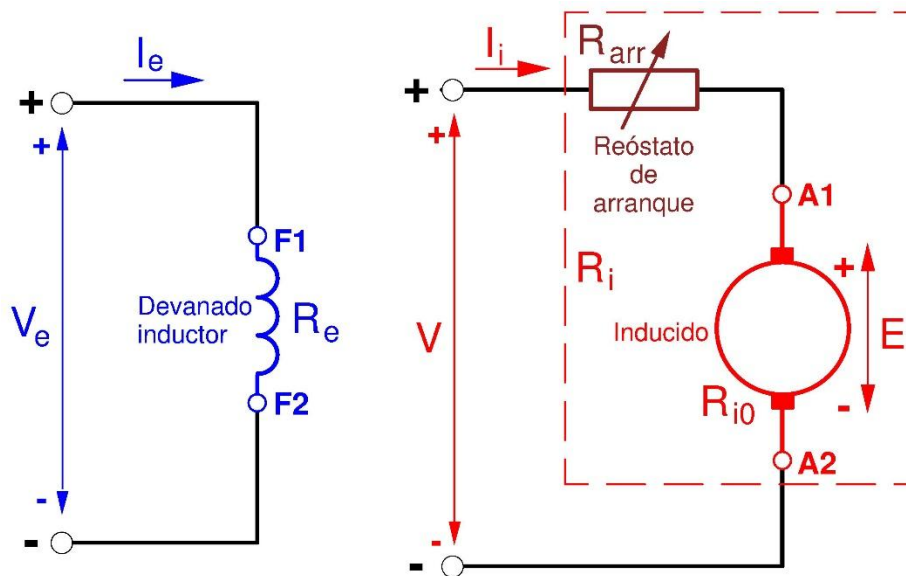


Fig. 4: Circuito de un motor de excitación independiente con reóstato de arranque

De la Fig. 4 y de la relación (2) se deduce que en el arranque, cuando la f.e.m. E es nula por serlo también la velocidad n (según indica la relación (3)), se cumple que:

$$V = I_{ia} R_i + V_{esc} = I_{ia} (R_{i0} + R_{arr}) + V_{esc} \rightarrow R_{arr} = \frac{V - V_{esc}}{I_{ia}} - R_{i0} \quad (12)$$

En la expresión anterior R_{i0} es la resistencia total del circuito inducido cuando no hay ningún reóstato en serie con él. Por lo tanto, en un motor de excitación independiente R_{i0} es igual a la resistencia del conjunto de los devanados inducido y auxiliares. Es decir, $R_{i0} = 1 \text{ Ohm}$.

Como se pretende que la corriente de inducido en el arranque a tensión asignada no supere el valor de 30 A, sustituyendo valores en (12) se obtiene:

$$R_{arr} = \frac{V - V_{esc}}{I_{ia}} - R_{i0} = \frac{200 - 1,6}{30} - 1 = 5,61 \, \Omega$$

La resistencia de arranque deberá valer $R_{arr} = 5,61 \text{ Ohms}$.

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

PROBLEMA C.1.5

ENUNCIADO

Un motor de corriente continua shunt o derivación en condiciones asignadas gira a 1000 r.p.m., consume 10 A y está a una tensión de 1000 V. La resistencia del devanado de excitación es de 1000 Ohms y la del devanado inducido 2 Ohms.

Si se desprecian las pérdidas magnéticas y mecánicas, la tensión delga-escobilla y la reacción del inducido, calcular:

- a) el par asignado.
- b) la velocidad a la que girará cuando está a la tensión asignada y la carga a vencer tiene un par que varía linealmente con la velocidad según la ley

$$M = 0,1 n \quad (M \text{ en Nm y } n \text{ en r.p.m.)}$$

- c) la velocidad a la que girará si debe vencer un par constante e igual al asignado y se coloca una resistencia en serie con el inducido de 10 Ohms. La máquina se conecta a una tensión de 1000 V.
- d) la resistencia de arranque necesaria para que la máquina no consuma más de 20 A al arrancar.

RESULTADOS

- a) $M_N = 84,4 \text{ Nm}$
- b) $n' = 996,8 \text{ r.p.m}$
- c) $n'' = 908,4 \text{ r.p.m}$
- d) $R_{arr} = 50,6 \text{ Ohms}$

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

- * El devanado de excitación también se denomina devanado inductor o de campo.
- * Como la reacción de inducido se puede despreciar, el flujo por polo sólo depende de la corriente de excitación I_e .
- * Mediante las ecuaciones eléctricas de los circuitos del inductor y del inducido calcule los valores de las corrientes del inducido y del inductor y de la f.e.m. inducida cuando la máquina está en condiciones asignadas.
- * Si se desprecian las pérdidas magnéticas (es decir, las pérdidas en el hierro) y mecánicas resulta que la potencia útil del motor es igual a su potencia electromagnética (que se calcula mediante el producto de su f.e.m. por su corriente del inducido). El par es igual al cociente de la potencia útil (medida en vatios) entre la velocidad (medida en radianes por segundo). De esta manera es posible calcular el par en condiciones asignadas.
- * Se pretende que la máquina funcione a su tensión asignada moviendo una carga cuyo par resistente sigue la ley $M = 0,1 n$. La tensión y la resistencia del inductor no se modifican, luego la corriente de excitación es la misma que en condiciones asignadas y el flujo también será el asignado.
- * Mediante la ley que expresa la f.e.m. inducida en función de la constante K_E de la máquina, del flujo y de la velocidad, comparar la f.e.m. en este nuevo estado con la f.e.m. asignada. Esto permite expresar la f.e.m. que habrá en este nuevo estado en función de la nueva velocidad.
- * Mediante la ley que expresa el par en función de la constante K_M de la máquina, del flujo y de la corriente del inducido, comparar el par en este nuevo estado con el asignado. A su vez indicar que el par en este nuevo estado sigue la ley $M = 0,1 n$. Esto permite expresar la corriente del inducido en este nuevo estado en función de la nueva velocidad.
- * En el nuevo estado de carga ya se conocen la f.e.m. y la corriente del inducido en función de la velocidad. Sustituyendo estas expresiones de E y de I_i en la ecuación eléctrica del inducido se consigue una ecuación de la que se puede despejar la velocidad.
- * Ahora se va a estudiar otro estado de carga en la que la máquina se va a conectar a la tensión asignada, va a mover un par resistente constante e igual al asignado y se le va a añadir un reóstato en serie con el inducido.
- * Calcule cuánto vale ahora la resistencia total del circuito inducido sabiendo que se ha incrementado conectándole un reóstato de 10 Ohms en serie.

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

- * En este nuevo estado de funcionamiento de la máquina, el circuito del devanado inductor tiene la misma resistencia y está conectado a la misma tensión que en condiciones asignadas. Por lo tanto, dado que el par continúa siendo el asignado, ahora la corriente de excitación sigue siendo la asignada y, en consecuencia, el flujo tampoco cambia y es igual al asignado.
- * Dado que el par a vencer es igual al asignado y se acaba de ver que el flujo también es igual al asignado, se obtiene de que la corriente de inducido también será ahora igual a la asignada porque el par es proporcional al producto del flujo por la corriente del inducido.
- * Obtenga la f.e.m. que tendrá ahora la máquina despejándola de la ecuación eléctrica del inducido.
- * Comparando la f.e.m. que ahora tiene la máquina con la f.e.m. en condiciones asignadas se obtiene una ecuación de la que se puede obtener la velocidad de la máquina en este nuevo estado de carga.
- * Aplicando la ley de Ohm al inductor se obtiene que en el arranque la corriente de excitación es la misma que en condiciones asignadas porque en ambos casos el circuito inductor tiene las mismas resistencia y tensión.
- * Sabiendo que en el momento de arrancar la corriente total del motor será 20 A y la corriente en el inductor será igual a la que hay en condiciones asignadas (ver la sugerencia anterior), determine la corriente del inducido en el arranque.
- * La resistencia total del inducido en el arranque se calcula mediante la ecuación eléctrica del circuito del inducido cuando la f.e.m. vale cero (en el arranque la velocidad es nula y, en consecuencia, la f.e.m. también) y la corriente del inducido es la calculada en la sugerencia anterior.
- * La resistencia del reóstato de arranque se calcula teniendo en cuenta que, en este arranque, la resistencia total del inducido es la suma de la resistencia del conjunto de los devanados inducido y auxiliares más la del reóstato de arranque.

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA C.1.5

Motor shunt	$n_N = 1000 \text{ r.p.m.}$	$I_N = 10 \text{ A}$	$V_N = 1000 \text{ V}$
$R_e = 1000 \text{ Ohms}$	$R_i = 2 \text{ Ohms}$	$P_{Fe} \approx 0$	$P_m \approx 0$
$V_{esc} \approx 0$	Despreciar la reacción de inducido		

Resolución:

a)

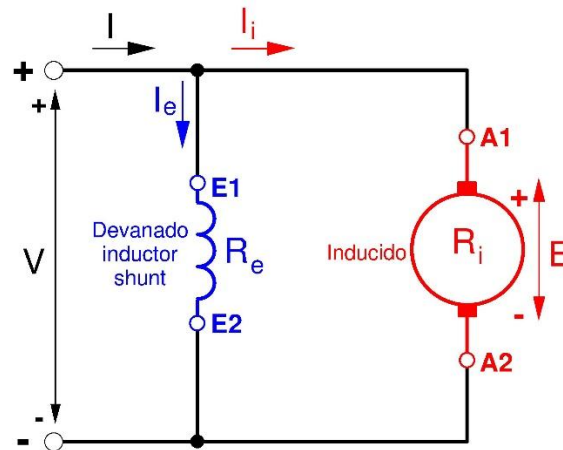


Fig. 1: Circuito de un motor de excitación shunt (o derivación)

En la Fig. 1 se ha representado este motor. De ella se deduce que:

$$I = I_i + I_e \rightarrow I_i = I - I_e \quad (1)$$

$$I_e = \frac{V}{R_e} \quad (2)$$

$$V = E + I_i R_i + V_{esc} \rightarrow I_i = \frac{V - E - V_{esc}}{R_i} \quad (3)$$

que en este caso, donde se desprecia la caída de tensión en las escobillas ($V_{esc} \approx 0$), las expresiones (3) se convierten en:

$$V = E + I_i R_i \rightarrow I_i = \frac{V - E}{R_i} \quad (4)$$

En estas expresiones el parámetro R_i representa la resistencia del circuito del inducido e incluye no sólo la resistencia del devanado inducido sino también la de los devanados auxiliares, si los hubiera, (porque se conectan en serie con el inducido) y de los reóstatos que haya conectados en serie con el inducido. Análogamente, el parámetro R_e representa la resistencia total del circuito inductor en derivación e incluye no sólo la resistencia del devanado inductor shunt sino también la de los reóstatos que haya conectados en serie con él.

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

En las máquinas de corriente continua la f.e.m. inducida se puede obtener mediante la siguiente relación:

$$E = K_E n \Phi \quad (5)$$

donde K_E es una constante de la máquina que depende de su número de polos, de ramas en paralelo y de conductores del inducido.

En las máquinas de corriente continua el par desarrollado se puede obtener mediante la siguiente relación:

$$M = K_M \Phi I_i \quad (6)$$

donde K_M es otra constante de la máquina que también depende de su número de polos, de ramas en paralelo y de conductores del inducido.

El enunciado señala que los devanados auxiliares anulan la reacción de inducido, por lo que el flujo Φ sólo dependerá de la corriente de excitación I_e .

Recuérdese que el devanado de excitación también se denomina devanado inductor o de campo.

Partiendo de los datos proporcionados por el enunciado se deduce que en condiciones asignadas se tiene lo siguiente:

Corriente de excitación asignada (calculada a partir de (2)):

$$I_{eN} = \frac{V_N}{R_e} = \frac{1000}{1000} = 1 \text{ A}$$

Corriente de inducido asignada (calculada mediante (1)):

$$I_{iN} = I_N - I_{eN} = 10 - 1 = 9 \text{ A}$$

F.e.m. asignada (sale de (4)):

$$E_N = V_N - R_i I_{iN} = 1000 - 2 \cdot 9 = 982 \text{ V}$$

Par asignado:

$$M = \frac{P_u}{\Omega} = \frac{P_u}{\frac{2\pi}{60} n} \approx \frac{P_{em}}{\frac{2\pi}{60} n} = \frac{E I_i}{\frac{2\pi}{60} n} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_N \approx \frac{P_{emN}}{\frac{2\pi}{60} n_N} = \frac{E_N I_{iN}}{\frac{2\pi}{60} n_N} = \frac{982 \cdot 9}{\frac{2\pi}{60} 1000} = 84,4 \text{ Nm}$$

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

$$\left. \begin{array}{l} P_u = P_{em} - P_{Fe} - P_m \\ P_m \approx 0; \quad P_{Fe} \approx 0 \end{array} \right\} P_u \approx P_{em} = E I_i \rightarrow P_{uN} \approx P_{emN} = E_N I_{iN}$$

El par asignado vale $M_N = 84,4 \text{ Nm}$.

- b) Para la nueva situación en la que la máquina está a su tensión asignada y va a mover una carga cuyo par resistente sigue esta ley:

$$M = 0,1 n \quad (M \text{ en Nm y } n \text{ en r.p.m.}) \quad (7)$$

las variables de la máquina en este estado de funcionamiento se van a denominar con un apóstrofo '.

En este nuevo estado de funcionamiento de la máquina el circuito del devanado inductor tiene la misma resistencia y está conectado a la misma tensión que en condiciones asignadas. Por lo tanto, ahora la corriente de excitación sigue siendo la asignada y, en consecuencia, el flujo tampoco cambia y es igual al asignado:

$$I'_e = I_{eN} = 10 \text{ A} \rightarrow \Phi' = \Phi_N$$

De la relación (5) se deduce que:

$$\frac{E'}{E_N} = \frac{K_E n' \Phi'}{K_E n_N \Phi_N} = \frac{K_E n' \Phi_N}{K_E n_N \Phi_N} = \frac{n'}{n_N} \quad (8)$$

Es decir,

$$E' = E_N \frac{n'}{n_N} = 982 \frac{n'}{1000} \rightarrow E' = 0,982 n' \quad (9)$$

De las relaciones (6) y (7) se obtiene que:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{M'}{M_N} = \frac{K_M \Phi' I'_i}{K_M \Phi_N I_{iN}} = \frac{K_M \Phi_N I'_i}{K_M \Phi_N I_{iN}} = \frac{I'_i}{I_{iN}} \\ \frac{M'}{M_N} = \frac{0,1 n'}{M_N} \end{array} \right\} \text{luego:}$$

$$\frac{I'_i}{I_{iN}} = \frac{0,1 n'}{M_N} \rightarrow I'_i = I_{iN} \frac{0,1}{M_N} n' = 9 \frac{0,1}{84,4} n' = \frac{n'}{93,8}$$

$$I'_i = \frac{n'}{93,8} \quad (10)$$

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

La tensión de alimentación del motor sigue siendo la asignada:

$$V' = V_N$$

Por lo tanto, de la ecuación del inducido (4) se obtiene que:

$$V' = E' + I'_i R_i \rightarrow 1000 = 0,982 n' + \frac{n'}{93,8} 2$$

$$93800 = 92,1 n' + 2 n' = 94,1 n'$$

Ecuación de primer grado de la que se puede despejar n' :

$$n' = \frac{93800}{94,1} = 996,8 \text{ r.p.m.}$$

Luego, según (7), (10) y (1):

$$M' = 0,1 n' = 0,1 \cdot 996,8 = 99,68 \text{ Nm}$$

$$I'_i = \frac{n'}{93,8} = \frac{996,8}{93,8} = 10,6 \text{ A}$$

$$I' = I'_i + I'_e = 10,6 + 1 = 11,6 \text{ A}$$

En esta situación, en la que el par resistente sigue la ley (7), la velocidad que alcanzará el motor es $n' = 996,8 \text{ r.p.m.}$.

c)

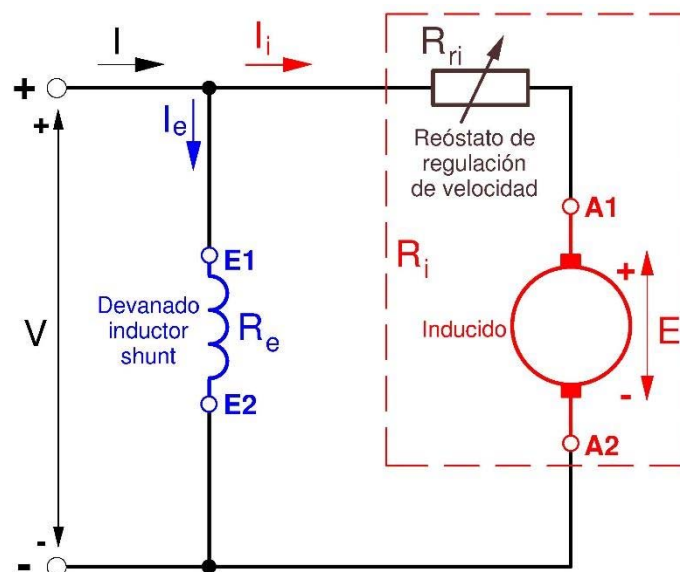


Fig. 2: Circuito de un motor shunt con un reóstato en serie con el inducido

Máquinas de corriente continua**C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)**

Ahora se va a estudiar un nuevo estado de carga en la que la máquina se va a conectar a la tensión asignada, va a mover un par resistente constante e igual al asignado y se le va a añadir un reóstato en serie con el inducido (ver la Fig. 2). En este estado las variables se van a denominar con unas comillas “.

Se ha colocado un reóstato de 10 Ohms en serie con el inducido. Por lo tanto, la resistencia total del circuito inducido pasa a ser:

$$R''_i = 2 + 10 = 12 \, \Omega$$

En este nuevo estado de funcionamiento de la máquina, el circuito del devanado inductor tiene la misma resistencia y está conectado a la misma tensión que en condiciones asignadas. Por lo tanto, ahora la corriente de excitación sigue siendo la asignada y -dado que la reacción de inducido es despreciable- el flujo tampoco cambia y es igual al asignado:

$$I''_e = I_{eN} = 10 \, A \rightarrow \Phi'' = \Phi_N$$

Dado que el par a vencer es igual al asignado y se acaba de ver que el flujo también es igual al asignado, se obtiene de (6) que la corriente de inducido también será ahora igual a la asignada:

$$\left. \begin{array}{l} M = K_M \Phi I_i \\ \Phi'' = \Phi_N \\ M'' = M_N \end{array} \right\} I''_i = I_{iN} = 9 \, A$$

Con lo cual, aplicando la relación (4), la f.e.m. ahora vale:

$$E'' = V'' - R''_i I''_i = 1000 - 12 \cdot 9 = 892 \, V$$

De (5) se obtiene que:

$$\frac{E''}{E_N} = \frac{K_E n'' \Phi''}{K_E n_N \Phi_N} = \frac{n''}{n_N} \rightarrow n'' = \frac{E''}{E_N} n_N$$

$$n'' = \frac{E''}{E_N} n_N = \frac{892}{982} 1000 = 908,4 \, \text{r.p.m.}$$

En este nuevo estado de carga el motor girará con una velocidad $n'' = 908,4 \, \text{r.p.m.}$

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

- d) En la Fig. 3 se muestra el circuito de este motor cuando se le conecta un reóstato de arranque.

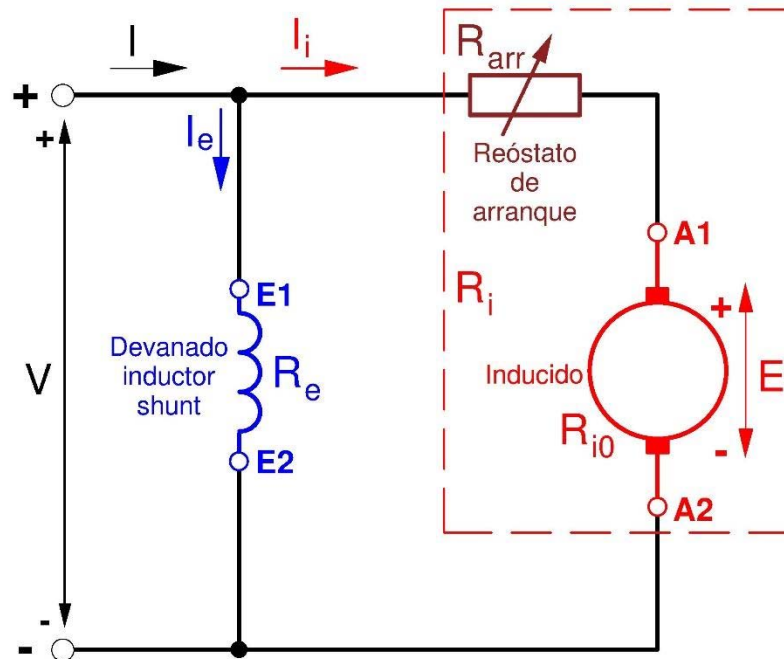


Fig. 3: Circuito de un motor de excitación shunt con reóstato de arranque

De la Fig. 3 y de la relación (4) se deduce que en el arranque, cuando la f.e.m. E es nula por serlo también la velocidad n (según indica la relación (5)), se cumple que:

$$V = I_{ia} R_i + V_{esc} = I_{ia} (R_{i0} + R_{arr}) \rightarrow R_{arr} = \frac{V}{I_{ia}} - R_{i0} \quad (11)$$

En la expresión anterior se ha despreciado la caída de tensión V_{esc} en las escobillas y R_{i0} es la resistencia total del circuito inducido cuando no hay ningún reóstato en serie con él. Por lo tanto, en una máquina shunt R_{i0} es igual a la resistencia del conjunto de los devanados inducido y auxiliares. Es decir, $R_{i0} = 2 \text{ Ohms}$.

Como el arranque se realiza a tensión asignada y la resistencia del circuito de excitación no se ha modificado con respecto a la que había en condiciones asignadas, la corriente de excitación (que se calcula mediante la relación (2)) es la misma que en condiciones asignadas:

$$I_{ea} = I_{eN} = 1 \text{ A}$$

Como se pretende que la corriente total en el arranque a tensión asignada no sea mayor que 20 A, se tiene por (1) que:

$$I_{ia} = I_a - I_{ea} = 20 - 1 = 19 \text{ A}$$

Máquinas de corriente continua

C.1: Máquinas de excitación independiente y shunt (o derivación)

Con este valor de la corriente del inducido de arranque y mediante la relación (11), se deduce que la resistencia del reóstato de arranque debe tener este valor:

$$R_{arr} = \frac{V}{I_{ia}} - R_{i0} = \frac{1000}{19} - 2 = 50,6 \, \Omega$$

La resistencia del reóstato de arranque deberá valer $R_{arr} = 50,6 \, \text{Ohms}$.

Máquinas de corriente continua
C.2: Máquinas de excitación serie

PROBLEMA C.2.1

ENUNCIADO

Un motor serie de corriente continua de 2000 V y 1000 r.p.m. consume 20 A en condiciones asignadas. La caída de tensión entre delga y escobilla es de 0,7 V, la resistencia total de la máquina (inductor + inducido + devanados auxiliares) es de 1 Ohm. Si el efecto de la reacción de inducido es despreciable, calcular:

- a) el par asignado cuando se desprecian las pérdidas en el hierro y mecánicas.
- b) la nueva corriente y la nueva velocidad si el par que debe vencer la máquina se reduce a la mitad del asignado y se supone que la máquina trabaja en la zona lineal de la curva de magnetización y, por lo tanto, el flujo magnético es proporcional a la intensidad.
- c) la tensión de alimentación necesaria para reducir la velocidad a 800 r.p.m. si el par se conserva igual al asignado.
- d) la resistencia del reóstato de arranque para que la corriente de arranque no sea superior a 1,5 veces la intensidad asignada.

RESULTADOS

- a) $M = 378 \text{ Nm}$
- b) $I' = 14,1 \text{ A}; n' = 1418 \text{ r.p.m.}$
- c) $V'' = 1604 \text{ V}$
- d) $R_{\text{arr}} = 65,6 \text{ Ohms}$

Máquinas de corriente continua
C.2: Máquinas de excitación serie

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

- * El devanado de excitación también se denomina devanado inductor o bobinado de campo.
- * La caída de tensión V_{esc} es el doble de la que se produce entre una delga y una escobilla.
- * Mediante la ecuación del circuito eléctrico de la máquina calcule el valor de la fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida en condiciones asignadas a partir de la tensión y de la corriente asignadas.
- * Si se desprecian las pérdidas magnéticas (es decir, las pérdidas en el hierro) y las pérdidas mecánicas resulta que la potencia útil del motor es igual a su potencia electromagnética (que se calcula mediante el producto de su f.e.m. por su corriente del inducido). El par es igual al cociente de la potencia útil (medida en vatios) entre la velocidad (medida en radianes por segundo). De esta manera es posible calcular el par en condiciones asignadas.
- * Ahora se va a analizar un nuevo estado de funcionamiento en el que el motor trabaja a su tensión asignada moviendo una carga cuyo par resistente es la mitad del asignado. La tensión y la resistencia del circuito no se modifican y la máquina trabaja en la zona lineal de la curva de magnetización (flujo proporcional a la corriente).
- * Mediante la ley que expresa el par en función de la constante K_M de la máquina, del flujo y de la corriente de inducido, comparar el par en este nuevo estado con el par asignado teniendo en cuenta que el flujo es proporcional a la corriente. Esto permite calcular la nueva corriente del motor.
- * Obtener la fuerza electromotriz (f.e.m.) en este nuevo estado planteando la ecuación del circuito eléctrico de la máquina. Comparando esta f.e.m. con la asignada, teniendo en cuenta que el flujo es proporcional a la corriente, se puede obtener la velocidad en el nuevo estado de carga.
- * Ahora se plantea otro estado de carga en el que el motor gira a 800 r.p.m. y proporciona el par asignado.
- * En una máquina serie (en la que la corriente de inducido es también la corriente de excitación) se obtiene que mientras la máquina suministra el mismo par, aunque funcione a diferentes velocidades, tensiones, etc., siempre consume la misma corriente y tiene el mismo flujo. Por lo tanto, ahora la máquina tiene la misma corriente y el mismo flujo que en condiciones asignadas.
- * Comparando la f.e.m. actual con la asignada se puede obtener la f.e.m. inducida en este nuevo estado de la máquina. Seguidamente, mediante la ecuación del circuito eléctrico, se calcula la tensión en bornes de la máquina.

Máquinas de corriente continua

C.2: Máquinas de excitación serie

- * El reóstato de arranque se calcula obteniendo primero la resistencia total del inducido mediante la ecuación eléctrica del circuito del inducido cuando la f.e.m. vale cero (en el arranque la velocidad es nula y, en consecuencia, la f.e.m. también) y la corriente es 1,5 veces la asignada (según dice el enunciado). La resistencia total del inducido ahora es igual a la que había en los apartados anteriores más la del reóstato de arranque, lo cual permite calcular el valor óhmico de dicho reóstato.

Máquinas de corriente continua
C.2: Máquinas de excitación serie

RESOLUCION DEL PROBLEMA C.2.1

Datos:

Motor serie	$V_N = 2000 \text{ V}$	$n_N = 1000 \text{ r.p.m.}$
$I_N = I_{iN} = 20 \text{ A}$	$\frac{V_{esc}}{2} = 0,7 \text{ V}$	$R_i = 1 \text{ Ohm}$
Despreciar la reacción de inducido	$P_{Fe} \approx 0$	$P_m \approx 0$

Resolución:

a)

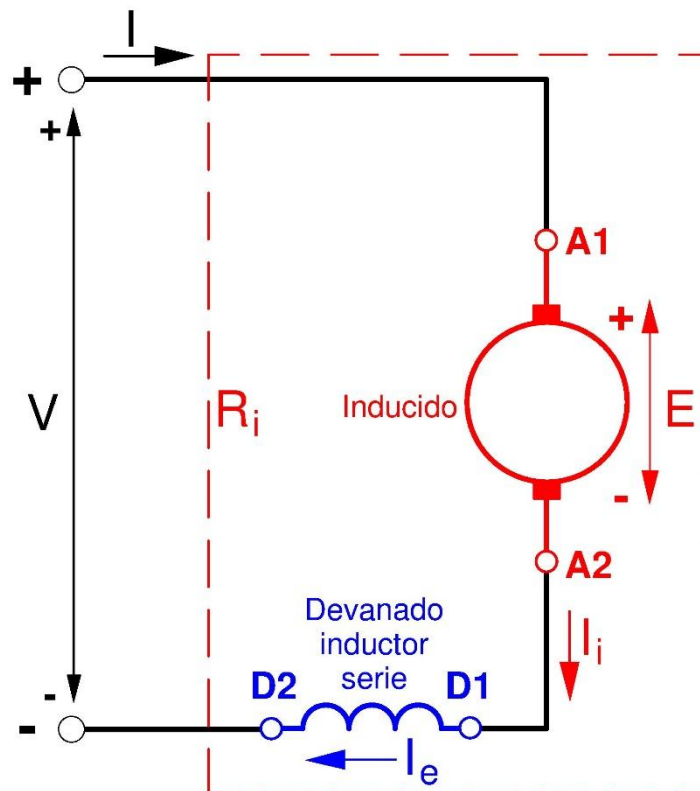


Fig. 1: Circuito de un motor de excitación serie ($I = I_i = I_e$)

En la Fig. 1 se ha representado este motor. De ella se deduce que:

$$V = E + I_i R_i + V_{esc} \rightarrow I_i = \frac{V - E - V_{esc}}{R_i} \quad (1)$$

En esta expresión el parámetro R_i representa la resistencia total del circuito del inducido e incluye no sólo la resistencia del devanado inducido sino también la del circuito inductor, la de los devanados auxiliares, si los hubiera, (porque se conectan en serie con el inducido) y la de los reóstatos que haya conectados en serie con el inducido.

Máquinas de corriente continua
C.2: Máquinas de excitación serie

En las máquinas de corriente continua la f.e.m. inducida y el par desarrollado se pueden obtener mediante las siguientes relaciones:

$$E = K_E n \Phi \quad (2)$$

$$M = K_M \Phi I_i \quad (3)$$

donde K_E y K_M son unas constantes de la máquina que dependen de su número de polos, de ramas en paralelo y de conductores del inducido.

Recuérdese que el devanado de excitación también se denomina inductor o de campo.

La caída de tensión V_{esc} es el doble de la que se produce entre una delga y una escobilla. Por lo tanto, en esta máquina vale:

$$V_{esc} = 2 \left(\frac{V_{esc}}{2} \right) = 2 \cdot 0,7 = 1,4 \text{ V}$$

En condiciones asignadas se tiene lo siguiente:

F.e.m. asignada (sale de (1)):

$$E_N = V_N - R_i I_{iN} - V_{esc} = 2000 - 1 \cdot 20 - 1,4 = 1978,6 \text{ V}$$

Par asignado:

$$M = \frac{P_u}{\Omega} = \frac{P_u}{\frac{2\pi}{60} n} \approx \frac{P_{em}}{\frac{2\pi}{60} n} = \frac{E I_i}{\frac{2\pi}{60} n} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_N \approx \frac{P_{emN}}{\frac{2\pi}{60} n_N} = \frac{E_N I_{iN}}{\frac{2\pi}{60} n_N} = \frac{1978,6 \cdot 20}{\frac{2\pi}{60} 1000} = 378 \text{ Nm}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ya que } P_u = P_{em} - P_{Fe} - P_m \\ P_m \approx 0; \quad P_{Fe} \approx 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} P_u \approx P_{em} = E I_i \rightarrow P_{uN} \approx P_{emN} = E_N I_{iN} \end{array} \right.$$

El par asignado vale $M_N = 378 \text{ Nm}$.

- b)** En este apartado se va a estudiar un nuevo estado de la máquina en la que ésta debe desarrollar la mitad del par asignado y se acepta que funciona dentro de la zona lineal de la curva de magnetización, por lo que se verificará que:

$$\Phi = K_I \cdot I_e = K_I \cdot I_i \rightarrow \frac{\Phi}{\Phi_N} = \frac{I_i}{I_{iN}} \quad (4)$$

(pues en una máquina serie $I = I_e = I_i$)

Máquinas de corriente continua
C.2: Máquinas de excitación serie

Las variables del motor en este nuevo estado se representarán mediante un apóstrofo ‘.

El motor sigue estando alimentado a su tensión asignada: $V' = V_N = 2000 \text{ V}$

Comparando los pares del motor en la situación actual y cuando está en condiciones asignadas mediante la relación (3) y teniendo en cuenta la relación (4), se obtiene que:

$$\frac{M'}{M_N} = \frac{K_M \Phi' I'_i}{K_M \Phi_N I_{iN}} = \frac{\Phi'}{\Phi_N} \cdot \frac{I'_i}{I_{iN}} = \frac{I'_i}{I_{iN}} \cdot \frac{I'_i}{I_{iN}} = \left(\frac{I'_i}{I_{iN}} \right)^2 \quad (5)$$

Dado que el enunciado indica que el par ahora es la mitad del asignado ($M' = \frac{M_N}{2}$) se obtiene de (5) que:

$$\frac{M'}{M_N} = \left(\frac{I'_i}{I_{iN}} \right)^2 \rightarrow \frac{\frac{M_N}{2}}{M_N} = \frac{I'^2_i}{20^2} \rightarrow I' = I'_i = \sqrt{\frac{20^2}{2}} = 14,14 \text{ A}$$

Por lo tanto, aplicando la expresión (1) se obtiene que ahora la fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida vale:

$$E' = V' - R_i I'_i - V_{esc} = 2000 - 1 \cdot 14,14 - 1,4 = 1984,6 \text{ V}$$

Comparando las fuerzas electromotrices (f.e.m.s) inducidas en la situación actual y en condiciones asignadas mediante la relación (2) y teniendo en cuenta también la relación (4), se obtiene que:

$$\frac{E'}{E_N} = \frac{K_E n' \Phi'}{K_E n_N \Phi_N} = \frac{n'}{n_N} \cdot \frac{I'_i}{I_{iN}} \quad (6)$$

lo que, sustituyendo valores, da lugar al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \frac{E'}{E_N} &= \frac{n'}{n_N} \cdot \frac{I'_i}{I_{iN}} \rightarrow n' = \frac{E'}{E_N} \cdot \frac{I_{iN}}{I'_i} \cdot n_N \\ n' &= \frac{E'}{E_N} \cdot \frac{I_{iN}}{I'_i} \cdot n_N = \frac{1984,5}{1978,6} \cdot \frac{20}{14,14} \cdot 1000 = 1418 \text{ r.p.m.} \end{aligned}$$

Cuando este motor está conectado a su tensión asignada y origina un par igual a la mitad del par asignado, sucede que consume una corriente $I' = 14,1 \text{ A}$ y gira con una velocidad $n' = 1418 \text{ r.p.m.}$

Máquinas de corriente continua
C.2: Máquinas de excitación serie

- c) En este apartado se va a calcular la tensión con que es preciso alimentar a este motor para que gire a 800 r.p.m. cuando proporciona el par asignado. Las variables de la máquina en este estado se van a denominar con unas comillas “.

Dado que en una máquina serie la corriente de excitación es también la corriente de inducido se tiene que el flujo Φ es función de I_i (la forma en Φ está relacionado con I_i dependerá de que la máquina trabaje en las zonas saturada o lineal de la curva de magnetización). Dado que el par de este motor es proporcional al producto de Φ por I_i (ver la relación (3)) se tiene que en un motor serie el par depende sólo de la corriente del inducido I_i . Por lo tanto, si en dos estados de carga un motor serie da el mismo par sucederá que en ambos estados la corriente de inducido I_i tendrá el mismo valor y, por lo tanto, los flujos Φ también serán iguales.

En consecuencia, en este caso se tiene que:

$$M'' = M_N \rightarrow \begin{cases} I''_i = I_{iN} = 20 \text{ A} \\ \Phi'' = \Phi_N \end{cases}$$

Luego, comparando mediante (2) las f.e.m.s inducidas en la situación actual y en condiciones asignadas se llega a:

$$\frac{E''}{E_N} = \frac{K_E n'' \Phi''}{K_E n_N \Phi_N} = \frac{K_E n'' \Phi_N}{K_E n_N \Phi_N} = \frac{n''}{n_N} \rightarrow E'' = \frac{n''}{n_N} E_N$$

Luego:

$$E'' = \frac{n''}{n_N} E_N = \frac{800}{1000} 1978,6 = 1582,9 \text{ V}$$

Por lo tanto, según (1) la tensión valdrá:

$$V'' = E'' + I''_i R_i + V_{esc} = 1582,9 + 20 \cdot 1 + 1,4 = 1604 \text{ V}$$

Para que este motor proporcione el par asignado girando a 800 r.p.m. se le debe alimentar con una tensión $V'' = 1604 \text{ V}$.

- d) En la Fig. 2 se muestra el circuito de este motor cuando se le conecta un reóstato de arranque.

De la Fig. 2 y de la expresión (1) se deduce que en el arranque, cuando la f.e.m. E es nula por serlo también la velocidad n (según indica la relación (2)), se cumple que:

$$V = I_{ia} R_i + V_{esc} = I_{ia} (R_{i0} + R_{arr}) \rightarrow R_{arr} = \frac{V}{I_{ia}} - R_{i0} \quad (7)$$

Máquinas de corriente continua
C.2: Máquinas de excitación serie

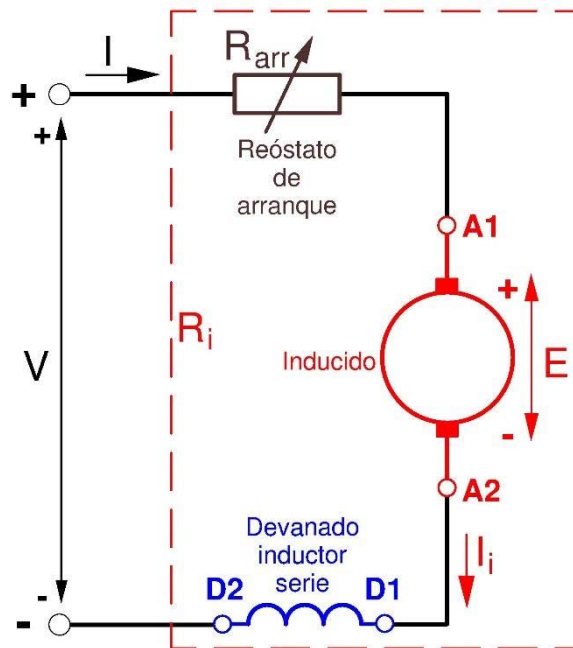


Fig. 2: Circuito de un motor de excitación serie con reóstato de arranque

En la expresión anterior R_{i0} es la resistencia total del circuito inducido cuando no hay ningún reóstato en serie con él. Por lo tanto, R_{i0} es el valor que tiene la resistencia total del inducido R_i (la cual incluye también la resistencia del inductor) en los apartados anteriores. Es decir, $R_{i0} = 1 \text{ Ohm}$.

Como se pretende que la corriente de arranque a tensión asignada no sea mayor que 1,5 veces la corriente asignada, se tiene que:

$$I_{ia} = 1,5 I_{iN} = 30 \text{ A}$$

que sustituido en (7) da:

$$R_{arr} = \frac{V - V_{esc}}{I_{ia}} - R_{i0} = \frac{2000 - 1,4}{30} - 1 = 65,6 \text{ } \Omega$$

La resistencia del reóstato de arranque deberá valer $R_{arr} = 65,6 \text{ Ohms}$.

Máquinas de corriente continua
C.2: Máquinas de excitación serie

PROBLEMA C.2.3

ENUNCIADO

Un motor de corriente continua de excitación serie tiene una tensión de 200 V, una corriente de 15 A y proporciona un par de 24,35 Nm en condiciones asignadas. Su resistencia total del inducido (incluyendo la resistencia del inductor) vale 2 Ohms.

En esta máquina se pueden despreciar las pérdidas mecánicas y magnéticas, el efecto de la reacción de inducido y la caída de tensión entre delgas y escobillas.

- a) Calcular la f.e.m. en el inducido, la velocidad y la potencia absorbida de la red en condiciones asignadas.

Suponiendo que la máquina funciona en la zona lineal de la curva de magnetización ($\Phi = K_I I$) y que debe vencer un par resistente constante de 15 Nm, calcular:

- b) la velocidad y la corriente del motor cuando se alimenta a su tensión asignada.
c) la tensión de alimentación para reducir la velocidad a un 80% de la asignada.
d) la resistencia hay que añadir en serie con el motor si se quiere reducir la velocidad al 80% de la asignada y se mantiene la tensión igual a la asignada.
e) la tensión que hay que aplicar en el inducido para que la corriente en el arranque no sea superior a 25 A si no se utiliza ningún reóstato de arranque.

RESULTADOS

- a) $E_N = 170 \text{ V}$; $n_N = 1000 \text{ r.p.m.}$; $P_{1N} = 3000 \text{ W}$
b) $n' = 1319 \text{ r.p.m.}$; $I'_i = 11,8 \text{ A}$
c) $V'' = 130,6 \text{ V}$
d) $R_{ri} = 5,88 \text{ Ohms}$
e) $V_a = 50 \text{ V}$

Máquinas de corriente continua
C.2: Máquinas de excitación serie

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

- * El devanado de excitación también se denomina devanado inductor o de campo.
- * En un motor serie sin reóstato en paralelo con el bobinado inductor sucede que $I = I_i = I_e$.
- * El enunciado indica que en todos los estados que se van a estudiar, incluido el asignado, la máquina funciona en la zona lineal de la curva de magnetización. Por lo tanto, se va a cumplir esta relación: $(\Phi / \Phi_N) = (I_e / I_{eN}) = (I_i / I_{iN})$.
- * Mediante la ecuación del circuito eléctrico de la máquina calcule el valor de la fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida en condiciones asignadas a partir de la tensión y de la corriente asignadas.
- * Si se desprecian las pérdidas magnéticas (es decir, las pérdidas en el hierro) y las mecánicas resulta que la potencia útil del motor es igual a su potencia electromagnética (que se calcula mediante el producto de su f.e.m. por su corriente del inducido). El par es igual al cociente de la potencia útil (medida en vatios) entre la velocidad (medida en radianes por segundo). Aplicando esto cuando la máquina está en condiciones asignadas se obtiene una ecuación de la cual se puede despejar la velocidad asignada.
- * La potencia absorbida por un motor es una potencia eléctrica, en este caso en corriente continua. En consecuencia, esta potencia es igual al producto de la tensión de alimentación por la corriente del motor.
- * A continuación se analiza un estado de la máquina en la que está conectada a su tensión asignada y suministra un par de 15 Nm. Mediante la ley que expresa el par en función de la constante K_M de la máquina, del flujo y de la corriente de inducido, comparar el par en esta situación con el par asignado. Teniendo en cuenta que el flujo varía de forma lineal con la corriente (zona lineal de la curva de magnetización) se obtiene una ecuación de la que se puede despejar la corriente que ahora consume este motor.
- * Utilizando la ecuación del circuito eléctrico de la máquina se puede obtener la f.e.m. inducida en este nuevo estado de carga. Comparando esta f.e.m. con la asignada (teniendo en cuenta que el flujo varía de forma lineal con la corriente) se obtiene una relación de la que se puede despejar la velocidad a la que ahora gira el motor.
- * Seguidamente se va a analizar otro estado de la máquina en el que también suministra un par de 15 Nm, pero se la alimenta con una tensión distinta de la asignada, de forma que gira a una velocidad igual al 80% de la asignada.
- * Lo primero es calcular la nueva velocidad igual al 80% de la velocidad asignada.
- * En una máquina serie (en la que la corriente de inducido es también la corriente de excitación) se obtiene que mientras la máquina suministra el mismo par, aunque funcione a diferentes velocidades, tensiones, etc., siempre consume la misma corriente y tiene el mismo flujo. Por lo tanto, ahora la máquina tiene la misma corriente y el mismo flujo que en la situación estudiada anteriormente.

Máquinas de corriente continua

C.2: Máquinas de excitación serie

- * La f.e.m. que ahora tiene la máquina se obtiene comparándola con la f.e.m. en el estado de carga anterior mediante la expresión que relaciona la f.e.m. con la constante K_E , el flujo y la velocidad.
- * Con la ecuación del circuito eléctrico del inducido, en la que ya se conocen la f.e.m. y la corriente, se puede calcular la tensión con que hay que alimentar al motor en este estado de carga.
- * A continuación se va a estudiar otro estado de la máquina, muy similar al que se acaba de analizar, en el que también suministra un par de 15 Nm y gira a una velocidad igual al 80% de la asignada; para lo cual se la alimenta a la tensión asignada y se coloca un reóstato en serie con el motor.
- * Como en este estado de carga la máquina tiene el mismo par que en el anterior su corriente y su flujo son iguales que en este estado anterior. Como, además, también la velocidad ahora es igual a la del estado anterior, también la f.e.m. inducida es la misma en estos dos estados de carga.
- * De la ecuación del circuito eléctrico del inducido, en la que ya se conocen la tensión (asignada), la f.e.m. y la corriente, se puede despejar la resistencia total del circuito inducido que debe tener la máquina en este estado de carga. El reóstato que se debe conectar en serie con el inducido tendrá una resistencia igual a la diferencia entre las resistencias totales del inducido en las condiciones actuales y en las condiciones asignadas.
- * La tensión a la que hay que alimentar el motor para que en el arranque circule una corriente de 25 A, sin haber conectado en serie ningún reóstato de arranque, se obtiene multiplicando esta corriente de arranque por la resistencia total del circuito inducido (ya que en el arranque no se induce f.e.m. porque la velocidad en el arranque es nula).

Máquinas de corriente continua
C.2: Máquinas de excitación serie

RESOLUCION DEL PROBLEMA C.2.3

Datos:

Motor serie	$V_N = 200 \text{ V}$	$I_N = I_{eN} = I_{iN} = 15 \text{ A}$
$M_N = 24,35 \text{ Nm}$		$R_i = 2 \text{ Ohms}$
$P_{Fe} \approx 0$	$P_m \approx 0$	
Despreciar la reacción de inducido		$V_{esc} \approx 0$
Zona lineal de la curva de magnetización:	$\Phi = K_I \cdot I_i$	
Par resistente constante	$= 15 \text{ Nm}$	

Resolución:

a)

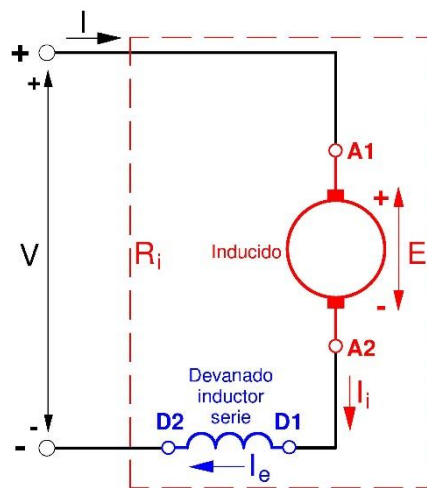


Fig. 1: Circuito de un motor de excitación serie ($I = I_i = I_e$)

En la Fig. 1 se ha representado este motor. De ella se deduce que:

$$I_i = I_e = I \quad (1)$$

$$V = E + I_i R_i + V_{esc} \rightarrow I_i = \frac{V - E - V_{esc}}{R_i} \quad (2)$$

En esta expresión el parámetro R_i representa la resistencia total del circuito del inducido e incluye no sólo la resistencia del devanado inducido sino también la del circuito inductor, la de los devanados auxiliares (porque se conectan en serie con el inducido) y la de los reóstatos que haya conectados en serie con el inducido.

Cuando se desprecia la caída de tensión entre delga y escobilla ($V_{esc} \approx 0$), como sucede en este caso, las expresiones (2) se reducen a:

$$V = E + I_i R_i \rightarrow I_i = \frac{V - E}{R_i} \quad (3)$$

Máquinas de corriente continua
C.2: Máquinas de excitación serie

En las máquinas de corriente continua se verifican las siguientes relaciones:

$$E = K_E n \Phi \quad (4)$$

$$M = K_M \Phi I_i \quad (5)$$

donde K_E y K_M son unas constantes de la máquina que dependen de su número de polos, de ramas en paralelo y de conductores del inducido.

Si se desprecian las pérdidas magnéticas y mecánicas el par se puede calcular así:

$$\left. \begin{array}{l} P_u = P_{em} - P_{Fe} - P_m \\ P_m \approx 0; \quad P_{Fe} \approx 0 \end{array} \right\} P_u \approx P_{em} = E I_i$$

$$M = \frac{P_u}{\Omega} = \frac{P_u}{\frac{2\pi}{60} n} \approx \frac{P_{em}}{\frac{2\pi}{60} n} = \frac{E I_i}{\frac{2\pi}{60} n} \quad (6)$$

Recuérdese que el devanado de excitación también se denomina inductor o de campo.

Según el enunciado la máquina va a estar funcionando en la zona lineal de la curva de magnetización, en consecuencia, se cumple que:

$$\frac{\Phi}{\Phi_N} = \frac{I_e}{I_{eN}} = \frac{I_i}{I_{iN}} \quad (7)$$

En condiciones asignadas se tiene lo siguiente:

F.e.m. asignada (sale de (3)):

$$E_N = V_N - R_i I_{iN} = 200 - 2 \cdot 15 = 170 \text{ V}$$

Velocidad asignada (se obtiene a partir de (6)):

$$M \approx \frac{E I_i}{\frac{2\pi}{60} n} \rightarrow n = \frac{E I_i}{\frac{2\pi}{60} M}$$

$$n_N = \frac{E_N I_{iN}}{\frac{2\pi}{60} M_N} = \frac{170 \cdot 15}{\frac{2\pi}{60} 24,35} = 1000 \text{ r.p.m.}$$

Potencia absorbida asignada, la cual se trata de una potencia eléctrica en corriente continua; luego:

$$P_{iN} = V_N \cdot I_N = 200 \cdot 15 = 3000 \text{ W}$$

La f.e.m. inducida, la velocidad y la potencia absorbida asignadas valen, respectivamente, $E_N = 170 \text{ V}$, $n_N = 1000 \text{ r.p.m.}$ y $P_{iN} = 3000 \text{ W}$.

Máquinas de corriente continua**C.2: Máquinas de excitación serie**

- b) Ahora el motor va a funcionar en un estado en el que está conectado a su tensión asignada, funciona en la zona lineal de la curva de magnetización (de forma que se cumple la relación (7)) y debe vencer un par resistente constante de 15 Nm.

Las variables en este estado se van a denominar con un apóstrofo '. Así, se tiene que $V' = V_N$ y comparando los pares en la situación actual y en condiciones asignadas, mediante la relación (5), teniendo en cuenta la relación (7) se llega a:

$$\frac{M'}{M_N} = \frac{K_M \Phi' I'_i}{K_M \Phi_N I_{iN}} = \left(\frac{I'_i}{I_{iN}} \right)^2$$

$$I'_i = I_{iN} \sqrt{\frac{M'}{M_N}} = 15 \sqrt{\frac{15}{24,35}} = 11,8 \text{ A}$$

La f.e.m. inducida se calcula mediante la relación (3):

$$E' = V' - R_i \cdot I'_i = 200 - 2 \cdot 11,8 = 176,4 \text{ V}$$

Comparando las f.e.m.s inducidas en la situación actual y en condiciones asignadas mediante la relación (4) y teniendo en cuenta la relación (7), se obtiene que:

$$\frac{E'}{E_N} = \frac{K_E n' \Phi'}{K_E n_N \Phi_N} = \frac{n'}{n_N} \cdot \frac{\Phi'}{\Phi_N} = \frac{n'}{n_N} \cdot \frac{I'_i}{I_{iN}}$$

$$n' = \frac{E'}{E_N} \cdot \frac{I_{iN}}{I'_i} \cdot n_N = \frac{176,4}{170} \cdot \frac{15}{11,8} \cdot 1000 = 1319 \text{ r.p.m.}$$

En estas condiciones el motor gira a una velocidad $n' = 1319 \text{ r.p.m.}$ y consume una corriente $I' = I'_i = 11,8 \text{ A.}$

- c) Ahora se va a obtener la tensión con que hay que alimentar al motor para que su velocidad sea igual al 80% de la asignada mientras vence un par resistente de 15 Nm y funciona en la zona lineal de la curva de magnetización (por lo tanto, se cumple la relación (7)). Las variables en este estado se van a denominar mediante comillas ''.

La velocidad en esta situación vale:

$$n'' = \frac{80}{100} n_N = 0,8 \cdot 1000 = 800 \text{ r. p. m.}$$

Dado que en una máquina serie la corriente de excitación es también la corriente de inducido se tiene que el flujo Φ es función de I_i . Dado que el par de un motor de corriente continua es proporcional al producto de Φ por I_i (ver la relación (5)) se deduce que en un motor serie el par depende solamente de la corriente del inducido I_i . Por lo tanto, si en dos estados de carga un motor serie da el mismo par sucederá que en ambos estados la corriente de inducido I_i tendrá el mismo valor y, por lo tanto, los flujos Φ también serán iguales.

Máquinas de corriente continua

C.2: Máquinas de excitación serie

En consecuencia, se tiene que:

$$M'' = M' \rightarrow \begin{cases} I''_i = I'_i = 11,8 \text{ A} \\ \Phi'' = \Phi' \end{cases}$$

Luego, comparando las f.e.m.s del motor en la situación actual y en la correspondiente al apartado b), mediante la relación (4), se deduce que ahora la fuerza electromotriz (f.e.m.) vale lo siguiente:

$$\frac{E''}{E'} = \frac{K_E n'' \Phi''}{K_E n' \Phi'} = \frac{n''}{n'} \rightarrow E'' = \frac{n''}{n'} E' = \frac{800}{1319} \cdot 176,4 = 107 \text{ V}$$

La tensión con que se debe alimentar a la máquina en estas condiciones se calcula aplicando la relación (3):

$$V'' = E'' + I''_i R_i = 107 + 11,8 \cdot 2 = 130,6 \text{ V}$$

En este estado hay que alimentar al motor con una tensión $V'' = 130,6 \text{ V}$.

- d) Ahora se quiere que el funcionamiento con una velocidad al 80% de la asignada y con un par resistente constante de 15 Nm se consiga añadiendo una resistencia en serie con el motor (Fig. 2) y manteniendo la tensión igual a la asignada. El motor sigue funcionando en la zona lineal de la curva de magnetización (por lo tanto, se cumple la relación (7)). Las variables en este estado se van a denominar mediante tres apóstrofos '''.

Ahora se tiene que: $V''' = V_N$; $n''' = n'' = 800 \text{ r.p.m.}$

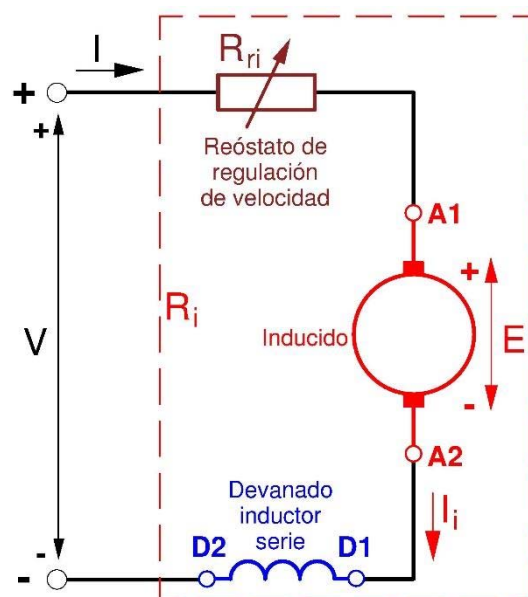


Fig. 2: Circuito de un motor serie con un reóstato de control de velocidad en serie

Máquinas de corriente continua
C.2: Máquinas de excitación serie

Como se ha indicado en el apartado anterior, si en dos estados de carga un motor serie da el mismo par sucederá que en ambos estados la corriente de inducido I_i tendrá el mismo valor y, por lo tanto, los flujos Φ también serán iguales. En consecuencia, en este caso se tiene que:

$$M''' = M'' \rightarrow \begin{cases} I_i''' = I_i'' = 11,8 \text{ A} \\ \Phi''' = \Phi'' \end{cases}$$

Como, además, se cumple que $n''' = n''$, de (4) se deduce que:

$$\frac{E'''}{E''} = \frac{K_E n''' \Phi'''}{K_E n'' \Phi''} = 1 \rightarrow E''' = E'' = 107 \text{ V}$$

Luego, de (3) se deduce que la resistencia total del inducido ahora debe valer:

$$V''' = E''' + I_i''' \cdot R_i''' \rightarrow R_i''' = \frac{V''' - E'''}{I_i'''} = \frac{200 - 107}{11,8} = 7,88 \Omega$$

y la resistencia del reóstato puesto en serie con la máquina será

$$R_{ri} = R_i''' - R_i = 7,88 - 2 = 5,88 \Omega$$

Para que el motor funcione en estas condiciones el reóstato conectado en serie con él debe tener una resistencia de 5,88 Ohms.

- e) Finalmente se va a calcular la tensión con que hay que alimentar el motor durante el arranque si no se utiliza ningún reóstato de arranque y se desea que en el arranque la corriente sea de 25 A.

Dado que en el arranque la f.e.m. es nula (por ser nula también la velocidad y cumplirse la relación (4)), de la expresión (3) se deduce que:

$$V_a = I_{ia} R_i = 25 \cdot 2 = 50 \text{ V}$$

Para realizar un arranque en estas condiciones se debe alimentar a este motor con una tensión $V_a = 50 \text{ V}$.

Máquinas de corriente continua

C.3: Máquinas de excitación compound (o compuesta)

PROBLEMA C.3.2

ENUNCIADO

En un motor de corriente continua de excitación compuesta larga derivación la resistencia total del circuito del inducido (que incluye también la resistencia del inductor serie) vale 5 Ohms y la del circuito del inductor shunt vale 500 Ohms. En condiciones asignadas este motor está alimentado a 1000 V, gira a 600 r.p.m. y consume una corriente total de 22 A. En vacío y a la tensión asignada este motor gira a 833 r.p.m.

Se sabe que para flujos inferiores al asignado esta máquina funciona en la zona lineal de la curva de magnetización y que se pueden despreciar la reacción de inducido y la caída de tensión delga-escobilla, así como las pérdidas magnéticas y mecánicas.

Calcular el par y la velocidad de este motor cuando está conectado a la tensión asignada y consume una corriente total de 12 A.

RESULTADOS

$M = 129 \text{ Nm}$; $n = 703,7 \text{ r.p.m.}$

Máquinas de corriente continua

C.3: Máquinas de excitación compound (o compuesta)

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

- * Como se va a trabajar en la zona lineal de la curva de magnetización se puede aplicar superposición al flujo y aceptar que el flujo total es igual a la suma de los que generan por separado los dos devanados inductores (shunt y serie). Además, el flujo creado por un devanado inductor es proporcional a la corriente que circula por él.
- * Empiece calculando la corriente de excitación shunt asignada aplicando la ley de Ohm al circuito de excitación shunt.
- * Conocidas las corrientes total y de excitación shunt se puede obtener la corriente del inducido asignada aplicando la primera ley de Kirchoff al circuito eléctrico de la máquina.
- * La f.e.m. asignada se obtiene a partir de la ecuación del circuito eléctrico del inducido.
- * Una vez obtenidas las variables del motor cuando funciona en condiciones asignadas, se calculan cuando funciona en vacío a la tensión asignada.
- * La corriente de excitación shunt en vacío se calcula aplicando la ley de Ohm al circuito de excitación shunt. Sale que es igual a la asignada.
- * En vacío no circula corriente en el inducido por lo que la f.e.m. es igual a la tensión en bornes (la tensión asignada en este caso).
- * Comparando la f.e.m. en vacío y en condiciones asignadas, mediante la expresión que relaciona la f.e.m. con la constante K_E , el flujo y la velocidad, se puede obtener el flujo en vacío en función del flujo asignado.
- * En vacío la corriente de excitación shunt es igual a la asignada; luego el flujo creado por este devanado en vacío es igual al que genera en condiciones asignadas. En vacío no circula corriente por el inductor serie (la corriente de inducido es nula) y este devanado no crea flujo. En consecuencia, se tiene que en vacío el flujo total que se genera es sólo el debido al devanado inductor shunt y es igual al que genera este inductor en condiciones asignadas. Ya que en la sugerencia anterior se ha calculado el flujo en vacío en función del asignado, se puede saber qué proporción del flujo total genera el inductor shunt en condiciones asignadas. Restando del flujo total asignado el debido al inductor shunt se puede obtener, además, que proporción del flujo total crea el inductor serie en condiciones asignadas.
- * En el estado de carga que dice el enunciado (tensión asignada y corriente total 12 A) calcule la corriente del inductor shunt aplicando la ley de Ohm al circuito del inductor shunt. Sale que esta corriente es igual a la que circula en condiciones asignadas.
- * Calcule ahora la corriente en el inducido aplicando la primera ley de Kirchoff al circuito eléctrico de la máquina. Como esta corriente es menor que la asignada y la del inductor shunt es igual a la asignada, el flujo total creado por el conjunto de ambos devanados será menor que el asignado y la máquina, según el enunciado, estará trabajando en la zona lineal de la curva de magnetización.

Máquinas de corriente continua

C.3: Máquinas de excitación compound (o compuesta)

- * En este estado de carga el inductor shunt está recorrido por su corriente asignada y generará el mismo flujo que en condiciones asignadas. El inductor serie originará un flujo que se puede calcular (en función del flujo asignado) comparándolo con el que genera en condiciones asignadas y teniendo en cuenta que el flujo creado por este devanado es proporcional a la corriente que lo atraviesa. Sumando los flujos originados por los dos devanados inductores (expresados en función del flujo asignado) se puede calcular el flujo total de la máquina en este estado de carga en función del flujo asignado.
- * Calcule la f.e.m. en este estado de carga mediante la ecuación del circuito eléctrico del inducido. Comparando esta f.e.m. con la asignada, mediante la expresión que relaciona la f.e.m. con la constante K_E , el flujo y la velocidad, se puede obtener la velocidad de la máquina en este estado de carga.
- * Si se desprecian las pérdidas magnéticas (es decir, las pérdidas en el hierro) y mecánicas resulta que la potencia útil del motor es igual a su potencia electromagnética (que se calcula mediante el producto de su f.e.m. por su corriente del inducido). El par es igual al cociente de la potencia útil (medida en vatios) entre la velocidad (medida en radianes por segundo).

Máquinas de corriente continua

C.3: Máquinas de excitación compound (o compuesta)

RESOLUCION DEL PROBLEMA C.3.2

Datos:

Motor compound, larga derivación	$R_i = 5 \text{ Ohms}$	$R_e = 500 \text{ Ohms}$
<u>Asignada:</u> $V_N = 1000 \text{ V}$	$n_N = 600 \text{ r.p.m.}$	$I_N = 22 \text{ A}$
<u>Vacío:</u> $V_0 = V_N$	$n_0 = 833 \text{ r.p.m.}$	
<u>En carga:</u> $V = V_N$	$I = 12 \text{ A}$	
Si $\Phi \leq \Phi_N$: zona lineal de la curva de magnetización		
Despreciar la reacción de inducido	$V_{esc} \approx 0$	$P_m = P_{Fe} = 0$

Resolución:

a)

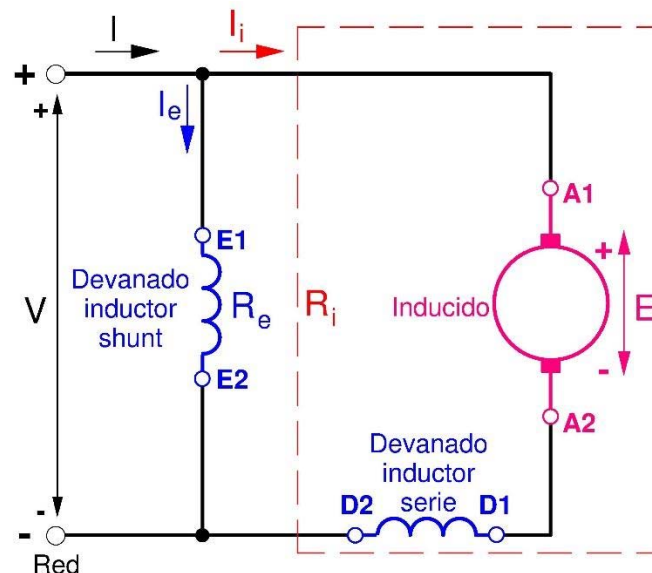


Fig. 1: Circuito de un motor de excitación compound (o compuesta) larga derivación

En la Fig. 1 se ha representado el circuito eléctrico de este motor. De ella se deducen las siguientes relaciones:

$$I = I_i + I_e \rightarrow I_i = I - I_e \quad (1)$$

$$I_e = \frac{V}{R_e} \quad (2)$$

$$V = E + I_i R_i + V_{esc} \rightarrow E = V - I_i R_i - V_{esc} \quad (3)$$

Cuando se desprecia la caída de tensión delga-escobilla ($V_{esc} \approx 0$), como en este caso, las relaciones (3) se convierten en:

$$V = E + I_i R_i \rightarrow E = V - I_i R_i \quad (4)$$

Máquinas de corriente continua**C.3: Máquinas de excitación compound (o compuesta)**

En estas expresiones el parámetro R_i representa la resistencia del circuito del inducido e incluye no sólo la resistencia del devanado inducido sino también la del circuito inductor serie, la de los devanados auxiliares, si los hubiera (porque se conectan en serie con el inducido), y la de los reóstatos que haya conectados en serie con el inducido. Análogamente, el parámetro R_e representa la resistencia total del circuito inductor en derivación e incluye no sólo la resistencia del devanado inductor shunt sino también la de los reóstatos que haya conectados en serie con él.

En las máquinas de corriente continua la f.e.m. inducida se puede obtener mediante la siguiente relación:

$$E = K_E n \Phi \quad (5)$$

donde K_E es una constante de la máquina que depende de su número de polos, de ramas en paralelo y de conductores del inducido.

Dado que en esta máquina se puede despreciar la reacción de inducido, se sabe que el flujo por polo sólo dependerá de las corrientes que circulen por los dos devanados inductores (shunt y serie). Si se trabaja en la zona lineal de la curva de magnetización se puede aplicar el principio de superposición al flujo y se tendrá que:

$$\Phi = \Phi_d + \Phi_s \quad (6)$$

y

$$\Phi_d = K_{Ie} \cdot I_e ; \quad \Phi_s = K_{Ii} \cdot I_i \quad (7)$$

donde:

Φ = Flujo por polo total del motor

Φ_d = Flujo por polo originado por el devanado inductor shunt o derivación

Φ_s = Flujo por polo originado por el devanado inductor serie

En condiciones asignadas se tienen las siguientes magnitudes:

Intensidad en el inductor shunt (se obtiene de (2)):

$$I_{eN} = \frac{V_N}{R_e} = \frac{1000}{500} = 2 \text{ A}$$

Intensidad en el inducido (se obtiene de (1)):

$$I_{iN} = I_N - I_{eN} = 22 - 2 = 20 \text{ A}$$

F.e.m. inducida (se calcula mediante (4)):

$$E_N = V_N - I_{iN} \cdot R_i = 1000 - 20 \cdot 5 = 900 \text{ V}$$

Máquinas de corriente continua**C.3: Máquinas de excitación compound (o compuesta)**

Funcionando en vacío y a la tensión asignada, la máquina tiene las siguientes magnitudes:

Intensidad en el inductor shunt (se obtiene de (2)):

$$I_{e0} = \frac{V_N}{R_e} = I_{eN} \rightarrow I_{e0} = 2 \text{ A}$$

Intensidad en el inducido. En vacío se tiene que:

$$I_{i0} = 0 \text{ A}$$

F.e.m. inducida (sale de 4):

$$E_0 = V_N - I_{i0} \cdot R_i = V_N \rightarrow E_0 = 1000 \text{ V}$$

Flujos. A partir de (5) se deduce que:

$$\frac{E_0}{E_N} = \frac{K_E \Phi_0 n_0}{K_E \Phi_N n_N} \rightarrow \frac{\Phi_0}{\Phi_N} = \frac{E_0}{E_N} \cdot \frac{n_N}{n_0} = \frac{1000}{900} \cdot \frac{600}{833} = 0,8$$

$$\Phi_0 = 0,8 \Phi_N \quad (8)$$

Teniendo en cuenta las relaciones (6) y (7) se obtienen los siguientes resultados en vacío:

$$\Phi_{d0} = K_{Ie} \cdot I_{e0} ; I_{e0} = I_{eN} \rightarrow \Phi_{d0} = \Phi_{dN}$$

$$\Phi_{s0} = K_{Ii} \cdot I_{i0} ; I_{i0} = 0 \rightarrow \Phi_{s0} = 0$$

$$\Phi_0 = \Phi_{d0} + \Phi_{s0} \rightarrow \Phi_0 = \Phi_{dN} \quad (9)$$

Luego, de (6), (8) y (9) se obtiene que:

$$\Phi_{dN} = \Phi_0 = 0,8 \Phi_N$$

$$\Phi_{sN} = \Phi_N - \Phi_{dN} = \Phi_N - 0,8 \Phi_N = 0,2 \Phi_N$$

$$\boxed{\Phi_{dN} = 0,8 \Phi_N} ; \quad \boxed{\Phi_{sN} = 0,2 \Phi_N} \quad (10)$$

Ahora se va a estudiar un estado de carga en el que la tensión es la asignada y la corriente total vale 12 A:

$$V = V_N = 1000 \text{ V} ; \quad I = 12 \text{ A}$$

Máquinas de corriente continua

C.3: Máquinas de excitación compound (o compuesta)

Por lo tanto, sucede que las corrientes que circulan ahora por los devanados de la máquina, según (1) y (2), son:

$$I_e = \frac{V}{R_e} = \frac{V_N}{R_e} = I_{eN} \rightarrow I_e = 2 \text{ A}$$

$$I_i = I - I_e = 12 - 2 = 10 \text{ A}$$

Como la corriente que circula por el inductor shunt es igual a la que circula en condiciones asignadas y la que circula por el inductor serie es menor que en condiciones asignadas, el flujo total creado por el conjunto de ambos devanados inductores será menor que el asignado y, según el enunciado, la máquina estará funcionando en la zona lineal de su curva de magnetización y se cumplirán las relaciones (6) y (7).

Por lo tanto, según (7) y (10) se cumplirá que:

$$I_e = I_{eN} \rightarrow \Phi_d = \Phi_{dN} = 0,8 \Phi_N$$

$$\frac{\Phi_s}{\Phi_{sN}} = \frac{K_{Li} \cdot I_i}{K_{Li} \cdot I_{iN}} = \frac{I_i}{I_{iN}} \rightarrow \Phi_s = \frac{I_i}{I_{iN}} \Phi_{sN} = \frac{10}{20} 0,2 \Phi_N = 0,1 \Phi_N$$

y de (6) se deduce que:

$$\Phi = \Phi_d + \Phi_s = 0,8 \Phi_N + 0,1 \Phi_N = 0,9 \Phi_N$$

La f.e.m. inducida en este estado de carga se puede calcular mediante la relación (4):

$$E = V - I_i R_i = 1000 - 10 \cdot 5 = 950 \text{ V}$$

Comparando, mediante la relación (5), la f.e.m. inducida ahora con la que había en condiciones asignadas, se obtiene que:

$$\frac{E}{E_N} = \frac{K_E \Phi n}{K_E \Phi_N n_N} = \frac{\Phi n}{\Phi_N n_N} \rightarrow n = \frac{E}{E_N} \cdot \frac{\Phi_N}{\Phi} \cdot n_N$$

$$n = \frac{E}{E_N} \cdot \frac{\Phi_N}{\Phi} \cdot n_N = \frac{950}{900} \cdot \frac{\Phi_N}{0,9 \Phi_N} \cdot 600 = 703,7 \text{ r.p.m.}$$

El par se puede calcular a partir de la potencia electromagnética:

$$M = \frac{P_u}{\Omega} = \frac{P_u}{\frac{2\pi}{60} n} \approx \frac{P_{em}}{\frac{2\pi}{60} n} = \frac{E I_i}{\frac{2\pi}{60} n}$$

Máquinas de corriente continua

C.3: Máquinas de excitación compound (o compuesta)

Luego, en este estado de funcionamiento el motor produce el siguiente par:

$$M = \frac{E I_i}{\frac{2 \pi}{60} n} = \frac{950 \cdot 10}{\frac{2 \pi}{60} 703,7} = 129 \text{ Nm}$$

Cuando este motor está conectado a la tensión asignada y consume 12 A sucede que gira a 703,7 r.p.m. y desarrolla un par de 129 Nm.

Máquinas de corriente continua

NOMENCLATURA UTILIZADA EN LAS MÁQUINAS DE C.C.**RESISTENCIAS**

Como regla general el subíndice “i” se utiliza para indicar magnitudes del inducido y el subíndice “e” para magnitudes del inductor, sea este independiente, shunt o serie. Si la máquina posee dos inductores (máquina compound) el subíndice “e” se reserva para el inductor shunt mientras que para el inductor serie se utiliza el subíndice “se”.

La nomenclatura utilizada para las resistencias que intervienen en el estudio de las máquinas de corriente continua es la que figura en la siguiente tabla:

Tabla I: Nomenclatura de las resistencias de las máquinas de corriente continua

Nomen- clatura	Significado
R_i	Resistencia total del circuito inducido
R_{i0}	Resistencia R_i cuando se anula la resistencia del reóstato en serie con el inducido ($R_{i0} = R_i - R_{ri}$).
R_{ii}	Resistencia del conjunto del devanado inducido más los devanados auxiliares (de compensación y de conmutación) en serie
R_{ri}	Resistencia del reóstato conectado en serie con el inducido. Si se usa para controlar la corriente de arranque se denomina también R_{arr} .
R_{arr}	Resistencia de arranque conectada en serie con el inducido (ver R_{ri}).
R_e	En máquinas con un solo inductor (independiente, shunt y serie) es la resistencia total del circuito inductor. En máquinas con dos inductores (compound) es la resistencia total del circuito inductor <u>shunt</u> .
R_{e0}	Resistencia R_e cuando no hay reóstato de excitación, ni en serie ni en paralelo con el inductor ($R_{e0} = R_e - R_{re} = R_{ee}$).
R_{ee}	En máquinas con un solo inductor (independiente, shunt y serie) es la resistencia del devanado inductor. En máquinas con dos inductores (compound) es la resistencia del devanado inductor <u>shunt</u> .
R_{re}	Resistencia del reóstato conectado en serie con el devanado de excitación independiente o shunt (reóstato de excitación (o de regulación del campo) para inductores independiente y shunt.
R_{se}	En máquinas con dos inductores (compound) es la resistencia total del circuito inductor <u>serie</u> .
R_{see}	En máquinas con dos inductores (compound) es la resistencia del devanado inductor <u>serie</u> .
R_{pe}	Resistencia de un reóstato conectado en paralelo con el devanado de excitación serie (reóstato de excitación (o de regulación del campo) para un inductor serie.

Máquinas de corriente continua

Máquinas de excitación independiente y shunt

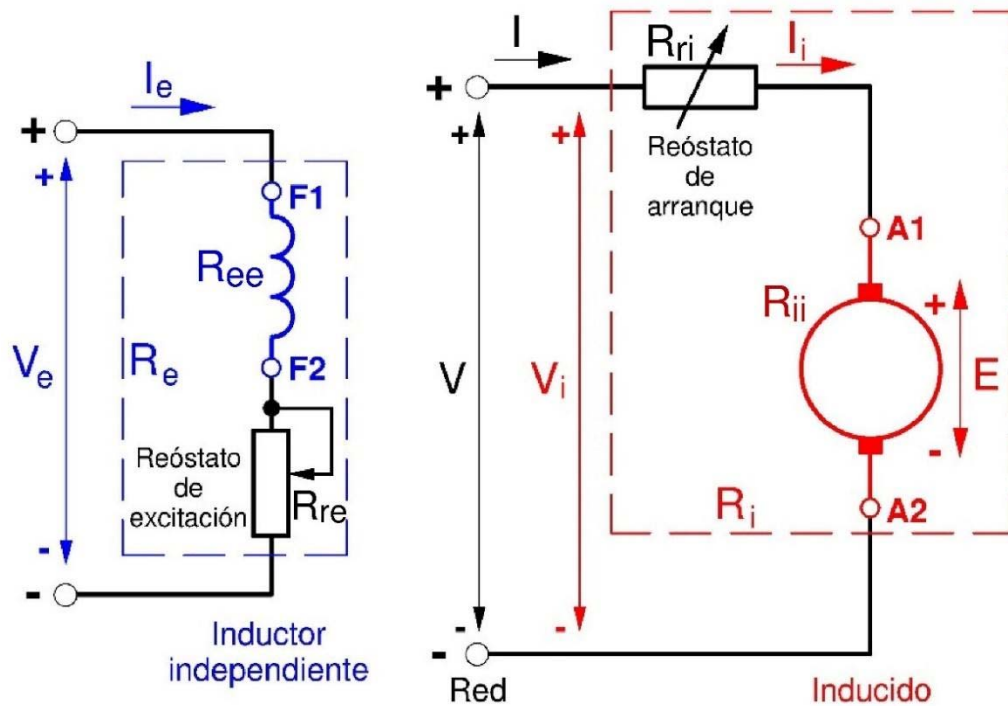


Fig. 1: Motor de excitación independiente

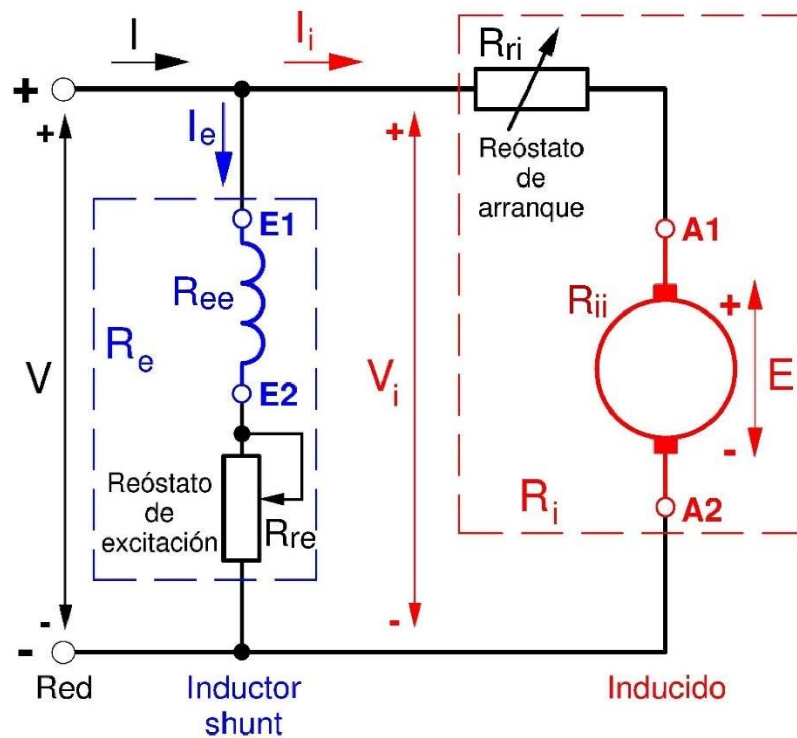


Fig. 2: Motor de excitación shunt

Inductor: $R_e = R_{ee} + R_{re}$

Inducido: $R_i = R_{ij} + R_{ri}$

Máquinas de corriente continua

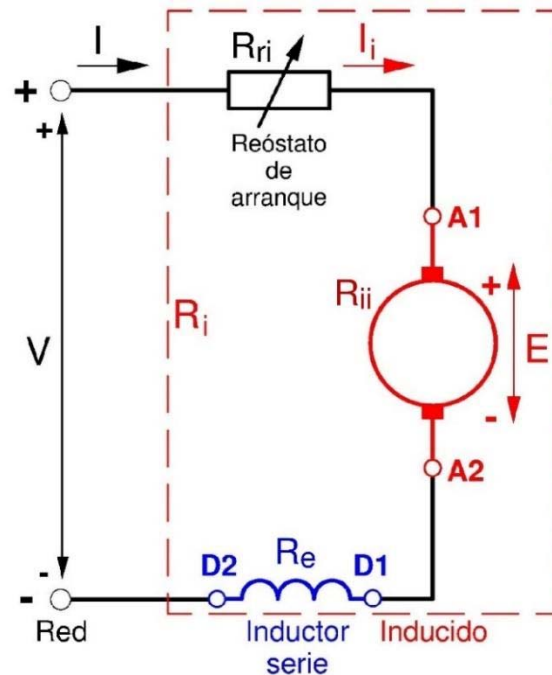
Máquinas de excitación serie

Fig. 3: Motor de excitación serie
(no se ha dibujado el reóstato de excitación (Fig. 4))

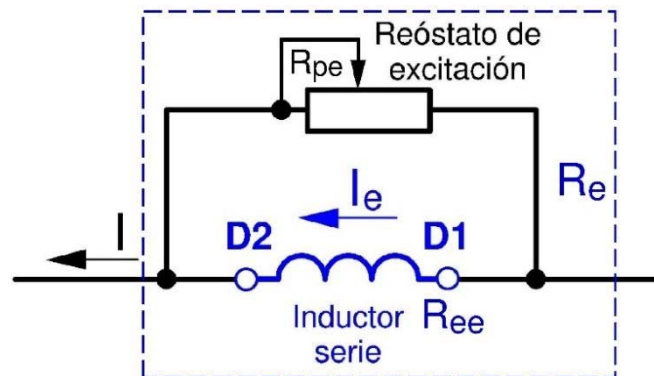


Fig. 4: Inductor serie con reóstato de excitación en paralelo

$$\text{Inductor: } \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_{ee}} + \frac{1}{R_{pe}} \Rightarrow R_e = \frac{R_{ee} \cdot R_{pe}}{R_{ee} + R_{pe}}$$

$$\alpha = \frac{I_e}{I} = \frac{R_e}{R_{ee}} \Rightarrow \alpha = \frac{R_{pe}}{R_{ee} + R_{pe}}$$

$$\text{Inducido: } R_i = R_{ii} + R_{ri} + R_e$$

Nótese que cuando se coloca un reóstato de excitación en paralelo con el inductor serie (Fig. 4), la corriente del circuito inductor (que es igual a $I = I_i$) ya no es igual a la corriente del devanado inductor I_e , pues sucede que: $I_e = \alpha I$.

Máquinas de corriente continua

Máquinas de excitación compound

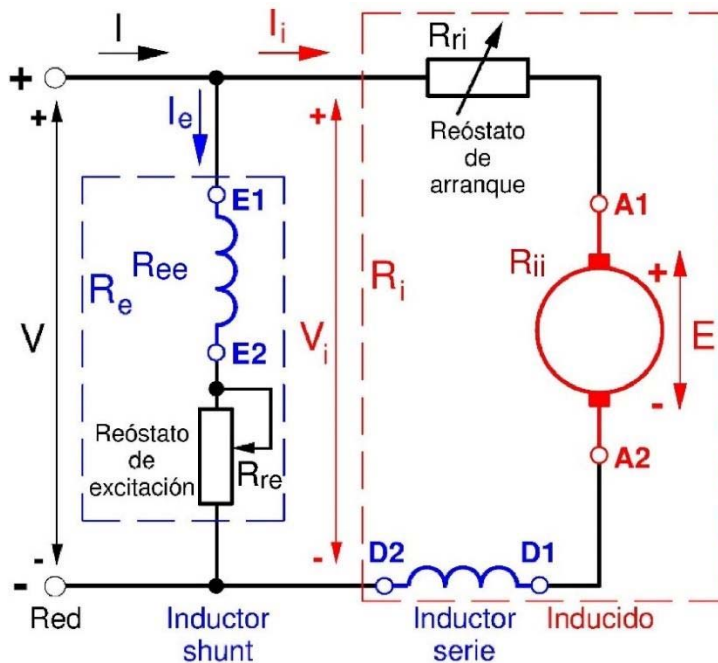


Fig. 5: Motor de excitación compound larga

(no se ha dibujado el reóstato de excitación del inductor serie (Fig. 4))

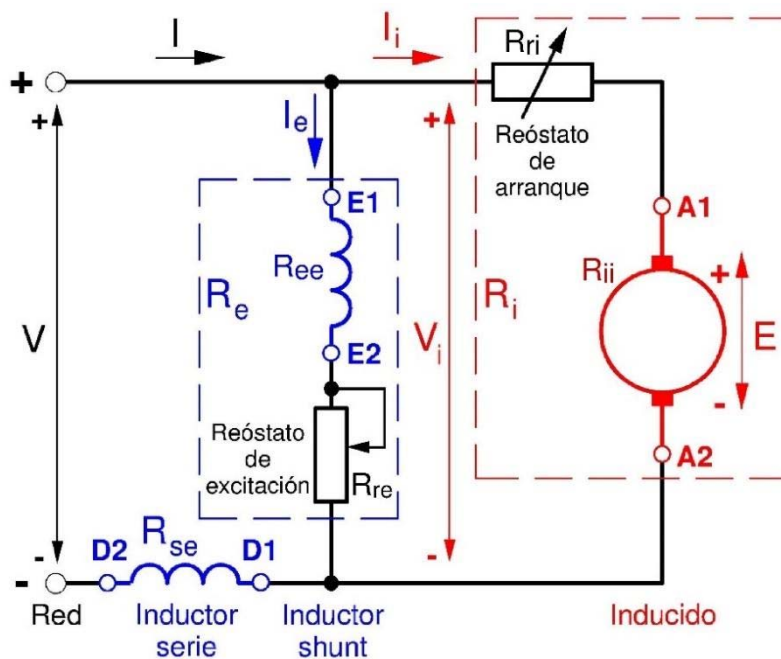


Fig. 6: Motor de excitación compound corta

(no se ha dibujado el reóstato de excitación del inductor serie (Fig. 4))

Inductor shunt: $R_e = R_{ee} + R_{re}$

Inductor serie: $\frac{1}{R_{se}} = \frac{1}{R_{see}} + \frac{1}{R_{pe}} \Rightarrow R_{se} = \frac{R_{see} \cdot R_{pe}}{R_{see} + R_{pe}} \quad \alpha = \frac{R_{pe}}{R_{see} + R_{pe}}$

Inducido compound larga: $R_i = R_{ii} + R_{ri} + R_{se}$

Inducido compound corta: $R_i = R_{ii} + R_{ri}$

Máquinas de corriente continua

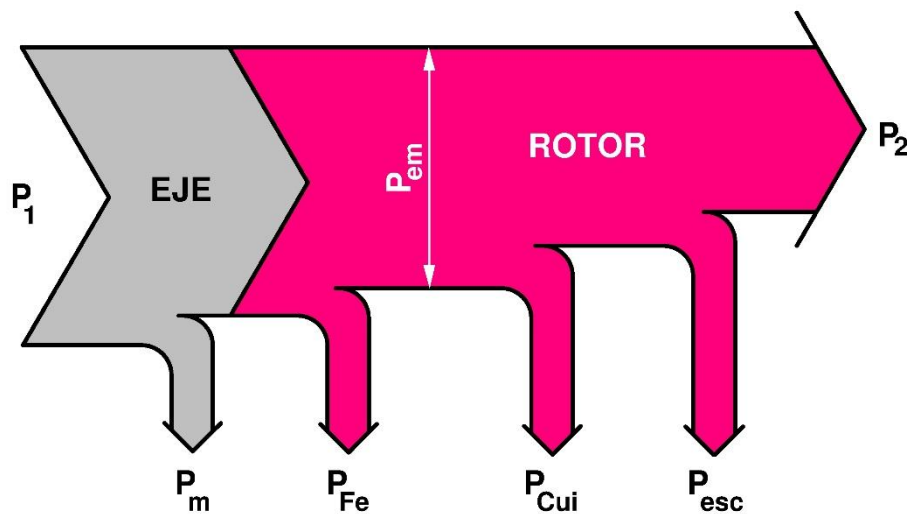
POTENCIAS**Generadores**

Fig. 7: Balance de potencias de un generador de excitación independiente

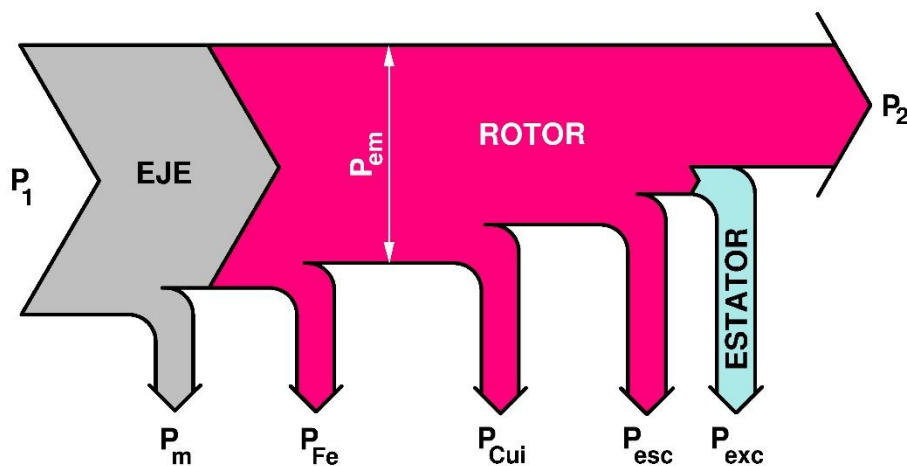


Fig. 8: Balance de potencias de un generador de corriente continua autoexcitado

Tabla II: Nomenclatura de las potencias de una máquina de corriente continua

Nomen-clatura	Significado
P_1	Potencia de entrada o total absorbida
P_2	Potencia de salida o útil suministrada
P_m	Pérdidas mecánicas
P_{Fe}	Pérdidas en el hierro o magnéticas
P_{Cui}	Pérdidas en el cobre del inducido
P_{esc}	Pérdidas en las escobillas
P_{exc}	Pérdidas en el devanado de excitación o inductor
P_{em}	Potencia electromagnética o interna (también se denomina P_a)

Máquinas de corriente continua

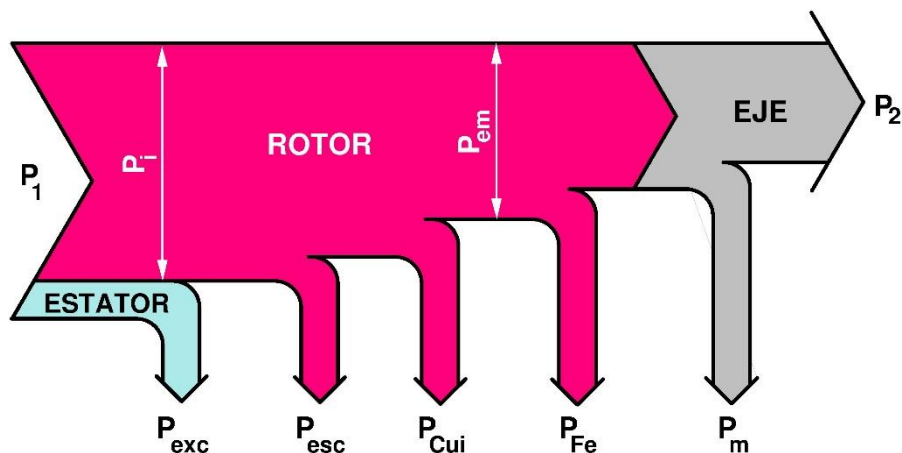
Motores

Fig. 9: Balance de potencias de un motor de corriente continua

BORNES

Tabla III: Designación normalizada de los bornes de una máquina de corriente continua

	NORMATIVA ACTUAL (UNE-EN 60034-8)		NORMATIVA ANTERIOR	
	Principios	Finales	Principios	Finales
Inducido	(A1)	(A2)	A	B
Inducido + devanados auxiliares	A1	A2	-	-
Polos auxiliares	B1	B2	G	H
Compensación	C1	C2		
Excitación serie	D1	D2	E	F
Excitación shunt	E1	E2	C	D
Excitación independiente	F1	F2	J	K

Máquinas de corriente continua

BIBLIOGRAFÍA

- [1] CORTES. 1977. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. Tomo II: Máquinas de corriente continua*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [2] FAURE BENITO. 2000. *Máquinas y accionamientos eléctricos*. Madrid: Colegio oficial de ingenieros navales y oceánicos.
- [3] FOGIEL, M. 1987. *The electrical machines problem solver*. New York. Research and Education Association.
- [4] FRAILE MORA, J. 2015. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L.
- [5] FRAILE MORA, J. y FRAILE ARDANUY, J. 2015. *Problemas de máquinas eléctricas*. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L.
- [6] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas. Tomo 3*. Moscú: Editorial Mir.
- [7] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas. Tomo I*. Moscú: Editorial Mir.
- [8] RAMÍREZ VAZQUEZ, J. 1989. *Enciclopedia CEAC de la electricidad: Pilas y acumuladores. Máquinas de corriente continua*. Barcelona: Ediciones CEAC, S.A.
- [9] SANZ FEITO. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Educación.
- [10] SERRANO IRIBARNEGARAY. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [11] SUÁREZ CREO, J.M. y MIRANDA BLANCO, B.N. 2006. *Máquinas eléctricas. Funcionamiento en régimen permanente*. Santiago de Compostela: Tórculo Edicións, S.L.