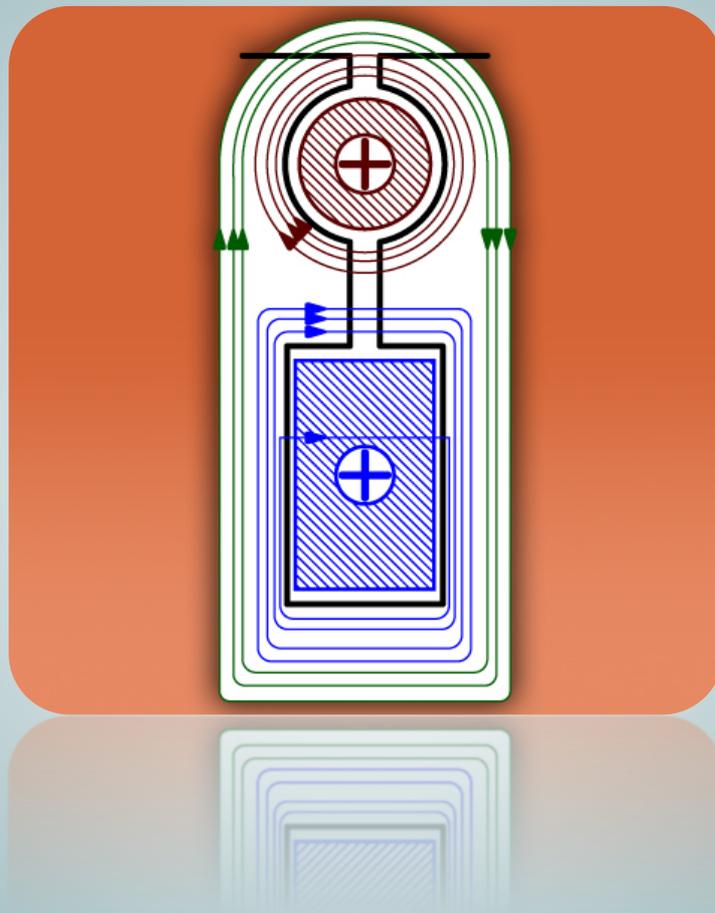


Máquinas Eléctricas II

Tema 4. Máquinas asíncronas o de inducción



Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Este documento está diseñado para que se obtenga un texto impreso bien organizado si decide ahorrar papel imprimiéndolo a tamaño reducido, de forma que se incluyan dos páginas por cada hoja de papel A4 apaisado.

© 2018, Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Universidad de Cantabria (España)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.



Está permitida la reproducción total o parcial de este documento bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Unported que incluye, entre otras, la condición inexcusable de citar su autoría (Miguel Angel Rodríguez Pozueta - Universidad de Cantabria) y su carácter gratuito.

Puede encontrar más documentación gratuita en la página web del autor: <http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm>

ÍNDICE

ÍNDICE

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

FUNDAMENTOS DE LAS MÁQUINAS ASÍNCRONAS. CIRCUITO EQUIVALENTE. BALANCE DE POTENCIAS. PAR.....	1
Descripción.....	1
Principio de funcionamiento	5
F.e.m.s. Separación de resistencias y reactancias de dispersión	7
Circuito equivalente.....	9
Balance de potencias	14
Par de rotación.....	16
Fórmula de Kloss.....	20
Curva par-velocidad de una máquina asíncrona polifásica	20
Puntos notables	20
Punto de funcionamiento. Estabilidad.....	21
Efectos de variar V_1 y de introducir resistencias en serie con el rotor..	22
Arranque.....	24
Arranque directo	25
Arranques con tensión reducida. Arranque estrella-triángulo	25
Arranque por introducción de resistencias en serie con el rotor.....	27
Regulación de velocidad.....	27
Bibliografía.....	29
CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS. OTROS PARES	30
Circuitos equivalentes simplificados.....	31
Presentación.....	31
Circuito equivalente exacto sin R_{Fe}	32
Circuito equivalente serie.....	33
(*) Circuito equivalente en L.....	38
(*) Resumen de circuitos equivalentes exacto y simplificados.....	41
Efectos de la alimentación desequilibrada en una máquina asíncrona trifásica. Componentes simétricas	43
Pares adicionales debidos a los armónicos temporales en las corrientes de alimentación de una máquina asíncrona trifásica	45
Bibliografía.....	48

ÍNDICE

(Cada número de página de este índice es un enlace a dicha página)

FUNCIONAMIENTO CON TENSIÓN FLUJO O CORRIENTE CONSTANTE. FUNCIONAMIENTO CON DESLIZAMIENTOS PEQUEÑOS.....	49
Ecuaciones básicas	49
Flujo y tensión en un motor asíncrono con deslizamientos pequeños	49
Ecuaciones del par.....	50
Ecuaciones de par para deslizamientos pequeños.....	50
Curva de par a tensión y frecuencia constantes.....	51
Curva de par a flujo y frecuencia constantes.....	52
Curvas de par- velocidad a flujo constante para varias frecuencias f_1 ...	53
Motor asíncrono con deslizamientos pequeños.....	55
Funcionamiento con corriente I_1 y frecuencia f_1 estáticas constantes	57
Curva de par con corriente I_1 y frecuencia f_1 constantes.....	58
Efecto de la saturación sobre la curva de par a I_1 y f_1 constantes. Funcionamiento como motor.....	60
Curva de par a I_1 y f_1 constantes. Recapitulación.....	61
Bibliografía.....	62
ARRANQUE DE MOTORES ASÍNCRONOS.....	63
Condición de arranque.....	63
Limitaciones en la corriente de arranque.....	63
Arranque directo.....	64
Arranques con tensión reducida	65
Arranque por inserción de impedancias en el estator	65
Arranque por autotransformador.....	67
Arranque estrella-triángulo.....	69
Arrancador electrónico o estático	71
Arranque por introducción de resistencias en serie con el rotor	73
Arranques usando los sistemas de control de velocidad.....	75
Momento de inercia y momento giratorio.....	75
Tiempo de arranque de un motor asíncrono	76
Análisis del arranque directo en vacío mediante la fórmula de Kloss...	77
Energía perdida durante el arranque.....	78
Bibliografía.....	79
ANEXO A: Ejemplo de cálculo de varios arranques de un motor asíncrono ...	81
(*) ANEXO B: Dinámica del motor asíncrono.....	95
Introducción.....	95

ÍNDICE

(Cada número de página de este índice es un enlace a dicha página)

Tiempo de arranque de un motor asíncrono.....	96
Pérdidas de energía en el arranque de un motor asíncrono.....	99
Balance de potencias.....	99
Pérdidas de energía en el arranque.....	101
Pérdidas de energía en el arranque con carga.....	103
Pérdidas de energía en el frenado a contracorriente y en la inversión del sentido de giro en vacío.....	105
MOTORES DE DOBLE JAULA Y DE RANURA PROFUNDA.....	107
Presentación.....	107
Descripción y principio de funcionamiento de estos motores.....	107
Motores de doble jaula.....	107
Motores de ranura profunda o de barras altas.....	108
Circuitos equivalentes para motores de doble jaula.....	109
Impedancia total del rotor.....	111
Factor de jaula.....	113
(*) Relaciones entre los parámetros del circuito equivalente.....	113
(*) Análisis de los parámetros de un motor de ranura profunda.....	114
El par en los motores de doble jaula y de ranura profunda. Clasificación de las curvas de par NEMA e IEC.....	117
(*) Efectos de la saturación.....	120
Bibliografía.....	122
FRENADO DE MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN.....	123
Introducción.....	124
Fundamentos de la máquina asíncrona.....	124
Ecuaciones básicas. Circuito equivalente. Parámetros.....	124
Balance de potencias de una máquina asíncrona actuando como motor... ..	126
Curva de par de una máquina asíncrona alimentada con V_1 y f_1 constantes.....	128
Curva de par de una máquina asíncrona alimentada con I_1 y f_1 constantes.....	129
Punto de funcionamiento.....	131
Frenado por recuperación de energía (frenado regenerativo).....	132
Generador asíncrono.....	132
Ejemplos de frenado regenerativo.....	134
Frenado a contracorriente.....	135
Frenado por inyección de corriente continua (frenado dinámico).....	138

ÍNDICE

(Cada número de página de este índice es un enlace a dicha página)

(*)	Máquina asíncrona alimentada con tensión continua	140
	Ejemplo de frenado dinámico	143
	Bibliografía	144
(*)	ANEXO A: Comportamiento del estator y determinación de I_{1eq} cuando una máquina asíncrona se alimenta con corriente continua	146
	F.m.m. de un devanado trifásico alimentado con corriente alterna trifásica	146
	Análisis del estator de una máquina asíncrona alimentada con corriente continua	147
(*)	ANEXO B: Consideraciones sobre la máquina asíncrona alimentada con corriente continua (frenado dinámico)	151
	Velocidad de la f.m.m. del rotor	151
	Ecuación eléctrica del rotor	151
	Corriente en el rotor. Saturación magnética. Inductancia magnetizante L_{μ}	158
	Potencias en el rotor. Par	161
	ANEXO C: Ejemplo de cálculo de diferentes sistemas de frenado de una máquina asíncrona	165
	VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN MOTORES ASÍNCRONOS	181
	Presentación	181
	Clasificación de los métodos para la variación de velocidad en los motores asíncronos	181
	Variación de la velocidad modificando el número de polos	183
	Devanados independientes con distintos números de polos	184
	Conexión Dahlander	185
(*)	Modulación de la amplitud polar (PAM)	191
	Variación de la velocidad modificando la frecuencia f_1 del estator	199
	Principio de la variación de la velocidad mediante la frecuencia f_1	199
	Convertidor o variador de frecuencia	200
	Variación de la velocidad con un convertidor de frecuencia actuando como fuente de tensión	201
	Variación de la velocidad con un convertidor de frecuencia actuando como fuente de corriente	203
	Control en lazo abierto y en lazo cerrado de velocidad	204
	Variación de la velocidad modificando el deslizamiento	206
	Variación de la velocidad mediante la tensión del estator V_1	206
	Variación de la velocidad añadiendo resistencias en serie con las fases del rotor	207

ÍNDICE

(Cada número de página de este índice es un enlace a dicha página)

Variación de la velocidad mediante la inyección de una f.e.m. al rotor....	208
Bibliografía.....	209
(*) ANEXO A: Parámetros de un motor Dahlander.....	211
(*) ANEXO B: Ejemplo de cálculo de varios sistemas de variación de velocidad de un motor trifásico Dahlander.....	213
ANEXO C: Ejemplo de cálculo de varios sistemas de variación de velocidad de un motor asíncrono trifásico de rotor bobinado.....	219
MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA.....	231
Máquina asíncrona de anillos doblemente alimentada.....	231
Circuito equivalente de una máquina asíncrona doblemente alimentada.....	232
(*) Diagramas fasoriales de una máquina asíncrona doblemente alimentada.....	234
Impedancia externa equivalente a una máquina asíncrona doblemente alimentada.....	235
Balance de potencias de un motor asíncrono doblemente alimentado.....	238
Relaciones entre las potencias de un motor asíncrono doblemente alimentado....	238
Control de la máquina asíncrona doblemente alimentada.....	240
Simplificación del balance de potencias de un motor asíncrono doblemente alimentado.....	240
Bibliografía.....	244
(*) ANEXO I: Potencia reactiva.....	245
(*) ANEXO II: Control de la máquina asíncrona doblemente alimentada.....	249
(*) ANEXO III: Ejemplo de cálculo de una máquina asíncrona doblemente alimentada.....	251
BIBLIOGRAFÍA GLOBAL PARA MÁQUINAS ASÍNCRONAS.....	269

(*) Contenido de nivel avanzado que no forma parte del programa de la asignatura “Máquinas Eléctricas II”.

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

DESCRIPCIÓN

Las máquinas asíncronas (Figs. 1 y 2) tienen un circuito magnético sin polos salientes estando ranurados tanto el estator como el rotor, los cuáles van a estar sometidos a la acción de campos magnéticos giratorios que darán lugar a pérdidas magnéticas. En consecuencia, ambos órganos de la máquina se fabrican a base de apilar chapas delgadas de acero al silicio para reducir estas pérdidas.

El devanado del estator (Fig. 7) normalmente es trifásico, aunque en máquinas de pequeña potencia también puede ser monofásico o bifásico. El devanado del rotor siempre es polifásico. Ambos devanados tienen el mismo número de polos (2p). En este texto se denominará con subíndice “1” a las magnitudes del estator y con subíndice “2” a las del rotor.

El devanado del rotor forma un circuito cerrado por el que circulan corrientes inducidas por el campo magnético. El rotor puede ser de dos tipos: **de jaula de ardilla o en cortocircuito** (Figs. 3 y 4) y **de rotor bobinado o con anillos** (Fig. 5).

Una jaula de ardilla es un devanado formado por unas **barras** alojadas en las ranuras del rotor que quedan unidas entre sí por sus dos extremos mediante sendos **aros o anillos de cortocircuito**. El número de fases de este devanado depende de su número de barras. Muchas veces estos anillos poseen unas aletas (Fig. 4) que facilitan la evacuación del calor que se genera en la jaula durante el funcionamiento de la máquina.

El rotor bobinado tiene un devanado trifásico normal cuyas fases se conectan al exterior a través de un **colector** de tres anillos (Fig. 6) y sus correspondientes escobillas. En funcionamiento normal estos tres anillos están cortocircuitados (unidos entre sí).

En ambos tipos de rotor se suelen emplear ranuras ligeramente inclinadas con respecto al eje de la máquina (Fig. 3).

El bloque de chapas que forma el circuito magnético del rotor tiene un agujero central donde se coloca el **eje** o **árbol** de la máquina. En muchas ocasiones se coloca un **ventilador** (Fig. 3) en este eje para facilitar la refrigeración de la máquina.

La **carcasa** (Fig. 7) es la envoltura de la máquina y tiene dos tapas laterales (Fig. 3) donde se colocan los **cojinetes** (Fig. 3) en los que se apoya el árbol. Esta carcasa suele disponer de aletas para mejorar la refrigeración de la máquina (Figs. 1 y 7). Sujeta a la carcasa está la **placa de características** (Fig. 1) donde figuran las magnitudes más importantes de la máquina. En la carcasa se encuentra también la **caja de bornes** (Figs. 1 y 2) adonde van a parar los extremos de los bobinados. En una máquina asíncrona trifásica de jaula de ardilla la caja de bornes tiene seis terminales, correspondientes a los extremos de las tres fases del estator (dos extremos, principio y final, por cada fase), formando dos hileras de tres. De esta forma resulta fácil el conectar el devanado del estator en estrella (Fig. 8a) o en triángulo (Figs. 2 y 8b).

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

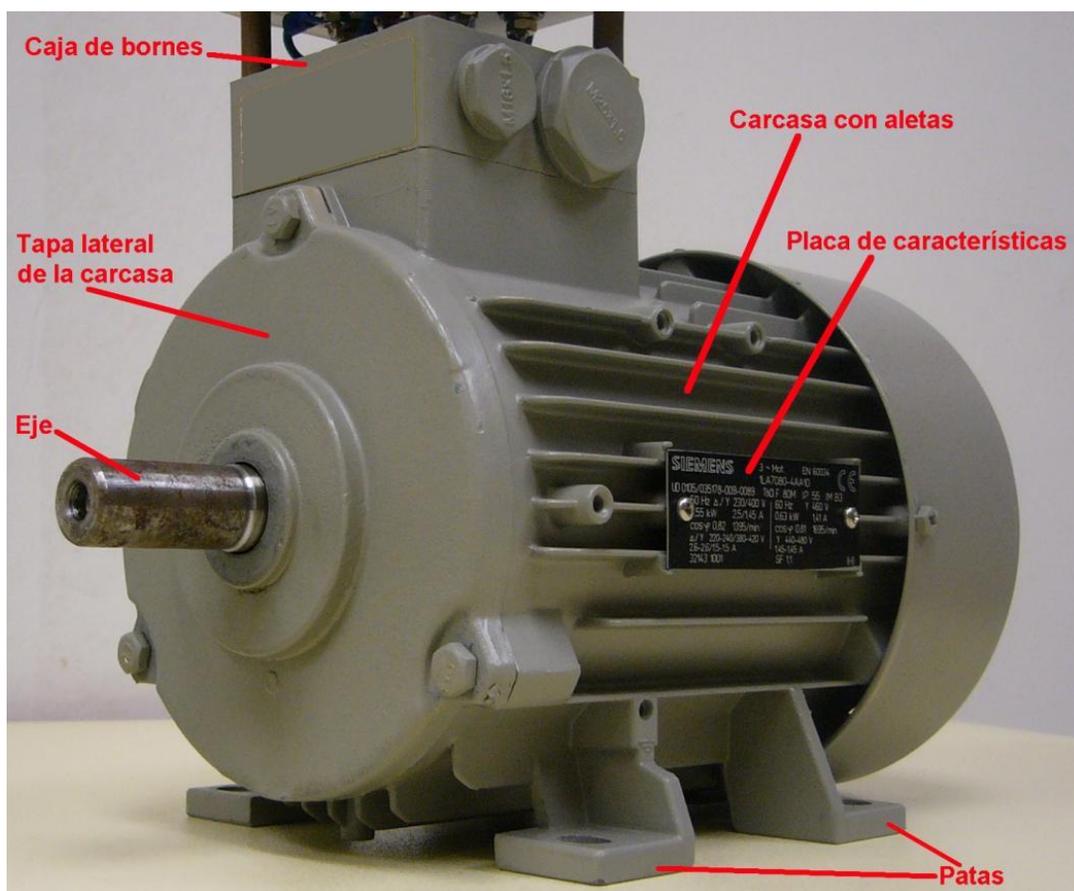


Fig. 1: Máquina asíncrona

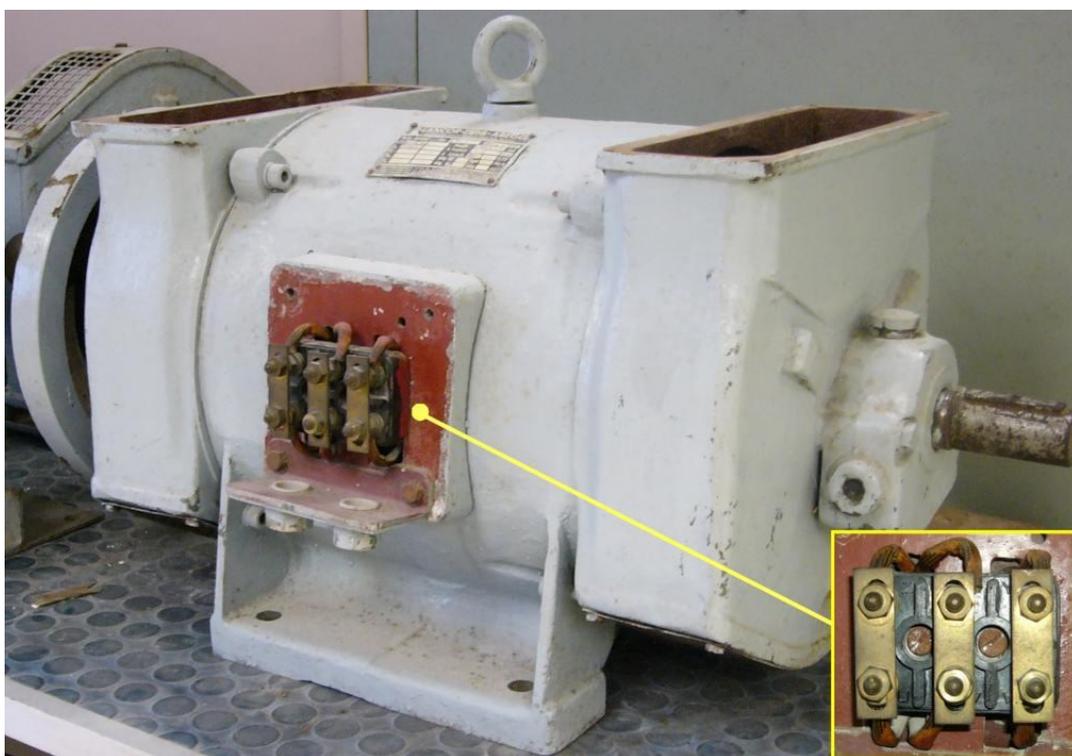


Fig. 2: Máquina asíncrona. Se ha ampliado la caja de bornes, a la cual se le ha quitado la tapa, para mostrar la conexión triángulo del estator (ver la Fig. 8)

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

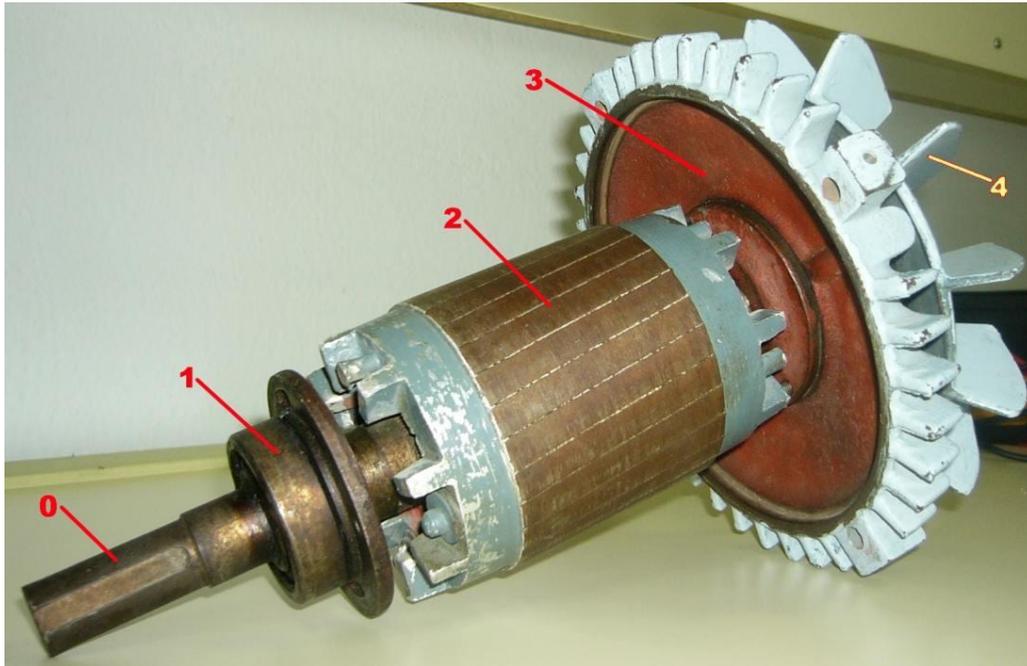


Fig. 3: Eje (0), Cojinete (1), rotor de jaula de ardilla (2), tapa lateral de la carcasa (3) y ventilador (4)



Fig. 4: Aletas en un rotor de jaula de ardilla



Fig. 5: Rotor bobinado o con anillos

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

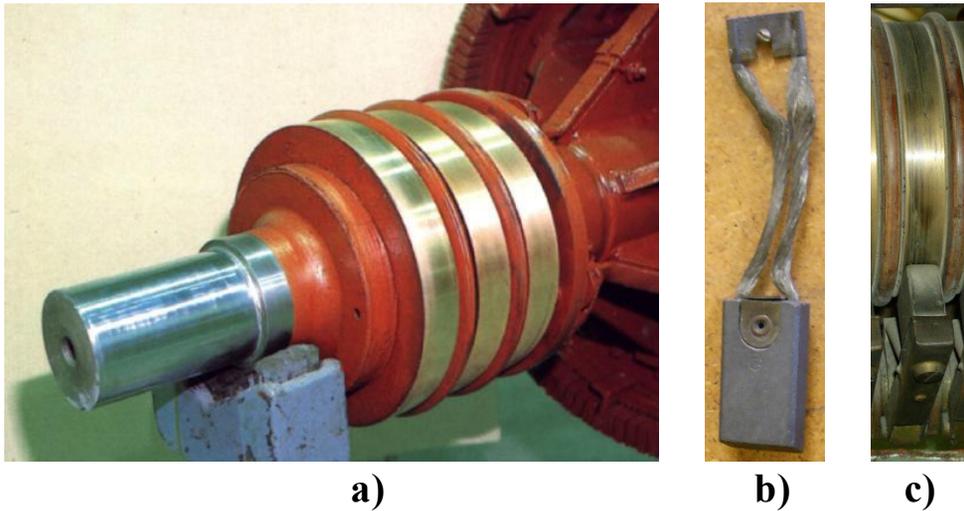


Fig. 6: a) Colector de 3 anillos; b) Escobilla; c) Anillo con escobilla

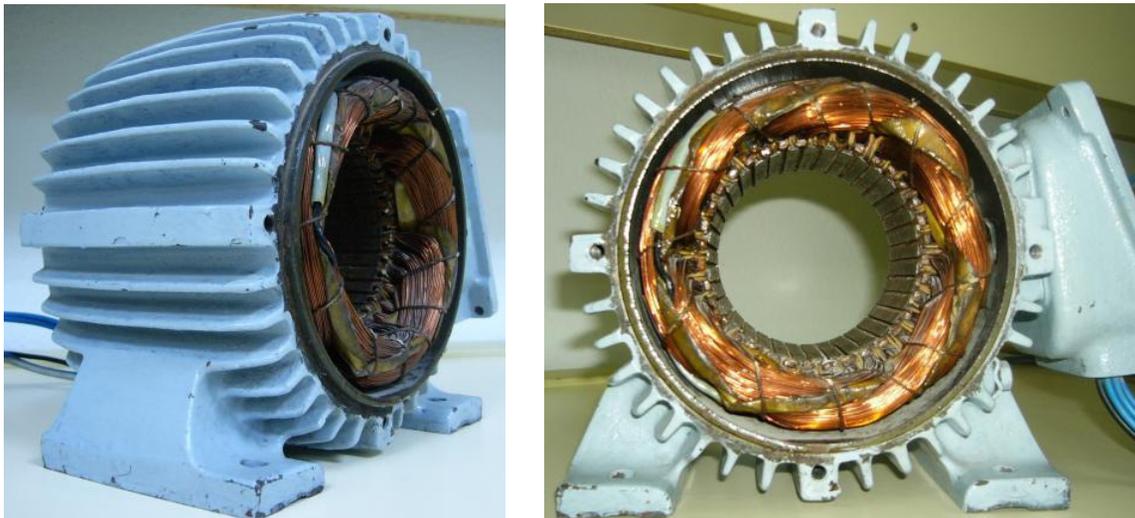


Fig. 7: Estator y carcasa

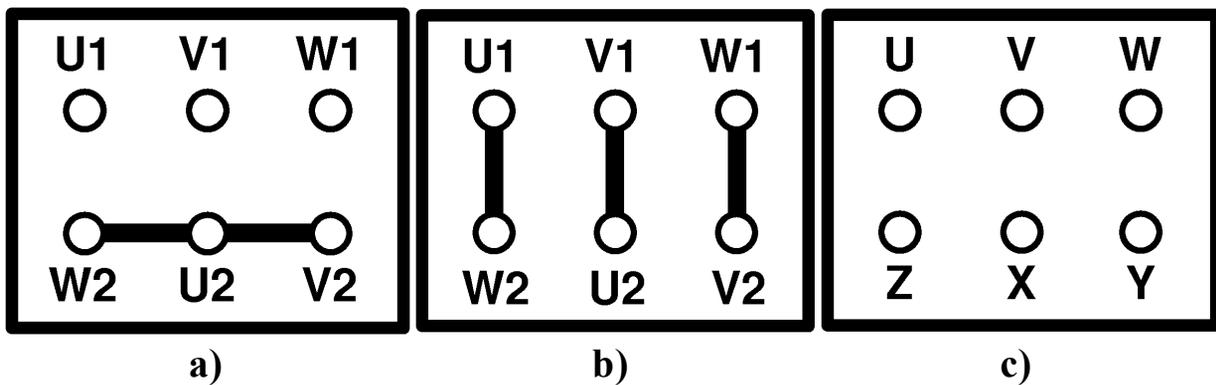


Fig. 8: Caja de bornes de una máquina asíncrona trifásica de jaula de ardilla:

a) Conexión estrella; b) Conexión triángulo

(En ambos casos los terminales U1, V1 y W1 son los que se conectan a las fases de la red)

c) Antiguamente se utilizaban las letras U, V y W en lugar de U1, V1 y W1 y X, Y y Z en lugar de U2, V2 y W2.

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

Esta facilidad para conectar en estrella o en triángulo el devanado del estator permite que una máquina asíncrona pueda funcionar con dos tensiones asignadas de línea distintas, que guardan entre sí una relación $\sqrt{3}$.

Así, por ejemplo, un motor de 400/230 V tiene una tensión asignada de fase de 230 V. Por esta razón, cuando se quiera utilizar en una red cuya tensión de línea sea 230 V se empleará la conexión triángulo, porque en ella las tensiones de fase y de línea son iguales. Si se quiere utilizar esta máquina en una red cuya tensión de línea sea 400 V deberá emplearse la conexión estrella, porque en ella la tensión de fase es igual a la tensión fase-neutro, la cual es $\sqrt{3}$ veces menor que la tensión de línea.

En resumen, la posibilidad de cambiar de conexión en el estator permite funcionar a la máquina asíncrona con dos tensiones asignadas de línea diferentes. La menor corresponde a la conexión triángulo y es también igual a la tensión asignada de fase. La mayor corresponde a la conexión en estrella.

PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO

A partir de ahora, salvo indicación en sentido contrario, este texto se referirá a las máquinas asíncronas polifásicas (normalmente trifásicas), las utilizadas más frecuentemente. Se denomina m_1 al número de fases del estator y m_2 al número de fases del rotor.

En este tipo de máquina el bobinado del estator está recorrido por un sistema equilibrado de corrientes que da lugar, en virtud del Teorema de Ferraris, a un campo magnético giratorio cuya velocidad es la conocida como **velocidad de sincronismo**. Cuando esta velocidad se mide en r.p.m. se la denomina n_1 y se calcula a partir de la frecuencia f_1 de las corrientes del estator mediante este cociente

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} \quad (1)$$

Como el rotor gira a una velocidad diferente de la del campo magnético del estator, sus bobinas están sometidas a la acción de un flujo magnético variable y se inducen f.e.m.s de rotación en ellas. El devanado del rotor está en cortocircuito, luego estas f.e.m.s producen la circulación de corrientes en el rotor que, al interactuar con el campo magnético del estator, originan un par en el eje de la máquina. Por la Ley de Lenz, este par mecánico intentará reducir las variaciones de flujo magnético en el devanado del rotor y, por lo tanto, tratará de hacerlo girar a la misma velocidad que el campo magnético giratorio (ya que las variaciones de flujo en las bobinas del rotor son debidas al movimiento relativo del campo giratorio con respecto al rotor), pero sin conseguirlo nunca, ya que entonces no habría corrientes en el rotor ni, por consiguiente, par en el eje de la máquina.

La velocidad de estas máquinas es, pues, ligeramente distinta de la de sincronismo, de ahí su nombre de asíncronas. Por otra parte, las corrientes que circulan por el rotor aparecen por inducción electromagnética, de ahí su otro nombre de máquinas de inducción.

Cuando la máquina actúa como motor, su funcionamiento más habitual, la velocidad del rotor es inferior a la de sincronismo y se genera un par motor. Para que esta máquina

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

actúe como generador es preciso moverla con una máquina motriz externa de forma que su velocidad supere a la de sincronismo. En este caso aparece un par de frenado en su eje.

Se denomina **deslizamiento s** a la siguiente relación:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{\Omega_1 - \Omega}{\Omega_1} \quad (2)$$

donde

- n_1 es la velocidad de sincronismo medida en r.p.m.
- Ω_1 es la velocidad de sincronismo medida en rad/s
- n es la velocidad de giro del rotor medida en r.p.m.
- Ω es la velocidad de giro del rotor medida en rad/s

Los conductores del devanado rotórico ven girar el campo originado por el bobinado del estator con una velocidad relativa n_2

$$n_2 = n_1 - n = s \cdot n_1 \quad (3)$$

En consecuencia, como este campo magnético tiene p pares de polos, sucede que un conductor del rotor en un minuto ha visto pasar frente a él $n_2 \cdot p$ ciclos magnéticos (cada par de polos constituye un ciclo de la onda del campo magnético en el entrehierro, la cual se va repitiendo en el siguiente par de polos y así sucesivamente en todos los pares de polos de la máquina). Cada ciclo magnético induce un periodo de la onda temporal de f.e.m. al girar por delante de un conductor del rotor. Esto hace que en las fases del rotor se induzcan unas f.e.m.s cuya frecuencia es de $n_2 \cdot p$ ciclos por minuto; es decir, una **frecuencia f_2** que medida en Hz (ciclos por segundo) vale

$$f_2 = \frac{n_2 p}{60} = \frac{(s n_1) p}{60} = s \left(\frac{n_1 p}{60} \right)$$

Luego, teniendo en cuenta la relación (1) se deduce que

$$\boxed{f_2 = s f_1} \quad (4)$$

El deslizamiento s de una máquina asíncrona en condiciones normales de funcionamiento es pequeño; esto significa que la frecuencia en el rotor f_2 es pequeña, muy inferior a la del estator f_1 .

Las f.e.m.s inducidas sobre las fases del rotor provocan la circulación de corrientes cuya frecuencia también es f_2 . Estas corrientes al circular por las fases del rotor originan, en virtud del Teorema de Ferraris, otro campo giratorio cuya velocidad relativa con respecto al rotor se calcula mediante una expresión similar a (1):

$$\frac{60 f_2}{p} = \frac{60 (s f_1)}{p} = s \frac{60 f_1}{p} = s n_1 = n_1 - n = n_2 \quad (5)$$

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

Su velocidad absoluta se obtiene teniendo en cuenta que el rotor está girando con una velocidad n :

$$n_2 + n = (n_1 - n) + n = n_1 \quad (6)$$

Luego, el campo magnético del rotor gira a la misma velocidad de sincronismo que el del estator.

Al final, se obtiene que el campo magnético total en el entrehierro, debido al efecto conjunto de las corrientes del estator y del rotor, gira a la velocidad de sincronismo n_1 .

El hecho de que los campos magnéticos del estator y rotor giren a la misma velocidad es importante, porque así la posición relativa de ambos campos no varía con el tiempo y la máquina produce, entonces, un par constante en el eje (sin pulsaciones en cada vuelta). Esta igualdad de velocidades es debida a que ambos devanados, el del estator y el del rotor, tienen el mismo número de polos. El que los dos devanados puedan tener diferente número de fases no influye para que generen campos giratorios de igual velocidad, como se puede apreciar observando las relaciones (1) y (5).

F.E.M.S. SEPARACIÓN DE RESISTENCIAS Y REACTANCIAS DE DISPERSIÓN

Se denomina Φ_M al flujo por polo debido al campo magnético común que existe en el entrehierro originado por la acción conjunta de los devanados del estator y del rotor. Este campo magnético gira a la velocidad de sincronismo n_1 .

El giro de este campo produce sobre las fases del estator (de N_1 ¹ espiras efectivas/fase y factor de bobinado ξ_{b1} , siendo el factor de bobinado un coeficiente ligeramente inferior a la unidad que depende de la geometría del devanado) unas f.e.m.s de rotación cuyo valor eficaz se va a denominar E_1 y cuya frecuencia es igual a la de las corrientes del estator f_1 . Recordando lo estudiado anteriormente en el capítulo sobre los aspectos generales de las máquinas eléctricas, se tiene que esta f.e.m. verifica que

$$E_1 = 4,44 \xi_{b1} f_1 N_1 \Phi_M \quad (7)$$

Análogamente este campo magnético giratorio induce sobre el devanado del rotor (cuyas fases tienen N_2 espiras efectivas y factor de bobinado ξ_{b2}) unas f.e.m.s de rotación cuyo valor eficaz se va a denominar E_{2s} y cuya frecuencia es f_2 . Se tiene que

$$E_{2s} = 4,44 \xi_{b2} f_2 N_2 \Phi_M \quad (8)$$

En el caso de que el rotor estuviera parado, de acuerdo con las expresiones (2) y (4) se tiene que:

¹ Cuando todas las espiras de una fase están conectadas en serie su número de espiras *efectivas* es igual al número total de espiras de la fase. Sin embargo, si las espiras de una fase se conectan formando varias ramas en paralelo, el número de espiras efectivas es igual al número de espiras de una de estas ramas en paralelo.

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

$$n = 0 \rightarrow s = 1 \rightarrow f_2 = f_1 \quad (9)$$

Sea E_2 el valor eficaz de las f.e.m.s inducidas sobre las fases del rotor cuando se encuentra parado. Se cumplirá que

$$E_2 = 4,44 \xi_{b2} f_1 N_2 \Phi_M \quad (10)$$

Comparando las expresiones (8) y (10) y teniendo en cuenta la relación (4) se deduce que

$$\boxed{E_{2s} = s E_2} \quad (11)$$

Se denomina **relación de transformación de tensiones m_v** a este cociente

$$\boxed{m_v = \frac{E_1}{E_2} = \frac{\xi_{b1} N_1}{\xi_{b2} N_2}} \quad (12)$$

Además del campo común existe el campo magnético de dispersión o de fugas, que da lugar a sendos enlaces de flujo de dispersión en las fases del estator y del rotor. Al igual que se hizo con los transformadores, se puede considerar que sus efectos se pueden analizar utilizando para cada fase unas autoinductancias, L_{d1} en el estator y L_{d2} en el rotor. Las reactancias debidas a estas autoinductancias son:

$$\text{En el estator:} \quad X_1 = 2 \pi f_1 L_{d1}$$

$$\text{En el rotor:} \quad X_{2s} = 2 \pi f_2 L_{d2}$$

$$\text{En el rotor parado:} \quad X_2 = 2 \pi f_1 L_{d2}$$

Luego, de acuerdo con (4) se deduce que:

$$\boxed{X_{2s} = s X_2} \quad (13)$$

Además, denominaremos R_1 a la resistencia de una fase del estator y R_2 a la resistencia de una fase del rotor.

De todo lo anterior y trabajando con los mismos convenios de signos utilizados anteriormente para los transformadores se puede obtener el esquema por fase de un motor asíncrono, el cual está representado en la Fig. 9.

En este esquema, al adoptar el mismo convenio de signos que en los transformadores, se está presuponiendo que el flujo de potencia se dirige desde el estator hacia el rotor; es decir, que la máquina está actuando como motor. Esta es la forma de funcionamiento más frecuente en las máquinas de inducción y, por esta razón, a partir de ahora en los siguientes apartados, salvo indicación contraria, se va a seguir suponiendo que la máquina actúa como motor.

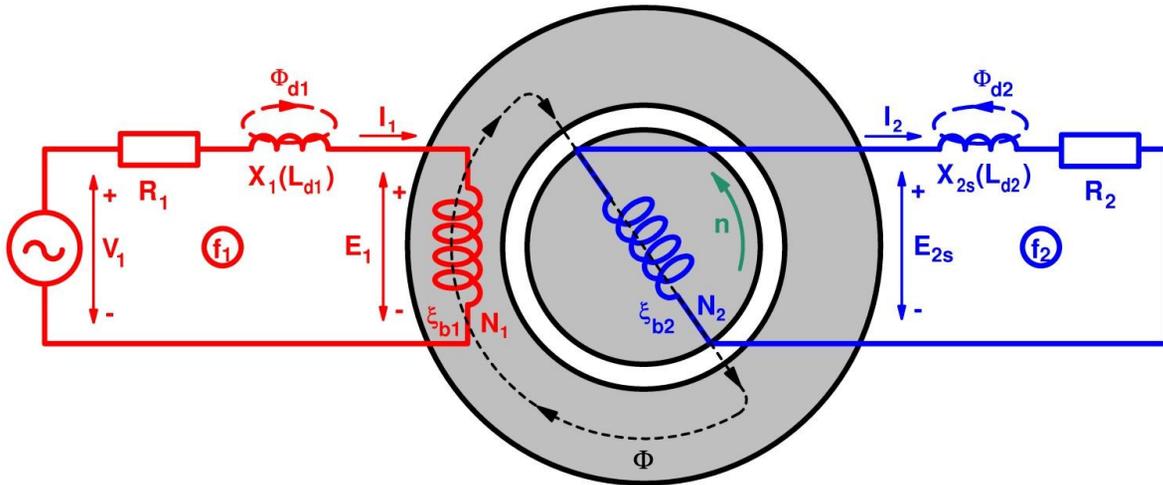


Fig. 9: Esquema por fase de un motor asíncrono polifásico

Recuérdese que en el esquema de la Fig. 9 las magnitudes del rotor f_2 , E_{2s} y X_{2s} son funciones del deslizamiento s y, en consecuencia, varían con la velocidad de giro n de la máquina. En el caso de que el motor esté parado, estas magnitudes pasan a ser, f_1 , E_2 y X_2 , respectivamente.

CIRCUITO EQUIVALENTE

Con objeto de facilitar el análisis de un motor asíncrono, siguiendo un procedimiento similar al utilizado para los transformadores, se sustituye su rotor por otro equivalente de forma que el resto de la máquina no se vea afectado por este cambio. Esto significa que al sustituir el rotor real por el equivalente las magnitudes del estator, el flujo de potencia a través del entrehierro y el campo magnético no cambiarán y, por lo tanto, el flujo por polo Φ_M seguirá conservando el mismo valor. Además, el rotor equivalente se elige de forma que su devanado sea idéntico al del estator; es decir, con el mismo número de fases m_1 , número de espiras efectivas N_1 y factor de bobinado ξ_{b1} que el estator, e inmóvil para que sus corrientes tengan la misma frecuencia f_1 que las del estator. Este rotor equivalente se denomina **rotor reducido al estator**. Así pues, se tiene que

$$m'_2 = m_1 ; \quad N'_2 = N_1 ; \quad \xi'_{b2} = \xi_{b1} ; \quad f'_2 = f_1$$

Como el devanado del rotor reducido al estator está inmóvil (al igual que el estator), es idéntico al estator y el flujo por polo es igual al que actúa sobre el estator, se deduce que la f.e.m. inducida sobre una fase es la misma que en el estator. Teniendo en cuenta la relación (12) se llega a

$$\boxed{\bar{E}'_2 = \bar{E}_1 = m_v \bar{E}_2} \quad (14)$$

Según el Teorema de Ferraris, estudiado en el capítulo de los aspectos generales de las máquinas eléctricas, el rotor real da lugar a una f.m.m. cuyo valor máximo es $m_2/2$ veces el originado por una sola de sus fases. Luego

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

$$\mathcal{F}_{2M} = \frac{m_2}{2} \left(0,9 \xi_{b2} \frac{N_2 I_2}{p} \right)$$

El rotor reducido al estator debe generar la misma f.m.m., luego se debe cumplir que

$$\mathcal{F}'_{2M} = \mathcal{F}_{2M} = \frac{m'_2}{2} \left(0,9 \xi'_{b2} \frac{N'_2 I'_2}{p} \right) = \frac{m_1}{2} \left(0,9 \xi_{b1} \frac{N_1 I'_2}{p} \right)$$

Identificando las dos expresiones anteriores se obtiene que

$$\frac{m_1}{2} \left(0,9 \xi_{b1} \frac{N_1 I'_2}{p} \right) = \frac{m_2}{2} \left(0,9 \xi_{b2} \frac{N_2 I_2}{p} \right)$$

$$I'_2 = \frac{I_2}{\frac{m_1 N_1 \xi_{b1}}{m_2 N_2 \xi_{b2}}}$$

De lo que se deduce que

$$\boxed{\bar{I}'_2 = \frac{\bar{I}_2}{m_i}} \quad (15)$$

La **relación de transformación de corrientes** m_i es este cociente

$$m_i = \frac{m_1 N_1 \xi_{b1}}{m_2 N_2 \xi_{b2}} \quad (16)$$

Comparando las relaciones (12) y (16) se comprueba que

$$m_i = \frac{m_1}{m_2} m_v \quad (17)$$

En los rotores bobinados lo normal es que su número de fases m_2 iguale al del estator m_1 . En este caso, según (17), las relaciones transformación de tensiones m_v y de corrientes m_i son iguales. En los rotores de jaula de ardilla los números de fases m_1 y m_2 suelen ser distintos y, en consecuencia, las relaciones m_v y m_i también son diferentes.

Se demuestra que la resistencia R'_2 y reactancia X'_2 del rotor reducido al estator se obtienen así:

$$\boxed{R'_2 = m_v m_i R_2} ; \quad \boxed{X'_2 = m_v m_i X_2} \quad (18)$$

De todo lo anterior, se puede concluir que un motor de inducción se comporta de una forma muy similar a un transformador que tuviera diferentes relaciones de transformación para las tensiones y para las corrientes.

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

Trabajando de forma análoga a la seguida con los transformadores y considerando, además, las relaciones (11) y (13) se deduce que un motor asíncrono con el rotor reducido al estator verifica estas ecuaciones:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 + \bar{I}'_2 \quad (19a)$$

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_{Fe} + \bar{I}_\mu \quad (19b)$$

$$\bar{V}_1 = \bar{E}_1 + \bar{I}_1 (R_1 + j X_1) \quad (19c)$$

$$\bar{E}'_2 = \bar{E}_1 = \bar{I}'_2 (R'_2 + j X'_2) + \bar{I}'_2 R'_c \quad (19d)$$

La ecuación del rotor (19d) se puede obtener de la siguiente manera. En la Fig. 9 se verifica que:

$$\bar{E}_{2s} = \bar{I}_2 (R_2 + j X_{2s})$$

De las relaciones (11) y (13) se obtiene que:

$$s \cdot \bar{E}_2 = \bar{I}_2 (R_2 + j (s \cdot X_2)) \rightarrow \bar{E}_2 = \bar{I}_2 \left(\frac{R_2}{s} + j X_2 \right)$$

Teniendo presente las expresiones (14), (15) y (18) se puede poner la relación anterior en función de las magnitudes del rotor reducido al estator y se obtiene la expresión (19d):

$$\frac{\bar{E}'_2}{m_v} = m_i \cdot \bar{I}'_2 \left[\frac{1}{m_v \cdot m_i} \left(\frac{R'_2}{s} + j X'_2 \right) \right]$$

$$\bar{E}'_2 = \bar{I}'_2 \left(\frac{R'_2}{s} + j X'_2 \right) = \bar{I}'_2 ((R'_2 + R'_c) + j X'_2)$$

Se puede encontrar un circuito que cumpla también estas ecuaciones, el cual está representado en la Fig. 10. Por lo tanto, este circuito es equivalente al motor y se pueden calcular magnitudes del motor resolviendo este circuito.

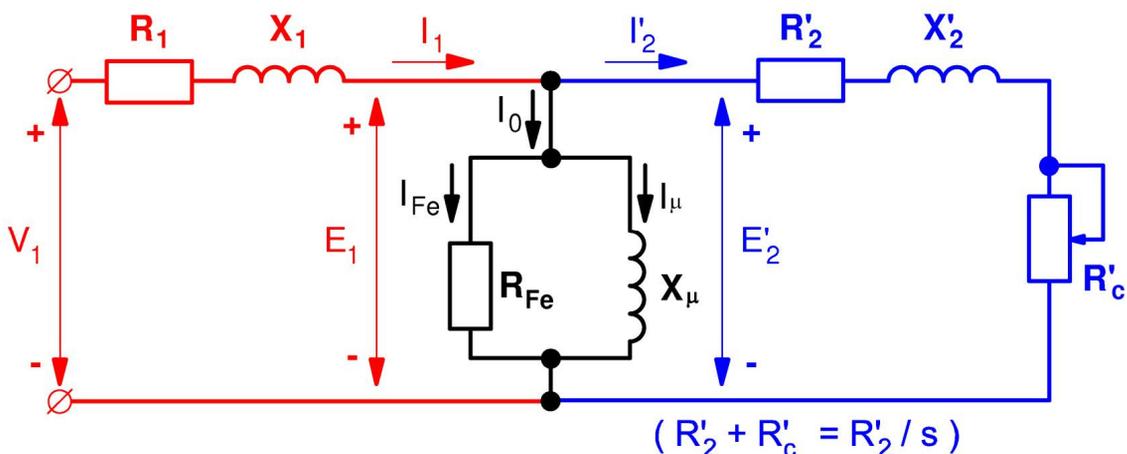


Fig. 10: Circuito equivalente exacto de un motor asíncrono polifásico

En las ecuaciones (19) y en el circuito equivalente de la Fig. 10 aparece la **resistencia de carga reducida al estator R'_c** cuyo valor es

$$R'_c = R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \quad (20)$$

De forma que se cumple también la siguiente relación

$$R'_2 + R'_c = \frac{R'_2}{s} \quad (21)$$

Esta resistencia de carga aparece porque al utilizar un rotor equivalente que está inmóvil desaparece la potencia que el rotor real proporciona en forma de potencia mecánica giratoria en el eje del motor. Como el rotor reducido al estator debe dar lugar al mismo flujo de potencia a través del entrehierro y en él no hay potencia mecánica (por estar inmóvil), se introduce la resistencia de carga para que la potencia gastada en ella iguale a la potencia mecánica que suministra el rotor real. Es decir, calculando la potencia gastada en esta resistencia de carga ($m'_2 R'_c I_2'^2 = m_1 R'_c I_2'^2$) se obtiene la potencia mecánica que se produce en el rotor real.

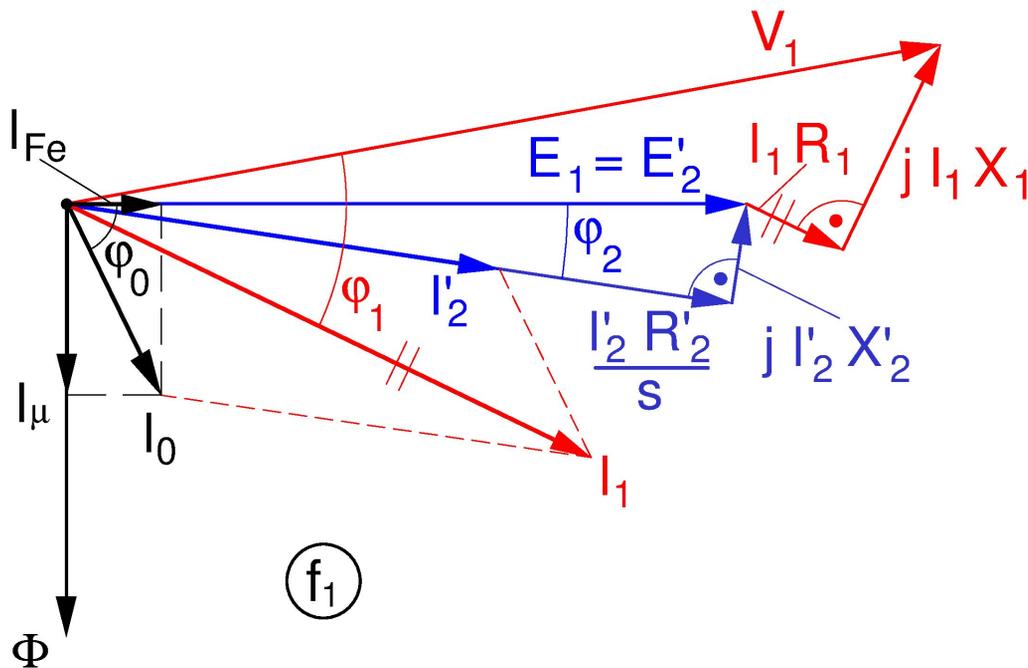


Fig. 11: Diagrama fasorial de un motor asíncrono polifásico

Las ecuaciones (19) se pueden representar mediante el **diagrama fasorial de un motor asíncrono polifásico** de la Fig. 11.

Al igual que se hizo con los transformadores se pueden simplificar los cálculos si se utiliza el circuito equivalente aproximado de la Fig. 12. Los parámetros de este circuito equivalente se pueden obtener experimentalmente mediante los ensayos de vacío y de cortocircuito.

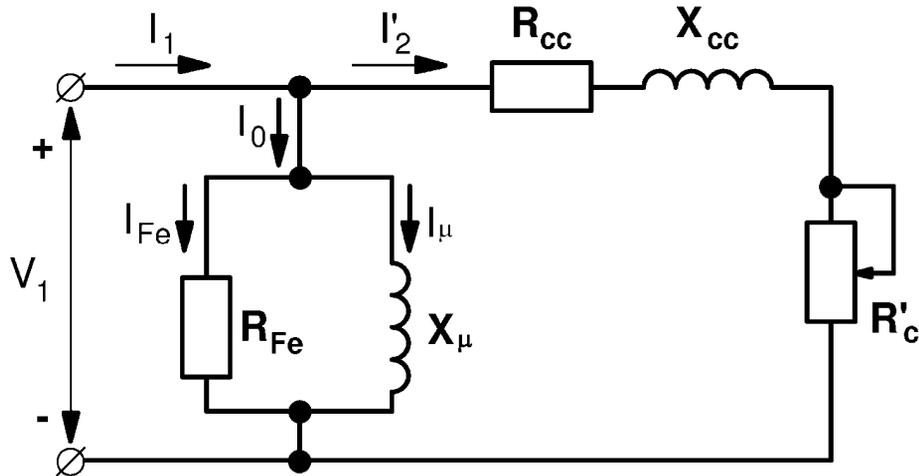


Fig. 12: Circuito equivalente aproximado de un motor asíncrono polifásico²

La resistencia y la reactancia de cortocircuito, R_{cc} y X_{cc} , que aparecen en la Fig. 12 son

$$R_{cc} = R_1 + R'_2 ; \quad X_{cc} = X_1 + X'_2 \quad (22)$$

Teniendo en cuenta la relación (21) se llega a

$$R_{cc} + R'_c = R_1 + \frac{R'_2}{s} \quad (23)$$

En un motor asíncrono la **marcha en vacío** es una marcha industrial en la que la potencia útil es nula. Por lo tanto, es una marcha en la que el estator del motor se alimenta a la tensión y frecuencia asignadas (marcha industrial) y no se conecta ninguna carga mecánica al eje de la máquina (potencia útil nula). En esta situación el par que proporciona la máquina prácticamente es nulo (sólo debe vencer los rozamientos mecánicos de la máquina) y su velocidad no se diferencia apenas de la síncrona, por lo que las f.e.m.s inducidas en el rotor son muy pequeñas y las corrientes en las fases del rotor son totalmente despreciables frente a las del estator. Resumiendo, las corrientes que circulan por el motor durante la marcha de vacío son:

$$\text{Marcha en vacío: } I_1 = I_0 ; \quad I_2 \approx 0$$

La corriente de vacío I_0 de un motor asíncrono no es tan pequeña como la de un transformador (para motores de potencia superior a 10 kW la corriente de vacío I_0 toma valores del 20 al 50% de la corriente asignada I_{1N}), porque el circuito magnético de un motor tiene mayor reluctancia debido a la existencia de entrehierro. Esto hace que el error cometido al utilizar el circuito equivalente aproximado de la Fig. 12 en lugar del circuito equivalente exacto de la Fig. 10 sea apreciablemente mayor. Sin embargo, esta aproximación da resultados suficientemente exactos en motores de más de 10 kW y, por esta razón, en este texto se utilizará básicamente el circuito equivalente aproximado de la Fig. 12.

² Un análisis más detallado (véase el libro [9]) muestra que el circuito equivalente aproximado de la Fig. 12 resulta más exacto -especialmente en el cálculo del par- si en él se modifican ligeramente sus parámetros mediante el coeficiente $c_1 = 1 + (X_1 / X_\mu)$, cuyo valor es ligeramente superior a 1. Así, los parámetros R_1 , X_1 , R_{Fe} y X_μ se deben multiplicar por c_1 y los parámetros R'_c , R'_2 y X'_2 se deben multiplicar por c_1^2 .

BALANCE DE POTENCIAS

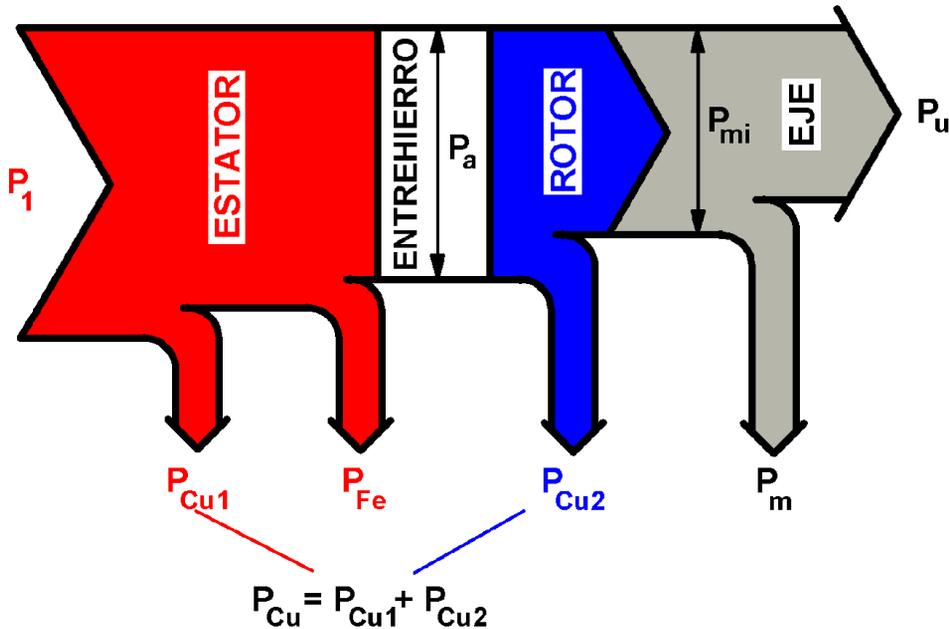


Fig. 13: Balance de potencias de un motor asíncrono

En este apartado se va a estudiar el balance de potencias de una máquina asíncrona polifásica actuando como motor. En consecuencia, en lo que sigue se adopta el criterio de signos de considerar positivas las potencias cuyo sentido sea el correspondiente al funcionamiento de la máquina como motor. Se supondrá que la máquina funciona con una marcha industrial (por lo tanto, el valor eficaz y la frecuencia de las tensiones de las fases del estator son constantes e iguales a sus valores asignados) y con un deslizamiento s pequeño. En este análisis se va a utilizar el circuito equivalente exacto de la Fig. 10.

En un motor la potencia fluye desde el estator hacia el rotor y el eje de la máquina (ver la Fig. 13), transformándose la energía eléctrica absorbida en el estator P_1 en potencia mecánica útil P_u en el eje.

La **potencia activa absorbida por el estator P_1** en función de los valores de fase de la tensión V_1 y de la corriente I_1 estatóricas, así como del factor de potencia $\cos \varphi_1$ y del número de fases m_1 del estator se obtiene así

$$P_1 = m_1 V_1 I_1 \cos \varphi_1 \quad (24)$$

Una vez en el estator, parte de esta potencia se pierde en forma de calor por efecto Joule en la resistencia R_1 de las fases del estator dando lugar a las **pérdidas en el cobre del estator P_{Cu1}**

$$P_{Cu1} = m_1 R_1 I_1^2 \quad (25)$$

En el estator existen otras pérdidas que se producen en su circuito magnético. Estas pérdidas son debidas a los fenómenos de la histéresis y de las corrientes de Foucault y se denominan pérdidas magnéticas o **pérdidas en el hierro P_{Fe}**

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

$$P_{Fe} = m_1 E_1 I_{Fe} \approx m_1 V_1 I_{Fe} \quad (26)$$

En principio también existen pérdidas en el hierro en el rotor. Pero, como se estudió en una lección anterior, las pérdidas magnéticas dependen aproximadamente del cuadrado de la frecuencia. Como la frecuencia f_2 de las corrientes del rotor es mucho más pequeña que la frecuencia f_1 del estator en condiciones normales de funcionamiento (deslizamientos pequeños), sucede que las pérdidas en el hierro del rotor son despreciables frente a las del estator. En consecuencia, en este texto se aceptará que la totalidad de las pérdidas en el hierro se producen en el estator.

Después de haberse producido las pérdidas en el cobre del estator y las pérdidas en el hierro, la potencia restante se transfiere del estator hacia el rotor a través del entrehierro. Esta potencia se la denomina **potencia en el entrehierro P_a** (Fig. 13):

$$P_a = P_1 - P_{Cu1} - P_{Fe} \quad (27)$$

De la potencia P_a que llega al rotor parte se pierde por efecto Joule en la resistencia R_2 de las fases del rotor dando lugar a las **pérdidas en el cobre del rotor P_{Cu2}**

$$P_{Cu2} = m_2 R_2 I_2^2 = m_1 R'_2 I_2^2 \quad (28)$$

La potencia restante es la potencia que se convierte de potencia electromagnética en potencia mecánica. Cuando esta potencia se ha convertido en mecánica se la denomina **potencia mecánica interna P_{mi}** y es la potencia que llega al eje de la máquina. Como ya se indicó anteriormente, esta es la potencia que en el circuito equivalente se consume en la resistencia de carga R'_c . Luego, teniendo en cuenta también la relación (20) se llega a

$$P_{mi} = m_1 R'_c I_2^2 = m_1 R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) I_2^2 = m_1 R'_2 \left(\frac{1-s}{s} \right) I_2^2 \quad (29)$$

Una pequeña parte de la potencia se pierde por rozamientos y ventilación; es decir, por las **pérdidas mecánicas P_m** . El resto es la **potencia útil P_u** del motor³:

$$P_u = P_{mi} - P_m \quad (30)$$

Muchas veces se desprecian las pérdidas mecánicas y se considera que la potencia mecánica interna P_{mi} es igual a la potencia útil P_u .

Teniendo en cuenta la Fig. 12 y las relaciones (21), (28) y (29) se llega a

$$P_a = P_{mi} + P_{Cu2} = m_1 (R'_c + R'_2) I_2^2 = m_1 \frac{R'_2}{s} I_2^2 \quad (31)$$

³ Además de las pérdidas citadas en este texto existen otras debidas a diferentes fenómenos y que se engloban bajo la denominación de **pérdidas adicionales**. Estas pérdidas habría que añadirlas junto a las pérdidas mecánicas P_m , aunque dado el nivel básico este texto no se las tiene en consideración.

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

De las relaciones (28), (29) y (31) se obtienen estas otras

$$P_{Cu2} = \frac{s}{1-s} P_{mi} = s P_a \quad (32)$$

$$P_a = \frac{P_{Cu2}}{s} = \frac{P_{mi}}{1-s} \quad (33)$$

Las relaciones obtenidas en este apartado se pueden recordar fácilmente a partir de la Fig. 13 y si se tiene en cuenta que en el circuito equivalente exacto de la Fig. 10:

- P_1 es la potencia total consumida en el circuito equivalente
- P_{Cu1} es la potencia perdida en la resistencia R_1
- P_{Fe} es la potencia disipada en la resistencia R_{Fe}
- P_a es la potencia gastada en la totalidad de las resistencias del rotor, es decir, en $R'_2 + R'_c = R'_2/s$
- P_{Cu2} es la potencia disipada en la resistencia R'_2
- P_{mi} es la potencia consumida en la resistencia R'_c

El **rendimiento** de un motor asíncrono es igual a este cociente

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{P_u}{P_u + P_f + P_v} \quad (34)$$

Funcionando a marcha industrial y con deslizamientos pequeños (por lo tanto, a velocidad casi constante), se tiene que:

$$\text{Pérdidas fijas:} \quad P_f = P_{Fe} + P_m \quad (35a)$$

$$\text{Pérdidas variables:} \quad P_v = P_{Cu} \quad (35b)$$

$$\text{donde las pérdidas en el cobre } P_{Cu} \text{ son:} \quad P_{Cu} = P_{Cu1} + P_{Cu2} \quad (36)$$

Por lo tanto, el cociente (34) se puede poner así

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_m + P_{Cu2} + P_{Fe} + P_{Cu1}} \quad (37)$$

PAR DE ROTACIÓN

Teniendo en cuenta que la constante $2\pi/60$ es el factor de conversión de r.p.m. a rad/s, el **par útil** M_u de un motor asíncrono se puede obtener así:

$$M_u = \frac{P_u}{\Omega} = \frac{P_u}{\frac{2\pi}{60} n} \quad (38)$$

El **par interno** M se obtiene de la potencia mecánica interna

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

$$M = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{P_{mi}}{\frac{2\pi}{60} n} \quad (39a)$$

Teniendo en cuenta las relaciones (2) y (33) se deduce que (39a) se puede convertir en

$$M = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{P_a}{\frac{2\pi}{60} n_1} \quad (39b)$$

Si se desprecian las pérdidas mecánicas se tiene que:

$$P_m \approx 0 \rightarrow P_u \approx P_{mi} \rightarrow M_u \approx M \quad (40)$$

Por lo tanto, en lo que sigue se va a analizar el par interno M que se supondrá prácticamente igual al par útil M_u .

Del circuito equivalente aproximado de la Fig. 12 y de la relación (23) se obtiene que

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{(R_{cc} + R'_c)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} \quad (41)$$

El denominador de la relación (41) es el módulo de la impedancia de la rama en serie del circuito equivalente aproximado (Fig. 12).

Combinando las expresiones (2), (29), (39) y (41) se obtiene la siguiente expresión del par de un motor asíncrono polifásico

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2\right)} \quad (42)$$

Esta expresión indica que, cuando la máquina funciona a tensión y frecuencia en el estator constantes, el par sólo varía en función del deslizamiento s ; es decir, el par varía solamente con la velocidad de giro del rotor.

En la Fig. 14 se representa la curva par-velocidad de una máquina asíncrona funcionando a tensión y frecuencia estáticas constantes. En el eje de abscisas se ha colocado una doble escala: por un lado se indica la velocidad y por el otro el deslizamiento correspondiente.

En esta curva se pueden distinguir tres modos de funcionamiento:

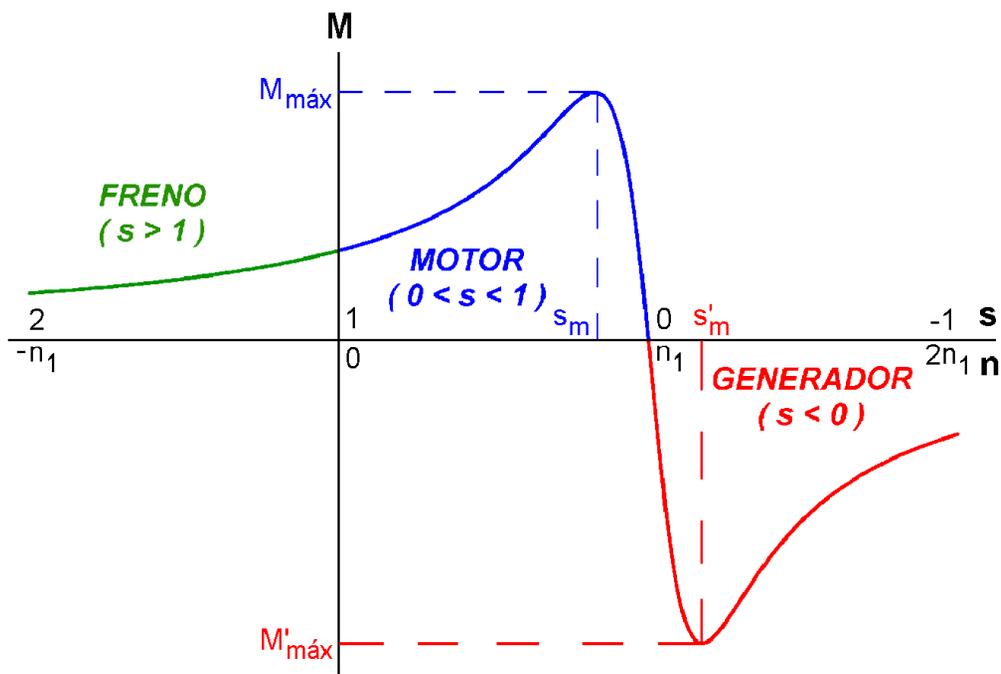


Fig. 14: Curva par-velocidad de una máquina asíncrona polifásica a V_1 y f_1 constantes

Motor

En este régimen de funcionamiento la velocidad n del motor varía entre 0 y la de sincronismo n_1 , lo que quiere decir que el deslizamiento s varía entre 1 y 0. Por lo tanto, funcionando como motor la velocidad de la máquina es del mismo sentido que la de sincronismo y de menor valor que ésta.

Al realizar el balance de potencias se adoptó el criterio de signos de suponer que las potencias son positivas cuando la máquina actúa como motor; luego en estas condiciones tanto P_a como P_{mi} son positivas. Por lo tanto, en un motor asíncrono la máquina absorbe potencia eléctrica por el estator para convertirla en potencia mecánica en su eje.

En este caso tanto el par como la velocidad tienen signo positivo. Por lo tanto, el par está a favor de la velocidad y se trata de un par motor. Es este par el que provoca el giro de la máquina.

Generador

En este régimen de funcionamiento la velocidad n del motor es superior a la de sincronismo n_1 , lo que quiere decir que el deslizamiento s es negativo. Por lo tanto, funcionando como generador la velocidad de la máquina es del mismo sentido que la de sincronismo y de mayor valor que ésta.

Al ser el deslizamiento s negativo se obtiene que tanto R'_c como $R'_c + R'_2 = R'_2/s$ son negativos. Esto da lugar a que la potencia mecánica interna P_{mi} y la potencia en el entrehierro P_a sean negativas; lo cual significa que el sentido de estas potencias es el opuesto al del funcionamiento como motor. En consecuencia, en un generador de inducción la máquina absorbe potencia mecánica en su eje para convertirla en potencia eléctrica (potencia activa) que se suministra a la red conectada al estator.

En este caso el par es negativo y la velocidad es positiva. Por lo tanto, el par de la máquina de inducción se opone a la velocidad y se trata de un par de frenado. Deberá existir otro par, por ejemplo el producido por un motor de gasolina acoplado al mismo eje que la máquina asíncrona, que mueva al grupo y sea el que lo esté obligando a girar a una velocidad superior a la de sincronismo.

Freno a contracorriente

En este régimen de funcionamiento la velocidad n del motor es negativa, de sentido contrario a la de sincronismo n_1 , lo que quiere decir que el deslizamiento s es mayor que 1.

Al ser el deslizamiento s mayor que 1 se obtiene que R'_c es negativo; sin embargo la resistencia $R'_c + R'_2 = R'_2/s$ es positiva. Esto da lugar a que la potencia mecánica interna P_{mi} sea negativa y que la potencia en el entrehierro P_a sea positiva. Por lo tanto, en el entrehierro el flujo de potencia es igual que en un motor (P_a es positiva), del estator hacia el rotor; pero, la potencia mecánica interna P_{mi} es de signo contrario a la de funcionamiento como motor (P_{mi} negativa), entra por el eje y se dirige hacia el rotor. En consecuencia, funcionando como freno a contracorriente una máquina asíncrona absorbe potencia eléctrica por el estator y potencia mecánica por su eje. La totalidad de la suma de estas dos potencias absorbidas se disipa en forma de calor entre todas las pérdidas de la máquina, la cual se puede llegar a calentar excesivamente.

En este caso el par es positivo y la velocidad negativa. Por lo tanto, el par de la máquina de inducción se opone a la velocidad y se trata de un par de frenado que se opone a su movimiento.

Los valores máximos de la curva par-velocidad de la Fig. 14 se obtienen igualando a cero la derivada de la expresión (42) con respecto al deslizamiento s . Se obtiene que los pares máximos se producen para estos valores de deslizamiento

$$s_m = \pm \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \tag{43}$$

El valor positivo de la fórmula (43) corresponde a la máquina actuando como motor (s_m en la Fig. 14), mientras que el valor negativo corresponde a funcionamiento como generador (s'_m en la Fig. 14).

Sustituyendo (43) en (42) se obtiene que la máquina tiene dos pares máximos, uno cuando actúa como motor y otro cuando funciona como generador:

$$M_{m\acute{a}x} = \pm \frac{m_1}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{2 \left(\pm R_1 + \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2} \right)} \tag{44}$$

En la relación anterior el signo + corresponde al par máximo en el funcionamiento como motor ($M_{m\acute{a}x}$ en la Fig. 14) y el signo - al par máximo en el funcionamiento como generador ($M'_{m\acute{a}x}$ en la Fig. 14). Se puede apreciar que estos dos pares tienen valores absolutos ligeramente diferentes, siendo mayor el correspondiente al funcionamiento como generador (porque entonces el denominador de (44) es menor).

PARES: FÓRMULA DE KLOSS

Fórmula de Kloss:
$$\frac{M}{M_{m\acute{a}x}} = \frac{2(1 + a s_m)}{\frac{s}{s_m} + 2a s_m + \frac{s_m}{s}} \quad (a = \frac{R_1}{R'_2})$$

Para **motores grandes**: $R_1 \lll R'_2 \rightarrow a = \frac{R_1}{R'_2} \approx 0$, luego:
$$\frac{M}{M_{m\acute{a}x}} = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}}$$

- Para deslizamientos pequeños ($s \ll s_m \rightarrow \frac{s_m}{s} \gg \frac{s}{s_m}$):

$$\frac{M}{M_{m\acute{a}x}} = \frac{2}{\frac{s_m}{s}} \rightarrow \frac{M}{M_{m\acute{a}x}} = \frac{2s}{s_m} \rightarrow M = \frac{2M_{m\acute{a}x}}{s_m} s \quad (\text{Relación lineal entre } M \text{ y } s)$$

- Para deslizamientos grandes ($s \gg s_m \rightarrow \frac{s}{s_m} \gg \frac{s_m}{s}$):

$$\frac{M}{M_{m\acute{a}x}} = \frac{2}{\frac{s}{s_m}} \rightarrow \frac{M}{M_{m\acute{a}x}} = \frac{2s_m}{s} \rightarrow M = \frac{2s_m M_{m\acute{a}x}}{s} \quad (\text{Relación hipérbolica entre } M \text{ y } s)$$

CURVA PAR-VELOCIDAD DE UN MOTOR ASÍNCRONO POLIFÁSICO

Puntos notables

En la Fig. 15 se muestra la zona de la curva par-velocidad de una máquina de inducción (Fig. 14) correspondiente al funcionamiento como motor.

En esta curva se aprecia que el punto de par nulo se produce a la velocidad de sincronismo (deslizamiento nulo). Esto es así porque esta curva se refiere al par interno. El par útil nulo se produce para una velocidad ligeramente inferior a la de sincronismo porque entonces el par interno no es exactamente nulo, sino muy pequeño pues debe vencer el par debido a rozamientos y ventilación.

En el momento de arrancar un motor su velocidad todavía es nula y su deslizamiento es, pues, igual a 1. Por lo tanto, en la Fig. 15 el punto de corte de la curva con el eje de ordenadas corresponde al **par de arranque M_a** . Este par se puede calcular mediante la expresión general del par (42) dándole al deslizamiento s el valor 1.

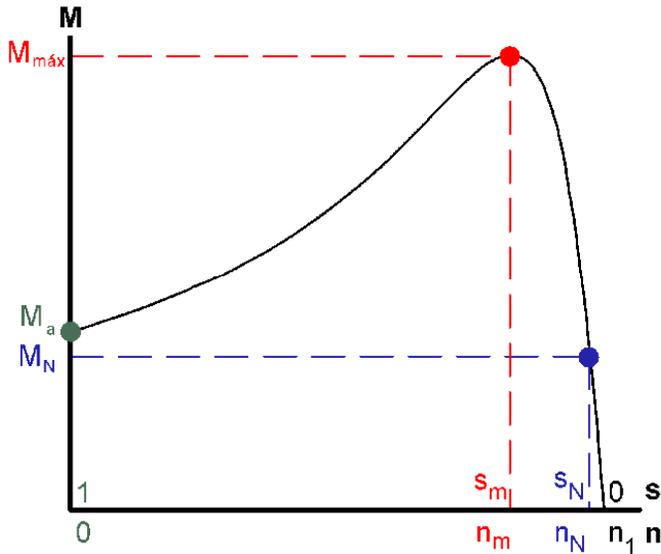


Fig. 15: Curva par-velocidad de un motor asincrono polifásico a V_1 y f_1 constantes

En la Fig. 15 se han representado también los puntos correspondientes al **par máximo** $M_{máx}$ y al **par asignado** M_N . El par máximo viene dado por la relación (44) y se produce para el deslizamiento s_m dado por (43). s_m suele tomar valores entre el 15% y el 30%. El par asignado se puede calcular mediante (42) dando al deslizamiento el valor s_N de la marcha asignada. s_N suele tomar valores entre el 3% y el 8%.

Se denomina **capacidad de sobrecarga** a este cociente

$$\text{Capacidad de sobrecarga} = \frac{M_{máx}}{M_N} \quad (45)$$

cuyo valor en motores normales varía entre 1,8 y 2,7. En motores especiales alcanza valores superiores a 3.

El cociente M_a/M_N usualmente toma valores entre 1 y 2.

Punto de funcionamiento. Estabilidad

Cuando un motor asincrono mueve una carga mecánica en régimen permanente se establece un equilibrio entre el par motor M proporcionado por la máquina asincrona y el par resistente M_r de la carga. Por lo tanto, el sistema motor-carga funciona en un punto en el que se verifica la siguiente igualdad

$$\text{Punto de funcionamiento: } M = M_r \quad (46)$$

En la Fig. 16 se ha representado sobre los mismos ejes de coordenadas las curvas par - velocidad del motor y de la carga. El punto de funcionamiento del sistema (P en la Fig. 16) será el punto de corte de ambas curvas.

En algunos casos las curvas de par del motor y de la carga se cortan en dos puntos situados uno a la derecha del punto de par máximo y el otro a la izquierda. En la Fig. 17 está representada esta situación.

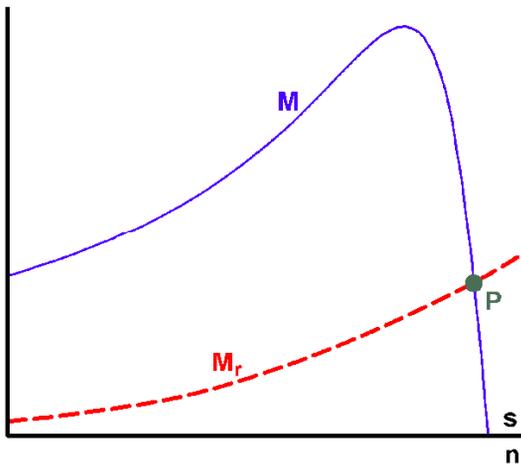


Fig. 16: Punto de funcionamiento

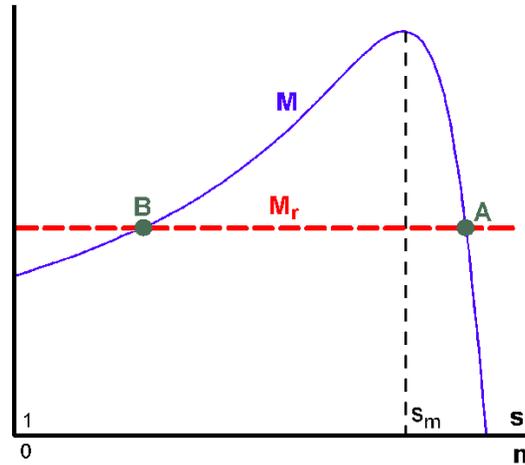


Fig. 17: Estabilidad

Se demuestra que el punto con un deslizamiento superior al par máximo (B en la Fig. 17) está en una situación inestable, mientras el que tiene un deslizamiento inferior a s_m (punto A en la Fig. 17) es estable. Por lo tanto, en el caso representado en la Fig. 17 el punto de funcionamiento del sistema será el A.

En general, salvo casos excepcionales, un motor asíncrono funciona en la zona de la curva par-velocidad con deslizamientos pequeños, inferiores a s_m . Realmente, lo normal es que no se sobrepase el par asignado con lo que se funciona con deslizamientos aún más pequeños, iguales o inferiores al deslizamiento asignado s_N .

La curva par-velocidad para deslizamientos pequeños es dura o rígida, lo que quiere decir que la velocidad varía muy poco con el par. Esta zona de la curva prácticamente es lineal variando el par M del motor proporcionalmente al deslizamiento s.

Efectos de variar V_1 y de introducir resistencias en serie con el rotor

A partir de las relaciones (42), (43) y (44) se aprecia que cuando se modifica el valor eficaz de la tensión del estator V_1 sin variar la frecuencia f_1 , el valor del deslizamiento de par máximo s_m no cambia pero el par de la máquina queda modificado en función del cuadrado de V_1 .

En la Fig. 18 se muestra como se modifica la curva par-velocidad de un motor cuando la tensión del estator se reduce de V_{1a} a V_{1b} . Para ambas tensiones el punto de par máximo se produce con el mismo deslizamiento s_m pero el par máximo varía con el cuadrado de la tensión.

El efecto de añadir en serie con cada fase del rotor una resistencia R_x es equivalente a considerar en las expresiones (42), (43) y (44) que la resistencia R_2 ha aumentado. Evidentemente, sólo es posible añadir resistencias en serie con el rotor en los motores de anillos, ya que en los de jaula de ardilla no es posible acceder al devanado del rotor para conectarle resistencias.

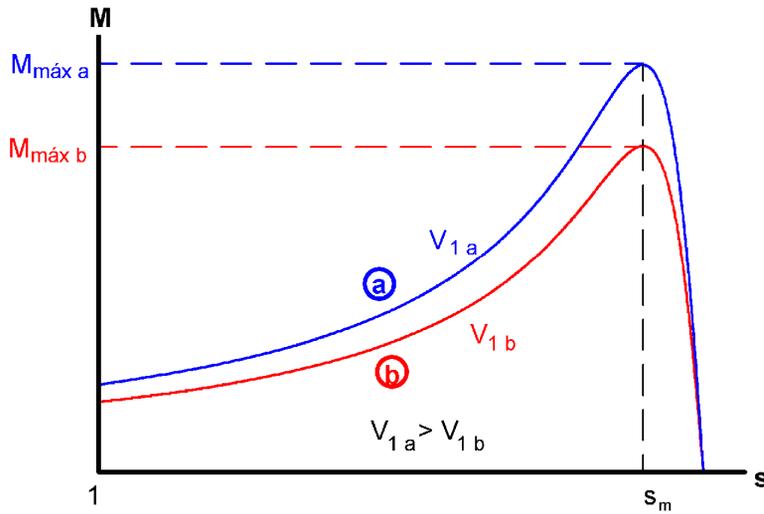


Fig. 18: Efectos de variar V_1

Teniendo en cuenta todo esto, la expresión (44) indica que el par máximo no se ve modificado por añadir resistencias en serie con el rotor, pues en esta relación no interviene el parámetro R'_2 . Por el contrario, la expresión (43) señala que el añadir resistencias en serie con el rotor; o lo que es equivalente, el aumentar la resistencia R'_2 , aumenta el deslizamiento de par máximo s_m .

En la Fig. 19 se muestra el efecto que sobre la curva par-velocidad tiene el introducir resistencias en serie con el rotor. La curva (a) corresponde al funcionamiento con el rotor en cortocircuito ($R_{xa} = 0$) y las curvas (b) y (c) corresponden al funcionamiento cuando se han introducido resistencias en serie con las fases del rotor ($R_{xc} > R_{xb}$). En esta figura se aprecia como el par máximo es el mismo en todas las curvas, pero el deslizamiento de par máximo va aumentando (luego la velocidad de par máximo va disminuyendo) a medida que aumenta el valor de las resistencias puestas en serie con las fases del rotor.

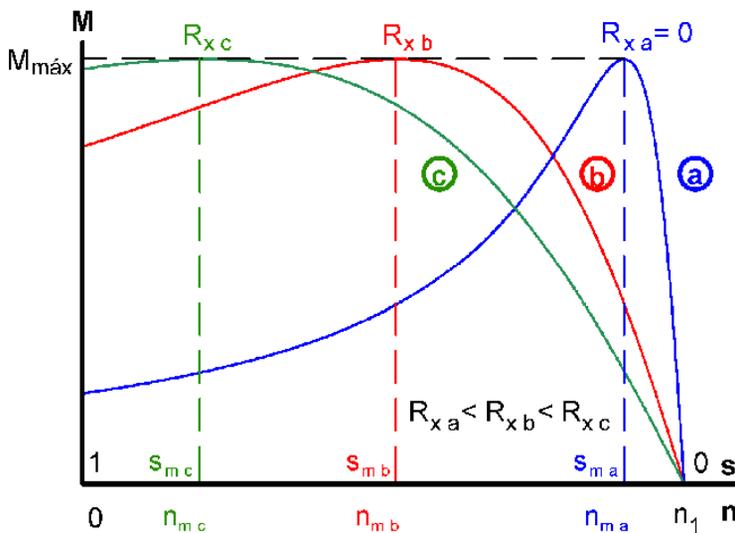


Fig. 19: Efectos de introducir resistencias en serie con las fases del rotor

La Fig. 20 muestra que existe un valor especial R_{adic} de las resistencias R_x puestas en serie con las fases del rotor que consigue que el par máximo se produzca en el arranque.

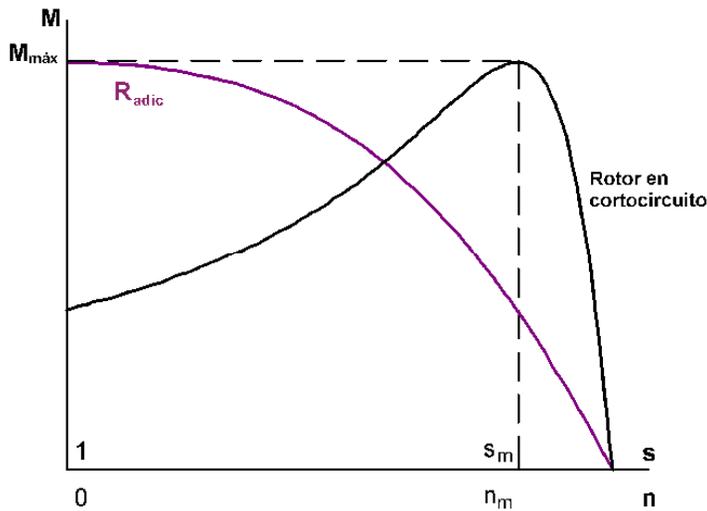


Fig. 20: Obtención del par máximo en el arranque mediante resistencias en serie con el rotor

Para calcular el valor de R_{adic} se tiene en cuenta que con ella el deslizamiento de par máximo s_m pasa a ser 1:

$$s_m = 1 = \frac{R'_2 + R'_{adic}}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \rightarrow R'_{adic} = \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2} - R'_2 \quad (47)$$

Por analogía con las relaciones (18), el valor real de esta resistencia se obtiene de su valor reducido al estator así:

$$R_{adic} = \frac{R'_{adic}}{m_v m_i} = \frac{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2} - R'_2}{m_v m_i} \quad (48)$$

ARRANQUE

El arranque es el proceso de puesta en marcha de un motor que lo lleva desde una velocidad nula a la del punto de funcionamiento estable que corresponda al par resistente de la carga que tiene que mover.

Para que pueda realizarse esta maniobra debe cumplirse la **condición de arranque**: durante el arranque el par del motor debe ser superior al par resistente. De no cumplirse esta condición, el par motor es insuficiente para mover la carga mecánica que tiene acoplada y no se puede producir el arranque.

En el instante de iniciar el arranque, cuando la velocidad todavía es nula y el deslizamiento entonces vale 1, la corriente que demanda el motor es elevada, varias veces superior a la asignada. Esto se puede comprobar en el circuito equivalente aproximado de la Fig. 12 y en la ecuación (41) deducida de él, si se tiene presente que el deslizamiento en el arranque es igual a 1 mientras que marcha asignada es pequeño (no más de 0,08).

Esta corriente elevada puede provocar caídas de tensión en la instalación eléctrica a la que está conectado el motor afectando a otros aparatos conectados a ella. Por esta razón existen normas que establecen las máximas corrientes de arranque permitidas (en Baja

Tensión estos límites vienen fijados en función de la potencia útil del motor en la instrucción ITC-BT-47 del Reglamento Electrotécnico de Baja Tensión).

Esto obliga a utilizar en muchas ocasiones procedimientos que reduzcan la corriente de arranque con respecto a la del arranque directo.

Arranque directo

Este método de arranque es el más sencillo y se emplea en motores de pequeña potencia (o en motores grandes si están conectados a una red eléctrica independiente de tal manera que su corriente de arranque no afecte a otros consumidores). Consiste en arrancar el motor conectándolo a su tensión asignada.

Como la corriente de arranque directo es varias veces superior a la asignada (entre 4 y 8 veces la intensidad asignada), en este caso sí que se puede despreciar la corriente de vacío y aceptar (por la ecuación (19a)) que la corriente del estator es igual a la del rotor reducido al estator. Esta corriente de arranque se puede obtener entonces de la relación (41) en la que se le da a la tensión de fase V_1 el valor asignado V_{1N} y al deslizamiento s el valor 1.

$$I_a = I'_{2a} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}} \quad (49)$$

En un motor trifásico la corriente de línea de arranque directo I_{aL} se deduce de la de fase I_a teniendo en cuenta la forma de conexión de las fases del estator:

$$\text{Estrella: } I_{aL} = I_a \quad (50a)$$

$$\text{Triángulo: } I_{aL} = \sqrt{3} \cdot I_a \quad (50b)$$

El par de arranque directo se le denomina M_a y se puede obtener mediante la ecuación (42) dando a la tensión de fase V_1 el valor asignado V_{1N} y al deslizamiento s el valor 1.

Arranques con tensión reducida

Existen varios procedimientos de arranque que consisten en alimentar al motor con una tensión inferior a la asignada en el momento del arranque para después, cuando el rotor ya está girando, ir la aumentando hasta alcanzar su valor asignado.

De esta manera, al tener en el arranque una tensión inferior a la asignada la corriente de arranque disminuye, pero también el par de arranque como se puede apreciar en las Figs. 18 y 21 (el par de arranque es proporcional al cuadrado de la tensión V_1). Esto hay que tenerlo en cuenta y comprobar que el par de arranque del motor a tensión reducida es suficientemente grande como para que se cumpla la condición de arranque. Por esta razón, estos procedimientos de arranque sólo se pueden utilizar si el motor se arranca sin carga o con cargas mecánicas que no ejerzan un par resistente elevado a bajas velocidades.

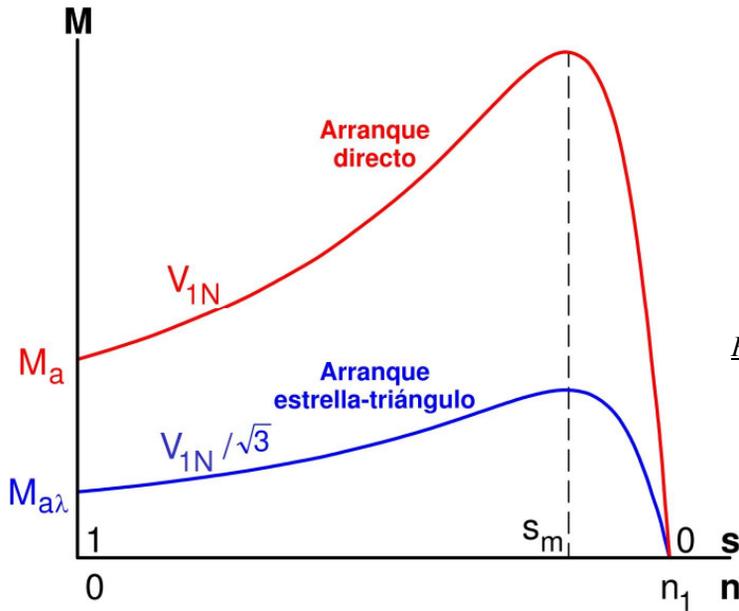


Fig. 21: Curvas par-velocidad a la tensión asignada y con tensión reducida (por medio del arranque estrella-triángulo)

Para conseguir reducir la tensión durante el arranque se pueden emplear varios métodos: un autotransformador, un arrancador electrónico, conectar impedancias en serie con el estator, ... En los motores trifásicos uno de los más empleados es el **arranque estrella-triángulo**.

El arranque estrella-triángulo sólo se puede utilizar si el motor está conectado a una red eléctrica cuya tensión de línea sea igual a la tensión asignada de fase del motor. Esto obliga a que para que el motor funcione a su tensión asignada deba conectarse en triángulo:

$$V_{IL} = V_{IN} \rightarrow \text{Conexión triángulo para que: } V_1 = V_{IN} \quad (51)$$

En este caso el arranque se realiza con el motor conectado en estrella. Cuando el motor ha adquirido cierta velocidad se conmutan las conexiones y se lo conecta en triángulo para que pase a funcionar con su tensión asignada.

Al arrancar en estrella, la tensión de fase del motor ya no es la asignada sino $\sqrt{3}$ veces menor:

$$V_{IL} = V_{IN} \rightarrow \text{Conexión estrella para que: } V_1 = \frac{V_{IL}}{\sqrt{3}} = \frac{V_{IN}}{\sqrt{3}} \quad (52)$$

Esto provoca que la corriente de fase en este arranque sea $\sqrt{3}$ veces menor que en el arranque directo. En consecuencia, tanto la corriente de línea en el arranque estrella-triángulo $I_{a\lambda}$ como el par de arranque correspondiente $M_{a\lambda}$ son iguales a la tercera parte de sus respectivos valores en el arranque directo (ver la Fig. 21):

$$\boxed{I_{a\lambda} = \frac{I_{aL}}{3}} ; \quad \boxed{M_{a\lambda} = \frac{M_a}{3}} \quad (53)$$

Arranque por introducción de resistencias en serie con el rotor

Este sistema de arranque sólo se puede utilizar en motores de rotor bobinado y consiste en conectar una resistencia en serie con cada fase del rotor. Una vez arrancado el motor, se van disminuyendo progresivamente estas resistencias hasta que el rotor queda cortocircuitado.

Con este sistema se reduce la intensidad de arranque (se aumenta el denominador en la relación (41)) y se aumenta el deslizamiento en el que se produce el par máximo, pero sin que éste varíe (Figs. 19 y 20); lo que origina el aumento del par de arranque con respecto al del arranque directo. Incluso se puede obtener el par máximo en el arranque para la resistencia R_{adic} conectada en serie con el rotor, cuyo valor viene dado por la expresión (48).

REGULACIÓN DE VELOCIDAD

De las fórmulas de la velocidad de sincronismo (1) y del deslizamiento (2) se deduce que:

$$n = n_1 (1 - s) = \frac{60 f_1}{p} (1 - s) \quad (54)$$

Esto indica que se puede regular la velocidad de un motor asíncrono modificando su número de polos, la frecuencia del estator o el deslizamiento.

La **regulación por variación del número de polos** únicamente permite alcanzar unos pocos valores de velocidad diferentes, ya que el número de pares de polos p sólo puede adoptar valores enteros y, en consecuencia, no se puede variar de forma continua. Se utiliza en máquinas de jaula de ardilla que en el estator disponen, bien de dos devanados independientes, cada uno de ellos con un número de polos diferente; o bien de un devanado especial que admite diferentes formas de conexión para modificar su número de polos.

La **regulación por variación del deslizamiento** se puede realizar de diversas maneras, como variando la tensión de alimentación o introduciendo resistencias en serie con las fases del rotor (sólo en los motores de rotor bobinado). Estos sistemas de regulación son muy sencillos de realizar, pero son muy poco eficientes, pues al aumentar el deslizamiento aumentan las pérdidas en el rotor.

Otro sistema de variación del deslizamiento para motores de rotor bobinado consiste en conectar el rotor a un variador de frecuencias (es decir, a una fuente de tensión que permite variar electrónicamente el valor eficaz y la frecuencia de las tensiones que suministra). Este sistema es mucho más eficiente que los anteriores porque permite recuperar la energía de deslizamiento reinyectándola a la red.

La **regulación por variación de la frecuencia** consiste en variar la frecuencia f_1 de las corrientes del estator con lo que se modifica la velocidad de sincronismo n_1 de la máquina. Para ello se alimenta el estator a través de un variador de frecuencias.

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

Este sistema permite variar la velocidad de forma continua entre un amplio margen de velocidades. Para frecuencias f_1 por debajo de la asignada interesa variar la tensión V_1 del estator en función de la frecuencia de forma que el flujo por polo Φ_M sea el mismo para todas las frecuencias. De esta manera se consigue que para todas las frecuencias el par que suministra la máquina a la corriente asignada sea el mismo (el par asignado) y que también a todas las frecuencias el par máximo sea el mismo (Fig. 22). Para frecuencias f_1 por encima de la asignada no se puede mantener el flujo por polo Φ_M constante porque entonces la f.e.m. E_1 sería mayor que en condiciones asignadas (según se aprecia en la ecuación (7)), lo que conllevaría que la tensión en el estator fuera superior a la asignada. Por lo tanto, para frecuencias por encima de la asignada se mantiene el valor eficaz de las tensiones del estator igual al asignado.

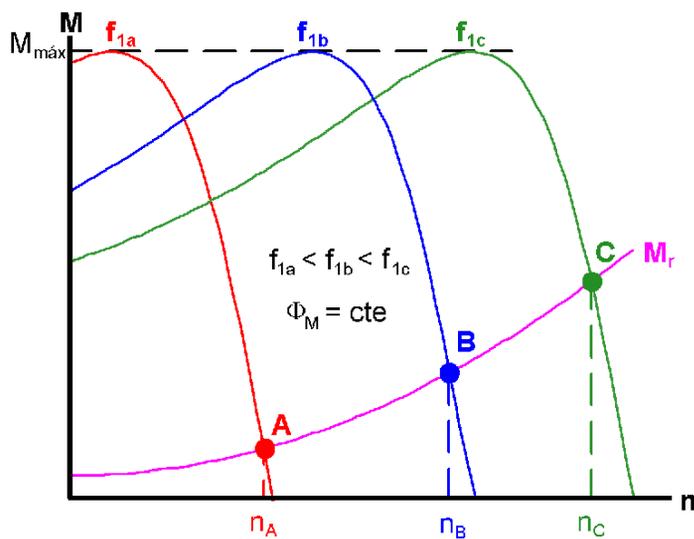


Fig. 22: Regulación de la velocidad por variación de la frecuencia f_1 manteniendo el flujo por polo Φ_M constante ($f_{1c} = f_{1N}$)

BIBLIOGRAFÍA

- [1] AENOR. 1997. *UNE 60034-2: Máquinas eléctricas rotativas. Parte 2: Métodos para la determinación de las pérdidas y del rendimiento de las máquinas eléctricas rotativas a partir de los ensayos (excepto las máquinas para vehículos de tracción)*. Madrid: AENOR.
- [2] CHAPMAN. 2005. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [3] CORTES. 1977. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. Tomo 3: Máquinas de c.a. asíncronas*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [4] FAURE BENITO. 2000. *Máquinas y accionamientos eléctricos*. Madrid: Colegio oficial de ingenieros navales y oceánicos.
- [5] FITZGERALD, KINGSLEY Y UMANS. 2004. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [6] FRAILE MORA, J. 2008. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [7] GURRUTXAGA, J. A. 1985. *El fenómeno electromagnético. Tomo IV. Las máquinas eléctricas II*. Santander: Dpto. de publicaciones de la E.T.S.I.C.C.P. de Santander.
- [8] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas. Tomo 2*. Moscú: Editorial Mir.
- [9] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas. Tomo II*. Moscú: Editorial Mir.
- [10] LANGSDORF. 1977. *Teoría de las máquinas de c.a.* Méjico: McGraw-Hill.
- [11] SANZ FEITO. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Educación.
- [12] SERRANO IRIBARNEGARAY. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA



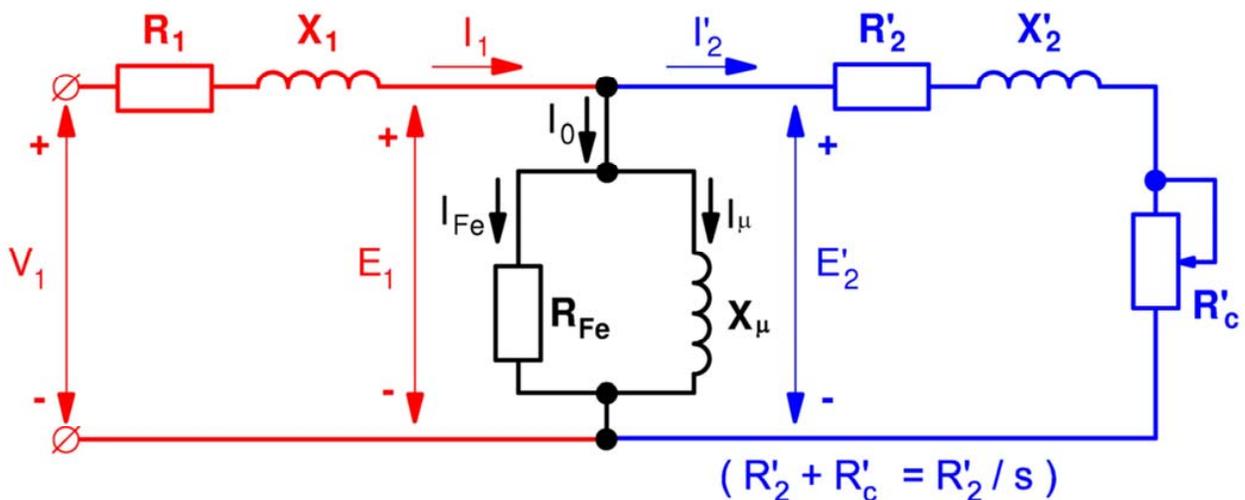
MÁQUINA ASÍNCRONA:
CIRCUITOS EQUIVALENTES
SIMPLIFICADOS.
OTROS PARES

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

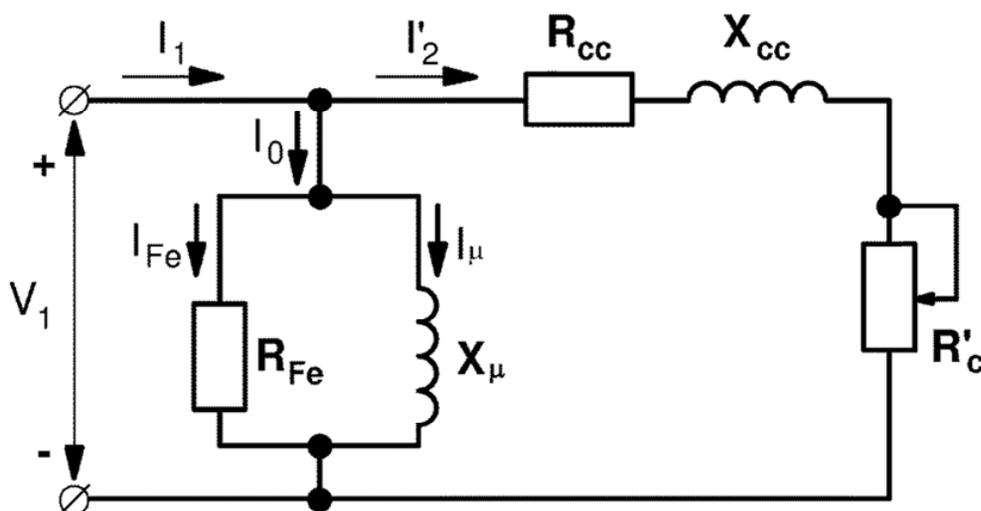
Doctor Ingeniero Industrial

CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS PRESENTACIÓN

La corriente de vacío de un motor asíncrono es mucho mayor que la de un transformador de tamaño similar. Esto es debido a que su componente I_μ debe ser grande porque su circuito magnético tiene entrehierros. Esto hace que en el circuito equivalente aproximado empleado hasta ahora, el cálculo de la corriente del rotor I'_2 (que se utiliza para obtener las fórmulas del par M) tenga un cierto error. Vamos a buscar circuitos equivalentes simplificados que den menos error en el cálculo de I'_2 .



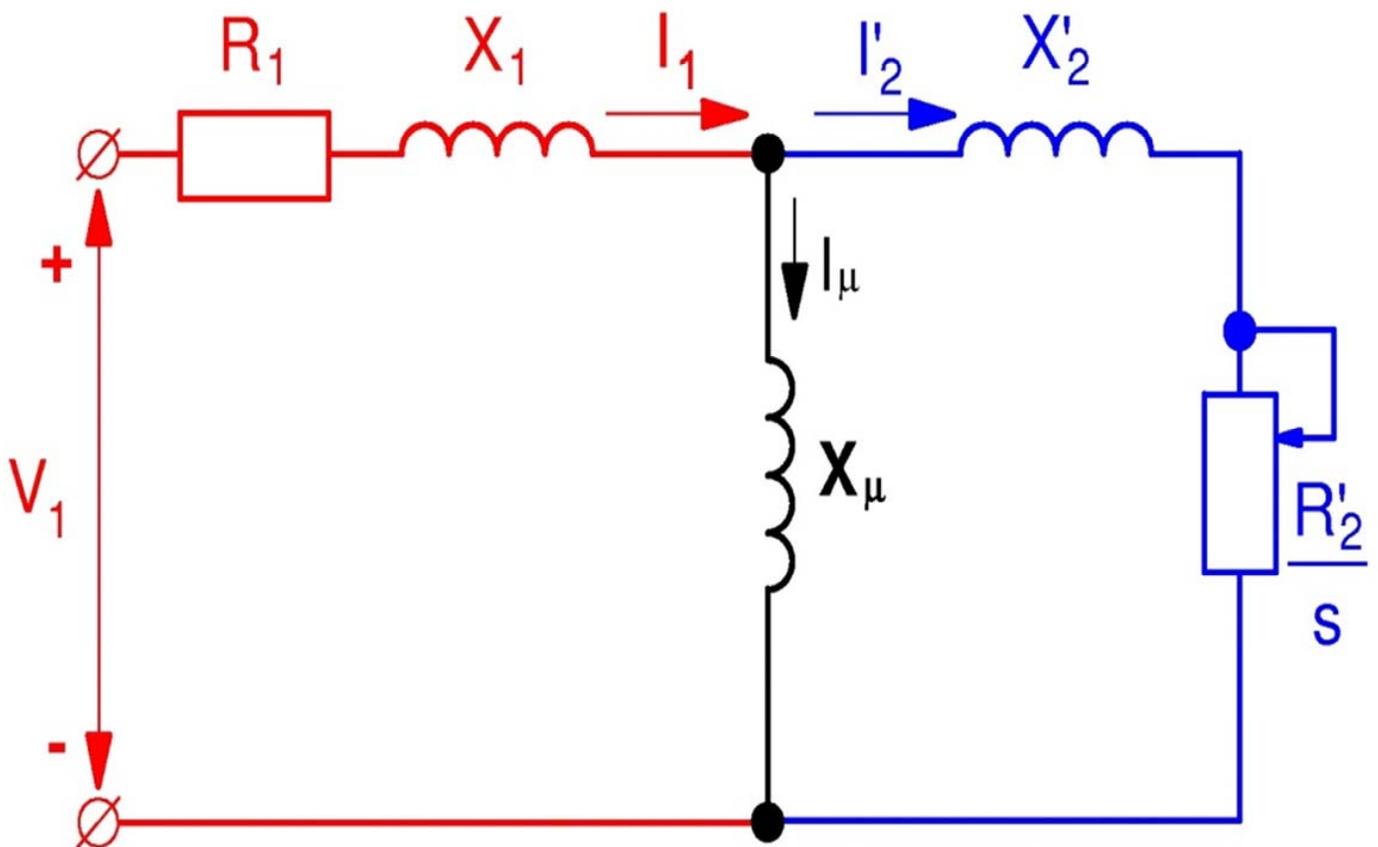
Circuito equivalente exacto



Circuito equivalente aproximado

CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS**CIRCUITO EQUIVALENTE EXACTO SIN R_{Fe}**

En una máquina asíncrona $I_{\mu} \gg I_{Fe}$ por lo que no se cometerá mucho error en el cálculo de la corriente I'_2 si se desprecia I_{Fe} frente a I_{μ} y se parte de un circuito equivalente en el que se ha quitado la resistencia R_{Fe} al circuito equivalente exacto:



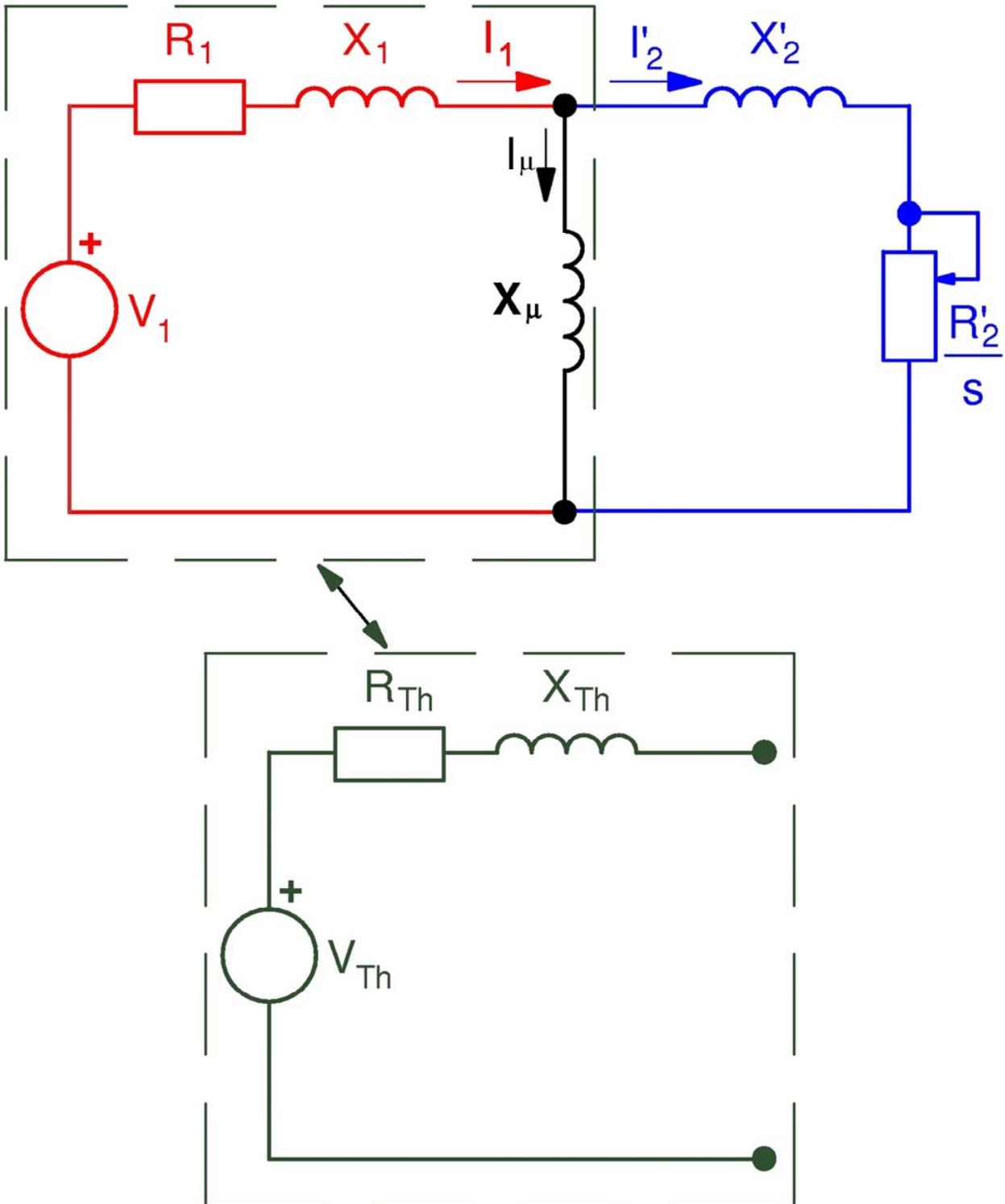
Circuito equivalente en el que se ha suprimido la resistencia R_{Fe} al circuito equivalente exacto

En este circuito se ha reunido en la resistencia R'_2/s al conjunto de R'_2 y R'_c :

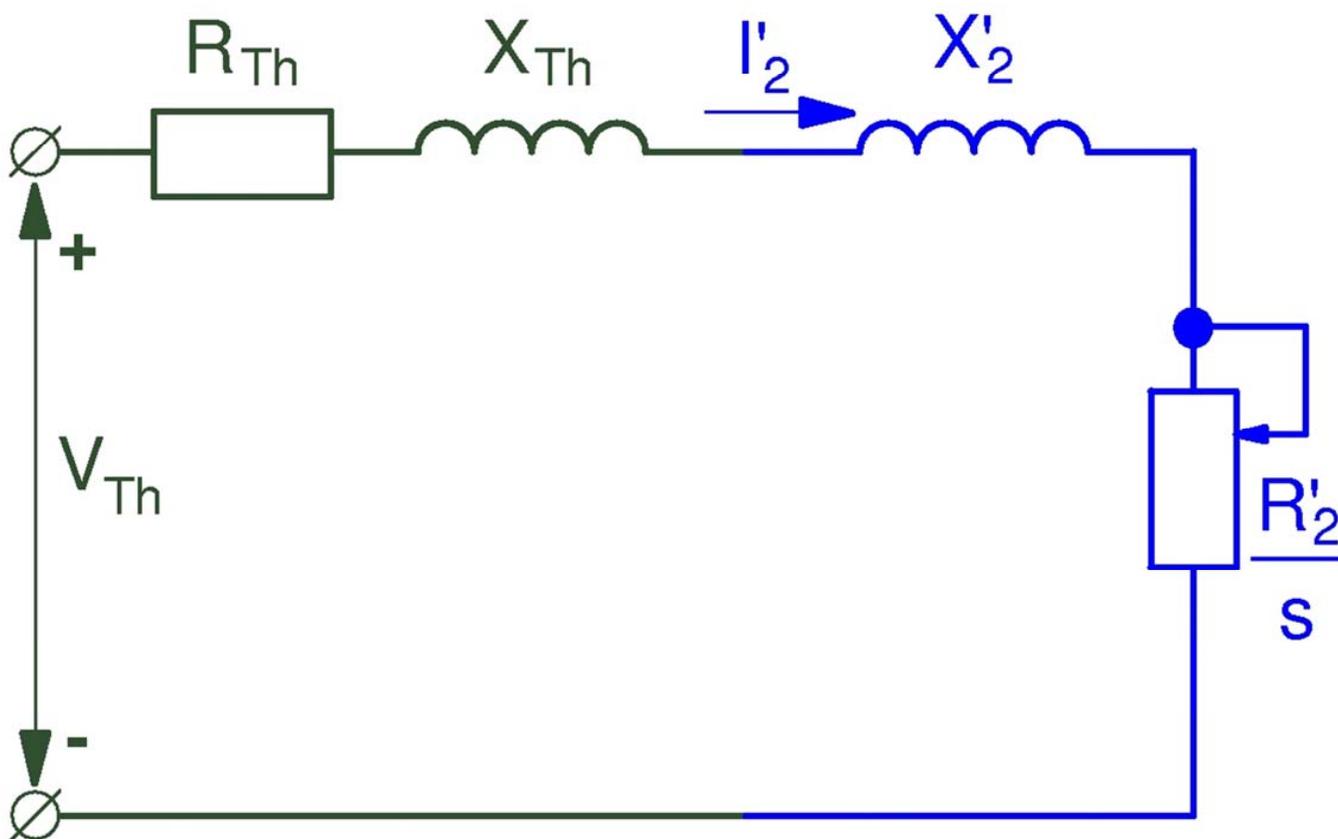
$$R'_2 + R'_c = R'_2 + R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = \frac{R'_2}{s}$$

CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS

CIRCUITO EQUIVALENTE SERIE (1)



Mediante el equivalente de Thevenin del conjunto de la impedancia estator y de la reactancia magnetizante se obtiene un circuito equivalente simplificado con una sola rama con resistencias y reactancias en serie.

CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS**CIRCUITO EQUIVALENTE SERIE (2)**

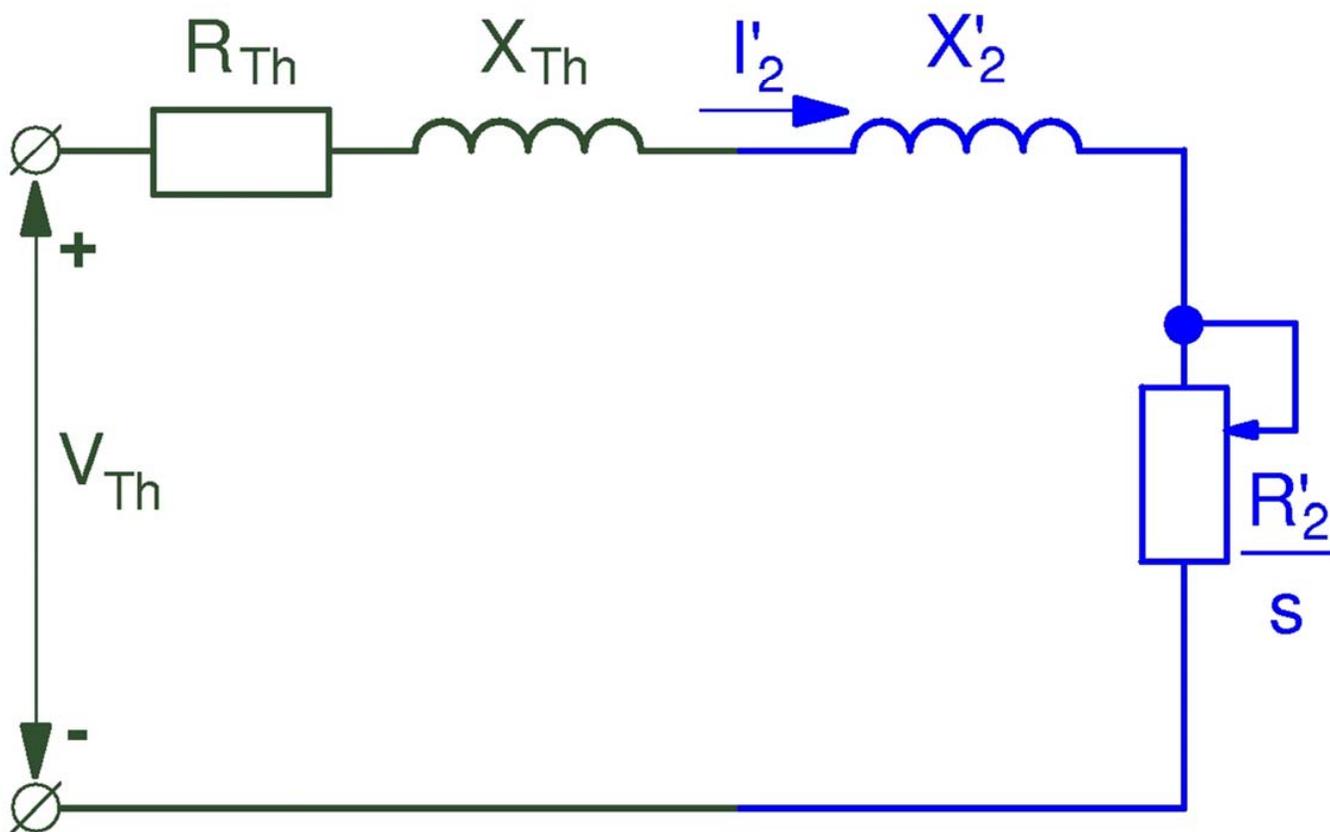
Llamaremos c_1 a:

$$c_1 = 1 + \frac{X_1}{X_\mu}$$

Tensión de Thevenin

$$\bar{V}_{Th} = \bar{V}_1 \frac{j X_\mu}{(R_1 + j X_1) + j X_\mu} \approx \bar{V}_1 \frac{j X_\mu}{j (X_1 + X_\mu)}$$

$$\bar{V}_{Th} \approx \bar{V}_1 \frac{X_\mu}{(X_1 + X_\mu)} \rightarrow \boxed{\bar{V}_{Th} = \frac{\bar{V}_1}{c_1}}$$

CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS**CIRCUITO EQUIVALENTE SERIE (3)**

$$c_1 = 1 + \frac{X_1}{X_\mu} \quad \bar{Z}_1 = R_1 + jX_1$$

Impedancia de Thevenin

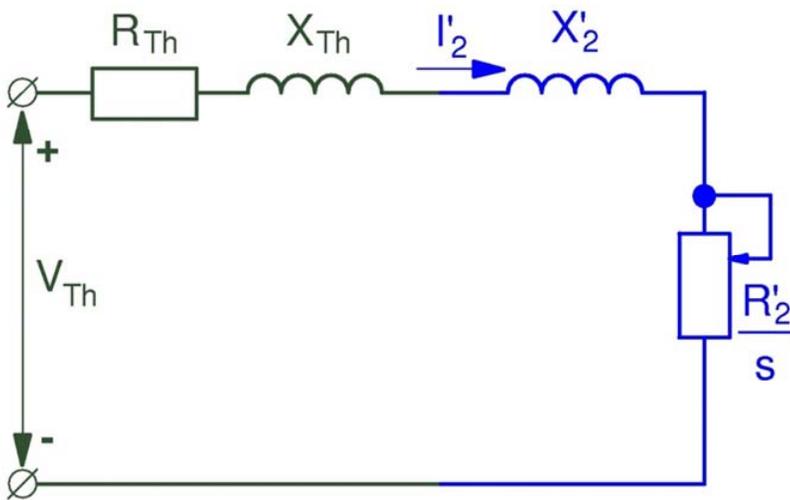
$$\frac{1}{\bar{Z}_{Th}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{jX_\mu} \rightarrow \bar{Z}_{Th} = \frac{jX_\mu (R_1 + jX_1)}{R_1 + j(X_1 + X_\mu)}$$

$$\bar{Z}_{Th} \approx \frac{jX_\mu (R_1 + jX_1)}{j(X_1 + X_\mu)} \rightarrow \boxed{\bar{Z}_{Th} = \frac{\bar{Z}_1}{c_1}}$$

$$R_{Th} = \frac{R_1}{c_1} \quad X_{Th} = \frac{X_1}{c_1}$$

CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS

CIRCUITO EQUIVALENTE SERIE (4)



$$c_1 = 1 + \frac{X_1}{X_\mu}$$

$$\bar{V}_{Th} = \frac{\bar{V}_1}{c_1}$$

$$R_{Th} = \frac{R_1}{c_1}; \quad X_{Th} = \frac{X_1}{c_1}$$

En este circuito equivalente el valor eficaz I'_2 de la **corriente del rotor** reducida al estator se calcula de una manera más exacta que mediante el circuito aproximado:

$$(I'_2)^2 = \frac{V_{Th}^2}{\left(R_{Th} + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X_{Th} + X'_2)^2}$$

$$(I'_2)^2 = \frac{\left(\frac{V_1}{c_1}\right)^2}{\left(\frac{R_1}{c_1} + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + \left(\frac{X_1}{c_1} + X'_2\right)^2}$$

$$(I'_2)^2 = \frac{V_1^2}{\left(R_1 + c_1 \frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X_1 + c_1 X'_2)^2}$$

CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS **CIRCUITO EQUIVALENTE SERIE (5)**

Fórmulas del par mejoradas

Usando el valor de I'_2 obtenido del circuito equivalente serie:

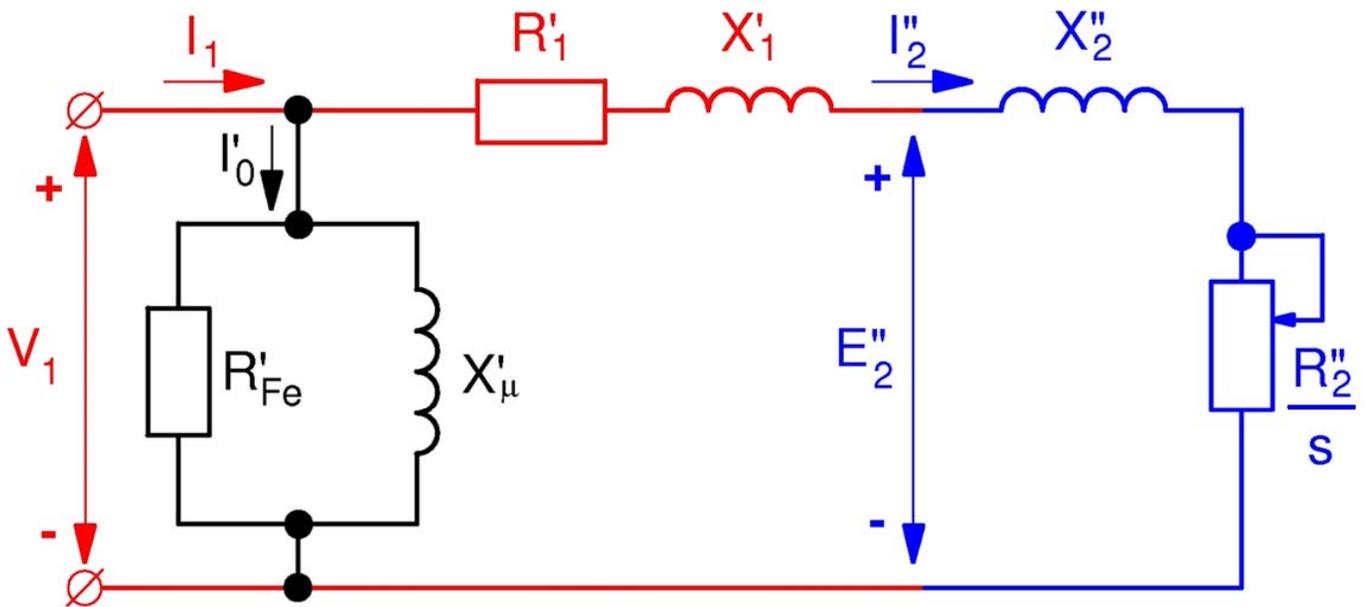
$$c_1 = 1 + \frac{X_1}{X_\mu} \quad (m_1 = 3 \text{ fases})$$

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{\left(\frac{V_1}{c_1}\right)^2}{\left(\frac{R_1}{c_1} + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + \left(\frac{X_1}{c_1} + X'_2\right)^2}$$

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + c_1 \frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X_1 + c_1 X'_2)^2}$$

Por consiguiente, si se quiere mejorar la precisión en las ecuaciones del par obtenidas mediante el circuito equivalente aproximado hay que corregir las magnitudes V_1 , R_1 y X_1 dividiéndolas por c_1 . O bien, hay que corregir los parámetros R'_2 y X'_2 sólo en el denominador de esta expresión multiplicándolos por c_1 .

CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS CIRCUITO EQUIVALENTE EN L (1)



$$c_1 = \frac{X_1}{X_\mu} + 1 = \frac{X_1 + X_\mu}{X_\mu}$$

$$R'_{Fe} = c_1 R_{Fe}$$

$$X'_{\mu} = c_1 X_{\mu}$$

$$\bar{I}''_2 = \frac{\bar{I}'_2}{c_1}$$

$$R'_1 = c_1 R_1$$

$$X'_1 = c_1 X_1$$

$$\bar{E}''_2 = c_1 \bar{E}'_2$$

$$R''_2 = c_1^2 R'_2$$

$$X''_2 = c_1^2 X'_2$$

$$\bar{I}'_0 = \frac{\bar{V}_1}{R'_{Fe} + jX'_{\mu}} = \frac{\bar{V}_1}{c_1 (R_{Fe} + jX_{\mu})}$$

$$\bar{I}'_0 = \frac{X_{\mu}}{X_1 + X_{\mu}} \frac{\bar{V}_1}{(R_{Fe} + jX_{\mu})} \rightarrow \boxed{\bar{I}'_0 \approx \frac{\bar{V}_1}{j(X_1 + X_{\mu})}}$$

\bar{I}'_0 es igual a la corriente consumida en la marcha en vacío

CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS

CIRCUITO EQUIVALENTE EN L (2)

Corriente del rotor

$$(I''_2)^2 = \frac{V_1^2}{\left(R'_1 + \frac{R''_2}{s}\right)^2 + (X'_1 + X''_2)^2}$$

$$(I''_2)^2 = \frac{V_1^2}{\left(c_1 R_1 + c_1^2 \frac{R'_2}{s}\right)^2 + \left(c_1 X_1 + c_1^2 X'_2\right)^2}$$

$$(I''_2)^2 = \frac{1}{c_1^2} \left[\frac{V_1^2}{\left(R_1 + c_1 \frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X_1 + c_1 X'_2)^2} \right] = \left(\frac{I'_2}{c_1}\right)^2$$

$$I''_2 = \frac{I'_2}{c_1} \rightarrow \boxed{\bar{I}''_2 = \frac{\bar{I}'_2}{c_1}}$$

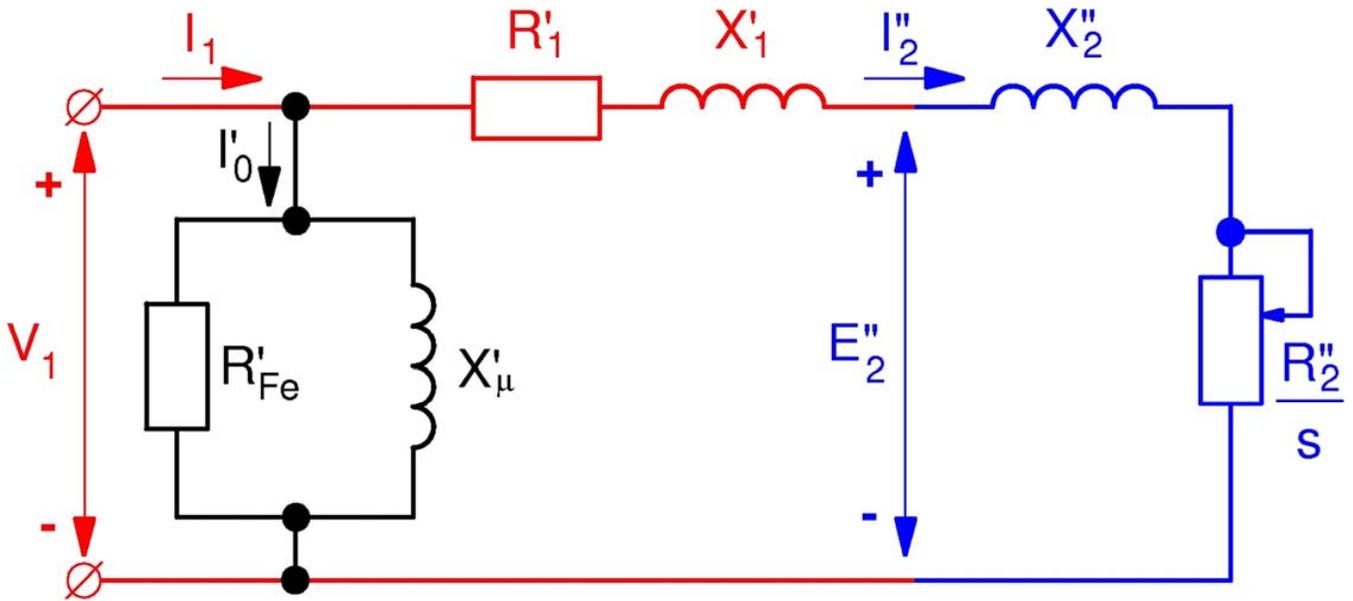
F.e.m. del rotor

$$\bar{E}''_2 = \bar{I}''_2 (R''_2 + j X''_2) = \frac{\bar{I}'_2}{c_1} \left(c_1^2 R_2 + j c_1^2 X'_2 \right)$$

$$\bar{E}''_2 = c_1 [\bar{I}'_2 (R'_2 + j X'_2)] \rightarrow \boxed{\bar{E}''_2 = c_1 \bar{E}'_2}$$

CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS

CIRCUITO EQUIVALENTE EN L (3)



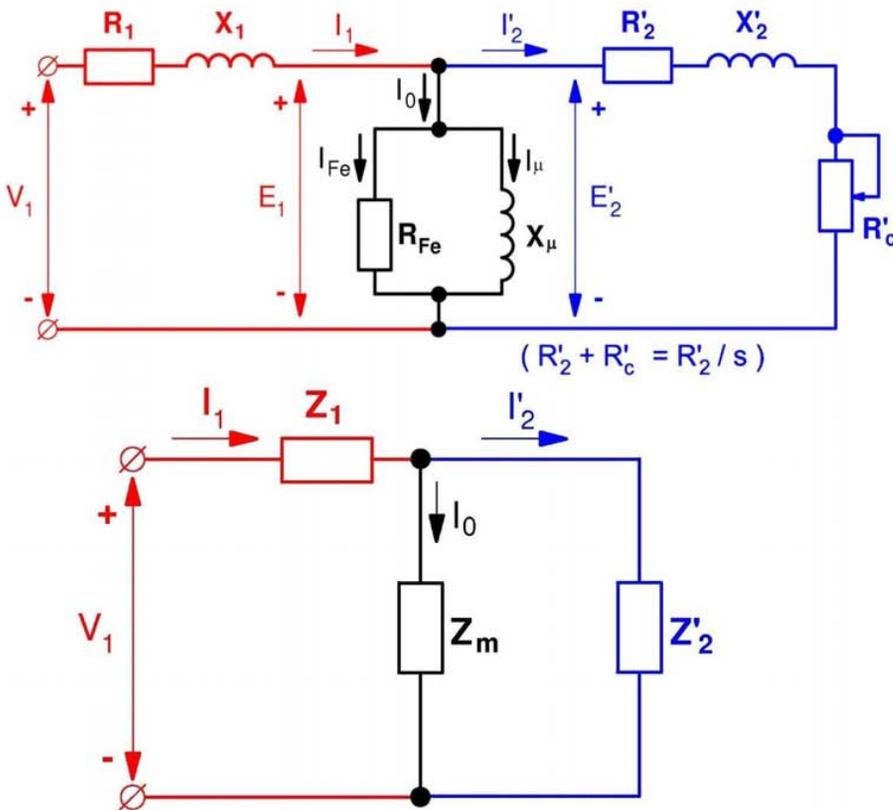
$$\begin{array}{lll}
 R'_{Fe} = c_1 R_{Fe} & X'_{\mu} = c_1 X_{\mu} & c_1 = 1 + (X_1/X_{\mu}) \\
 R'_1 = c_1 R_1 & X'_1 = c_1 X_1 & \bar{I}''_2 = \frac{\bar{I}'_2}{c_1} \\
 R''_2 = c_1^2 R'_2 & X''_2 = c_1^2 X'_2 & \bar{E}''_2 = c_1 E'_2
 \end{array}$$

Este circuito equivalente tiene la ventaja de que se alimenta con la verdadera tensión del primario V_1 y que consume la verdadera corriente del primario I_1 . Además, las potencias consumidas en su rotor son iguales a las potencias consumidas en el rotor del circuito equivalente exacto. Así, por ejemplo, pasa esto con las pérdidas en el cobre del rotor:

$$P''_{Cu2} = m_1 R''_2 I''_2{}^2 = m_1 (c_1^2 R'_2) \left(\frac{I'_2}{c_1} \right)^2 = m_1 R'_2 I'_2{}^2$$

$$\underline{P''_{Cu2} = P_{Cu2}}$$

CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS EXACTOS (1)
CIRCUITO EQUIVALENTE EXACTO



$$\bar{Z}_1 = R_1 + jX_1$$

$$\bar{Z}'_2 = \frac{R'_2}{s} + jX'_2$$

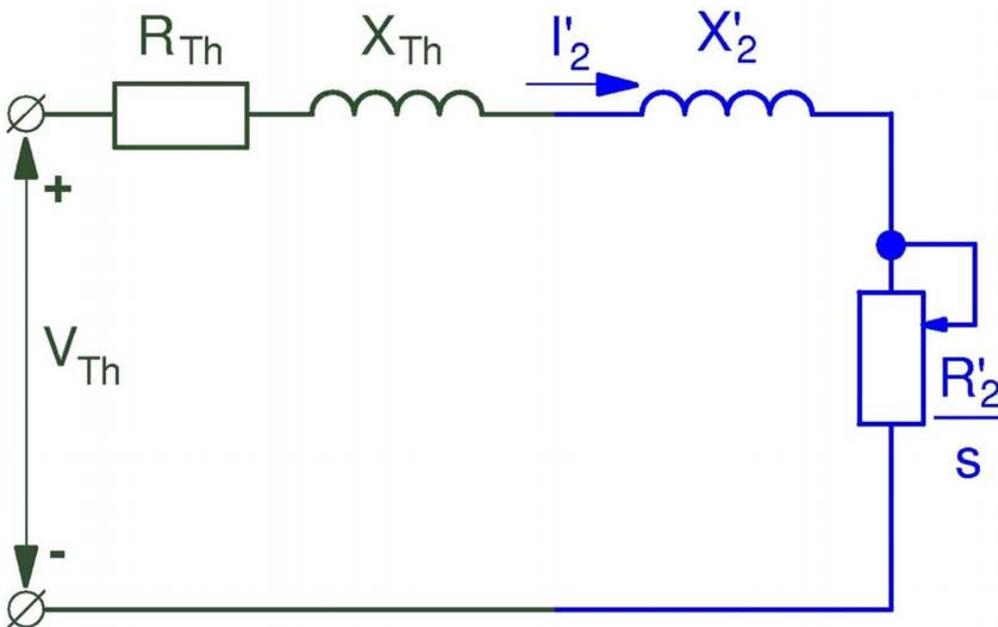
$$\frac{1}{\bar{Z}_m} = \frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{jX_\mu}$$

$$\bar{Z}_m = R_m + jX_m = \frac{jR_{Fe}X_\mu}{R_{Fe} + jX_\mu}$$

$$\bar{c}_1 = 1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_m} = \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_m}{\bar{Z}_m}$$

CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS EXACTOS (2)
CIRCUITO EQUIVALENTE SERIE

Ahora ya no despreciamos R_1 frente a X_1 ni I_{Fe} frente a I_μ . Se obtiene el mismo valor de la potencia en el entrehierro P_a y del par M que en el circuito exacto.



$$\bar{V}_{Th} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{c}_1}$$

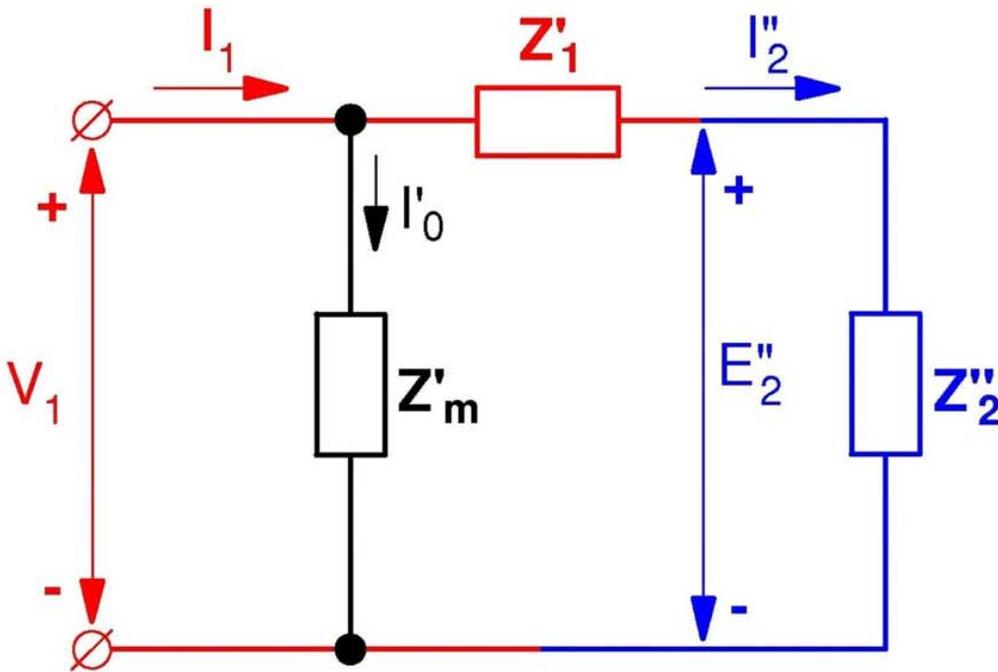
$$\bar{Z}_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$$

$$\bar{Z}_{Th} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{c}_1}$$

$$\bar{c}_1 = 1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_m}$$

CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS EXACTOS (3)

CIRCUITO EQUIVALENTE EN L



$$\begin{aligned} \bar{Z}'_1 &= \bar{c}_1 \cdot \bar{Z}_1 \\ \bar{Z}'_m &= \bar{c}_1 \cdot \bar{Z}_m \\ \bar{Z}''_2 &= (\bar{c}_1)^2 \cdot \bar{Z}_2 \\ \bar{I}''_2 &= \frac{\bar{I}'_2}{\bar{c}_1} \\ \bar{E}''_2 &= \bar{c}_1 \cdot \bar{E}'_2 \\ \bar{c}_1 &= 1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_m} \end{aligned}$$

CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS EXACTOS (4)

Equivalente serie

Si $c_1 = |\bar{c}_1|$ ahora sucede que:

$$V_{Th} = |\bar{V}_{Th}| = \frac{V_1}{c_1}$$

$$R_{Th} = \text{Re} \{ \bar{Z}_{Th} \} \neq \frac{R_1}{c_1}$$

$$X_{Th} = \text{Im} \{ \bar{Z}_{Th} \} \neq \frac{X_1}{c_1}$$

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{2\pi n_1} \frac{V_{Th}^2}{\left(R_{Th} + \frac{R'_2}{s} \right)^2 + (X_{Th} + X'_2)^2}$$

$$M = \frac{m_1 \frac{R''_2}{s}}{2\pi n_1} \frac{V_1^2}{\left(R'_1 + \frac{R''_2}{s} \right)^2 + (X'_1 + X''_2)^2}$$

Equivalente en L

$$R'_1 = \text{Re} \{ \bar{Z}'_1 \} \neq c_1 \cdot R_1$$

$$X'_1 = \text{Im} \{ \bar{Z}'_1 \} \neq c_1 \cdot X_1$$

(Re = Parte real; Im = Parte imaginaria)

$$R'_m = \text{Re} \{ \bar{Z}'_m \} \neq c_1 \cdot R_m \neq c_1 \cdot R_{Fe}$$

$$X'_m = \text{Im} \{ \bar{Z}'_m \} \neq c_1 \cdot X_m \neq c_1 \cdot X_\mu$$

$$\frac{R''_2}{s} = \text{Re} \{ \bar{Z}''_2 \} \Rightarrow R''_2 \neq c_1^2 \cdot R'_2$$

$$X''_2 = \text{Im} \{ \bar{Z}''_2 \} \neq c_1^2 \cdot X'_2$$

R''_2 y X''_2 ahora son funciones de s

$$I''_2 = |\bar{I}''_2| = \frac{I'_2}{c_1}$$

$$E''_2 = |\bar{E}''_2| = c_1 \cdot E'_2$$

EFFECTOS DE LA ALIMENTACIÓN DESEQUILIBRADA
EN UNA MÁQUINA ASÍNCRONA
(COMPONENTES SIMÉTRICAS)

Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

Un sistema trifásico de tensiones o de intensidades es equilibrado si las tensiones o intensidades de las tres fases tienen el mismo valor eficaz y el desfase temporal entre dos de ellas es de 120° . Si no se cumple alguna de estas condiciones el sistema es desequilibrado. Las tres tensiones o intensidades de un sistema equilibrado suman siempre cero.

Los efectos de los desequilibrios en las tensiones de alimentación de las fases del estator se estudian mediante el método de las componentes simétricas.

El método de las componentes simétricas indica que un sistema trifásico de tensiones o de intensidades desequilibrado es equivalente a la suma de tres sistemas:

- Un sistema equilibrado de secuencia directa o positiva que tiene la misma secuencia de fases que el sistema trifásico desequilibrado de partida.
- Un sistema equilibrado de secuencia inversa o negativa cuya secuencia de fases es opuesta a la del sistema desequilibrado de partida.
- Un sistema desequilibrado homopolar o de secuencia cero. En él las tensiones o las intensidades de las tres fases están en fase y, por lo tanto, estas tres tensiones o intensidades son iguales, tanto en módulo como en argumento.

Es fácil comprobar, entonces, que la suma de las tres tensiones o intensidades del sistema homopolar no es igual a cero. En consecuencia, si las tres tensiones o intensidades del sistema desequilibrado original suman cero, su correspondiente sistema homopolar es nulo (carecen de sistema homopolar).

Dado que un motor se comporta como un conjunto equilibrado de impedancias, sólo pueden aparecer desequilibrios entre las corrientes de las fases del estator si existen desequilibrios en las tensiones. Por lo tanto, la componente de secuencia directa de las corrientes es debida sólo a la componente de secuencia directa de las tensiones. Análogamente, la componente de secuencia inversa de las corrientes sólo es debida a la componente de secuencia inversa de las tensiones y la componente homopolar de las corrientes sólo sería debida a la componente homopolar de las tensiones.

Ahora bien, en un motor asíncrono sólo se usan las conexiones estrella con neutro aislado y triángulo para conectar las fases del estator. La conexión estrella con el neutro unido a la red no se utiliza en estas máquinas. De esto se deduce que en estas máquinas no existen corrientes homopolares en el estator.

En efecto, la conexión estrella con el neutro aislado no permite la circulación de corriente por el neutro, lo que obliga a que las tres corrientes de fase sumen cero en todo momento y, consecuentemente, no exista la componente homopolar de las corrientes. Por otra parte, la conexión triángulo obliga a que las tres tensiones de fase sumen cero en todo momento, lo que obliga a que la componente homopolar de las tensiones de fase sea siempre nula. Como la componente homopolar de las corrientes sólo puede ser debida a la componente homopolar de las tensiones, se deduce que en la conexión triángulo tampoco existe la componente homopolar de las corrientes.

El comportamiento de una máquina asíncrona frente a las corrientes de secuencia directa es similar a lo estudiado hasta ahora y el motor se puede analizar mediante su circuito equivalente con una resistencia de carga R'_{c+} :

$$R'_{c+} = R'_2 \left(\frac{1}{s_+} - 1 \right) \quad (1)$$

donde

$$s_+ = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad (2)$$

Las corrientes de secuencia inversa generan un campo giratorio cuya velocidad vale $-n_1$, pues rota en sentido opuesto al campo giratorio directo. Luego, el comportamiento del motor con corrientes de secuencia inversa puede estudiarse mediante su circuito equivalente con una resistencia de carga R'_{c-} :

$$R'_{c-} = R'_2 \left(\frac{1}{s_-} - 1 \right) \quad (3)$$

donde

$$s_- = \frac{(-n_1) - n}{(-n_1)} = 2 - s_+ \quad (4)$$

(Realmente, si se trata de una máquina de doble jaula o de ranura profunda los valores de R'_2 en las expresiones (1) y (3) serían diferentes porque la frecuencia f_2 de las corrientes del rotor es diferente para las corrientes de secuencia directa que para las de secuencia inversa. Aquí no tendremos en cuenta estas variaciones de R'_2).

Si, como es normal, el efecto de las corrientes de secuencia directa es predominante, el deslizamiento s_+ es pequeño y estas tensiones ejercen un par motor (positivo) M_+ . Sin embargo, el deslizamiento s_- será grande (de un valor próximo 2) y el efecto de las corrientes de secuencia inversa será el crear un par de frenado (negativo) a contracorriente cuyo valor es M_- . El par total se obtendrá mediante la suma

$$M = M_+ + M_- \quad (5)$$

Dado que s_+ es mucho más pequeño que s_- ($s_+ \lll s_-$) la impedancia total que presenta el circuito equivalente para las componentes de secuencia inversa Z_- es menor que para las de secuencia directa Z_+ . Por ello, un pequeño desequilibrio en las tensiones origina un desequilibrio mayor en las corrientes (pequeñas V_- originan grandes I_- porque Z_- es pequeño).

Además de producir el par de frenado M_- , la componente inversa de las corrientes provoca unas pérdidas en el cobre adicionales.

PARES ADICIONALES DEBIDOS A LOS ARMÓNICOS TEMPORALES EN LAS CORRIENTES DE ALIMENTACIÓN DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA TRIFÁSICA

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Supongamos que un motor asíncrono trifásico tiene unos devanados de estator y rotor que generan campos magnéticos en el entrehierro distribuidos de manera perfectamente sinusoidal. Esto significa que en esta máquina no existen armónicos en el espacio del campo magnético.

Si este motor se alimenta con tensiones no perfectamente sinusoidales, por las tres fases de su estator circularán corrientes con armónicos en el tiempo así:

$$\begin{aligned}
 i_R &= \sum_{h'} \sqrt{2} I_{h'} \cos(\omega_{h'} t + \gamma_{h'}) & i_S &= \sum_{h'} \sqrt{2} I_{h'} \cos\left(\omega_{h'} t + \gamma_{h'} - h' \frac{2\pi}{3}\right) \\
 i_T &= \sum_{h'} \sqrt{2} I_{h'} \cos\left(\omega_{h'} t + \gamma_{h'} - h' \frac{4\pi}{3}\right) & (h' = \text{número impar; } \omega_{h'} &= 2\pi f_{h'}) \\
 & & f_{h'} &= h' f_1
 \end{aligned} \tag{0}$$

Estos armónicos temporales de la corriente originarán un campo magnético así:

- Los armónicos temporales de corriente de orden $h' = 3k$ ($k = \text{número entero}$) generan un campo magnético total nulo y no dan par.

De hecho, como estos armónicos forman un sistema homopolar y en las máquinas de inducción no se utiliza la conexión estrella con el neutro unido a la red (se utilizan las conexiones triángulo o estrella con el neutro aislado), normalmente ni siquiera existirán estos armónicos de corriente.

- Los demás armónicos temporales de corriente generan campos magnéticos giratorios, todos ellos de igual número de polos ($2p$) pero de velocidades distintas $\Omega_{h'}$ que verifican que

$$\begin{aligned}
 |\Omega_{h'}| &= \frac{2\pi f_{h'}}{p} = h' \frac{2\pi f_1}{p} = h' \cdot \Omega_1 \\
 \Omega_{h'} &= \pm h' \cdot \Omega_1 \quad (n_{h'} = \pm h' \cdot n_1)
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde Ω_1 (o n_1 , si se mide en r.p.m.) es la velocidad de giro del armónico fundamental (velocidad de sincronismo).

Los armónicos temporales de corriente de orden $h' = 6k + 1$ ($h' = 1, 7, 13, \dots$) originan campos magnéticos que giran en el mismo sentido que el armónico fundamental (o primer armónico ($h' = 1$)) y para ellos se pondrá el signo + en la relación (1).

Los armónicos temporales de corriente de orden $h' = 6k - 1$ ($h' = 5, 11, 17, \dots$) originan campos magnéticos que giran en sentido contrario al armónico fundamental y para ellos se pondrá el signo - en la relación (1).

Los sentidos de giro de estos campos magnéticos son lógicos, pues los armónicos de corriente de orden $h' = 6k + 1$ forman un sistema trifásico directo y los armónicos de corriente de orden $h' = 6k - 1$ constituyen un sistema trifásico inverso.

El par total de la máquina será la suma de los originados por cada campo giratorio actuando individualmente más los pares debidos a la interacción de cada uno de estos campos magnéticos con los demás.

Dado que todos estos campos magnéticos armónicos son de igual número de polos ($2p$), no se puede considerar a priori que las interacciones mutuas entre ellos son nulas y no producen pares.

Lo que sucede es que las velocidades de giro de estos campos magnéticos armónicos son diferentes y, en consecuencia, el ángulo que forman entre sí en el espacio va ir variando en el tiempo entre 0 y 2π radianes eléctricos. Es decir, en unos instantes la interacción entre dos de estos campos da lugar a un par de sentido positivo y en otros origina un par negativo. El par medio resultante es, pues, nulo.

Por lo tanto, las interacciones entre estos campos giratorios provocan unas pequeñas oscilaciones del par que dan lugar a un par medio nulo (y a vibraciones en la máquina). Así pues, el par medio total de la máquina M es la suma de los pares $M_{h'}$ producidos actuando cada armónico por separado; esto es, se puede aplicar el principio de superposición a los pares cuando se trata de calcular el par medio:

$$M = \sum_{h'=1}^{\infty} M_{h'} \quad (2)$$

Cada uno de estos campos magnéticos armónicos actúa individualmente de igual manera que el fundamental, dando lugar a una curva de par similar a la del fundamental, pero con una velocidad de sincronismo diferente dada por la relación (1). En la Fig. 1 se muestra las curvas de par para los armónicos fundamental, 5º y 7º. En ella se muestra la velocidad de sincronismo de cada campo y los pares debidos a cada armónico cuando la máquina gira a la velocidad asignada. Las escalas horizontal (de velocidad) y vertical (de par) se han tomado diferentes para cada armónico (las tres curvas no están a la misma escala).

Si la máquina está girando a una velocidad Ω , el deslizamiento para el armónico h' vale

$$s_{h'} = \frac{\Omega_{h'} - \Omega}{\Omega_{h'}} = 1 - \frac{\Omega}{\Omega_{h'}} = 1 - \frac{\Omega}{\pm h' \cdot \Omega_1} \quad (3)$$

Para el armónico fundamental el deslizamiento vale

$$s = 1 - \frac{\Omega}{\Omega_1} \quad (4)$$

Luego:

$$\frac{1-s}{1-s_{h'}} = \frac{\frac{\Omega}{\Omega_1}}{\frac{\Omega}{\pm h' \cdot \Omega_1}} = \pm h'$$

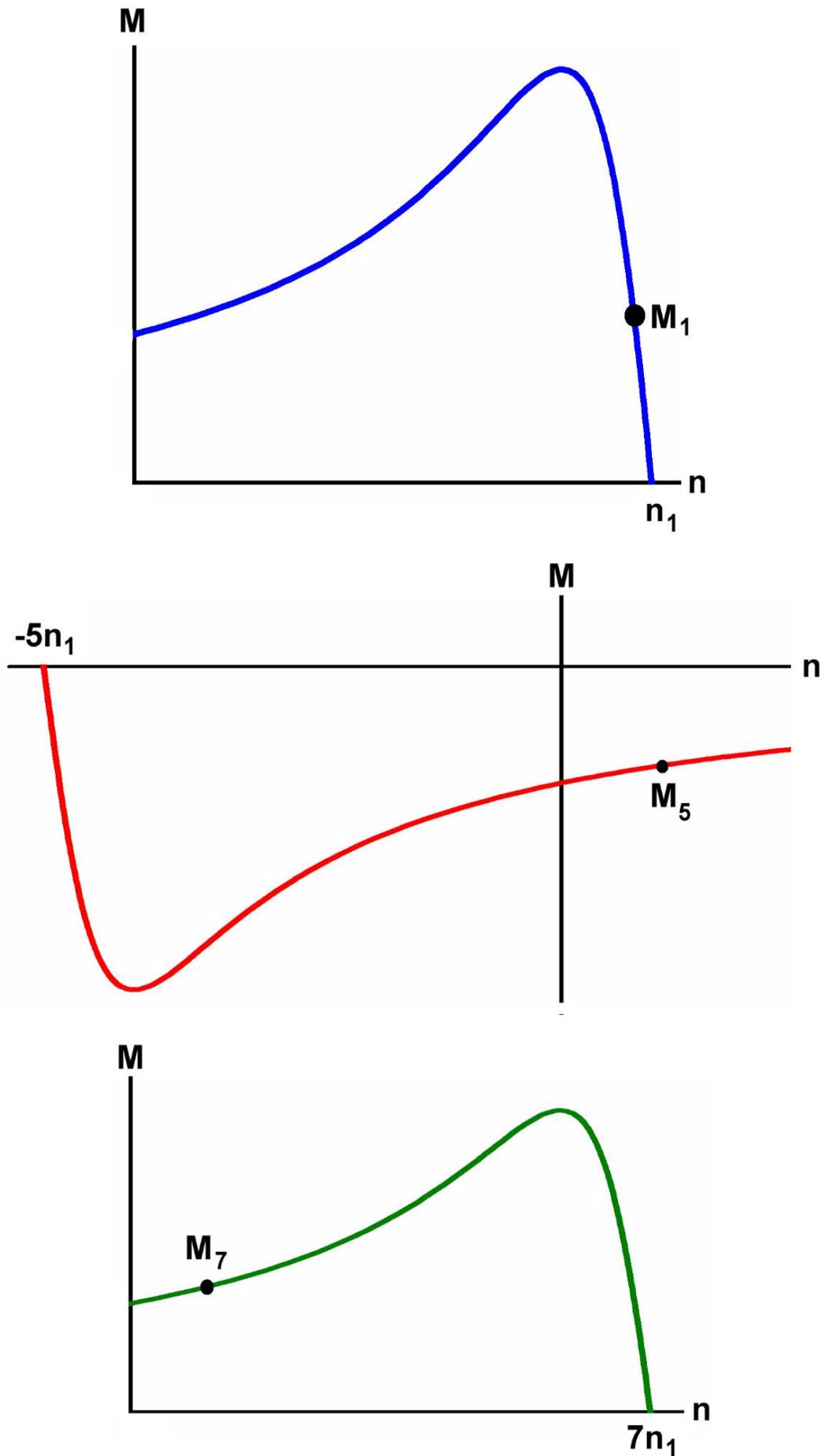


Fig. 1: Curvas de par para varios armónicos del campo magnético actuando aisladamente

$$s_{h'} = 1 - \left(\frac{1 - s}{\pm h'} \right) \quad (5)$$

Si la máquina actúa como motor, el deslizamiento s para el armónico fundamental toma valores comprendidos entre 0 y 1. En consecuencia, el deslizamiento $s_{h'}$ para otro armónico distinto del fundamental toma valores próximos a la unidad ($s_{h'} \approx 1$). Esto se cumple más exactamente a medida que aumenta el orden h' del armónico.

Por lo tanto, el par producido por cada armónico de corriente es de un valor próximo al que produce en el arranque (donde el deslizamiento vale 1).

De la relación (5) y de la figura 1 se deduce que:

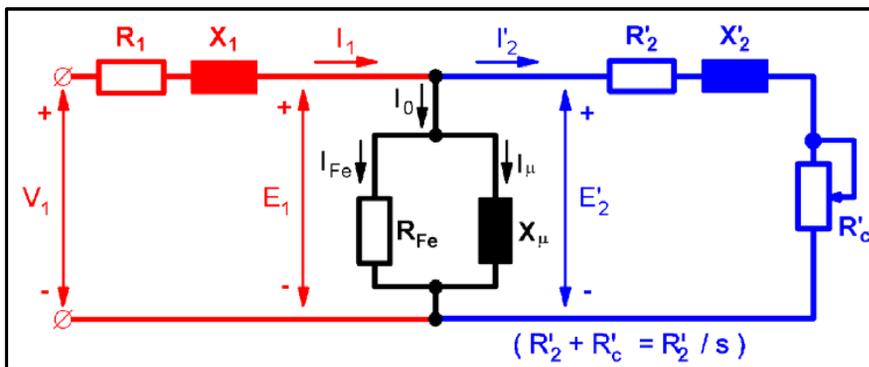
- Los armónicos temporales de corriente de orden $h' = 6k - 1$ trabajan con deslizamientos ligeramente superiores a 1. Luego, ejercen un efecto de frenado a contracorriente y dan pares negativos (de signo contrario al par producido por el armónico fundamental).
- Los armónicos temporales de corriente de orden $h' = 6k + 1$ trabajan con deslizamientos ligeramente inferiores a 1. Es decir, funcionan en la zona de motor. Por lo tanto dan pares positivos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ALGER, P. L. 1970. *Induction machines. Their behavior and uses*. 2ª edición. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
- [2] BOLDEA, I. y NASAR, S. A. 2010. *The Induction Machine Design Handbook*. New York: CRC Press.
- [3] CORRALES MARTÍN, J. 1982. *Cálculo industrial de máquinas eléctricas. Tomo II: Método de cálculo*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [4] CORTES CHERTA. 1994. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. Tomo III: Máquinas de corriente alterna asíncronas*. Barcelona. Editores Técnicos Asociados.
- [5] DESHPANDE, M.V. *Design and testing of electrical machines*. New Delhi (India). PHI Learning Private Limited. 2010.
- [6] HAMDI, E.S. *Design of small electrical machines*. New York. John Wiley & Sons.
- [7] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas. Tomo 1*. Moscú: Editorial Mir.
- [8] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas. Tomo II*. Moscú: Editorial Mir.
- [9] PYRHÖNEN, JUHA y otros. 2010. *Design of rotating electrical machines*. West Sussex (Inglaterra): John Wiley & Sons Ltd.
- [10] SANZ FEITO. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Educación.
- [11] UPADHYAY, K. G. 2008. *Design of electrical machines*. New Delhi (India): New Age International Publishers.

FUNCIONAMIENTO CON TENSIÓN FLUJO O CORRIENTE CONSTANTE. FUNCIONAMIENTO CON DESLIZAMIENTOS PEQUEÑOS

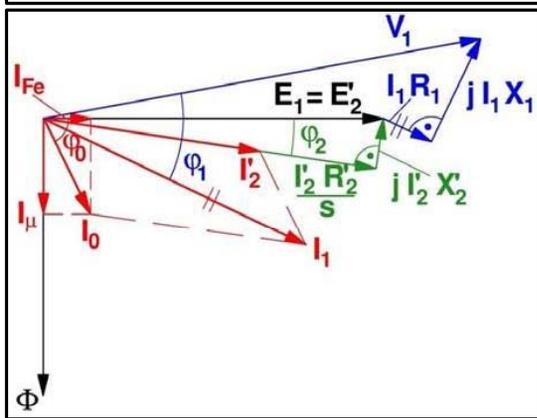
Ecuaciones básicas



$$M = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{P_a}{\frac{2\pi}{60} n_1}$$

$$P_a = m_1 I_2'^2 \frac{R_2'}{s}$$

$$P_a = m_1 E_2' I_2 \cos \varphi_2$$



$$E_2' = E_1 = 4,44 N_1 f_1 \xi_{b1} \Phi_M$$

$$\bar{I}_2' = \frac{\bar{E}_2'}{\frac{R_2'}{s} + j X_2'} \Rightarrow I_2'^2 = \frac{E_2'^2}{\left(\frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_2'^2}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{\frac{R_2'}{s}}{\sqrt{\left(\frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_2'^2}}$$

$$X_1 = 2\pi f_1 L_{d1} \quad X_2 = 2\pi f_1 L_{d2} \quad X_2' = 2\pi f_1 L'_{d2} \quad X_{\mu} = 2\pi f_1 L_{\mu}$$

Flujo y tensión en un motor asíncrono con deslizamientos pequeños

Para deslizamientos s pequeños la corriente del estator I_1 no alcanza valores excesivamente altos (como mucho no es muy superior a la corriente asignada I_{1N}). Esto significa que las caídas de tensión en la resistencia R_1 y reactancia X_1 del estator son pequeñas y se puede aceptar que la f.e.m. E_1 y la tensión V_1 del estator son prácticamente iguales:

$$s \ll \Rightarrow \bar{V}_1 = \bar{E}_1 + \bar{I}_1 (R_1 + j X_1) \approx \bar{E}_1 \Rightarrow V_1 \approx E_1$$

En estas condiciones se deduce que si se mantienen constantes el valor eficaz V_1 y la frecuencia f_1 de la tensión del estator el flujo por polo Φ_M es prácticamente constante:

$$\left. \begin{array}{l} s \ll y \quad V_1 = \text{cte} \Rightarrow E_1 \approx \text{cte} \\ (V_1 \text{ no muy pequeño}) \quad f_1 = \text{cte} \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi_M = \frac{E_1}{4,44 N_1 \xi_{b1} f_1} \approx \text{cte}$$

Luego, para deslizamientos pequeños el comportamiento de la máquina alimentada a tensión V_1 y frecuencia f_1 constantes es el mismo que cuando funciona con el flujo por polo Φ_M y la frecuencia f_1 constantes.

Ecuaciones del par

$$M = \frac{m_1 V_1^2}{\frac{2 \pi}{60} n_1} \frac{\frac{R'_2}{s}}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}$$

$$M = C_{MI} \frac{\cos^2 \varphi_2}{R'_2} \Phi_M^2 f_2$$

$$(C_{MI} = \pi m_1 p N_1^2 \xi_{b1}^2)$$

$$M = C_{MII} \Phi_M I_2 \cos \varphi_2 = C'_{MII} \Phi_M I'_2 \cos \varphi_2$$

$$\left(C_{MII} = \frac{p m_2 N_2 \xi_{b2}}{\sqrt{2}}\right) \quad \left(C'_{MII} = m_i \cdot C_{MII} = \frac{p m_1 N_1 \xi_{b1}}{\sqrt{2}}\right)$$

C_{MI} , C_{MII} y C'_{MII} son constantes constructivas de cada máquina

Ecuaciones del par para deslizamientos pequeños

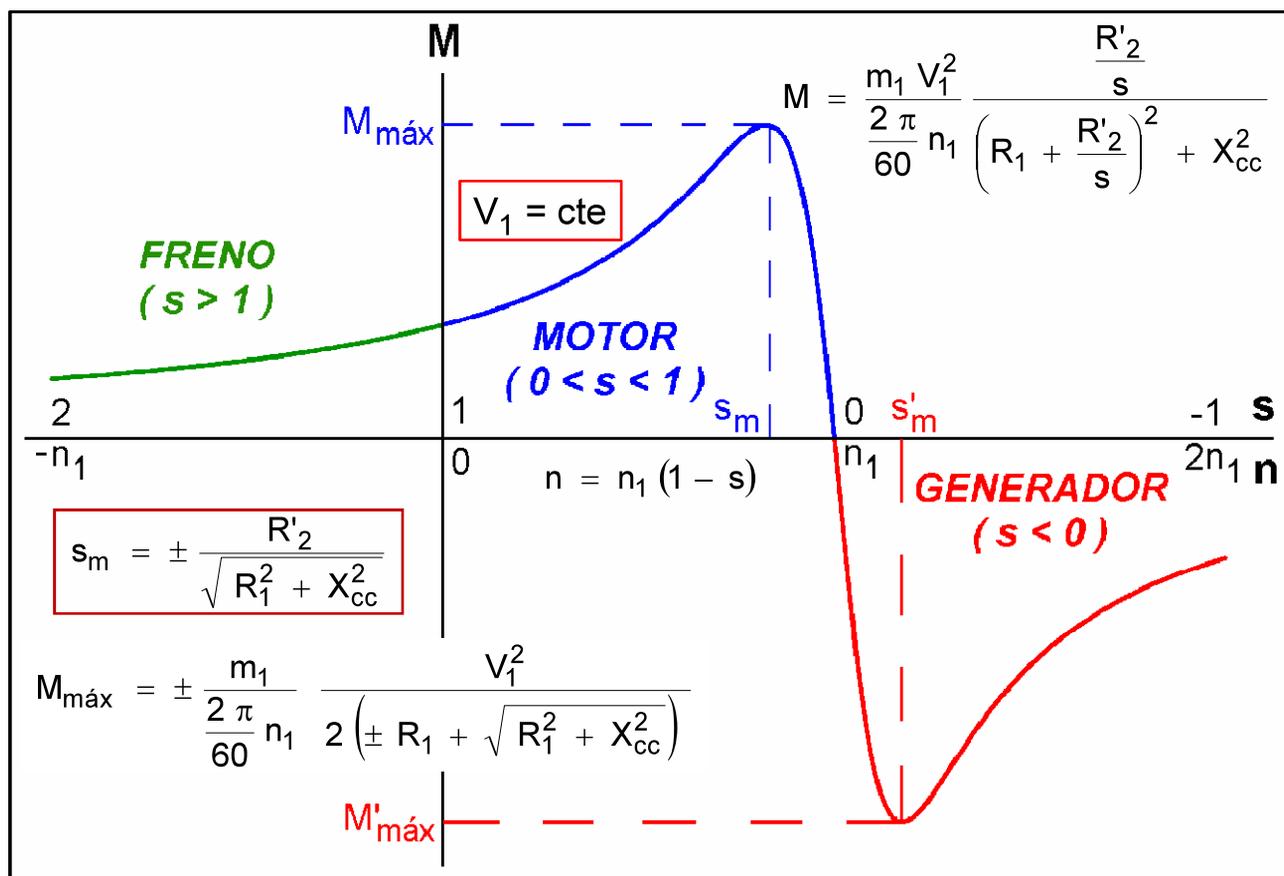
$$s \ll \Rightarrow \frac{R'_2}{s} \gg X'_2; \quad \frac{R'_2}{s} \gg X_{cc}; \quad \frac{R'_2}{s} \gg R_1$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{\frac{R'_2}{s}}{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_2'^2}} \approx 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} M \approx \frac{C_{MI}}{R'_2} \Phi_M^2 f_2 = \frac{C_{MI}}{R'_2} \Phi_M^2 f_1 s \\ M \approx C_{MII} \Phi_M I_2 = C'_{MII} \Phi_M I'_2 \end{array} \right.$$

$$M \approx \frac{m_1 V_1^2}{\frac{2 \pi}{60} n_1} \frac{s}{R'_2}$$

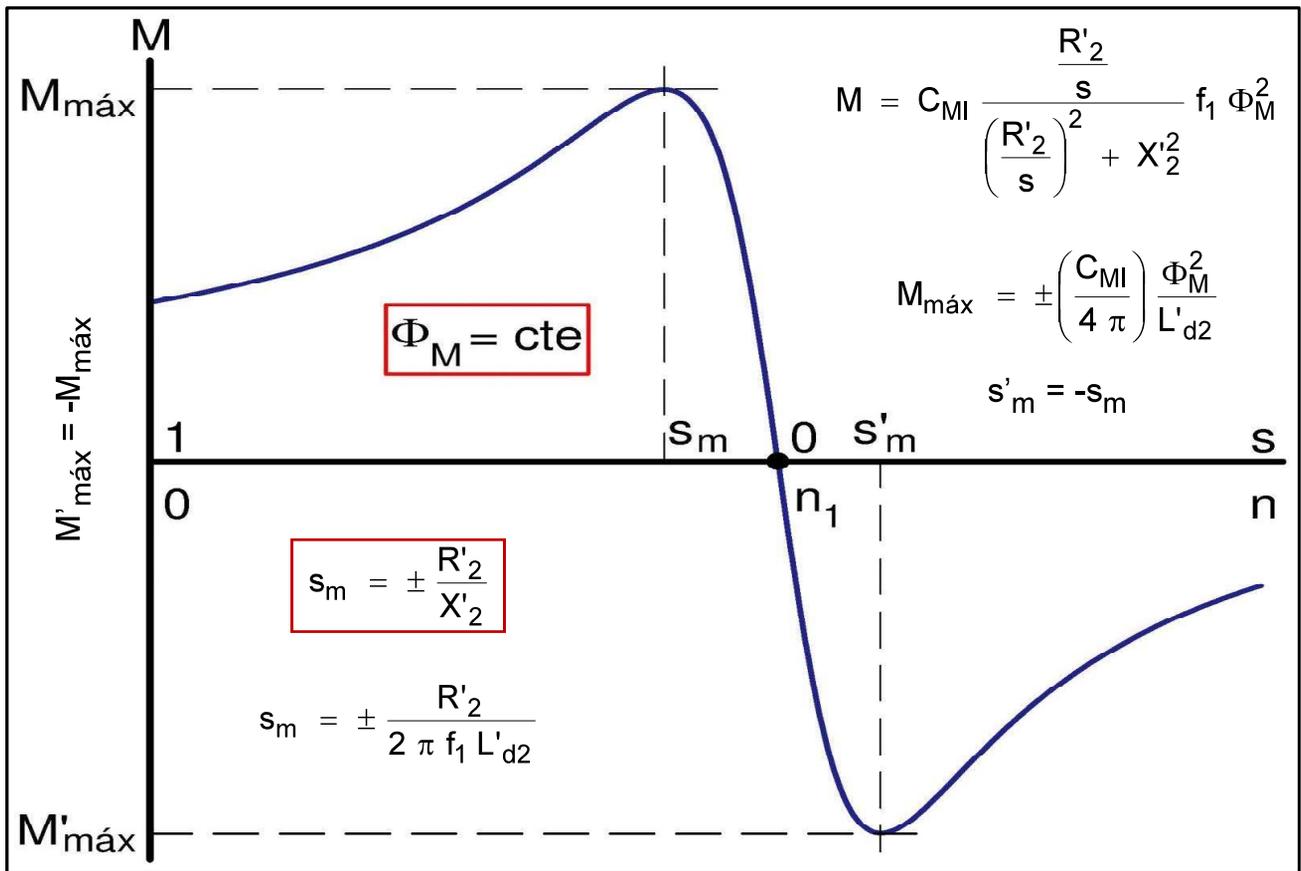
Para deslizamientos pequeños y cuando la frecuencia del estator f_1 se conserva constante, el par M varía linealmente con el deslizamiento s si se mantiene constante también el flujo por polo Φ_M o la tensión del estator V_1 .

Curva de par a tensión y frecuencia constantes



- La figura muestra la curva de par de una máquina asíncrona cuando funciona con una tensión estática de valor eficaz V_1 y frecuencia f_1 fijas.
- Como la frecuencia del estator f_1 es constante, la velocidad de sincronismo n_1 también es constante y el deslizamiento s y la velocidad n del rotor están relacionadas unívocamente. Por esto en el eje de abscisas de la figura se indican ambas magnitudes.
- La curva se divide en tres zonas: **motor** ($1 \geq s \geq 0$; $0 \leq n \leq n_1$), **generador** ($s < 0$; $n > n_1$) y **freno a contracorriente** ($s > 1$; $n < 0$).
- El par interno M es nulo a la velocidad de sincronismo n_1 ($n = n_1$; $s = 0$). El par útil M_u incluye las pérdidas mecánicas y se anulará a una velocidad ligeramente inferior a la de sincronismo n_1 .
- La curva de par es ligeramente asimétrica. El par máximo (en valor absoluto) cuando la máquina es generador $M'_{máx}$ es ligeramente superior al par máximo como motor $M_{máx}$.
- Los dos valores máximos de par se originan con valores de deslizamiento de igual valor absoluto y signos opuestos ($s'_m = -s_m$).
- El par depende cuadráticamente del valor eficaz de la tensión V_1 .
- Los pares máximos, $M_{máx}$ y $M'_{máx}$, dependen del cuadrado de la tensión del estator V_1 y no dependen de la resistencia del rotor R'_2 .
- Los deslizamientos de par máximo, s_m y s'_m , son proporcionales a la resistencia del rotor R'_2 y no dependen de la tensión del estator V_1 .

Curva de par a flujo y frecuencia constantes

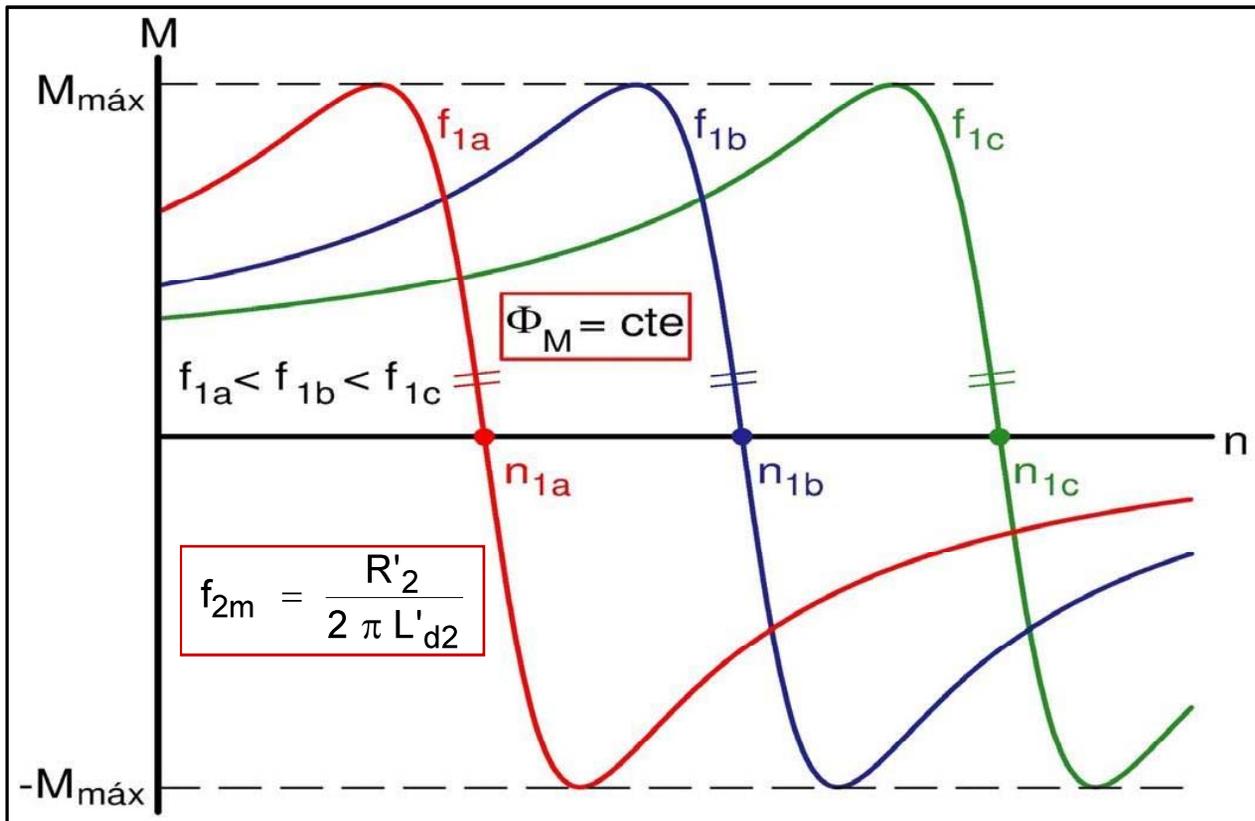


- La figura anterior muestra la curva de par de una máquina asíncrona cuando se la alimenta de tal forma que su frecuencia f_1 y su flujo por polo Φ_M conservan los mismos valores para todas las velocidades.
- La curva de par ahora es completamente simétrica. En valor absoluto los valores máximos del par para la máquina actuando como motor $M_{máx}$ y como generador $M'_{máx}$ son iguales ($M'_{máx} = -M_{máx}$).
- Los dos máximos de la curva de par ($M'_{máx}$ y $M_{máx}$) se originan con valores de deslizamiento de igual valor absoluto y signos opuestos ($s'_m = -s_m$).
- El par depende cuadráticamente del valor del flujo por polo Φ_M .
- El par máximo $M_{máx}$ depende del cuadrado del flujo por polo Φ_M y no depende de la resistencia del rotor R'_2 ni de la frecuencia f_1 del estator.
- Los deslizamientos de par máximo, s_m y s'_m , son proporcionales a la resistencia del rotor R'_2 , no dependen del flujo por polo Φ_M y son inversamente proporcionales a la frecuencia del estator f_1 .
- Si el deslizamiento s es pequeño sucede que

$$M \approx \frac{C_{MI}}{R'_2} \Phi_M^2 f_2 \quad M \approx C_{MII} \Phi_M I_2 = C'_{MII} \Phi_M I'_2$$

Luego, para deslizamientos s pequeños y flujo por polo Φ_M constante el par M depende linealmente de I_2 (o de I'_2) y de f_2 , independientemente del valor de la frecuencia del estator f_1 .

Curvas de par-velocidad a flujo constante para varias frecuencias f_1

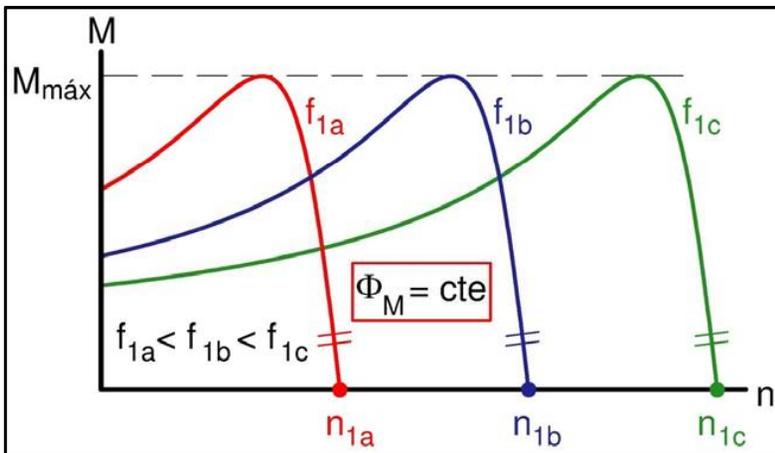
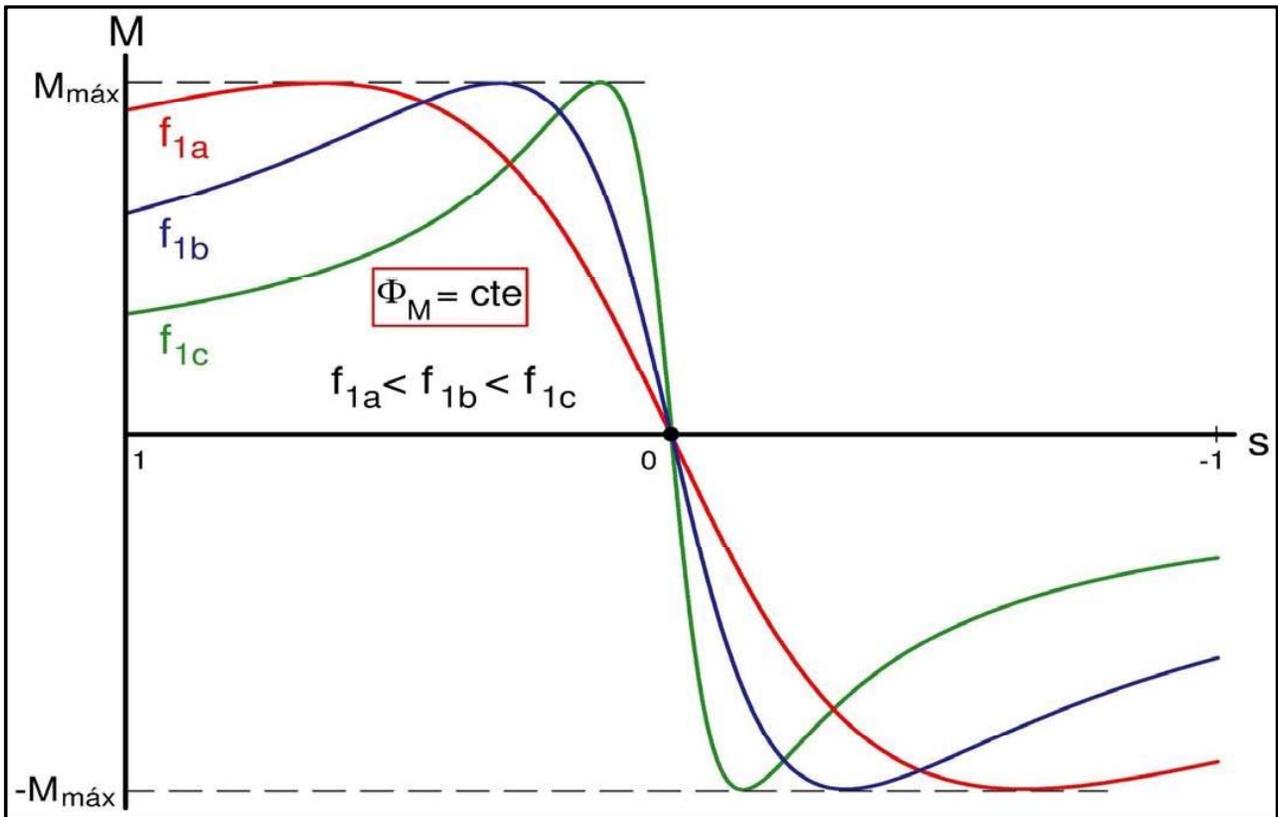


- La figura anterior muestra las curvas de par-velocidad a diferentes frecuencias f_1 de una máquina asíncrona cuando se la alimenta mediante una fuente que es capaz de variar la frecuencia del estator f_1 manteniendo siempre el mismo valor del flujo por polo Φ_M (es decir, el flujo Φ_M no va a variar con la velocidad n ni con la frecuencia f_1).
- En este caso el par máximo $M_{máx}$ conserva el mismo valor para todas las frecuencias f_1 del estator.
- La frecuencia del rotor f_{2m} de par máximo tiene siempre el mismo valor, independiente de la frecuencia f_1 del estator (si se acepta que los parámetros de resistencia R'_2 y de inductancia de dispersión L'_{d2} del rotor (reducido al estator) son constantes):

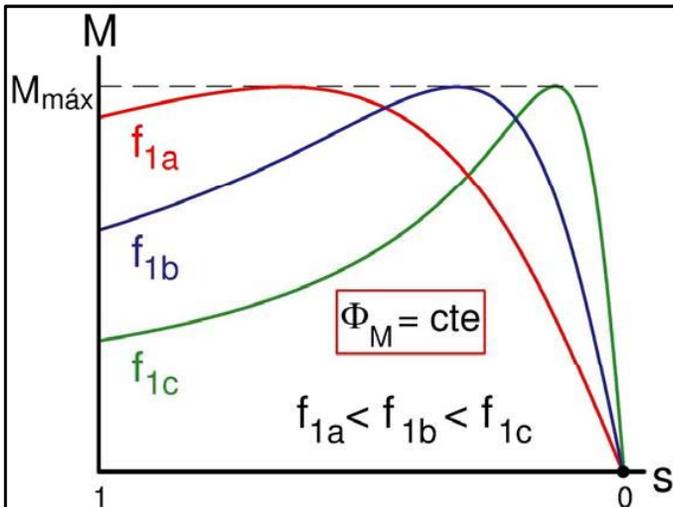
$$s_m = \pm \frac{R'_2}{2 \pi f_1 L'_{d2}} \Rightarrow f_{2m} = s_m \cdot f_1 = \pm \frac{R'_2}{2 \pi L'_{d2}}$$

- Se aprecia que para pequeños deslizamientos s las curvas de par-velocidad para diferentes frecuencias del estator f_1 son rectas paralelas.
- A cada frecuencia f_1 la velocidad de sincronismo n_1 es diferente. Por esta causa, la relación entre la velocidad del rotor y el deslizamiento es distinta para cada frecuencia f_1 . Esto hace que la familia de curvas par-velocidad (figura anterior) y la familia de curvas par-deslizamiento (figura siguiente) a diferentes frecuencias den lugar a gráficas distintas.

Curvas de par-deslizamiento a flujo constante para varias frecuencias f_1



Curvas de par a flujo constante para varias frecuencias f_1 . Funcionamiento como motor



Para deslizamientos pequeños se puede demostrar que si se mantienen constantes el valor eficaz V_1 y la frecuencia f_1 de la tensión del estator, también se mantiene prácticamente constante el flujo por polo Φ_M .

Luego, para deslizamientos pequeños la curva de par para V_1 y f_1 constantes también corresponde a Φ_M constante.

Motor asíncrono con deslizamientos pequeños

- Para deslizamientos s pequeños ya sabemos que se cumple lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = \text{cte} \\ f_1 = \text{cte} \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi_M = \text{cte} \quad \left| \quad \begin{array}{l} M \approx \frac{C_{MI}}{R'_2} \Phi_M^2 f_2 = \frac{C_{MI}}{R'_2} \Phi_M^2 f_1 s \\ M \approx C_{MII} \Phi_M I_2 = C'_{MII} \Phi_M I'_2 \end{array} \right.$$

$$\cos \varphi_2 \approx 1$$

- Luego, si el flujo Φ_M se mantiene constante, aunque la frecuencia f_1 sea variable, se deduce que:
 - El par M varía linealmente con la frecuencia del rotor f_2 .
 - El par M varía linealmente con la corriente del rotor I_2 (o I'_2).
 - Si el par M es constante, la corriente absorbida por el estator I_1 es constante, independientemente de la frecuencia f_1 .
 En efecto, si el flujo por polo Φ_M permanece constante, la corriente magnetizante I_μ también es constante. Por otra parte, se acaba de ver que el par M varía con la corriente del rotor I'_2 . Si M es constante, también I'_2 será constante. Como se verifica que $I_1 = I_0 + I'_2 \approx I_\mu + I'_2$, se deduce que en este caso la corriente I_1 permanece prácticamente constante.
- Si el flujo por polo Φ_M y la frecuencia f_1 son constantes o bien la tensión V_1 y la frecuencia f_1 son constantes, se obtiene que:
 - El par M varía linealmente con el deslizamiento s .
 - Cuando el par M se mantiene constante y se varía la resistencia del rotor R_2 (y, por tanto, también R'_2), el deslizamiento s varía linealmente con R_2 (o R'_2) (Fig. a).
 - Cuando el par M se mantiene constante y se varía el flujo por polo Φ_M (o, lo que es equivalente, la tensión V_1) el deslizamiento s varía inversamente proporcional a $(\Phi_M)^2$ (o a V_1^2) (Fig. b).

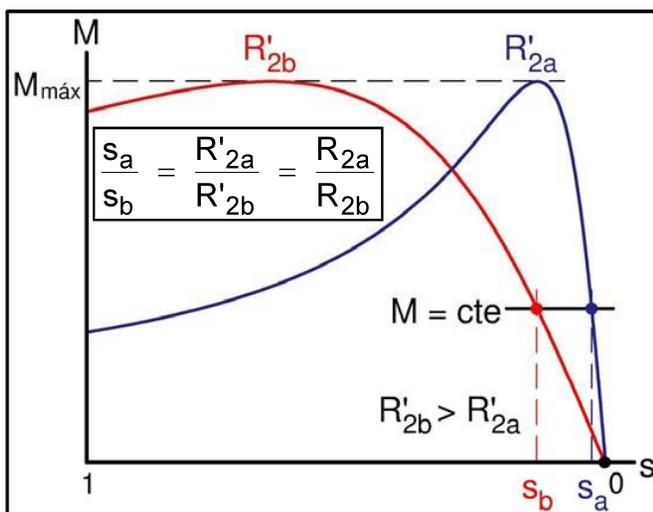


Fig. a: Variación de R_2 a M cte.

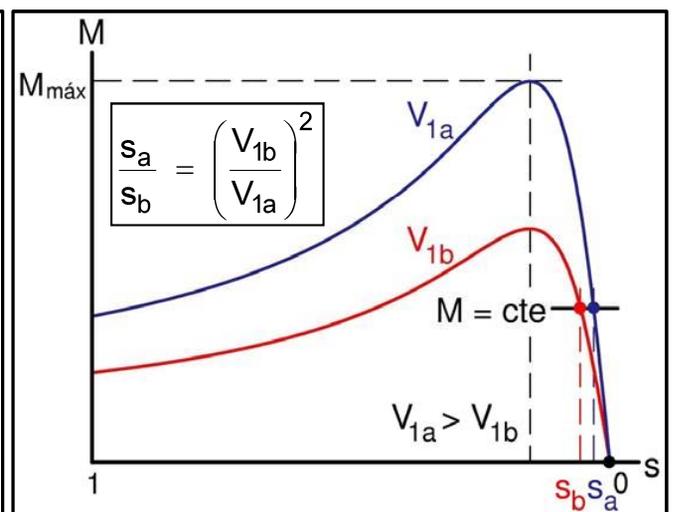
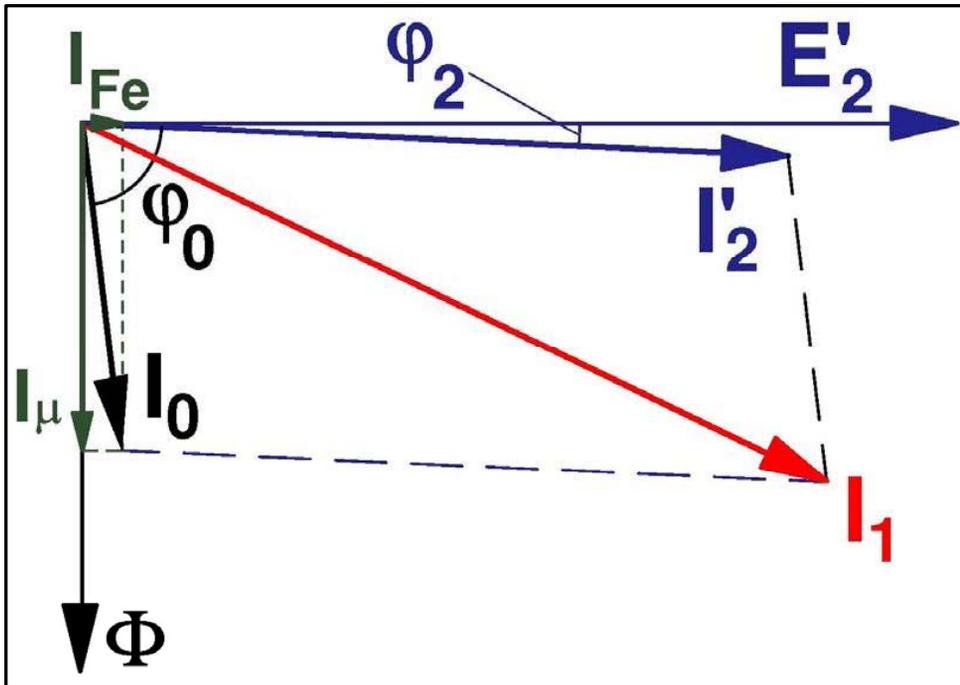


Fig. b: Variación de V_1 a M cte.

Corrientes con deslizamientos pequeños



Para
deslizamientos
pequeños:

$$I_1^2 \approx I_0^2 + I_2'^2$$

- Dado que en una máquina asíncrona sucede que

$$I_\mu \gg I_{Fe}$$

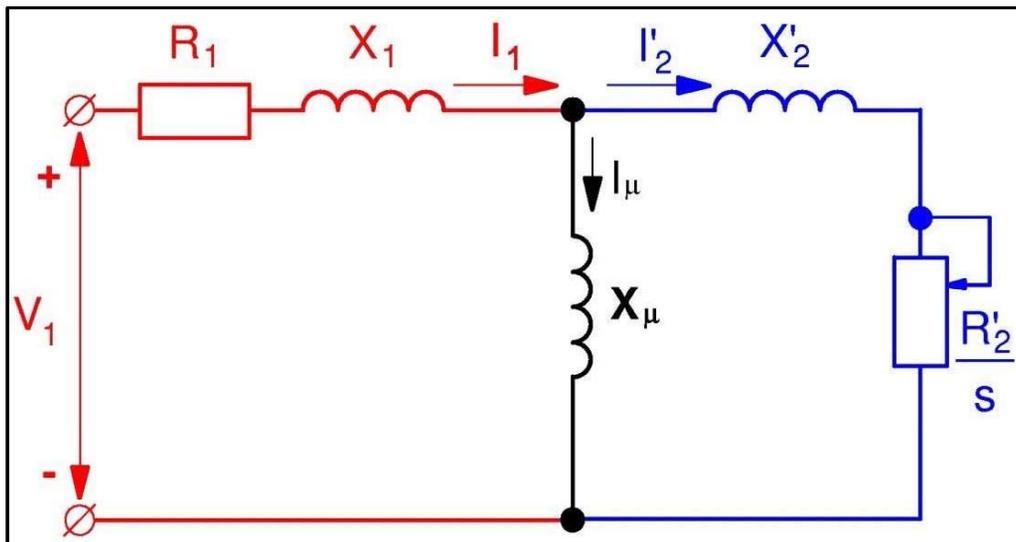
la corriente de vacío I_0 es prácticamente perpendicular a la f.e.m. del rotor E'_2 :

$$I_\mu \gg I_{Fe} \rightarrow \bar{I}_0 \approx \bar{I}_\mu \rightarrow \varphi_0 \approx 90^\circ$$

- Cuando el deslizamiento s es pequeño, el ángulo φ_2 es muy pequeño ($\cos \varphi_2 \approx 1$; $\varphi_2 \approx 0$), luego la corriente del rotor I'_2 es prácticamente paralela a la f.e.m. del rotor E'_2 .
- Luego, las corrientes I_0 e I'_2 son casi perpendiculares (ver la figura anterior) y sucede que

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 + \bar{I}'_2 \Rightarrow I_1^2 \approx I_0^2 + I_2'^2$$

Funcionamiento a I_1 y f_1 constantes



(Se desprecia I_{Fe} frente a I_{μ})

$$I'_2 = \frac{X_{\mu}}{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X'_2 + X_{\mu})^2}} I_1 \quad I_{\mu} = \frac{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s}\right)^2 + X'_2{}^2}}{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X'_2 + X_{\mu})^2}} I_1$$

$$M = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{P_a}{\frac{2\pi}{60} n_1}$$

$$P_a = m_1 I_2'^2 \frac{R'_2}{s}$$

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{X_{\mu}^2}{\left(\frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X'_2 + X_{\mu})^2} I_1^2$$

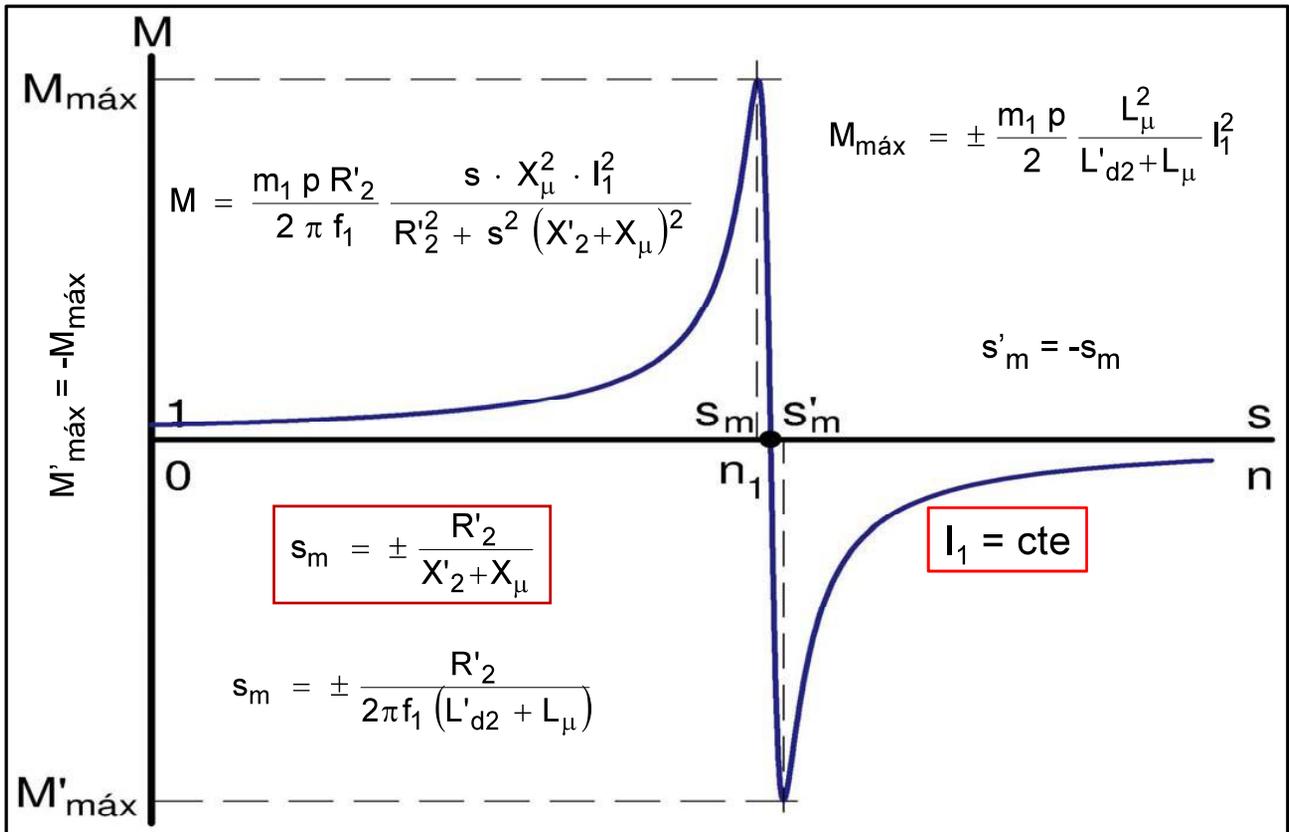
$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p}$$

$$M = \frac{m_1 p R'_2}{2\pi f_1} \frac{s \cdot X_{\mu}^2}{R'_2{}^2 + s^2 (X'_2 + X_{\mu})^2} I_1^2$$

$$s_m = \pm \frac{R'_2}{X'_2 + X_{\mu}} = \pm \frac{R'_2}{2\pi f_1 (L'_{d2} + L_{\mu})} \Rightarrow f_{2m} = s_m \cdot f_1 = \pm \frac{R'_2}{2\pi (L'_{d2} + L_{\mu})}$$

$$M_{\text{máx}} = \pm \frac{m_1 p}{2} \frac{L_{\mu}^2}{L'_{d2} + L_{\mu}} I_1^2$$

Curva de par a intensidad I_1 y frecuencia f_1 constantes



- La figura anterior muestra la curva de par de una máquina asíncrona cuando se la alimenta de tal forma que para todas las velocidades se mantienen constantes el valor eficaz I_1 y la frecuencia f_1 de la corriente del estator.
- La curva de par ahora es completamente simétrica. En valor absoluto los valores máximos del par para la máquina actuando como motor $M_{\text{máx}}$ y como generador $M'_{\text{máx}}$ son iguales ($M'_{\text{máx}} = -M_{\text{máx}}$).
- Los dos máximos de la curva de par ($M'_{\text{máx}}$ y $M_{\text{máx}}$) se originan con valores de deslizamiento de igual valor absoluto y signos opuestos ($s'_m = -s_m$).
- El par depende cuadráticamente del valor eficaz de la corriente I_1 .
- El par máximo $M_{\text{máx}}$ depende del cuadrado de la corriente I_1 y no depende de la resistencia del rotor R'_2 ni de la frecuencia f_1 del estator.
- Los deslizamientos de par máximo, s_m y s'_m , son proporcionales a la resistencia del rotor R'_2 , no dependen de la corriente del estator I_1 y son inversamente proporcionales a la frecuencia del estator f_1 .
- El par de arranque es muy pequeño. Por esta causa, no se puede usar este sistema de alimentación en sistemas de frecuencia f_1 fija. La alimentación en corriente se usa para sistemas de frecuencia f_1 variable.
- Comparando la expresión que permite calcular el deslizamiento de par máximo s_m con las que han aparecido en los casos anteriores, es fácil ver que ahora este es muy pequeño. El par máximo se produce a un deslizamiento extraordinariamente pequeño.

- Con alimentación en corriente sucede que la corriente magnetizante I_μ aumenta a medida que disminuye el deslizamiento s . Esto quiere decir que a medida que disminuye el deslizamiento s aumenta el flujo por polo Φ_M y, consecuentemente, la f.e.m. E_1 y la tensión V_1 del estator.
- Sea $I_{\mu\text{sat}}$ la corriente magnetizante (que se produce cuando el deslizamiento es s_{sat} y la frecuencia del rotor es $f_{2\text{sat}}$) a partir de la cual el flujo es suficientemente alto como para que la saturación de la máquina sea apreciable. Esto significa que la máquina se considerará saturada cuando el deslizamiento s adopte valores inferiores a s_{sat} o la frecuencia del rotor f_2 sea inferior a $f_{2\text{sat}}$:

$$I_{\mu\text{sat}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s_{\text{sat}}}\right)^2 + X_2'^2}}{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s_{\text{sat}}}\right)^2 + (X_2' + X_\mu)^2}} I_1 \Rightarrow s_{\text{sat}} = \frac{R'_2 \sqrt{I_1^2 - I_{\mu\text{sat}}^2}}{\sqrt{I_{\mu\text{sat}}^2 (X_\mu + X_2')^2 - I_1^2 X_2'^2}}$$

$$f_{2\text{sat}} = f_1 \cdot s_{\text{sat}} = \frac{R'_2 \sqrt{I_1^2 - I_{\mu\text{sat}}^2}}{2 \pi \sqrt{I_{\mu\text{sat}}^2 (L_\mu + L'_{d2})^2 - I_1^2 L_{d2}'^2}}$$

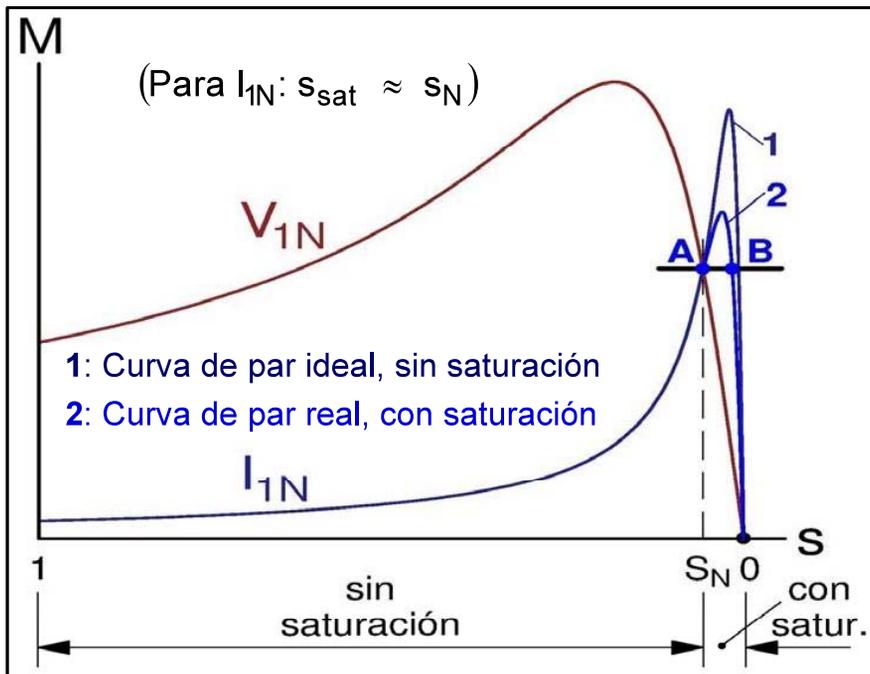
- El deslizamiento s_{sat} y la frecuencia del rotor $f_{2\text{sat}}$ dependen de la corriente I_1 . La frecuencia del rotor a la cual la máquina empieza a saturarse $f_{2\text{sat}}$ es independiente de la frecuencia del estator f_1 .
- Se suele usar como criterio para determinar la corriente $I_{\mu\text{sat}}$ el elegir aquella corriente de excitación I_μ que hace que la tensión del estator V_1 sea igual a la asignada V_{1N} (es decir, se supone que la máquina empieza a saturarse cuando su tensión supera a V_{1N}). Por lo tanto, se puede adoptar este criterio:

$$I_{\mu\text{sat}} \approx I_0$$

- En la figura siguiente se han dibujado en la misma gráfica dos curvas de par de la máquina asíncrona funcionando como motor: una alimentada a corriente I_1 y frecuencia f_1 asignadas (I_{1N} y f_{1N}) y otra alimentada con tensión V_1 y frecuencia f_1 asignadas (V_{1N} y f_{1N}). En el punto de corte **A** de ambas curvas la máquina funciona con los valores asignados V_{1N} de tensión, I_{1N} de corriente y f_{1N} de frecuencia y, por lo tanto, está en condiciones asignadas. El deslizamiento en **A** será pues s_N . Como en este caso, este es el deslizamiento en el que la máquina alcanza la tensión V_{1N} , esto significa que cuando la máquina se alimenta con la corriente asignada I_{1N} , el deslizamiento de saturación es el asignado:

$$I_1 = I_{1N} \rightarrow s_{\text{sat}} = s_N$$

Efecto de la saturación sobre la curva de par a I_1 y f_1 ctes. Funcionamiento como motor.



- Se acepta que, con alimentación con corriente I_{1N} constante, la saturación empieza a ser alta para deslizamientos s inferiores al asignado s_N .
- La máquina funciona en el punto **A** ya que en **B** está demasiado saturada y la tensión V_1 es muy alta.
- **A** es inestable, luego la máquina asíncrona sólo puede ser alimentada con una fuente de corriente si funciona en bucle cerrado de velocidad.

$$s_{sat} = \frac{R'_2 \sqrt{I_1^2 - I_{\mu sat}^2}}{\sqrt{I_{\mu sat}^2 (X_\mu + X'_2)^2 - I_1^2 X_2'^2}}$$

$$f_{2sat} = \frac{R'_2 \sqrt{I_1^2 - I_{\mu sat}^2}}{2 \pi \sqrt{I_{\mu sat}^2 (L_\mu + L'_{d2})^2 - I_1^2 L_{d2}^2}}$$

- Por tanto, funcionando a corriente asignada I_{1N} constante, la saturación empieza a ser alta para deslizamientos s inferiores al asignado s_N .
- Esto significa que, con I_{1N} constante, a la derecha del punto **A** la máquina se satura, tanto más cuanto más a la derecha nos movamos, lo cual reduce el valor de X_μ (X_μ deja de poderse considerar constante). Por lo tanto, como se muestra en la figura la curva real de funcionamiento será la **2** (con X_μ variable) y no la **1** (con X_μ constante).
- Hay dos puntos de la curva de par a I_1 constante donde el motor da el mismo par M . Uno de estos puntos está en la zona estable (para deslizamientos inferiores al de par máximo s_m) y otro en la zona inestable (para deslizamientos superiores a s_m). En la figura se muestra esto para el caso de par nominal M_N que, para funcionamiento con I_{1N} constante, puede producirse en los puntos **A** y **B**.
- El deslizamiento en la zona estable (punto **B**) es pequeño y la máquina está muy saturada. Esto origina una distribución anómala del campo magnético en el entrehierro, un aumento importante de las pérdidas en el hierro y una tensión estática V_1 grande, superior a la asignada V_{1N} .
- Por esta razón, cuando la máquina está alimentada por una fuente de corriente se la hace funcionar en la zona inestable (punto **A**), lo que obliga a emplear un sistema de control en lazo cerrado de velocidad que la permita funcionar permanente en la zona inestable.

CURVA DE PAR A I_1 Y f_1 CONSTANTES. RECAPITULACIÓN

Cuando una máquina asíncrona funciona alimentada con una fuente que proporciona una corriente de valor eficaz I_1 y de frecuencia f_1 constantes, sucede que el flujo por polo Φ_M aumenta a medida que disminuye el deslizamiento s . Por lo tanto, con deslizamientos pequeños la máquina tiene un campo magnético elevado que hace que se sature excesivamente y que el valor eficaz de la tensión del estator V_1 supere a su valor asignado V_{1N} . En este tipo de funcionamiento también sucede que el deslizamiento de par máximo s_m es muy pequeño.

El valor del deslizamiento s_{sat} , por debajo del cual la máquina se satura excesivamente, depende de I_1 y de f_1 y se corresponde con una frecuencia en el rotor f_{2sat} , que depende I_1 , pero no de f_1 .

Se suele considerar que la máquina se empieza a saturar excesivamente cuando su campo magnético supera al que da lugar a la tensión asignada V_{1N} cuando la frecuencia f_1 es la asignada f_{1N} . Por lo tanto, la corriente magnetizante de la máquina cuando se empieza a saturar en exceso $I_{\mu sat}$ se la toma igual a la corriente de vacío I_0 .

La figura de la página anterior representa el caso de una máquina cuya fuente de corriente proporciona los valores asignados de la corriente I_{1N} y de la frecuencia f_{1N} . Como ya hemos indicado, si la frecuencia es f_{1N} , la máquina comienza a saturarse en el punto de funcionamiento donde la tensión es la asignada V_{1N} . En consecuencia, este punto será el de corte de las curvas del par funcionando a I_{1N} y f_{1N} constantes, por un lado, y a V_{1N} y f_{1N} constantes, por otro. En este punto la máquina está con V_{1N} , I_{1N} y f_{1N} ; es decir, está en condiciones asignadas y su deslizamiento s será el asignado s_N . Luego, en este caso de funcionamiento a I_{1N} y f_{1N} constantes sucede que: $s_{sat} = s_N$.

Cuando la máquina se satura de forma apreciable la inductancia magnetizante L_μ no permanece constante y esto hace que la curva de par para deslizamientos pequeños se aparte de la teórica, que se calcula suponiendo que L_μ fuera constante. Esto se muestra en la figura de la página anterior para el caso de funcionamiento a I_{1N} y f_{1N} constantes. La curva 1 es la ideal, suponiendo que la saturación no afecta al parámetro L_μ , y la curva 2 es la curva real, teniendo en cuenta el efecto de la saturación sobre L_μ .

De todo lo anterior se deduce que no interesa que la máquina funcione con deslizamientos muy pequeños porque la alta saturación aumenta mucho las pérdidas magnéticas y la distribución del campo magnético se deforma y da lugar a pares indeseables.

Esto significa que de los dos puntos de la curva de par que producen el mismo par no se va a elegir el de la zona estable (deslizamientos inferiores a s_m), como cuando la máquina se alimenta con una fuente de tensión, sino el de la zona inestable (deslizamientos superiores a s_m). De todos modos, dado que en este caso s_m es muy pequeño, no estamos hablando de deslizamientos desmesuradamente grandes. Esto se muestra en la figura de la página anterior para el caso particular de alimentación con I_{1N} y f_{1N} constantes.

El hecho de estar trabajando en la zona inestable de la curva de par obliga que la fuente de corriente que alimenta a la máquina funcione en lazo cerrado de velocidad. De esta manera, es este sistema de control de la velocidad el que consigue el que la máquina pueda permanecer funcionando en un punto que sería inestable sin este lazo cerrado de control.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ALGER, P. L. 1970. *Induction machines. Their behavior and uses*. 2ª edición. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
- [2] APARICIO MARZO, J. L. 1987. *Criterios de diseño de convertidores estáticos para accionamientos regulados en corriente alterna con motores de inducción*. Santiago de Compostela. Saber Hoy, S.A. de Ediciones.
- [3] BOSE, B. K. 1986. *Power electronics and AC drives*. New Jersey - U.S.A. Prentice-Hall.
- [4] CHAPMAN. 2005. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [5] CORTES CHERTA. 1994. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. 5 tomos*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [6] FITZGERALD, KINGSLEY Y UMANS. 2004. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [7] FAURE BENITO. 2000. *Máquinas y accionamientos eléctricos*. Madrid: Colegio oficial de ingenieros navales y oceánicos.
- [8] FRAILE MORA, J. 2015. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L.
- [9] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas*. Moscú: Editorial Mir.
- [10] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas*. Moscú: Editorial Mir.
- [11] LANGSDORF. 1968. *Teoría de las máquinas de corriente alterna*. Madrid. Editorial Castillo D.L.
- [12] LEONHARD, W. 1985. *Control of electrical drives*. Berlin. Springer-Verlag.
- [13] MURPHY, J. M. D. & TURNBULL, F. G. 1988. *Power electronic control of AC motors*. Oxford - Gran Bretaña. Pergamon Press.
- [14] SANZ FEITO, JAVIER. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Education.
- [15] SERRANO IRIBARNEGARAY, L. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [16] SUÁREZ CREO, J.M. y MIRANDA BLANCO, B.N. 2006. *Máquinas eléctricas. Funcionamiento en régimen permanente*. Santiago de Compostela: Tórculo Edicións, S.L.
- [17] WILDI, T. 2007. *Máquinas eléctricas y sistemas de potencia*. México: Pearson Educación.

ARRANQUE DE MOTORES ASÍNCRONOS

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

CONDICIÓN DE ARRANQUE

- El **arranque** es el proceso de puesta en marcha de un motor que lo lleva desde una velocidad nula a la del punto de funcionamiento estable que corresponda al par resistente de la carga que tiene que mover.
- Para que pueda realizarse esta maniobra debe cumplirse la **condición de arranque**: durante el arranque el par del motor debe ser superior al par resistente. De no cumplirse esta condición, el par motor es insuficiente para mover la carga mecánica que tiene acoplada y no se puede producir el arranque.

LIMITACIONES EN LA CORRIENTE DE ARRANQUE

- En el instante de iniciar el arranque, cuando la velocidad todavía es nula y el deslizamiento entonces vale 1, la corriente que demanda el motor es varias veces superior a la asignada. Esta corriente elevada puede provocar caídas de tensión en la instalación eléctrica que alimenta al motor afectando a otros aparatos conectados a ella. Por esta razón existen normas que establecen las máximas corrientes de arranque permitidas (por ejemplo, la ITC-BT-47).
- Esto obliga a utilizar en muchas ocasiones procedimientos que reduzcan la corriente de línea que se demanda a la red eléctrica durante el arranque con respecto a la que circula en el arranque directo.

ARRANQUE DIRECTO (1)

- Este método de arranque es el más sencillo de todos y se emplea en motores de pequeña potencia (o en motores grandes si están conectados a una red eléctrica independiente, de tal manera que su corriente de arranque no afecte a otros consumidores).
- Consiste en arrancar el motor simplemente conectándolo a su tensión asignada V_{1NL} .
- En este método de arranque (y también en los de tensión reducida, que se van a estudiar más adelante) la corriente del rotor reducida al estator I'_{2a} va a ser lo suficientemente grande comparada con la de vacío I_0 como para despreciar esta última.

Por lo tanto, se va a considerar que la corriente de arranque I_a (que circula por el estator) es prácticamente igual a la del rotor reducida al estator:

$$I'_{2a} \gg I_0 \Rightarrow I_a \approx I'_{2a}$$

ARRANQUE DIRECTO (2)

- **Corriente de arranque directo:**

$$I_a \approx I'_{2a} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{1}\right)^2 + X_{cc}^2}} \Rightarrow I_a = \frac{V_{1N}}{\sqrt{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}}$$

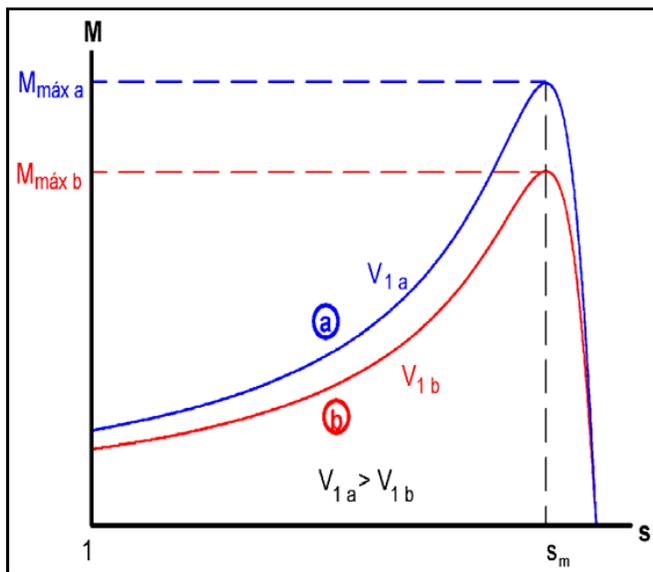
Estrella: $I_{aL} = I_a$ **Triángulo:** $I_{aL} = \sqrt{3} \cdot I_a$

- **Par de arranque directo** (par con $s = 1$ y $V_1 = V_{1N}$):

$$M_a = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \cdot \frac{V_{1N}^2}{R_{cc}^2 + X_{cc}^2} = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\Omega_1} \cdot I_{2a}^2$$

ARRANQUES CON TENSIÓN REDUCIDA

- Existen varios procedimientos de arranque que consisten en alimentar al motor con una tensión inferior a la asignada en el momento del arranque para después, cuando el rotor ya está girando, ir la aumentando hasta alcanzar su valor asignado.



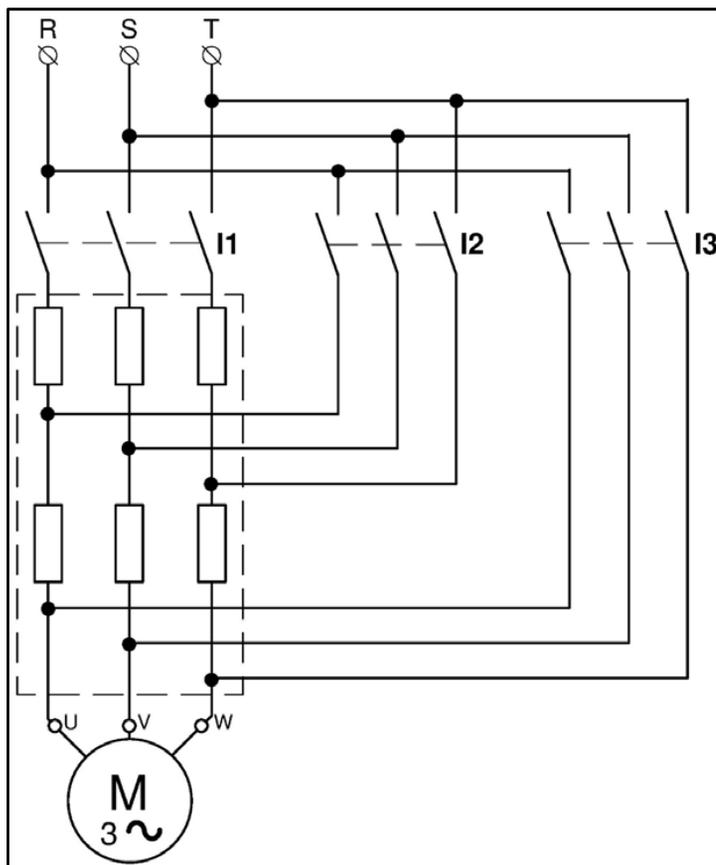
- La corriente de arranque disminuye, pero también el par de arranque. Luego, hay que comprobar que se cumple la condición de arranque. Por esta razón, estos procedimientos de arranque sólo se pueden utilizar si el motor se arranca sin carga o con cargas mecánicas que no ejerzan un par resistente elevado a bajas velocidades.

ARRANQUE POR INSERCIÓN DE IMPEDANCIAS EN EL ESTATOR

Es un método de arranque con tensión reducida.

En este circuito la maniobra de arranque consiste en:

- Cerrar el interruptor **I1** con los interruptores **I2** e **I3** abiertos: *arranque a tensión reducida (con toda la impedancia en serie con el estator).*
- Cerrar el interruptor **I2**: *se deja solamente una fracción de la impedancia en serie, lo que aumenta la tensión del estator.*
- Cerrar el interruptor **I3**: *el motor recibe la totalidad de la tensión de la red.*



CÁLCULO DEL ARRANQUE POR INSERCIÓN DE IMPEDANCIAS EN EL ESTATOR (1)

La impedancia que se conecta en serie con cada fase del estator en el momento de iniciar el arranque es:

$$\bar{Z}_e = R_e + jX_e$$

Luego, R_1 y X_1 se incrementan en R_e y X_e , respectivamente. Lo mismo sucede con R_{cc} y X_{cc} :

$$I_{aZ} \approx I'_{2aZ} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{(R_{cc} + R_e)^2 + (X_{cc} + X_e)^2}}$$

$$M_{aZ} = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \cdot \frac{V_{1N}^2}{(R_{cc} + R_e)^2 + (X_{cc} + X_e)^2} = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\Omega_1} \cdot I_{2aZ}^2$$

CÁLCULO DEL ARRANQUE POR INSERCIÓN DE IMPEDANCIAS EN EL ESTATOR (2)

Tanto en este arranque como en el directo, el motor conserva la misma conexión, estrella o triángulo. Por lo tanto:

$$\frac{I_{aZL}}{I_{aL}} = \frac{I_{aZ}}{I_a} = \frac{I'_{2aZ}}{I'_{2a}}$$

Se define el parámetro adimensional z (inferior a 1) así:

$$z = \sqrt{\frac{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}{(R_{cc} + R_e)^2 + (X_{cc} + X_e)^2}}$$

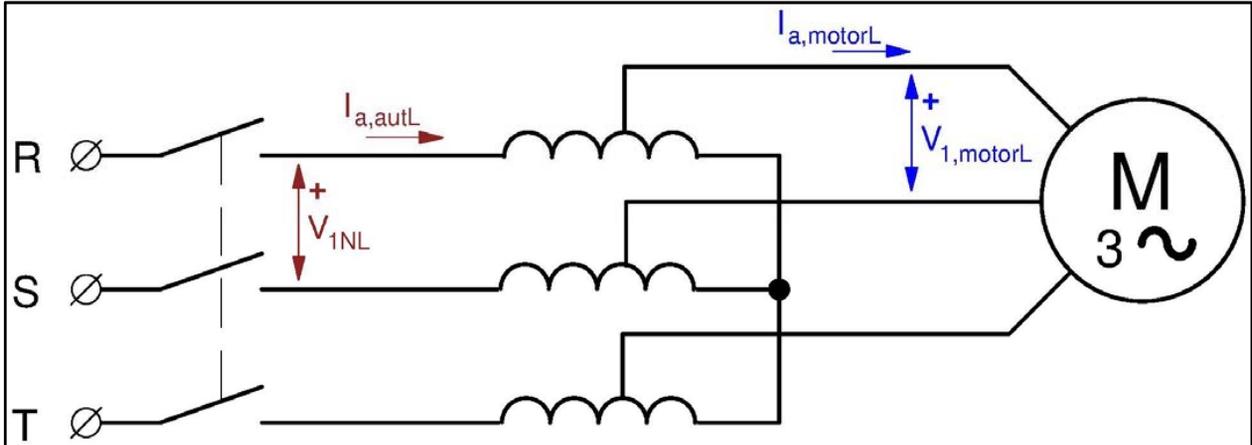
Luego:

$$I_{aZL} = z \cdot I_{aL}$$

$$M_{aZ} = z^2 \cdot I_a$$

ARRANQUE POR AUTOTRANSFORMADOR (1)

Se trata de un método de arranque con tensión reducida. El autotransformador suministra una tensión reducida $V_{1,motorL}$ al motor en el momento de arrancarlo. Cuando este ya empieza a girar, se le pasa a alimentar a su tensión asignada V_{1NL} .



$$x = \frac{V_{1,motorL}}{V_{1NL}} = \frac{V_{1,motor}}{V_{1N}}$$

$$I_{a,autL} = x^2 \cdot I_{aL}$$

$$M_{a,aut} = x^2 \cdot M_a$$

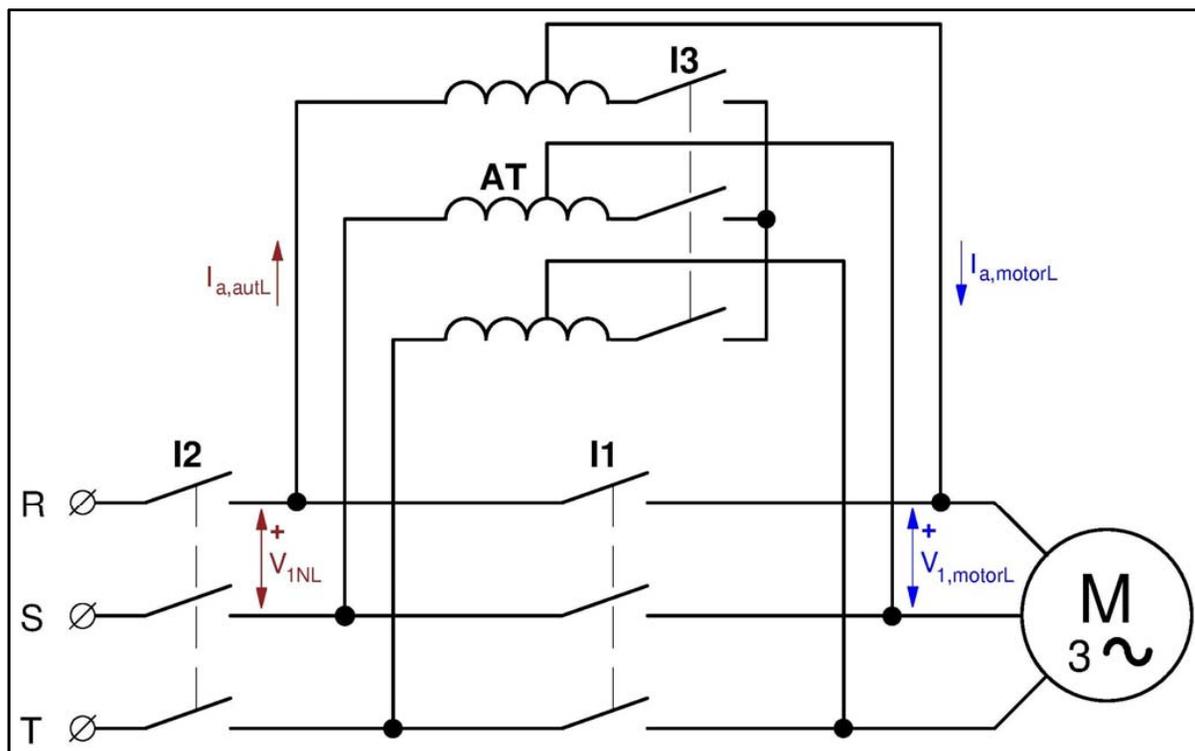
En el momento de arrancar el motor, el autotransformador le suministra una tensión del línea $V_{1,motorL}$, inferior a su tensión asignada V_{1NL} , lo que hace que la tensión de fase del motor sea $V_{1,motor} < V_{1N}$. En el arranque del motor, el autotransformador demanda una corriente de línea $I_{a,autL}$ y el motor consume una corriente de línea $I_{a,motorL}$, lo que hace que su corriente de fase sea $I_{a,motor}$

$$\text{Si } \boxed{x = \frac{V_{1,motorL}}{V_{1NL}}} = \frac{V_{1,motor}}{V_{1N}} = \frac{I_{a,autL}}{I_{a,motorL}} \rightarrow \begin{cases} I_{a,autL} = x \cdot I_{a,motorL} \\ x < 1 \end{cases}$$

Comparando con el arranque directo, se deduce que:

$$\frac{I_{a,motorL}}{I_{aL}} = \frac{I_{a,motor}}{I_a} = \frac{\frac{V_{1,motor}}{\sqrt{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}}}{\frac{V_{1N}}{\sqrt{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}}} = \frac{V_{1,motor}}{V_{1N}} = x \rightarrow \begin{cases} I_{a,motorL} = x \cdot I_{aL} \\ \boxed{I_{a,autL} = x^2 \cdot I_{aL}} \end{cases}$$

$$\frac{M_{a,aut}}{M_a} = \frac{\frac{m_1 R'_2}{2 \pi n_1 / 60} \frac{V_{1,motor}^2}{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}}{\frac{m_1 R'_2}{2 \pi n_1 / 60} \frac{V_{1N}^2}{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}} = \left(\frac{V_{1,motor}}{V_{1N}} \right)^2 = x^2 \rightarrow \boxed{M_{a,aut} = x^2 \cdot M_a}$$

ARRANQUE POR AUTOTRANSFORMADOR (2)

AT = Autotransformador trifásico

- 1) Teniendo previamente cerrado el interruptor **I3** y abierto el interruptor **I1** se cierra el interruptor **I2**. La máquina arranca a la tensión reducida que le proporciona el autotransformador trifásico **AT**.
- 2) Se abre el interruptor **I3**. El autotransformador **AT** deja de funcionar como tal y ahora se convierte en unas reactancias puestas en serie con cada fase del inducido. Las caídas de tensión en estas reactancias dan lugar a que el motor tenga mayor tensión que antes, pero aún está a una tensión inferior a la de la red.
- 3) Se cierra el interruptor **I1** (dejando abierto a **I3**). La máquina recibe la totalidad de la tensión de la red (es decir, queda a su tensión asignada) y acaba su arranque alcanzando una velocidad cercana a la de sincronismo.

ARRANQUE ESTRELLA-TRIÁNGULO (1)

- Es otro método de arranque con tensión reducida.
- El arranque estrella-triángulo sólo se puede utilizar si el motor está conectado a una red eléctrica cuya tensión de línea sea igual a la tensión asignada de fase del motor. Esto obliga a que *para que el motor funcione a su tensión asignada deba conectarse en triángulo*:

$$V_{1L} = V_{1N} \Rightarrow \text{Conexión triángulo para que: } V_1 = V_{1N}$$

- En este caso el arranque se realiza con el motor conectado en estrella. Cuando el motor ha adquirido cierta velocidad se conmutan las conexiones y se lo conecta en triángulo para que pase a funcionar con su tensión asignada.

ARRANQUE ESTRELLA-TRIÁNGULO (2)

- Al arrancar en estrella, la tensión de fase del motor ya no es la asignada sino $\sqrt{3}$ veces menor:

$$V_{1L} = V_{1N} \Rightarrow \text{Conexión estrella para que: } V_1 = \frac{V_{1L}}{\sqrt{3}} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{3}}$$

- Esto provoca que la corriente de fase en este arranque $I_{a\lambda}$ sea $\sqrt{3}$ veces menor que la del arranque directo, I_{aL} . Por otra parte, en este caso el arranque directo corresponde a la conexión triángulo, donde la corriente de arranque de fase I_a es $\sqrt{3}$ veces menor que la corriente de línea I_{aL} ; mientras que en la conexión estrella las corrientes de arranque de fase y de línea son iguales y ambas las denominamos $I_{a\lambda}$. Además, el par de arranque es proporcional al cuadrado de la tensión de fase del motor.

En consecuencia, tanto la corriente de línea en el arranque estrella-triángulo $I_{a\lambda}$ como el par de arranque correspondiente $M_{a\lambda}$ son iguales a la tercera parte de sus respectivos valores en el arranque directo:

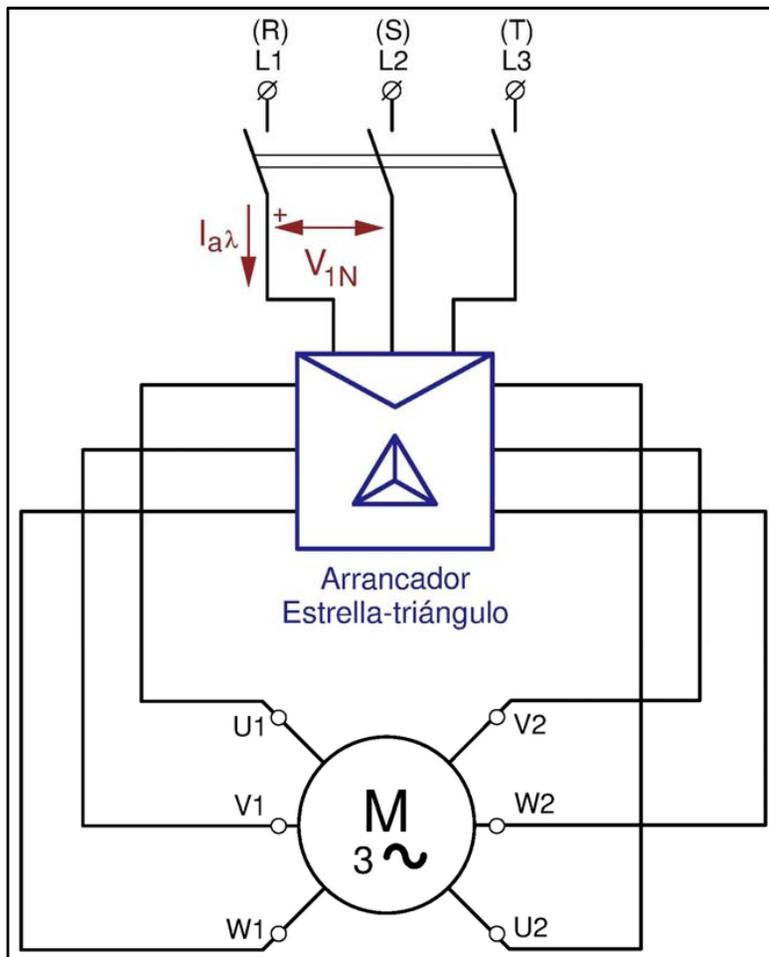
$$\left. \begin{array}{l} I_{a\lambda} = I_a / \sqrt{3} \\ I_a = I_{aL} / \sqrt{3} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{I_{a\lambda} = \frac{I_{aL}}{3}} ; \boxed{M_{a\lambda} = \frac{M_a}{3}}$$

ARRANCADOR ESTRELLA-TRIÁNGULO

La figura muestra la forma de conectar un **arrancador estrella-triángulo**, el cual permite conectar el motor tanto en estrella como en triángulo.

El motor se arranca en estrella y poco tiempo más tarde, cuando ya ha alcanzado cierta velocidad, se le conmuta a triángulo.

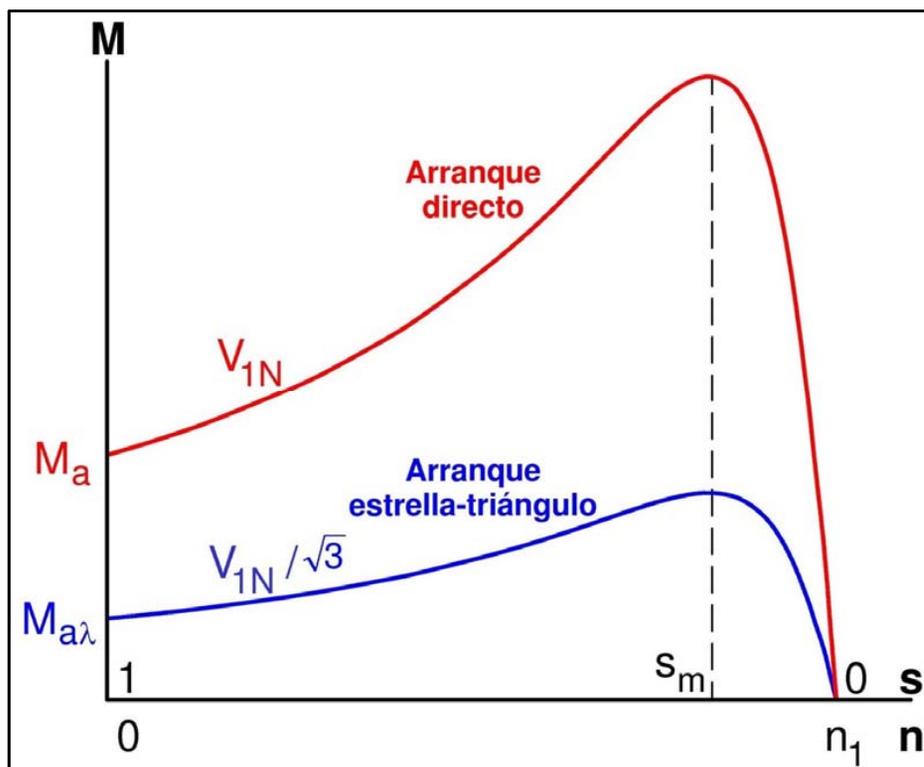
En algunos arrancadores la conmutación de estrella a triángulo se realiza automáticamente y en otros se efectúa de forma manual.



CURVAS DE PAR EN EL ARRANQUE ESTRELLA-TRIÁNGULO

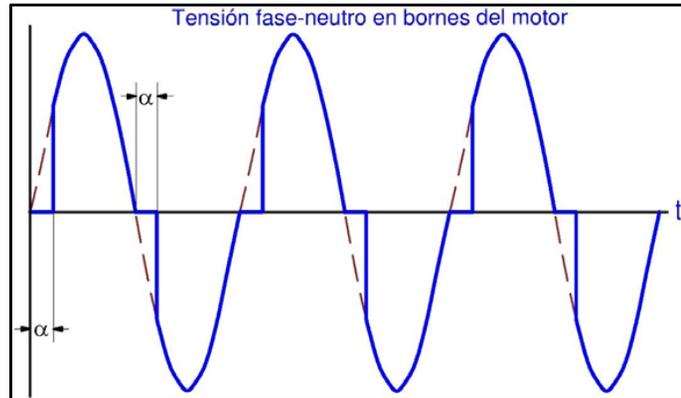
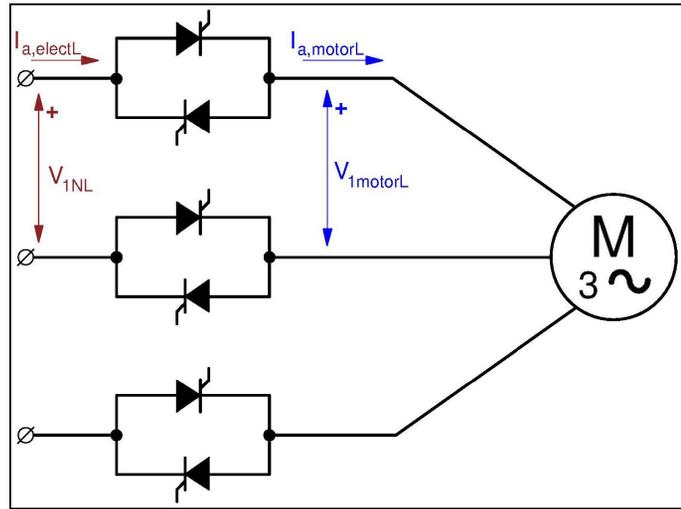
La figura muestra las curvas de par cuando el motor está conectado en **triángulo** (*arranque directo*) y cuando está en **estrella** (*arranque estrella-triángulo*).

En **triángulo** la tensión de fase es igual a la asignada V_{1N} y en **estrella** es $\sqrt{3}$ veces menor.



ARRANCADOR ELECTRÓNICO O ESTÁTICO (1)

- Es un método de arranque con tensión reducida.
- Un arrancador electrónico permite variar el valor eficaz de la tensión del estator durante el arranque.
- La frecuencia se mantiene constante.
- La onda de tensión se deforma.



$$x = \frac{V_{1,motorL}}{V_{1NL}} = \frac{V_{1,motor}}{V_{1N}}$$

$$I_{a,electL} = x \cdot I_{aL}$$

$$M_{a,elect} = x^2 \cdot M_a$$

Estos arrancadores constan de un puente con tres parejas de interruptores electrónicos (tiristores, transistores, GTOs, etc.) en oposición. Modificando el ángulo de disparo α de estos interruptores electrónicos se controla el valor eficaz de la tensión que se suministra al motor. Estos arrancadores deforman la tensión, que ya no es perfectamente sinusoidal, pero consiguen un control continuo y fácil del valor eficaz de la tensión que recibe el motor.

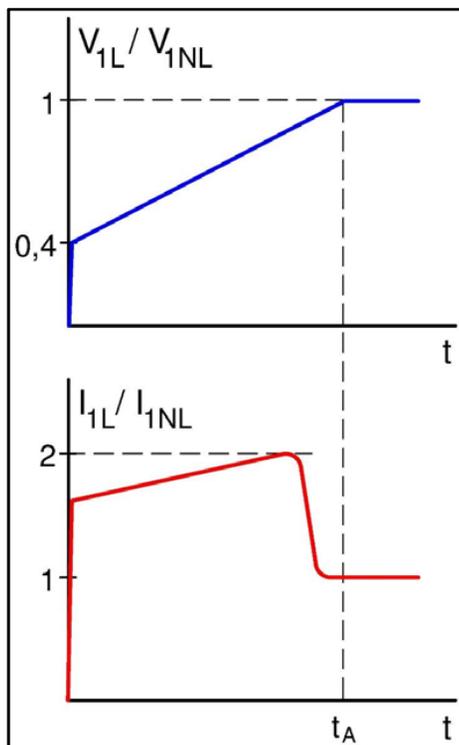
El motor recibe una tensión de línea $V_{1,motorL}$ que da lugar a una tensión $V_{1,motor}$ en cada una de sus fases. En el arranque la corriente de línea en el motor $I_{a,motorL}$ es la misma que la que se demanda a la red $I_{a,electL}$ ($I_{a,electL} = I_{a,motorL}$) y la corriente de fase del motor es $I_{a,motor}$.

Si ahora x se define así: $x = \frac{V_{1,motorL}}{V_{1NL}} = \frac{V_{1,motor}}{V_{1N}} \quad (x < 1)$

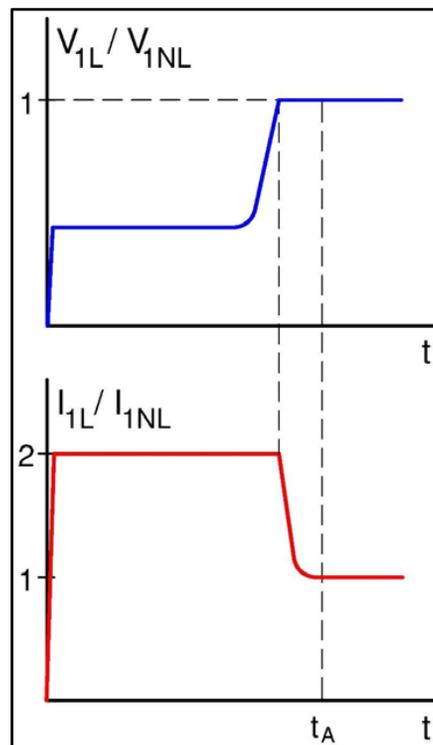
Comparando con el arranque directo, se deduce que:

$$\frac{I_{a,motorL}}{I_{aL}} = \frac{I_{a,motor}}{I_a} = \frac{V_{1,motor}}{V_{1N}} = x; \quad I_{a,electL} = I_{a,motorL} \rightarrow I_{a,electL} = x \cdot I_{aL}$$

$$\frac{M_{a,elect}}{M_a} = \left(\frac{V_{1,motor}}{V_{1N}} \right)^2 = x^2 \rightarrow M_{a,elect} = x^2 \cdot M_a$$

ARRANCADOR ELECTRÓNICO O ESTÁTICO (2)

**Arranque por rampa
de tensión**



**Arranque por regulación
de la corriente**

- El arrancador puede suministrar una tensión que durante el arranque aumenta desde un valor inicial hasta la tensión asignada del motor siguiendo una rampa (relación lineal) ajustable. Normalmente, el arrancador controla la corriente del motor durante el arranque, de forma que si es demasiado elevada (2,5 a 4,5 veces I_{1NL}) reduce la tensión transitoriamente.

Otra posibilidad es que el arrancador proporcione una tensión tal que la corriente del motor sea constante durante el arranque hasta que esto requiera que la tensión sea igual a la asignada V_{1NL} . A partir de ese momento, el arranque prosigue a tensión constante e igual a la asignada.

- Una vez que ha terminado el arranque, el arrancador queda fuera de servicio y el motor se conecta directamente a la red mediante un contactor.

Algunos fabricantes recomiendan, sin embargo, que cuando el motor tenga que mover cargas pequeñas, muy inferiores a la asignada, se lo alimente a tensión reducida mediante el arrancador, ya que así se ahorra energía y se mejora el factor de potencia.

Esto se basa en que al reducir la tensión conservando la misma frecuencia se reduce el campo magnético del motor, con lo que se reduce la potencia reactiva que consume y las pérdidas en el hierro. También se reduce el par que puede proporcionar el motor, pero esto no importa porque está moviendo una carga pequeña que demanda un par reducido.

ARRANQUE POR INTRODUCCIÓN DE RESISTENCIAS EN SERIE CON EL ROTOR (1)

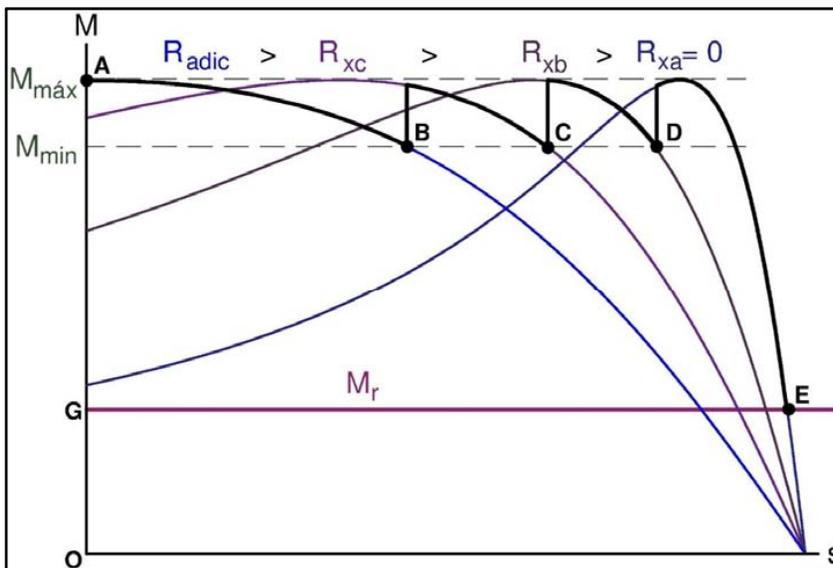
- Este sistema de arranque sólo se puede usar en motores de rotor bobinado y consiste en conectar una resistencia R_x en serie con cada una de las fases del rotor. Una vez arrancado el motor, se va disminuyendo progresivamente el valor de estas resistencias hasta que el rotor queda cortocircuitado.
- Este método de arranque es mejor que los de tensión reducida porque, además de reducir la corriente de arranque, se consigue aumentar el par de arranque. Incluso se puede conseguir el par máximo en el arranque.

$$I'_{2aR} = \frac{V_1}{\sqrt{(R_1 + R'_2 + R'_x)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{V_1}{\sqrt{(R_{cc} + R'_x)^2 + X_{cc}^2}}$$

Estrella: $I'_{2aRL} = I'_{2aR}$

Triángulo: $I'_{2aRL} = \sqrt{3} \cdot I'_{2aR}$

ARRANQUE POR INTRODUCCIÓN DE RESISTENCIAS EN SERIE CON EL ROTOR (2)

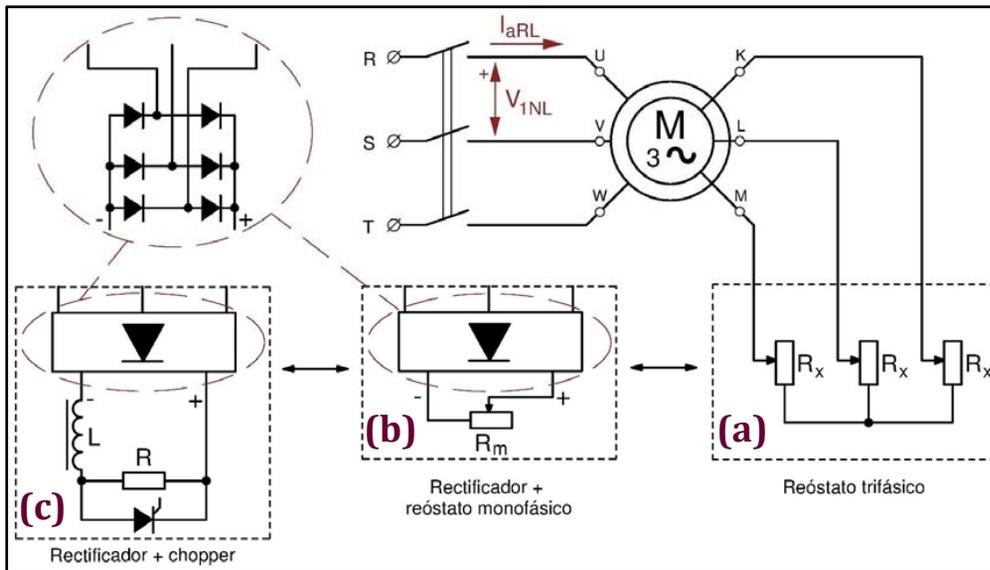


Esta figura muestra el proceso de arranque de un motor de rotor bobinado en el que se utiliza un reóstato trifásico que permite dar cuatro valores distintos a R_x .

El mayor de estos valores es R_{adic} , que origina el par máximo en el arranque, y el menor ($R_{xa} = 0$) deja el rotor en cortocircuito.

El motor se arranca con $R_x = R_{adic}$ y se disminuye el valor de R_x cada vez que el par se reduce hasta un valor mínimo M_{min} predefinido (puntos **B**, **C** y **D**). Al final queda que $R_x = 0$ y con este valor se finaliza el arranque. De esta forma el par no baja de M_{min} durante el arranque. Esto hace que esta maniobra se produzca rápidamente porque se realiza con el motor proporcionando unos pares elevados.

SISTEMAS DE CONEXIÓN DE RESISTENCIAS VARIABLES EN SERIE CON LAS FASES DEL ROTOR



Variación de resistencia rotórica mediante un reóstato trifásico (a), un reóstato monofásico (b) y variación estática mediante un chopper (c)

El chopper consiste en un interruptor electrónico que se abre y cierra en rápida sucesión y de forma cíclica. Si está permanentemente cerrado la resistencia es cero y si permanece abierto la resistencia es R . Si se abre y cierra periódicamente la resistencia efectiva toma un valor intermedio entre 0 y R , dependiente de la fracción del tiempo que está abierto y que está cerrado.

En la figura superior se muestran varias formas de conectar resistencias variables en serie con las fases del rotor de una máquina asíncrona de anillos:

- a) El sistema más sencillo consiste en utilizar un reóstato trifásico variable, que está formado por tres resistencias idénticas R_x variables.
- b) Otro sistema consiste en utilizar una única resistencia variable R_m conectada al rotor a través de un rectificador trifásico de diodos.
- c) Una mejora del sistema anterior consiste en que al rectificador de diodos se conecte una resistencia R fija, pero un circuito electrónico -basado en un chopper- permite variar su valor efectivo.

Hay varios circuitos electrónicos que permiten hacer esto, uno de los cuáles es el mostrado en la figura superior. En este montaje se puede variar la resistencia efectiva en el lado de corriente continua del rectificador entre 0 y R , lo que se consigue modificando la fracción de tiempo en el que chopper está cerrado frente a la que está abierto.

ARRANQUES USANDO LOS SISTEMAS DE CONTROL DE VELOCIDAD

- En los motores asíncronos provistos de un equipo de control de velocidad, se puede utilizar este para arrancarlos.
- Lo habitual es que la instalación de estos equipos no se justifique económicamente si solo se van a emplear para el arranque.
- Si el motor se alimenta a través de un **convertidor de frecuencia**, el arranque se realiza aumentando de forma continua y paulatina la frecuencia en el estator f_1 a la vez que se varía la tensión (o la corriente) para que el flujo magnético no varíe durante toda la maniobra.

La frecuencia f_1 aumenta desde un valor reducido hasta su valor asignado, por lo tanto, la velocidad síncrona también va creciendo hasta su valor asignado y se consigue que la velocidad de giro aumente de forma suave y controlada.

Con este sistema se puede mantener un par elevado durante todo el arranque, por lo que este se realiza rápidamente, y se reduce la energía disipada en el arranque (como se verá más adelante).

- Si se trata de un motor especial que tiene la posibilidad de **variar su número de polos**; es decir, que puede funcionar con varias velocidades síncronas distintas (de 2 a 4 velocidades síncronas), la energía disipada en el arranque se reduce si esta maniobra se hace por etapas: se inicia con el n^o de polos más alto (velocidad síncrona más pequeña) y luego se bajando escalonadamente el número de polos hasta llegar a la velocidad síncrona más alta.

MOMENTO DE INERCIA Y MOMENTO GIRATORIO

- El **momento de inercia** de un accionamiento; es decir, el momento de inercia del conjunto motor-carga mecánica más el acoplamiento mecánico entre ambos, se designa J . En el S.I. se mide en $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.
- J se puede obtener así:

$$J = m R^2 = \frac{G D^2}{4 g}$$

m = Masa giratoria (kg)

R = Radio de inercia (m)

G = Peso de las masas giratorias (N)

D = Diámetro de inercia (m)

g = Aceleración de la gravedad (m/s^2)

- Se llama **momento giratorio** al producto GD^2 , que en algunos catálogos aparece como PD^2 .

TIEMPO DE ARRANQUE DE UN MOTOR ASÍNCRONO

- El proceso de arranque es un fenómeno cuyo análisis preciso requiere el uso de las ecuaciones del régimen transitorio. En un análisis simplificado se supone que el arranque se produce a una velocidad relativamente lenta, lo que permite considerarlo como una sucesión de distintos estados permanentes y, por lo tanto, se puede analizar empleando la curva de par de régimen permanente.
- Sea M el par del motor y M_r el par resistente de la carga que mueve:

$$\Delta M = M - M_r = J \frac{d\Omega}{dt} \quad dt = \frac{J}{\Delta M} d\Omega$$

Tiempo de arranque: $t_a = J \int_0^{\Omega} \frac{d\Omega}{\Delta M}$ ($\Omega = \Omega_1 (1 - s)$) $t_a = -J \Omega_1 \int_1^s \frac{ds}{\Delta M}$

(Ω = Velocidad final de equilibrio, a la cual corresponde el deslizamiento s)

- Tiempo que tarda el motor en pasar del deslizamiento s_A al s_B en el arranque:

$$t = -J \Omega_1 \int_{s_A}^{s_B} \frac{ds}{\Delta M}$$

FÓRMULA DE KLOSS

Fórmula de Kloss:

$$\frac{M}{M_{\text{máx}}} = \frac{2(1 + a s_m)}{\frac{s}{s_m} + 2 a s_m + \frac{s_m}{s}} \quad \left(a = \frac{R_1}{R'_2} \right)$$

Para **motores grandes:** $R_1 \ll R'_2 \rightarrow a = \frac{R_1}{R'_2} \approx 0$

Luego:

$$\frac{M}{M_{\text{máx}}} = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}}$$

ANÁLISIS DEL ARRANQUE DIRECTO EN VACÍO MEDIANTE LA FÓRMULA DE KLOSS (1)

- Aquí se estudia el arranque directo en vacío. Luego: $M_r = 0$ e $\Delta M = M$.
- Por lo tanto, el tiempo que tarda el motor en pasar del deslizamiento s_A al s_B en el arranque se calcula ahora así:

$$t = -J \Omega_1 \int_{s_A}^{s_B} \frac{ds}{M}$$

- Según la fórmula de Kloss (suponiendo que $R_1 \ll R'_2 \Rightarrow a = \frac{R_1}{R'_2} \approx 0$):

$$M = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}} M_{\text{máx}}$$

- Luego:

$$t = -\frac{J \Omega_1}{2 M_{\text{máx}}} \int_{s_A}^{s_B} \left(\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s} \right) ds \Rightarrow t = \frac{J \Omega_1}{2 M_{\text{máx}}} \left[\frac{s_A^2 - s_B^2}{2 s_m} + s_m \ln \frac{s_A}{s_B} \right]$$

ANÁLISIS DEL ARRANQUE DIRECTO EN VACÍO MEDIANTE LA FÓRMULA DE KLOSS (2)

- Si se quiere calcular el **tiempo de arranque** t_a se tiene que $s_A = 1$ y s_B es muy pequeño ($s_B \ll s_A$). Luego $s_A^2 - s_B^2 \approx 1$ y se deduce que:

$$t_a = \frac{J \Omega_1}{2 M_{\text{máx}}} \left[\frac{1}{2 s_m} - s_m \ln s_B \right] = \tau_{\text{mec}} \left[\frac{1}{4 s_m} - \frac{s_m}{2} \ln s_B \right]$$

En la práctica es habitual calcular t_a para un valor de $s_B = 0,05$

- La **constante de tiempo electromecánica** τ_{mec} es el tiempo de arranque si durante todo el proceso de arranque el par se mantuviera constante e igual al par máximo $M_{\text{máx}}$ y la velocidad final que se alcanzara fuera la de sincronismo Ω_1 :

$$\tau_{\text{mec}} = \frac{J}{M_{\text{máx}}} \int_0^{\Omega_1} d\Omega \Rightarrow \tau_{\text{mec}} = \frac{J \Omega_1}{M_{\text{máx}}}$$

- Este parámetro τ_{mec} permite comparar entre motores para decidir cuál es de arranque más rápido.

ENERGÍA PERDIDA DURANTE EL ARRANQUE

- Si se desprecian las pérdidas magnéticas y mecánicas y el arranque se realiza **en vacío**, sucede que la **energía perdida en el arranque** ΔW_a vale:

$$\Delta W_a = \frac{J\Omega_1^2}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R'_2} \right) = W_c (1 + a)$$

- *La energía perdida en el arranque ΔW_a es proporcional a la energía cinética W_c del sistema motor-carga a la velocidad de sincronismo Ω_1 ($W_c = J\Omega_1^2/2$).*
- *Todos los sistemas de arranque que no incluyan variación de la velocidad de sincronismo Ω_1 tienen la misma energía perdida ΔW_a en el arranque **en vacío**.*
- La energía perdida ΔW_a en un arranque **en carga** puede ser mucho mayor que en el arranque en vacío y depende, además de W_c , del método de arranque; ya que ΔW_a se reduce si el par del motor se mantiene elevado durante el arranque. *En carga, si t_a aumenta también se incrementa ΔW_a .*
- La energía perdida en el arranque ΔW_a se disipa en forma de calor y eleva la temperatura de la máquina.
- El arranque por inserción de resistencias en serie con el rotor tiene la ventaja de que gran parte de ΔW_a se disipa en el reóstato de arranque y no en el motor.

ARRANQUES PESADOS

- Un arranque es pesado si la constante de inercia total J es grande, lo que origina una energía perdida ΔW_a alta. Si estos arranques se producen de forma frecuente la temperatura del motor se puede elevar excesivamente.
- En motores normales se puede considerar que un arranque es pesado si la constante de inercia total J supera en dos veces a la constante de inercia del motor solo.
- Estos arranques mejoran si se utilizan motores de construcción especial, de más longitud y menos diámetro, que presentan menos inercia.
- Otra posibilidad es utilizar dos motores colocados sobre el mismo eje, cada uno de la mitad de la potencia total. El conjunto de estos dos motores presenta menos inercia que un único motor de la potencia total.
- Otra forma de reducir la energía perdida en estos arranques es usar algún sistema que disminuya la velocidad de sincronismo Ω_1 durante el arranque (lo que reduce la energía cinética W_c y, por tanto, ΔW_a). Por ejemplo, arrancar con un convertidor de frecuencia o utilizar un motor provisto de un devanado especial que permita modificar su número de polos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] APARICIO MARZO, J. L. 1987. *Criterios de diseño de convertidores estáticos para accionamientos regulados en corriente alterna con motores de inducción*. Santiago de Compostela. Saber Hoy, S.A. de Ediciones.
- [2] CHAPMAN. 2005. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [3] CORTES CHERTA. 1994. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. 5 tomos*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [4] FITZGERALD, KINGSLEY Y UMANS. 2004. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [5] FAURE BENITO. 2000. *Máquinas y accionamientos eléctricos*. Madrid: Colegio oficial de ingenieros navales y oceánicos.
- [6] FRAILE MORA, J. 2015. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L.
- [7] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas*. Moscú: Editorial Mir.
- [8] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas*. Moscú: Editorial Mir.
- [9] LANGSDORF. 1968. *Teoría de las máquinas de corriente alterna*. Madrid. Editorial Castillo D.L.
- [10] MERINO AZCÁRRAGA. 1995. *Arranque industrial de motores asíncronos: teoría, cálculo y aplicaciones*. Madrid: McGraw-Hill de Electrotecnologías.
- [11] PICHOR, J. 1969. *Curso de electrotecnia IV. Máquinas eléctricas: máquinas de inducción*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [12] RAMÍREZ VAZQUEZ, J. 1985. *101 esquemas de maniobra, mando y control*. Barcelona: Ediciones CEAC, S.A.
- [13] REVISTA TÉCNICA INDUSTRIAL. Nº 215. *Arrancadores electrónicos para motores asíncronos trifásicos*.
- [14] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2008. *Máquinas asíncronas*. Santander: UniCan: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/asincronas%20caminos.pdf>
- [15] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2017. *Frenado de máquinas asíncronas o de inducción*. Santander: Universidad de Cantabria: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Frenado asincronas Web.pdf>
- [16] SANZ FEITO, JAVIER. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Education.
- [17] SERRANO IRIBARNEGARAY, L. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [18] SUÁREZ CREO, J.M. y MIRANDA BLANCO, B.N. 2006. *Máquinas eléctricas. Funcionamiento en régimen permanente*. Santiago de Compostela: Tórculo Edicións, S.L.
- [19] WILDI, T. 2007. *Máquinas eléctricas y sistemas de potencia*. México: Pearson Educación.

ANEXOS

ANEXO A:

EJEMPLO DE CÁLCULO DE VARIOS ARRANQUES DE UN MOTOR ASÍNCRONO

Un motor asíncrono trifásico de rotor devanado tiene estas características:

$V_{1NL} = 400 \text{ V}$	Estator conectado en triángulo	$f_1 = 50 \text{ Hz}$
$R_1 \approx 0 \ \Omega$	$R'_2 = 0,23 \ \Omega$	$X_{cc} = 1 \ \Omega$
$m_i = \sqrt{2}$	$J = 0,8 \text{ kgm}^2$	$2p = 4 \text{ polos}$

Calcule la corriente de línea en el estator y el par cuando este motor se arranca mediante los siguientes métodos:

- a) Arranque directo.
- b) Añadiendo una resistencia de $2 \ \Omega$ en serie con cada fase del estator.
- c) Con un arrancador estrella-triángulo.
- d) Con un autotransformador que suministra al motor una tensión de línea de 200 V.
- e) Con un arrancador electrónico donde $x = 0,6$.
- f) Añadiendo en serie con cada fase del rotor una resistencia R_{adic} , de tal forma que el par máximo se produzca en el arranque. Calcule también el valor óhmico de R_{adic} .

Ahora se realiza el arranque directo de este motor estando en vacío:

- g) Hacer una estimación del tiempo de arranque en vacío de este motor hasta un deslizamiento $s_B = 0,05$. Para ello utilizar la expresión deducida de la fórmula de Kloss. Calcular también la energía perdida durante este arranque.
- h) Repetir el apartado anterior si el arranque en vacío se efectúa con el autotransformador del apartado d), el cual puede proporcionar tres tensiones diferentes. En este arranque la tensión va aumentando a medida que crece la velocidad del motor -y consecuentemente, disminuye el deslizamiento- de esta manera:

	I	II	III
Deslizamiento	$1 \geq s > 0,7$	$0,7 \geq s > 0,3$	$0,3 \geq s$
Tensión de línea	$V_{1LI} = V_{1,motorL} = 200 \text{ V}$	$V_{1LII} = 300 \text{ V}$	$V_{1LIII} = V_{1NL} = 400 \text{ V}$

- i) Suponga ahora que el devanado del estator de este motor posee la conexión Dahlander, lo cual permite variar su número de polos y, consecuentemente, su velocidad de sincronismo. En este caso este motor puede funcionar con 4 y con 8 polos.

Calcule la energía perdida en el arranque si esta maniobra se realiza a la tensión asignada y en dos etapas: comienza con la máquina teniendo 8 polos y, cuando, la velocidad aumenta hasta acercarse a la de sincronismo correspondiente a este número de polos, se conmuta a 4 polos y se termina el arranque con este nuevo número de polos.

SOLUCIÓN:

$$(V_{1N} = 400 \text{ V}; n_1 = 1500 \text{ r.p.m.}; \Omega_1 = 157,1 \text{ rad/s}; R_{cc} = 0,23 \Omega; m_v = m_i = \sqrt{2})$$

- a)** $(I_a = 390 \text{ A}); I_{aL} = 675 \text{ A}; M_a = 668 \text{ Nm}$
- b)** $(z = 0,420; I_{aZ} = 164 \text{ A}); I_{aZL} = 283 \text{ A}; M_{aZ} = 118 \text{ Nm}$
- c)** $I_{a\lambda} = 225 \text{ A}; M_{a\lambda} = 223 \text{ Nm}$
- d)** $(x = 0,5); I_{a,\text{aut}L} = 169 \text{ A}; M_{a,\text{aut}} = 167 \text{ Nm}$
- e)** $I_{a,\text{elect}L} = 405 \text{ A}; M_{a,\text{elect}} = 240 \text{ Nm}$
- f)** $(R'_{\text{adic}} = 0,77 \Omega; I_{aR} = 283 \text{ A}; s_m = 0,23; M_{\text{máx}} = 1528 \text{ Nm});$
 $R_{\text{adic}} = 0,385 \Omega; I_{aRL} = 490 \text{ A}; M_{aR} = 1528 \text{ Nm}$
- g)** $(\tau_{\text{mec}} = 0,082 \text{ s}); t_a = 0,12 \text{ s}; \Delta W_a = 9872 \text{ J}$
- h)** $(\tau_{\text{mecI}} = 0,328 \text{ s}; \tau_{\text{mecII}} = 0,146 \text{ s}; \tau_{\text{mecIII}} = 0,082 \text{ s};$
 $t_{\text{I}} = 0,195 \text{ s}; t_{\text{II}} = 0,078 \text{ s}; t_{\text{III}} = 0,025 \text{ s}); t_a = 0,298 \text{ s}; \Delta W_a = 9872 \text{ J}$
- i)** $(\Omega_{\text{II}} = 78,6 \text{ rad/s}; \Omega_{\text{III}} = 157,1 \text{ rad/s}; \Delta W_{a\text{I}} = 2471 \text{ J}; \Delta W_{a\text{II}} = 2465 \text{ J})$
 $\Delta W_a = 4936 \text{ J}$

SOLUCIÓN DETALLADA

Cuestiones preliminares

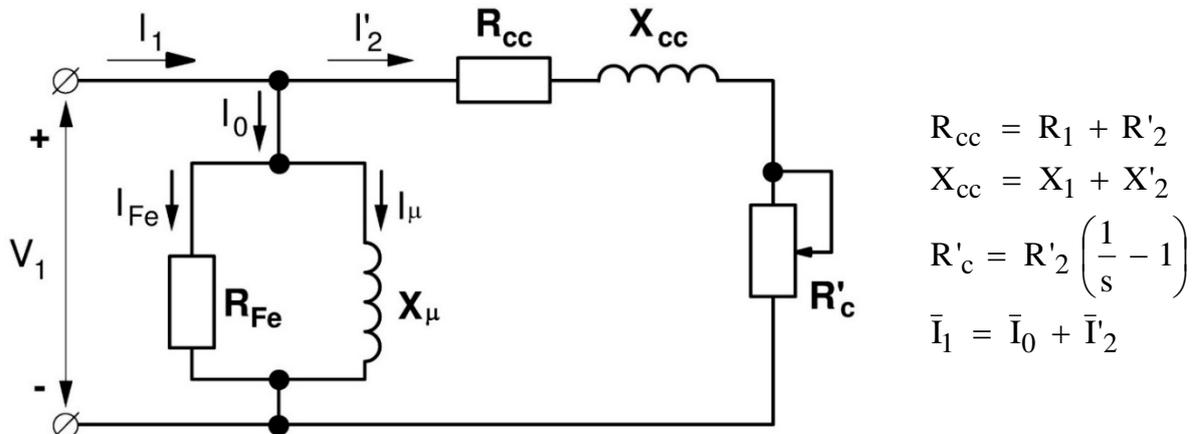


Fig. A1: Circuito equivalente aproximado de una máquina asíncrona

- Tensión asignada de fase, \$V_{1N}\$:

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_{1N} = V_{1NL} \Rightarrow \underline{V_{1N} = 400 \text{ V}}$$

- Velocidad de sincronismo (\$2p = 4\$ polos):

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} \Rightarrow \underline{n_1 = 1500 \text{ r.p.m.}}$$

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{2\pi \cdot 50}{2} \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 157,1 \text{ rad / s}}$$

- Resistencia \$R_{cc}\$:

Fig. A1: $R_{cc} = R_1 + R'_2 \Rightarrow \underline{R_{cc} = 0,23 \Omega}$

- En un motor de inducción de anillos sucede que las relaciones de transformación de tensiones \$m_v\$ y de corrientes \$m_i\$ son iguales:

$$\text{Motor de anillos} \Rightarrow m_v = m_i \Rightarrow \underline{m_v = m_i = \sqrt{2}}$$

- Si la corriente de vacío \$I_0\$ es despreciable frente a la corriente del estator \$I_1\$, se puede aceptar que esta última es igual a la corriente del rotor reducida al estator \$I'_2\$:

Fig. A1: $I_0 \ll I_1 \Rightarrow I_1 \approx I'_2 \tag{A.1}$

- Dada la conexión triángulo del estator, sus corrientes de línea \$I_{1L}\$ y de fase \$I_1\$ están relacionadas así:

$$\text{Conexión triángulo} \Rightarrow I_{1L} = \sqrt{3} I_1 \tag{A.2}$$

- Ecuaciones de la máquina asíncrona conectada a una tensión trifásica y con el rotor en cortocircuito:

El deslizamiento s de una máquina asíncrona girando a una velocidad de n r.p.m., lo que equivale a Ω rad/s, se define así:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{\Omega_1 - \Omega}{\Omega_1} \quad (\text{A.3})$$

Del circuito equivalente aproximado de la máquina asíncrona (Fig. A1) se obtiene que la corriente del rotor reducida al estator I'_2 vale:

(Fig. A1):

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} \quad (\text{A.4})$$

La ecuación del par M cuando la máquina funciona alimentada con una fuente de tensión alterna polifásica se calcula mediante esta fórmula:

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \cdot \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\Omega_1} I'^2_2 \quad (\text{A.5})$$

En esta máquina el número de fases del estator m_1 es tres; es decir: $m_1 = 3$ fases.

El deslizamiento s_m cuando el par es máximo se obtiene mediante esta relación:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \quad (\text{A.6})$$

a) Arranque directo

- En un arranque el deslizamiento vale $s = 1$ (luego, según la Fig. A1, la resistencia de carga R'_c es nula) y la corriente de vacío es despreciable (lo que significa que en un arranque se cumple la relación (A.1)). Además, en el arranque directo la tensión de fase es la asignada ($V_1 = V_{1N}$). En consecuencia, de las relaciones (A.4) y (A.5) se deduce que las fórmulas a aplicar para el arranque directo son:

(A.1), (A.4) y Fig. A1:

$$I_a \approx I'_{2a} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}} \quad (\text{A.7})$$

(A.5) y (A.7):

$$M_a = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \cdot \frac{V_{1N}^2}{R_{cc}^2 + X_{cc}^2} = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\Omega_1} \cdot I'^2_{2a} \quad (\text{A.8})$$

- Empleando la relación (A.7) en este motor se obtiene que la intensidad de fase en el arranque directo I_a vale:

$$(A.7): \quad I_a = \frac{400}{\sqrt{0,23^2 + 1^2}} \Rightarrow \underline{I_a = 390 \text{ A}}$$

El estator de este motor está conectado en triángulo. Por consiguiente, la corriente de línea en el arranque directo I_{aL} vale:

$$(A.2): \quad \text{Conexión triángulo} \Rightarrow I_{aL} = \sqrt{3} I_a = \sqrt{3} \cdot 390 \Rightarrow \boxed{I_{aL} = 675 \text{ A}}$$

- El par de arranque directo M_a se obtiene mediante la relación (A.8):

$$(A.8): \quad M_a = \frac{3 \cdot 0,23}{157,1} \cdot 390^2 \Rightarrow \boxed{M_a = 668 \text{ Nm}}$$

- En este motor asíncrono la corriente de línea y el par en el arranque directo valen, respectivamente, 675 A y 668 Nm.

b) Arranque por inserción de impedancias en serie con el estator

- En este tipo de arranque se conecta en serie con cada fase del estator una impedancia compuesta, en el caso más general, por una resistencia R_e y una reactancia X_e :

$$\bar{Z}_e = R_e + jX_e \quad (A.9)$$

Es evidente que el motor con esta impedancia conectada en serie con cada fase del estator equivale a que ahora tenga una resistencia y una reactancia de dispersión del estator cuyos valores están incrementados en R_e y X_e , respectivamente. Lo mismo sucede con R_{cc} y X_{cc} (ver la Fig. A1). Por lo tanto, partiendo de las relaciones (A.1), (A.7) y (A.8) se deduce que, con este método, la corriente de fase I_{aZ} y el par M_{aZ} en el arranque son así:

$$(A.1), (A.7) \text{ y Fig. A1: } I_{aZ} \approx I'_{2aZ} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{(R_{cc} + R_e)^2 + (X_{cc} + X_e)^2}} \quad (A.10)$$

$$(A.8) \text{ y Fig. A1: } M_a = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \cdot \frac{V_{1N}^2}{(R_{cc} + R_e)^2 + (X_{cc} + X_e)^2} = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\Omega_1} \cdot I_{2a}^2 \quad (A.11)$$

- Tanto en el arranque directo como en el arranque por inserción de impedancias en serie con el estator, el motor conserva la misma conexión, estrella o triángulo. Por lo tanto, teniendo en cuenta la fórmula (A.2), es evidente que se cumple esta relación:

$$(A.1) \text{ y } (A.2): \quad \frac{I_{aZL}}{I_{aL}} = \frac{I_{aZ}}{I_a} = \frac{I'_{2aZ}}{I'_{2a}} \quad (A.12)$$

ARRANQUE DE MOTORES ASÍNCRONOS

Se define el coeficiente adimensional z , inferior a 1, mediante la siguiente relación:

$$z = \sqrt{\frac{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}{(R_{cc} + R_e)^2 + (X_{cc} + X_e)^2}} \quad (\text{A.13})$$

Luego, de (A.7), (A.10), (A.12) y (A.13) se concluye que:

$$\text{(A.7), (A.10), (A.12) y (A.13): } \frac{I_{aZL}}{I_{aL}} = \frac{I_{aZ}}{I_a} = z \Rightarrow I_{aZL} = z \cdot I_{aL} \quad (\text{A.14})$$

Observando las relaciones (A.8), (A.11), (A.13) y (A.14) se deduce que:

$$\text{(A.8), (A.11) y (A.14): } \frac{M_{aZ}}{M_a} = \left(\frac{I_{aZ}}{I_a}\right)^2 = z^2 \Rightarrow M_{aZ} = z^2 \cdot I_a \quad (\text{A.15})$$

- En el motor que se está analizando la impedancia que se introduce en serie con cada fase del estator es así:

$$\text{(A.9):} \quad R_e = 2 \Omega; \quad X_e = 0 \Omega$$

Por consiguiente, en este caso el parámetro z vale:

$$\text{(A.13):} \quad z = \sqrt{\frac{0,23^2 + 1^2}{(0,23 + 2)^2 + (1 + 0)^2}} \Rightarrow \underline{z = 0,420}$$

Finalmente, de la aplicación de las relaciones (A.14) y (A.15) resulta que:

$$\text{(A.14):} \quad I_{aZL} = 0,420 \cdot 675 \Rightarrow \boxed{I_{aZL} = 283 \text{ A}}$$

$$\text{(A.15):} \quad M_{aZ} = 0,420^2 \cdot 668 \Rightarrow \boxed{M_{aZ} = 118 \text{ Nm}}$$

- Alternativamente, la corriente y el par de arranque en este caso también se pueden obtener a partir de las fórmulas (A.10), (A.2) y (A.11):

$$\text{(A.10):} \quad I_{aZ} = \frac{400}{\sqrt{(0,23 + 2)^2 + (1 + 0)^2}} \Rightarrow \underline{I_{aZ} = 164 \text{ A}}$$

$$\text{(A.2):} \quad \text{Conexión triángulo} \Rightarrow I_{aZL} = \sqrt{3} I_{aZ} = \sqrt{3} \cdot 164 \Rightarrow \boxed{I_{aZL} = 283 \text{ A}}$$

$$\text{(A.11):} \quad M_{aZ} = \frac{3 \cdot 0,23}{157,1} \cdot 164^2 \Rightarrow \boxed{M_{aZ} = 118 \text{ Nm}}$$

- En este motor, la corriente de línea y el par en el arranque cuando se inserta una resistencia de 2Ω en serie con cada fase del estator valen, respectivamente, 283 A y 118 Nm.

c) Arranque estrella-triángulo

- En este tipo de arranque el motor se arranca en estrella y transcurrido cierto tiempo, en el que el motor ha adquirido cierta velocidad, se le conecta en triángulo; con lo que queda alimentado a su tensión asignada. En el momento del arranque, cuando el motor está conectado en estrella, su tensión de fase es $\sqrt{3}$ veces menor que su tensión asignada V_{1N} . En estrella las corrientes de línea y de fase son iguales y en triángulo la primera es $\sqrt{3}$ veces mayor que la segunda. De todo esto se deduce que, en este tipo de arranque, la corriente de línea $I_{a\lambda}$ (igual a la corriente de fase) y el par $M_{a\lambda}$ valen:

$$I_{a\lambda} = \frac{I_{aL}}{3} \quad (A.16)$$

$$M_{a\lambda} = \frac{M_a}{3} \quad (A.17)$$

- Aplicando las relaciones (A.16) y (A.17) al motor que se está analizando se obtiene que:

$$(A.16): \quad I_{a\lambda} = \frac{675}{3} \Rightarrow \boxed{I_{a\lambda} = 225 \text{ A}}$$

$$(A.17): \quad M_{a\lambda} = \frac{668}{3} \Rightarrow \boxed{M_{a\lambda} = 223 \text{ Nm}}$$

- En este motor asíncrono la corriente de línea y el par en el arranque estrella-triángulo valen, respectivamente, 225 A y 223 Nm.

d) Arranque con un autotransformador

- En este tipo de arranque el motor se arranca a una tensión reducida suministrada por un autotransformador y, posteriormente, se va subiendo paulatinamente la tensión a medida que aumenta la velocidad para, finalmente, dejarle conectado a su tensión asignada. En el autotransformador la corriente en el primario (que es la que se demanda a la red eléctrica) y en el secundario (que es la que consume el motor) guardan una proporción inversa a su relación de transformación.
- Se define el parámetro adimensional x , inferior a 1, como el cociente de la tensión de línea que recibe el motor en el momento de iniciar el arranque entre su tensión asignada de línea:

$$x = \frac{V_{1,\text{motor}L}}{V_{1NL}} \quad (A.18)$$

Se comprueba que con este sistema se cumple que en el arranque la corriente de línea que se demanda a la red $I_{a,\text{aut}L}$ y el par $M_{a,\text{aut}}$ se pueden calcular así:

$$I_{a,autL} = x^2 \cdot I_{aL} \quad (A.19)$$

$$M_{a,aut} = x^2 \cdot M_a \quad (A.20)$$

- En el motor que se está estudiando la aplicación de las fórmulas anteriores proporciona los siguientes resultados:

$$(A.18): \quad x = \frac{200}{400} \Rightarrow \underline{x = 0,5}$$

$$(A.19): \quad I_{a,autL} = 0,5^2 \cdot 675 \Rightarrow \boxed{I_{a,autL} = 169 \text{ A}}$$

$$(A.20): \quad M_{a,aut} = 0,5^2 \cdot 668 \Rightarrow \boxed{M_{a,aut} = 167 \text{ Nm}}$$

- En este arranque por autotransformador la corriente de línea y el par en el arranque valen, respectivamente, 169 A y 167 Nm.

e) Arranque con un arrancador electrónico

- En este tipo de arranque el motor se arranca a una tensión reducida suministrada por un sistema electrónico y, posteriormente, se va subiendo paulatinamente la tensión a medida que aumenta la velocidad para, finalmente, dejarle conectado a su tensión asignada. En el arrancador electrónico las corrientes de línea demandada a la red y suministrada al motor son iguales.
- Al igual que con el autotransformador, se define el parámetro adimensional x , inferior a 1, como el cociente entre la tensión de línea que recibe el motor en el momento de iniciar el arranque y su tensión asignada de línea (relación (A.18)).

Se comprueba que con este sistema se cumple que en el arranque la corriente de línea que se demanda a la red $I_{a,electL}$ y el par $M_{a,elect}$ se pueden calcular así:

$$I_{a,electL} = x \cdot I_{aL} \quad (A.21)$$

$$M_{a,elect} = x^2 \cdot M_a \quad (A.22)$$

- En el motor que se está estudiando el enunciado indica que el parámetro x vale 0,6. Luego, la aplicación de las fórmulas anteriores proporciona los siguientes resultados:

$$(A.21): \quad I_{a,electL} = 0,6 \cdot 675 \Rightarrow \boxed{I_{a,electL} = 405 \text{ A}}$$

$$(A.22): \quad M_{a,elect} = 0,6^2 \cdot 668 \Rightarrow \boxed{M_{a,elect} = 240 \text{ Nm}}$$

- En este arranque mediante un arrancador electrónico la corriente de línea y el par en el arranque valen, respectivamente, 405 A y 240 Nm.

f) Arranque por introducción de una resistencia R_x en serie con cada fase del rotor

- En este sistema el motor se arranca a su tensión asignada, pero con una resistencia R_x conectada en serie con cada fase del rotor. A medida que el motor aumenta su velocidad se va reduciendo el valor de R_x para, finalmente, dejarle conectado en cortocircuito.

Si en el momento de arrancar se da a R_x un valor especial R_{adic} se consigue que el par en el arranque sea igual al par máximo del motor.

- La resistencia añadida en serie con el rotor reducida al estator se calcula así:

$$R'_x = m_i \cdot m_v \cdot R_x \quad (A.23)$$

Luego, se deduce que:

$$R'_{adic} = m_i \cdot m_v \cdot R_{adic} \quad (A.24)$$

- Es evidente que el motor con una resistencia R_x conectada en serie con cada fase del rotor equivale a que ahora tenga una resistencia del rotor cuyo valor está incrementado en R_x . Por lo tanto, partiendo de las relaciones (A.1), (A.7) y (A.8) se deduce que, con este método, la corriente de fase I_{aR} y el par M_{aR} en el arranque son así:

$$(A.1) \text{ y } (A.7): \quad I_{aR} \approx I'_{2aR} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{(R_{cc} + R'_x)^2 + X_{cc}^2}} \quad (A.25)$$

$$(A.8): \quad M_{aR} = \frac{m_1 \cdot (R_{cc} + R'_x)}{\frac{2\pi}{60} n_1} \cdot \frac{V_{1N}^2}{(R_{cc} + R'_x)^2 + X_{cc}^2} = \frac{m_1 \cdot (R_{cc} + R'_x)}{\Omega_1} \cdot I_{2aR}^2 \quad (A.26)$$

- La resistencia R_{adic} que proporciona el par máximo en el arranque hace que el deslizamiento de par máximo valga 1. Luego, partiendo de la relación (A.6) se obtiene que su valor reducido al estator R'_{adic} se puede obtener mediante esta relación:

$$(A.6): \quad R'_{adic} = \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2} - R'_2 \quad (A.27)$$

El verdadero valor de R_{adic} se obtiene teniendo en cuenta la relación (A.24):

$$(A.24): \quad R_{adic} = \frac{R'_{adic}}{m_i \cdot m_v} \quad (A.28)$$

- En el motor que se está estudiando la aplicación de las fórmulas anteriores da los siguientes valores de R'_{adic} y R_{adic} :

$$(A.27): \quad R'_{\text{adic}} = \sqrt{0^2 + 1^2} - 0,23 \Rightarrow \underline{R'_{\text{adic}} = 0,77 \Omega}$$

$$(A.28): \quad R_{\text{adic}} = \frac{0,77}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{R_{\text{adic}} = 0,385 \Omega}$$

La corriente de fase I_{aR} durante este arranque se obtiene mediante la relación (A.25):

$$(A.25): \quad I_{aR} \approx I'_{2aR} = \frac{400}{\sqrt{(0,23 + 0,77)^2 + 1^2}} \Rightarrow \underline{I_{aR} = 283 \text{ A}}$$

El estator de este motor está conectado en triángulo. Por consiguiente, con este método la corriente de arranque de línea I_{aRL} vale:

$$(A.2): \quad \text{Conexión triángulo} \Rightarrow I_{aRL} = \sqrt{3} I_{aR} = \sqrt{3} \cdot 283 \Rightarrow \boxed{I_{aRL} = 490 \text{ A}}$$

El par en este arranque se calcula mediante la relación (A.26):

$$(A.26): \quad M_{aR} = \frac{3 \cdot (0,23 + 0,77)}{157,1} \cdot 283^2 \Rightarrow \boxed{M_{aR} = 1528 \text{ Nm}}$$

- Dado que con una resistencia R_{adic} conectada en serie con cada fase del rotor se obtiene el par máximo en el arranque, en este caso también se puede calcular el par de arranque M_{aR} igualándolo al par máximo $M_{\text{máx}}$ del motor.

El deslizamiento para par máximo se calcula mediante la relación (A.6):

$$(A.6): \quad s_m = \frac{0,23}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Rightarrow \underline{s_m = 0,23}$$

El par máximo $M_{\text{máx}}$ se puede calcular con la fórmula general del par (A.5) si en ella la tensión se hace igual a la asignada ($V_1 = V_{1N}$) y el deslizamiento se iguala al de par máximo ($s = s_m$):

$$(A.5): \quad M_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot \left(\frac{0,23}{0,23}\right)}{157,1} \frac{400^2}{\left(0 + \frac{0,23}{0,23}\right)^2 + 1^2} \Rightarrow \underline{M_{\text{máx}} = 1528 \text{ Nm}}$$

- La resistencia R_{adic} que da lugar al par máximo en el arranque vale $0,385 \Omega$ y con este método la corriente de línea y el par en el arranque valen, respectivamente, 490 A y 1528 Nm .

g) Tiempo de arranque y energía disipada en el mismo

- La constante de tiempo electromecánica τ_{mec} se puede calcular mediante esta expresión:

$$\tau_{mec} = \frac{J \Omega_1}{M_{m\acute{a}x}} \quad (A.29)$$

si se desprecia la resistencia R_1 de las fases del estator se puede usar esta expresión aproximada, basada en la fórmula de Kloss, para obtener el tiempo que tarda en arrancar el motor en un arranque directo en vacío hasta alcanzar el deslizamiento s_B :

$$t_a = \tau_{mec} \left[\frac{1}{4 s_m} - \frac{s_m}{2} \ln s_B \right] \quad (A.30)$$

Si, como indica el enunciado para este caso, se desea calcular el tiempo de arranque hasta que el motor alcanza un deslizamiento $s_B = 0,05$, la expresión (A.30) se transforma en:

$$(A.30): \quad t_a = \tau_{mec} \left[\frac{1}{4 s_m} + \frac{3}{2} s_m \right] \quad (A.31)$$

$(s_B = 0,05)$

- La fórmula (A.29) permite calcular la constante de tiempo electromagnética τ_{mec} de este motor:

$$(A.29): \quad \tau_{mec} = \frac{0,8 \cdot 157,1}{1528} \Rightarrow \underline{\tau_{mec} = 0,082 \text{ s}}$$

Luego, si el tiempo de arranque de este motor se calcula mediante la relación (A.31) se obtiene el siguiente valor:

$$(A.30): \quad t_a = 0,082 \left[\frac{1}{4 \cdot 0,23} + 1,5 \cdot 0,23 \right] \Rightarrow \boxed{t_A = 0,12 \text{ s}}$$

Este resultado solamente es una estimación del tiempo de arranque, ya que está obtenido utilizando unas expresiones que únicamente son válidas para el estudio de regímenes permanentes, pero el arranque es un fenómeno transitorio. Lo que se ha hecho es aproximar el arranque a una sucesión de regímenes permanentes. A pesar de todo lo anterior, este resultado permite tener una idea del tiempo de arranque, comparar la rapidez de la puesta en marcha de varios motores y analizar la influencia de diversas magnitudes sobre el tiempo de arranque.

- La expresión que permite calcular la energía perdida en un arranque en vacío es:

$$\Delta W_a = \frac{J \Omega_1^2}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R'_2} \right) \quad (A.32)$$

Aplicando dicha expresión al motor que se está estudiando se obtiene este resultado:

$$(A.32): \quad \Delta W_a = \frac{0,8 \cdot 157,1^2}{2} \cdot (1 + 0) \Rightarrow \boxed{\Delta W_a = 9872 \text{ J}}$$

- En el motor estudiado, el tiempo de arranque directo en vacío hasta un deslizamiento de 0,05 se estima en unos 0,1 s y en él se disipa una energía de 9872 julios.

h) Tiempo de arranque y energía disipada en un arranque con autotransformador

- Según el enunciado a medida que el motor arranca la tensión va aumentando así:

	I	II	III
Deslizamiento	$1 \geq s > 0,7$	$0,7 \geq s > 0,3$	$0,3 \geq s$
Tensión de línea	$V_{1LI} = V_{1,motorL} = 200 \text{ V}$	$V_{1LII} = 300 \text{ V}$	$V_{1LIII} = V_{1NL} = 400 \text{ V}$

- La expresión que permite calcular el tiempo que tarda el motor en pasar de un deslizamiento s_A a un deslizamiento s_B durante el arranque en vacío es:

$$t = \tau_{mec} \left[\frac{s_A^2 - s_B^2}{4 s_m} + \frac{s_m}{2} \ln \frac{s_A}{s_B} \right] \quad (A.33)$$

- Por otra parte, la constante de tiempo electromecánica τ_{mec} viene dada por la relación (A.29), la cual indica que esta magnitud es inversamente proporcional al par máximo $M_{m\acute{a}x}$ del motor. En este caso, en el que se va a variar la tensión que recibe el motor manteniendo siempre la misma frecuencia, sucede que el par máximo es proporcional al cuadrado de la tensión.

Por lo tanto, en los tres intervalos en los que se subdivide el arranque, las constantes de tiempo van a ser así:

- * En el intervalo III la tensión es la asignada, por lo que la constante de tiempo electromecánica tendrá el mismo valor que la obtenida en el apartado anterior:

$$(A.29): \quad \underline{\tau_{mecIII} = 0,082 \text{ s}}$$

- * En el intervalo II, la tensión es inferior a la asignada y sucederá que:

$$\frac{\tau_{mecII}}{\tau_{mecIII}} = \frac{M_{m\acute{a}xIII}}{M_{m\acute{a}xII}} = \left(\frac{V_{1LIII}}{V_{1LII}} \right)^2 \Rightarrow \tau_{mecII} = \left(\frac{V_{1LIII}}{V_{1LII}} \right)^2 \cdot \tau_{mecIII} \quad (A.34)$$

$$(A.34): \quad \tau_{mecII} = \left(\frac{400}{300} \right)^2 \cdot 0,082 \Rightarrow \underline{\tau_{mecII} = 0,146 \text{ s}}$$

- * Trabajando análogamente a como se ha hecho en el intervalo II, se deduce que en el intervalo I la constante de tiempo electromecánica vale:

$$(A.34): \quad \tau_{mecI} = \left(\frac{V_{1LIII}}{V_{1LI}} \right)^2 \cdot \tau_{mecIII} \quad (A.35)$$

$$(A.35): \quad \tau_{mecI} = \left(\frac{400}{200} \right)^2 \cdot 0,082 \Rightarrow \underline{\tau_{mecI} = 0,328 \text{ s}}$$

- Es sabido que el deslizamiento de par máximo s_m no varía con la tensión. Por otra parte, el enunciado de este problema pide que se calcule el tiempo de arranque hasta la velocidad cuyo deslizamiento es 0,05.

Por consiguiente, dividiendo el tiempo total de arranque en los tres intervalos I, II y III indicados en el enunciado y empleando la relación (A.33) se obtienen estos tiempos de arranque parciales:

$$(A.33): \quad t_I = 0,328 \cdot \left[\frac{1^2 - 0,7^2}{4 \cdot 0,23} + \frac{0,23}{2} \ln \frac{1}{0,7} \right] \Rightarrow \underline{t_I = 0,195 \text{ s}}$$

$$(A.33): \quad t_{II} = 0,146 \cdot \left[\frac{0,7^2 - 0,3^2}{4 \cdot 0,23} + \frac{0,23}{2} \ln \frac{0,7}{0,3} \right] \Rightarrow \underline{t_{II} = 0,078 \text{ s}}$$

$$(A.33): \quad t_{III} = 0,082 \cdot \left[\frac{0,3^2 - 0,05^2}{4 \cdot 0,23} + \frac{0,23}{2} \ln \frac{0,3}{0,05} \right] \Rightarrow \underline{t_{III} = 0,025 \text{ s}}$$

Luego, el tiempo total de arranque se calcula mediante la suma de los tres tiempos de arranque parciales:

$$t_a = t_I + t_{II} + t_{III} = 0,195 + 0,078 + 0,025 \Rightarrow \boxed{t_a = 0,298 \text{ s}}$$

- La energía perdida en un arranque en vacío viene dada por la relación (A.32) y no cambia con los diferentes sistemas de arranque, siempre que en ellos no se modifique la velocidad de sincronismo Ω_1 . Por lo tanto, la energía perdida en este arranque tiene el mismo valor que en el arranque del apartado f):

$$(A.32): \quad \boxed{\Delta W_a = 9872 \text{ J}}$$

- En este arranque en vacío a tensión reducida mediante un autotransformador, el tiempo de arranque hasta un deslizamiento de 0,05 se estima en unos 0,3 s (0,298 s) y en él se disipa una energía de 9872 julios.

i) Energía disipada en un arranque en dos etapas, cada una con diferente velocidad de sincronismo

- Se van a denominar I y II a las dos etapas en que se divide el arranque.

En la etapa I, el número de polos es $2p = 8$, luego la velocidad de sincronismo correspondiente vale:

$$\Omega_{1I} = \frac{2 \pi f_1}{p} = \frac{2 \pi \cdot 50}{4} \Rightarrow \underline{\Omega_{1I} = 78,6 \text{ rad / s}}$$

En la etapa II, el número de polos es $2p = 4$, luego la velocidad de sincronismo correspondiente es la misma que se ha utilizado en los apartados anteriores:

$$\underline{\Omega_{1II} = 157,1 \text{ rad / s}}$$

- La energía perdida en este arranque es la suma de las disipadas en sus dos etapas, las cuales se pueden obtener mediante la relación (A.32):

$$(A.32): \quad \Delta W_{aI} = \frac{0,8 \cdot 78,6^2}{2} \cdot (1 + 0) \Rightarrow \underline{\Delta W_{aI} = 2471 \text{ J}}$$

$$(A.32): \quad \Delta W_{aII} = \frac{0,8 \cdot (157,1 - 78,6)^2}{2} \cdot (1 + 0) \Rightarrow \underline{\Delta W_{aII} = 2465 \text{ J}}$$

Luego, la energía disipada total en este arranque vale:

$$\Delta W_a = \Delta W_{aI} + \Delta W_{aII} = 2471 + 2465 \Rightarrow \boxed{\Delta W_a = 4936 \text{ J}}$$

Comparando este resultado con el obtenido en el apartado f) se observa que con este sistema (*Conexión Dahlander*), en el que se utilizan dos números de polos distintos que están en la proporción 2:1, se reduce a la mitad la energía perdida durante el arranque.

- En este arranque en vacío, a la tensión asignada y en dos etapas con diferentes números de polos proporcionados por una conexión Dahlander, se pierde una energía de 4936 julios.

ANEXO B: **DINÁMICA DEL MOTOR ASÍNCRONO**

Introducción

En este anexo se van a estudiar con más detalle que en el texto principal algunos aspectos de la dinámica de un motor asíncrono o de inducción durante su arranque.

El arranque es un proceso transitorio en el que la velocidad va aumentando desde un valor nulo hasta la velocidad de régimen permanente que corresponda a la carga mecánica que esté moviendo; lo que hace que ni la velocidad ni el par permanezcan constantes y que las corrientes no sean perfectamente sinusoidales durante esta maniobra. Por lo tanto, su estudio riguroso exige plantear y resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales que modelizan el sistema red eléctrica-motor-carga mecánica durante todo este fenómeno transitorio.

En un análisis simplificado se supone que el arranque se produce a una velocidad relativamente lenta, lo que permite considerarlo como una sucesión de distintos estados permanentes y, por lo tanto, se puede analizar empleando la curva y las expresiones del par en régimen permanente.

Este método de análisis es aproximado y tanto más erróneo cuanto más rápido sea el arranque. Aun así, será el que se utilice en los siguientes apartados de este anexo, ya que permite tener una visión de lo que sucede durante el proceso de arranque, hacer una estimación de algunas magnitudes, comparar el comportamiento de varios motores y analizar la influencia de diversas magnitudes sobre esta maniobra.

El análisis de todos los fenómenos que se van a estudiar en este anexo se basa en la **ecuación de equilibrio dinámico** del sistema motor-carga mecánica:

$$\Delta M = M - M_r = J \frac{d\Omega}{dt} \quad (\text{B.1})$$

En esta expresión M es el par motor y M_r es el par resistente de la carga mecánica, J es el momento de inercia (que se mide en Kgm^2 y que habitualmente se designa como I en los libros de mecánica) del conjunto motor-carga mecánica e incluye también la inercia del acoplamiento entre los ejes del motor y de la carga (naturalmente, este momento de inercia está referido al eje del motor) y Ω es la velocidad de giro del motor medida en rad/s .

El deslizamiento s de un motor asíncrono se define mediante la relación siguiente, donde Ω_1 es la velocidad de sincronismo en rad/s :

$$s = \frac{\Omega_1 - \Omega}{\Omega_1} \quad (\text{B.2})$$

De la relación (B.2) se deduce que

$$\Omega = \Omega_1 (1 - s) \Rightarrow \frac{d\Omega}{dt} = -\Omega_1 \frac{ds}{dt} \quad (\text{B.3})$$

Lo cual permite reescribir la expresión (B.1) de esta manera:

$$\Delta M = M - M_r = -J \Omega_1 \frac{d s}{d t} \quad (B.4)$$

En este estudio la ecuación que se va a utilizar para el par M del motor va a ser la **fórmula de Kloss**, que relaciona el par de la máquina M para un deslizamiento s con el par máximo $M_{m\acute{a}x}$, que se produce cuando el deslizamiento es s_m :

$$\frac{M}{M_{m\acute{a}x}} = \frac{2(1 + a s_m)}{\frac{s}{s_m} + 2 a s_m + \frac{s_m}{s}} \quad (B.5)$$

En la expresión anterior el parámetro a es:

$$a = \frac{R_1}{R'_2} \quad (B.6)$$

En motores grandes suele suceder que la resistencia del estator R_1 es muy inferior a la resistencia del rotor reducida al estator R'_2 , lo que hace que el coeficiente a sea prácticamente nulo y, en consecuencia, la fórmula de Kloss (B.5) se pueda simplificar así:

$$R_1 \lll R'_2 \Rightarrow a = \frac{R_1}{R'_2} \approx 0 \Rightarrow \boxed{\frac{M}{M_{m\acute{a}x}} = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}}} \quad (B.7)$$

Tiempo de arranque de un motor asíncrono

Durante el proceso de arranque de un motor asíncrono se verifica la ecuación de equilibrio dinámico, tanto en su versión (B.1) como en la (B.4). El tiempo que durante el arranque tarda el motor en pasar de una velocidad Ω_A a una velocidad Ω_B -a las cuáles les corresponden los deslizamientos s_A y s_B , respectivamente- se puede calcular integrando la ecuación (B.1) o la (B.4):

$$t = J \int_{\Omega_A}^{\Omega_B} \frac{d \Omega}{\Delta M} \quad (B.8)$$

$$t = -J \Omega_1 \int_{s_A}^{s_B} \frac{d s}{\Delta M} = J \Omega_1 \int_{s_B}^{s_A} \frac{d s}{\Delta M} \quad (B.9)$$

Observando estas expresiones se advierte que, como es lógico, el tiempo de arranque disminuye si el momento de inercia total J es reducido y si durante el arranque se mantiene elevado el valor de ΔM ($\Delta M = M - M_r$). Esto último significa que los arranques serán rápidos si se consigue mantener un par motor M elevado (y, si es posible, si se logra reducir el par resistente M_r) durante toda la maniobra.

Usualmente la resolución analítica de las integrales que aparecen en las expresiones (B.8) y (B.9) es complicada, lo que exige realizarla por métodos numéricos. Otra posibilidad es usar un método gráfico, como el que se describe en el tomo V del libro de Cortes Cherta [3].

Si lo que se desea es obtener el valor del tiempo que transcurre desde que el motor inicia el arranque hasta que adquiere la velocidad Ω_B , habrá que dar los siguientes valores a Ω_A y a s_A en las fórmulas (B.8) y (B.9):

$$\text{Tiempo de arranque desde el principio: } \Omega_A = 0; \quad s_A = 1 \quad (\text{B.10})$$

$$t_a = J \int_0^{\Omega_B} \frac{d\Omega}{\Delta M} \quad (\text{B.11})$$

$$t_a = -J \Omega_1 \int_1^{s_B} \frac{ds}{\Delta M} = J \Omega_1 \int_{s_B}^1 \frac{ds}{\Delta M} = J \Omega_1 \int_{s_B}^1 \frac{ds}{M - M_r} \quad (\text{B.12})$$

El último tramo del arranque, cuando el motor ya tiene una velocidad muy próxima a la del equilibrio final, es muy lento porque entonces hay poca diferencia entre los pares motor y resistente; lo que hace que ΔM sea pequeño. Es decir, al final del arranque el motor demora un tiempo relativamente alto en apenas aumentar la velocidad hasta alcanzar la velocidad de equilibrio final. Este último tramo no es relevante porque en él el motor prácticamente ya está a la velocidad final. Por esta razón, el tiempo total de arranque t_a no se calcula dando a Ω_B (o a s_B) el valor correspondiente al equilibrio final, sino el correspondiente a una velocidad de giro algo menor, pero lo suficientemente cercana a la de equilibrio final. Es más, en el equilibrio final sucede que los pares motor M y resistente M_r se igualan y sucede que:

$$\text{Punto de equilibrio al final del arranque: } \Delta M = M - M_r = 0 \Rightarrow \frac{1}{\Delta M} = \infty$$

Por lo que las integrales (B.11) y (B.12) no se pueden resolver en el punto de equilibrio donde queda el motor al final del arranque. Esta es otra razón para no tomar este punto de equilibrio final como límite de las integrales. Unos valores habituales para Ω_B y s_B cuando se quiere calcular el tiempo de arranque son:

$$\text{Tiempo total de arranque: } \Omega_B = 0,95 \Omega_1; \quad s_B = 0,05 \quad (\text{B.13})$$

Tiempo de arranque en vacío

Si lo que se desea es calcular el tiempo de arranque cuando el motor funciona en vacío, es decir, con un par resistente M_r nulo, sucede que:

$$\text{Arranque en vacío: } M_r = 0 \Rightarrow \Delta M = M \quad (\text{B.14})$$

Si el par motor M se calcula mediante la fórmula de Kloss (B.5), de las relaciones (B.9) y (B.14) se obtiene que:

$$t = J \Omega_1 \int_{s_B}^{s_A} \frac{ds}{M} = \frac{J \Omega_1}{2(1 + a s_m) M_{\text{máx}}} \int_{s_B}^{s_A} \left[\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s} + 2 a s_m \right] ds \quad (\text{B.15})$$

Realizando la integral que aparece en la relación (B.15) se llega a este resultado:

$$t = \frac{J \Omega_1}{2(1 + a s_m) M_{\text{máx}}} \left[\frac{s_A^2 - s_B^2}{2 s_m} + s_m \ln \frac{s_A}{s_B} + 2 a s_m (s_A - s_B) \right] \quad (\text{B.16})$$

Se define el parámetro **constante de tiempo electromecánica** τ_{mec} como el tiempo de arranque del motor si este arranque fuese en vacío, el motor proporcionara el par máximo $M_{\text{máx}}$ permanentemente durante toda la maniobra y la velocidad final que se alcanzase fuese la velocidad de sincronismo Ω_1 . Luego, en estas condiciones (totalmente irreales, pero que permiten definir un parámetro útil para analizar el tiempo de arranque) la relación (B.11) indica que:

$$\tau_{\text{mec}} = J \int_0^{\Omega_1} \frac{d\Omega}{M_{\text{máx}}} \Rightarrow \boxed{\tau_{\text{mec}} = \frac{J \Omega_1}{M_{\text{máx}}}} \quad (\text{B.17})$$

Utilizando este parámetro la ecuación (B.16) se puede reescribir así:

$$\boxed{t = \frac{\tau_{\text{mec}}}{1 + a s_m} \left[\frac{s_A^2 - s_B^2}{4 s_m} + \frac{s_m}{2} \ln \frac{s_A}{s_B} + a s_m (s_A - s_B) \right]} \quad (\text{B.18})$$

Si lo que se quiere es calcular el tiempo total de arranque, habrá que usar en la relación (B.18) el valor de s_A indicado en (B.10):

$$s_A = 1; s_B \lll 1 \Rightarrow s_A - s_B \approx 1; s_A^2 - s_B^2 \approx 1$$

$$t_a = \frac{\tau_{\text{mec}}}{1 + a s_m} \left[\frac{1}{4 s_m} - \frac{s_m}{2} \ln s_B + a s_m \right] \quad (\text{B.19})$$

En el caso de motores grandes suele suceder que la resistencia del estator R_1 es muy inferior a la resistencia del rotor reducida al estator R'_2 , lo que hace que el coeficiente a sea prácticamente nulo y, en consecuencia, las fórmulas anteriores se pueden simplificar así:

$$R_1 \lll R'_2 \Rightarrow a = \frac{R_1}{R'_2} \approx 0$$

$$\boxed{t = \tau_{\text{mec}} \left[\frac{s_A^2 - s_B^2}{4 s_m} + \frac{s_m}{2} \ln \frac{s_A}{s_B} \right]} \quad (\text{B.20})$$

$$\boxed{t_a = \tau_{\text{mec}} \left[\frac{1}{4 s_m} - \frac{s_m}{2} \ln s_B \right]} \quad (\text{B.21})$$

Usando en la relación (B.21) los valores indicados en (B.13) se deduce que:

$$s_B = 0,05 \Rightarrow t_a = \tau_{mec} \left[\frac{1}{4s_m} + \frac{3}{2}s_m \right] \quad (B.22)$$

Se observa que el tiempo de arranque será tanto menor cuanto más pequeña sea la constante electromecánica τ_{mec} del motor. Por lo tanto, τ_{mec} sirve para comparar la rapidez en el arranque de distintos motores. Por otra parte, es fácil deducir que la expresión (B.22) da un tiempo de arranque mínimo cuando $s_m = 0,408$.

Como se ha indicado al principio de este anexo, estas expresiones -obtenidas partiendo de la ecuación del par en régimen permanente- proporcionan solamente resultados aproximados; pero permiten comparar la velocidad de arranque de varios motores y apreciar las magnitudes y los parámetros que influyen en el tiempo de arranque.

Pérdidas de energía en el arranque de un motor asíncrono

Balance de potencias

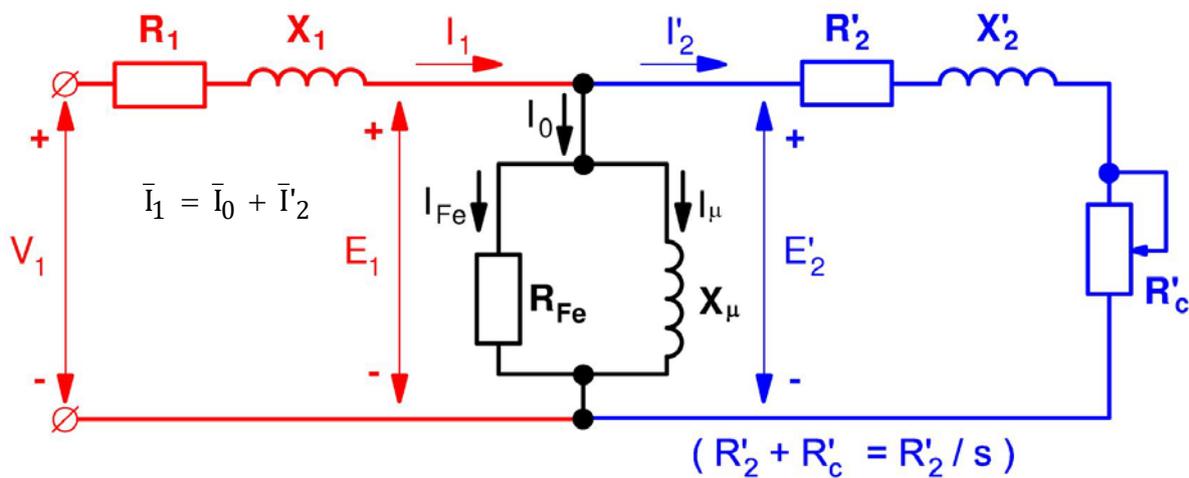


Fig. B1: Circuito equivalente de una máquina asíncrona

En este apartado se va a hacer un repaso al balance de potencias de un motor asíncrono. Para profundizar más sobre este tema puede consultar mi texto [14].

La Fig. B1 muestra el circuito equivalente exacto y en la Fig. B2 aparece el balance de potencias de una máquina asíncrona trifásica actuando como motor.

En la Fig. B2 se observa que un motor asíncrono absorbe por el estator una potencia eléctrica (potencia activa) P_1 y suministra por el eje una potencia mecánica P_u , que es la potencia útil.

En la conversión de la potencia eléctrica P_1 en mecánica P_u se pierde algo de potencia que se disipa en forma de calor. Hay diferentes tipos de potencia perdida o *pérdidas*:

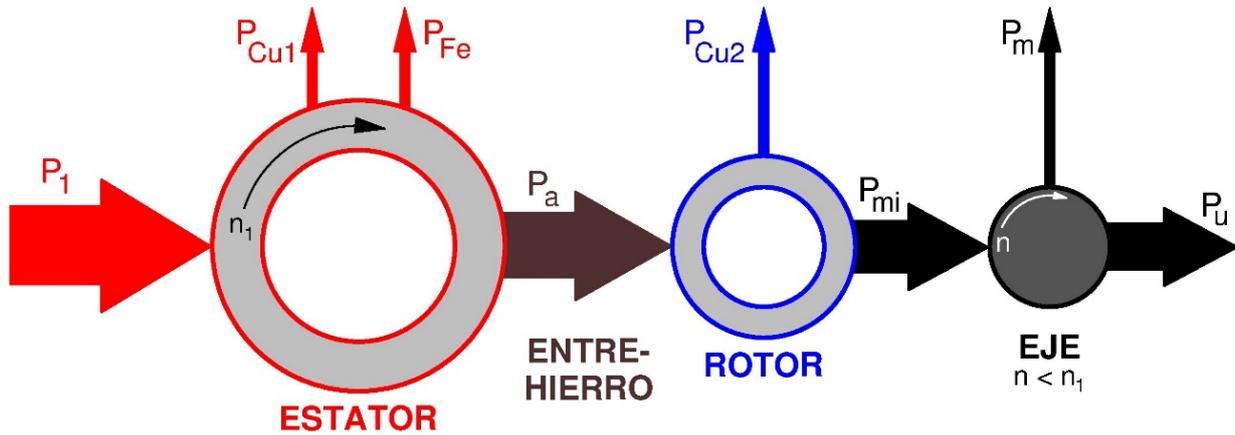


Fig. B2: Balance de potencias de un motor asíncrono

P_{Cu1} Pérdidas en el cobre del estator, debidas a la resistencia R_1 de las fases del devanado del estator:

$$P_{Cu1} = 3 \cdot R_1 \cdot I_1^2 \quad (B.23)$$

P_{Fe} Pérdidas magnéticas o en el hierro, debidas a las corrientes de Foucault y a la histéresis en los núcleos magnéticos. En el circuito equivalente de la Fig. B1 estas pérdidas son las que se disipan en la resistencia R_{Fe} .

P_{Cu2} Pérdidas en el cobre del rotor, debidas a la resistencia R_2 (o R'_2 si se usa el rotor reducido al estator) de las fases del devanado del rotor.

$$P_{Cu2} = 3 \cdot R'_2 \cdot I_2^2 \quad (B.24)$$

P_m Pérdidas mecánicas y de ventilación debidas a los rozamientos mecánicos de la máquina y a la potencia consumida por su sistema de refrigeración. Estas pérdidas no se reflejan en el circuito equivalente de la Fig. B1.

Además de estas pérdidas existen las *pérdidas adicionales* que engloban a pérdidas debidas a diferentes causas de difícil cuantificación y que no se tienen en cuenta en este estudio.

De lo anterior y de la Fig. B2 se deduce que las pérdidas totales P_p de la máquina valen:

$$P_p = P_{Cu1} + P_{Fe} + P_{Cu2} + P_m \quad (B.25)$$

La *potencia en el entrehierro* P_a (Fig. B2) es la potencia que fluye del estator hacia el rotor a través del entrehierro. En el circuito equivalente de la Fig. B1 esta potencia es la que se gasta en la totalidad de las resistencias del rotor. Luego, teniendo presente, además, la relación (B.24) se obtiene que:

$$P_a = 3 I_2^2 \frac{R'_2}{s} = \frac{P_{Cu2}}{s} \Rightarrow P_{Cu2} = s \cdot P_a \quad (B.26)$$

La potencia interna es la que la máquina transforma de potencia electromagnética en potencia mecánica. Vista desde el lado mecánico se trata de la *potencia mecánica interna* P_{mi} y es la que internamente se ejerce sobre el eje. En el circuito equivalente (Fig. B1) esta potencia es la que se gasta en la resistencia de carga R'_c :

$$P_{mi} = 3 I_2'^2 R'_c = 3 I_2'^2 R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = 3 I_2'^2 R'_2 \left(\frac{1-s}{s} \right) \Rightarrow P_{mi} = P_a (1-s) \quad (B.27)$$

El par interno M , que es prácticamente igual al par útil, se puede obtener así:

$$M = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{P_a (1-s)}{\Omega} = \frac{P_a}{\Omega_1} \Rightarrow P_a = M \cdot \Omega_1 \quad (B.28)$$

En la fórmula anterior se han empleado las relaciones (B.27) y (B.3).

Pérdidas de energía en el arranque

Durante el arranque de un motor de inducción, la mayor parte del tiempo la corriente del estator I_1 es bastante más grande que la corriente asignada I_{1N} . Por lo tanto, es posible despreciar la corriente de vacío I_0 frente a I_1 e I_2' (ver la Fig. B1) y las pérdidas en el cobre del estator y del rotor son muy grandes, por lo que se pueden despreciar el resto de las pérdidas en el arranque:

$$\text{Arranque: } I_1 \gg I_{1N} \Rightarrow \begin{cases} I_0 \ll I_2' \Rightarrow I_1 \approx I_2' \\ P_{Cu1} + P_{Cu2} \gg P_{Fe} + P_m \end{cases} \quad (B.29)$$

Luego, teniendo en cuenta (B.23), (B.25) y (B.29), durante el arranque sucede que:

$$\text{Arranque: } P_p \approx P_{Cu1} + P_{Cu2} \quad (B.30)$$

$$P_{Cu1} = 3 R_1 I_1^2 = 3 R_1 I_2'^2 \quad (B.31)$$

Luego, aplicando la relación (B.24) e introduciendo el parámetro a , definido en (B.6), se obtiene que:

$$\text{Arranque: } P_p = P_{Cu1} + P_{Cu2} = (1+a) \cdot P_{Cu2} \quad (B.32)$$

Aplicando las relaciones (B.26) y (B.28) sobre (B.32):

$$\text{Arranque: } P_p = (1+a) \cdot (s \cdot P_a) = (1+a) \cdot (s \cdot M \cdot \Omega_1) \quad (B.33)$$

La energía perdida durante todo el proceso de arranque ΔW_a se transforma en calor y aumenta la temperatura de la máquina. Esta energía se obtiene integrando la potencia perdida (B.33) a lo largo de todo el tiempo que dura el arranque:

$$\Delta W_a = \int_0^{t_a} P_p dt = (1 + a) \int_0^{t_a} (s \cdot M \cdot \Omega_1) dt \quad (B.34)$$

Dado que se verifica la relación (B.2), la expresión (B.34) se puede reescribir así:

$$\Delta W_a = (1 + a) \int_0^{t_a} M (\Omega_1 - \Omega) dt \quad (B.35)$$

Pérdidas de energía en el arranque en vacío

Si el arranque es en vacío se verifica la relación (B.14) y la ecuación de equilibrio dinámico (B.1) queda así:

$$M = J \frac{d\Omega}{dt} \quad (B.36)$$

Sustituyendo (B.36) en la expresión (B.35) queda que:

$$\begin{aligned} \Delta W_a &= (1 + a) J \int_0^{t_a} (\Omega_1 - \Omega) \frac{d\Omega}{dt} dt \\ \Delta W_a &= (1 + a) J \int_0^{\Omega_1} (\Omega_1 - \Omega) d\Omega \end{aligned} \quad (B.37)$$

En la relación (B.37) se ha supuesto, por simplicidad, que al final del arranque el motor gira a una velocidad prácticamente igual a la de sincronismo Ω_1 . Calculando la integral que aparece en (B.37) se deduce que:

$$\Delta W_a = (1 + a) J \left[(\Omega_1 \cdot \Omega) - \frac{\Omega^2}{2} \right]_0^{\Omega_1}$$

Arranque en vacío: $\Delta W_a = \left(1 + \frac{R_1}{R'_2} \right) \frac{J \Omega_1^2}{2} = (1 + a) W_c$ (B.38)

En la expresión anterior se ha introducido la magnitud W_c que es la energía cinética del sistema motor-carga cuando gira a la velocidad de sincronismo:

$$W_c = \frac{J \Omega_1^2}{2} \quad (B.39)$$

Se observa en la relación (B.38) que la energía perdida ΔW_a es la suma de dos energías: la debida a las pérdidas en el cobre del rotor, que es igual a la energía cinética a velocidad de sincronismo W_c , y la debida a las pérdidas en el cobre del estator, que es igual a a veces W_c .

De todo lo anterior se deduce que cuanto mayor sea el momento de inercia total J del sistema motor-carga mecánica, más energía se perderá durante el arranque, la cual se disipará en forma de calor y aumentará la temperatura de la máquina asíncrona.

También se aprecia que, a diferencia de lo que más tarde se comprobará para los arranques en carga, en vacío todos los sistemas de arranque que no incluyan modificaciones en la velocidad de sincronismo Ω_1 dan lugar a la misma potencia perdida.

En consecuencia, en todos los arranques a tensión reducida se obtiene en vacío la misma energía perdida que en el arranque directo. Lo mismo sucede también cuando se arranca un motor de anillos introduciendo resistencias en serie con el rotor; pero en este caso existe la ventaja que gran parte de la energía perdida ΔW_a se disipa en el reóstato que se coloca en serie con el rotor y no en el motor, por lo que el calentamiento de la máquina es menor que con otros sistemas.

Dado que la energía cinética W_c depende cuadráticamente de la velocidad de sincronismo Ω_1 (ver la relación (B.39)), en los sistemas de arranque en los que se va aumentando la velocidad de sincronismo desde un valor pequeño hasta su valor en condiciones asignadas, bien de forma continua o bien por escalones, se consigue que la energía perdida sea menor que si el arranque se realiza desde el principio a la velocidad de sincronismo asignada.

Pérdidas de energía en el arranque con carga

La ecuación de equilibrio dinámico en carga es (B.1), luego:

$$M = J \frac{d\Omega}{dt} + M_r \quad (B.40)$$

Sustituyendo esta relación en la (B.35) se deduce lo siguiente:

$$\Delta W_a = (1 + a) \left[J \int_0^{t_a} (\Omega_1 - \Omega) \frac{d\Omega}{dt} dt + \int_0^{t_a} M_r (\Omega_1 - \Omega) dt \right] \quad (B.41)$$

Por otra parte, de la relación (B.1) también se llega a:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Delta M}{J} = \frac{M - M_r}{J} \Rightarrow \frac{dt}{d\Omega} = \frac{J}{M - M_r}$$

$$dt = \frac{d\Omega}{d\Omega} dt \Rightarrow dt = \frac{J}{M - M_r} d\Omega \quad (B.42)$$

Luego, operando como en el arranque en vacío, la expresión (B.41) se transforma en:

$$\Delta W_a = (1 + a) J \left[\int_0^{\Omega_1} (\Omega_1 - \Omega) d\Omega + \int_0^{\Omega_B} \frac{M_r}{M - M_r} (\Omega_1 - \Omega) d\Omega \right]$$

$$\text{Arranque en carga: } \Delta W_a = (1 + a) W_c + \left[(1 + a) J \int_0^{\Omega_B} \frac{M_r}{M - M_r} (\Omega_1 - \Omega) d\Omega \right] \quad (\text{B.43})$$

El lector puede sorprenderse al observar que en las relaciones anteriores no se han puesto los mismos límites de integración en las dos integrales que aparecen. En rigor, las integrales son hasta la velocidad final de equilibrio, pero en el segundo sumando hay que tomar un límite de integración Ω_B algo menor (como el indicado en (B.13)) porque en el denominador aparece la diferencia $\Delta M = M - M_r$ y sucede lo mismo que se explicó en el cálculo del tiempo de arranque t_a mediante la fórmula (B.12). En el primer sumando, al igual que en el arranque en vacío, apenas hay diferencia si se usa Ω_1 en lugar de Ω_B como límite de integración; pero con Ω_1 sucede que al resolver la integral se obtiene un resultado más sencillo.

Al igual que en el arranque en vacío, la energía perdida en el arranque se divide en dos: las debidas a las pérdidas en el cobre del rotor y a las del estator. Ahora estas energías valen:

$$\Delta W_{aCu2} = W_c + J \int_0^{\Omega_B} \frac{M_r}{M - M_r} (\Omega_1 - \Omega) d\Omega; \quad \Delta W_{aCu1} = a \cdot \Delta W_{aCu2} \quad (\text{B.44})$$

Comparando las expresiones (B.38) y (B.43) se deduce que, en carga, la energía perdida en el arranque ΔW_a es igual a la que se pierde en vacío más un término adicional que depende del momento de inercia J y de los pares motor M y resistente M_r . Este término adicional hace que en el arranque en carga la energía perdida sea superior que en el arranque en vacío.

De la expresión (B.43) se infiere que en carga, la energía perdida en el arranque -que luego se disipa en forma de calor- depende de la energía cinética W_c (y, por lo tanto, del momento de inercia J), al igual que en el arranque en vacío. Pero ahora, esta energía perdida sí que también depende del método de arranque. La energía perdida será menor cuanto mayor sea el valor que va teniendo el par motor M durante el arranque. Por otra parte, la expresión (B.44) muestra que cuanto mayor sea el par resistente M_r más energía se va a perder en el arranque. Esto es, los arranques con mayor par motor M y menor par resistente M_r darán lugar a calentamientos menores.

El hecho de que la energía perdida ΔW_a en un arranque en carga sea menor cuanto mayor sea el par motor M y menores el par resistente M_r y el momento de inercia J significa, según la expresión (B.12), que cuanto menor sea el tiempo de arranque t_a (es decir, cuanto más rápidamente se realice el arranque) menos energía se pierde en él.

En resumen, en el arranque en carga la potencia perdida puede llegar a ser bastante mayor que en el arranque en vacío. Esto sucede sobre todo si la diferencia de pares motor y resistente (esto es, el par acelerador) es pequeña, como sucede en los arranques a tensión reducida. En estos casos sucede que también aumenta el tiempo de arranque t_a .

Se puede considerar que, para un motor de diseño normal, un arranque presenta una inercia demasiado elevada -lo que puede originar calentamientos peligrosos, en particular si se arranca frecuentemente- cuando el momento de inercia total J del sistema supera al doble del momento de inercia del motor solo.

Para reducir el calentamiento del motor en estos arranques se puede utilizar un motor de diseño especial para que su inercia sea baja, con lo que se disminuye la inercia total del sistema. Estos motores son más largos y tienen menos diámetro que los normales.

Otra forma de reducir la inercia es utilizar dos motores acoplados al mismo eje, cada uno de los cuáles tiene una potencia igual a la mitad de la total. La inercia del conjunto de estos dos motores es menor que la de un único motor de la potencia total.

También se puede reducir la energía perdida en el arranque utilizando algunos de los métodos de arranque en los que la velocidad de sincronismo en el arranque varía desde un valor reducido hasta el valor asignado. Esto se puede hacer mediante un convertidor de frecuencia o cuando el motor posee un devanado especial que le permite variar su número de polos.

Uno de los devanados que permiten que el motor funcione con diferentes valores del número de polos es el que tiene la **conexión Dahlander**. En este caso el motor tiene dos valores del número de polos en la proporción 2:1, lo que da lugar a que pueda funcionar con dos velocidades síncronas distintas en la proporción 1:2. El arranque que se inicia con la velocidad síncrona menor para luego conmutar a la mayor disipa la mitad de energía que el arranque directo a la velocidad síncrona mayor (ver el apartado i) del problema del anexo A).

Pérdidas de energía en el frenado a contracorriente y en la inversión del sentido de giro en vacío

Como complemento de lo visto hasta ahora se van a comparar las energías perdidas durante el arranque, el frenado a contracorriente y la inversión del sentido de giro cuando todas estas maniobras se realizan en vacío ($M_r = 0$).

El **frenado a contracorriente** se describe más extensamente en mi texto [15] y consiste en conmutar la corriente de dos fases del estator cuando la máquina asíncrona está funcionando como motor con deslizamiento pequeño; es decir, con una velocidad cercana a la de sincronismo. Esto hace que cambie el sentido de giro del campo magnético y la máquina empiece a funcionar como freno a contracorriente. Justo en el momento de la conmutación, por inercia la máquina sigue girando a la misma velocidad que cuando era motor, la cual, es prácticamente igual a la nueva velocidad de sincronismo, pero de signo opuesto. En estas condiciones la máquina empieza a reducir su velocidad y se la desconecta de la red cuando su velocidad se hace nula.

La energía disipada en esta maniobra se calcula mediante una expresión como la del arranque en vacío (B.37), pero ahora hay que cambiar los límites de la integral. En efecto, con respecto al campo giratorio que se tiene en la máquina tras la conmutación, la velocidad varía desde prácticamente $-\Omega_1$ hasta cero:

$$\Delta W_f = (1 + a) J \int_{-\Omega_1}^0 (\Omega_1 - \Omega) d\Omega$$

$$\Delta W_f = (1 + a) J \left[(\Omega_1 \cdot \Omega) - \frac{\Omega^2}{2} \right]_{-\Omega_1}^0$$

$$\text{Frenado en vacío: } \Delta W_f = \left(1 + \frac{R_1}{R'_2} \right) 3 \frac{J \Omega_1^2}{2} = 3(1 + a) W_c = 3 \Delta W_a \quad (\text{B.45})$$

Luego, en el frenado a contracorriente en vacío hasta velocidad nula se pierde el triple de energía que en el arranque en vacío. Evidentemente esta maniobra calienta mucho más a la máquina que el arranque y sólo debe realizarse en casos excepcionales o con máquinas especialmente diseñadas.

Si la maniobra es la ***inversión del sentido de giro*** en vacío, se actúa de igual manera que en el frenado a contracorriente; pero la máquina no se desconecta de la red cuando llega a la velocidad nula, sino que se la deja funcionando hasta que adquiere una velocidad próxima a la nueva velocidad de sincronismo. Esta maniobra equivale, pues, a la de frenado a contracorriente seguida de un arranque. Por lo tanto, en este caso se pierde una energía igual a la suma de las debidas a estas dos maniobras. Es decir, la energía perdida en la inversión del sentido de giro en vacío es igual a cuatro veces la energía perdida en el arranque:

$$\text{Inversión en vacío: } \Delta W_i = 4(1 + a) W_c = 4 \Delta W_a \quad (\text{B.46})$$

Evidentemente esta maniobra es aún más dura que la de frenado a contracorriente y calienta más a la máquina asíncrona.

MOTORES DE DOBLE JAULA Y DE RANURA PROFUNDA

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

PRESENTACIÓN

El sistema de arranque de un motor asíncrono por introducción de resistencias en serie con el rotor permite obtener un elevado par en el arranque. Sin embargo, este método sólo puede utilizarse con motores de rotor bobinado. Se han construido motores de jaula que, de alguna manera, realizan un arranque similar al de los motores de rotor bobinado; es decir, tienen una resistencia rotórica elevada en el arranque, pero el valor de este parámetro se va reduciendo a medida que el motor aumenta su velocidad. De esta manera se consigue que estos motores posean un mayor par de arranque.

Este texto se dedica al estudio de estos motores asíncronos con características de arranque mejoradas. Se supone que el lector ya posee unos conocimientos básicos sobre la constitución y principio de funcionamiento de las máquinas asíncronas, así como de su circuito equivalente y de su curva de par.

DESCRIPCIÓN Y PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DE ESTOS MOTORES

Motores de doble jaula

Los *motores de doble jaula* poseen dos jaulas concéntricas (Fig. 1a), construidas de tal manera que la jaula externa (situada más cerca de la boca de las ranuras) presenta una pequeña inductancia de dispersión y una elevada resistencia, mientras que la interna (situada en el fondo de las ranuras del rotor) presenta baja resistencia y alta inductancia.

Para lograr esto la jaula externa tiene barras de menos sección que la jaula interna. En algunos casos, la jaula externa además se fabrica con un material de mayor resistividad (latón o bronce) que la interna (cobre). Así se consigue que la jaula externa tenga mayor resistencia que la interna. Por otra parte, cada ranura se estrecha en el espacio que hay entre ambas jaulas (Fig. 1a), dejando sólo una rendija delgada. De esta forma se aumenta el flujo de dispersión de la jaula interna, ya que así las líneas de campo de este flujo tienen un recorrido con menor reluctancia magnética (véase la Fig. 3). La jaula externa, al encontrarse más cerca del entrehierro, tiene un flujo de dispersión menor, pues sus líneas de campo tienen un recorrido de mayor reluctancia por incluir en mayor proporción trayectos en el aire (fuera del hierro). Así se consigue que la jaula interna presente mayor inductancia de dispersión que la jaula externa.

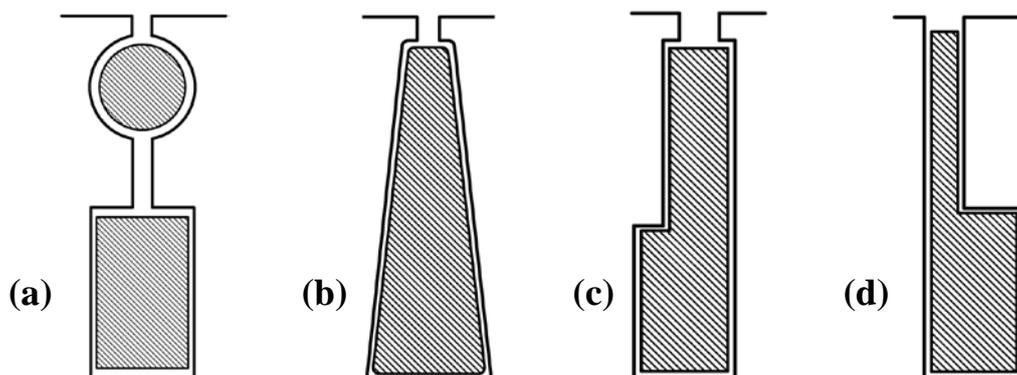


Fig. 1: Ranuras rotóricas de los motores de doble jaula (a) y de ranura profunda (b, c, y d)

Dado que se verifica que la frecuencia de las corrientes del rotor (f_2) está relacionada con la frecuencia de las corrientes del estator (f_1) y el deslizamiento (s) mediante esta fórmula:

$$f_2 = s f_1 \quad (1)$$

en el momento del arranque ($s = 1$), la frecuencia f_2 de las corrientes del rotor es igual a la de la red f_1 y la reactancia de las jaulas alcanza su valor máximo. Por ello, al arrancar la jaula externa, a pesar de tener mayor resistencia, presenta menos impedancia que la jaula interna -de alta reactancia y, en consecuencia, de mayor impedancia- y las corrientes rotóricas circulan preferentemente por ella. Se consigue así un elevado par de arranque, pues el rotor presenta entonces una resistencia alta.

A medida que el motor adquiere velocidad, disminuye la frecuencia rotórica y varía el reparto de corrientes entre las dos jaulas, aumentando la corriente de la jaula interna, cuya reactancia va bajando, y disminuyendo la corriente de la jaula externa. En régimen normal -es decir, con deslizamientos pequeños- la frecuencia rotórica es muy pequeña y las reactancias de las jaulas son despreciables, de tal manera que la corriente circula casi exclusivamente por la jaula interna; ya que ahora es la que presenta menor impedancia. En efecto, a bajos deslizamientos las reactancias son extremadamente pequeñas y las impedancias consisten casi sólo en resistencias. Esto significa que en estas condiciones el reparto de corrientes entre las dos jaulas viene condicionado por el valor de sus resistencias. La corriente circulará, entonces, preferentemente por la jaula de menor resistencia, que es la jaula interna.

Por lo tanto, en los motores de doble jaula el arranque se realiza con una resistencia elevada en el rotor que paulatinamente va disminuyendo a medida que el motor alcanza velocidad. El proceso de arranque presenta, pues, cierta similitud con el de los motores de rotor bobinado. Sin embargo, en los motores de doble jaula este aumento de la resistencia en el arranque va acompañado de una disminución de la inductancia en el arranque, lo cual no se produce en los motores de rotor bobinado.

Motores de ranura profunda

Los *motores de ranura profunda* tienen una jaula cuyos conductores tienen una forma tal que su parte inferior (en el fondo de las ranuras) presenta pequeña resistencia y alta autoinducción y la parte superior (hacia la boca de las ranuras) presenta alta resistencia y baja autoinducción (Fig. 1b, c, y d). Para ello las barras se construyen más estrechas cerca de la boca de la ranura que en el fondo.

El comportamiento de estos motores, por tanto, es similar al de los motores de doble jaula: en el arranque la corriente se concentra en la parte superior de los conductores (de alta resistencia) y en marcha normal la corriente circula preferentemente por la parte inferior, consiguiéndose así un elevado par de arranque.

Por lo tanto, en los motores de doble jaula y de ranura profunda los parámetros del rotor R'_2 y X'_2 no son constantes, sino que son funciones de la frecuencia rotórica f_2 . Dado que se cumple la relación (1), si el motor es alimentado con corrientes de frecuencia f_1 constante, se tiene que los parámetros R'_2 y X'_2 son funciones del deslizamiento s .

CIRCUITOS EQUIVALENTES PARA MOTORES DE DOBLE JAULA

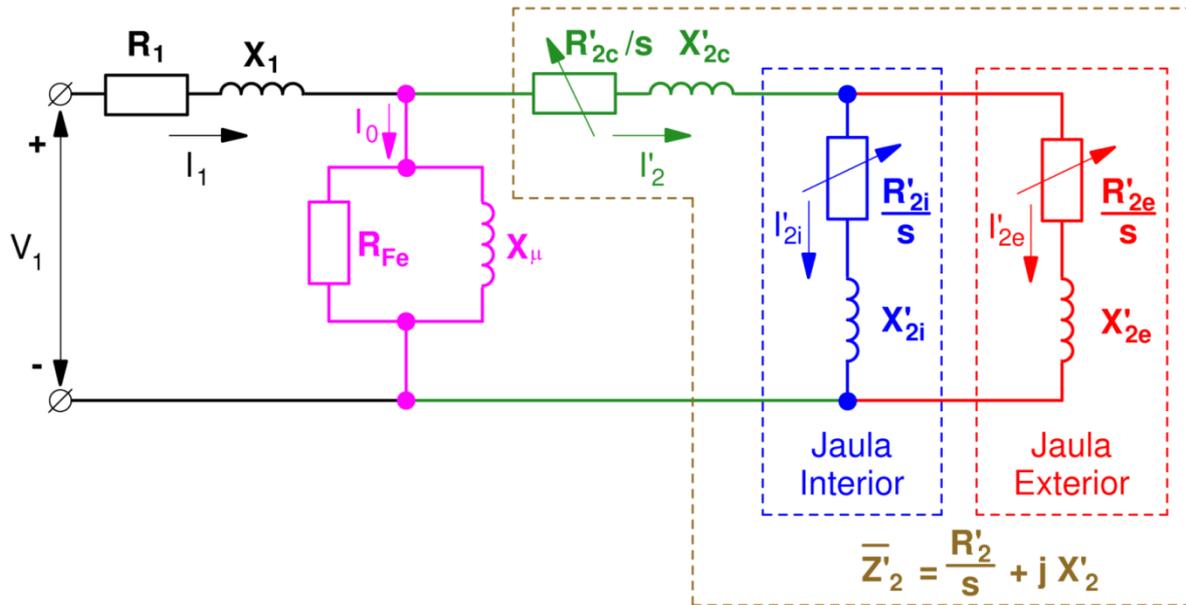


Fig. 2: Circuito equivalente de un motor asíncrono trifásico de doble jaula

En la Fig. 2 se muestra el circuito equivalente de un motor de doble jaula. Este circuito equivalente se puede utilizar también para los motores de ranura profunda.

La resistencia R'_{2c} corresponde a la resistencia de los anillos de cortocircuito cuando estos anillos son comunes a ambas jaulas y las resistencias R'_{2e} y R'_{2i} corresponden a las barras de las jaulas interna y externa, respectivamente. En los motores en los que los anillos de cortocircuito son diferentes para ambas jaulas, se da un valor nulo a la resistencia R'_{2c} y la resistencia de los anillos se incorpora a R'_{2e} y R'_{2i} .

En la Fig. 3 se representa una ranura de un motor de doble jaula y las líneas del campo magnético de dispersión correspondientes. Además de estas líneas de dispersión, también existirán las correspondientes al campo magnético principal que no se han incluido en la Fig. 3.

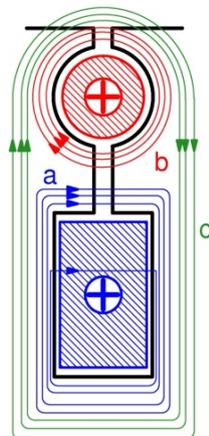


Fig. 3: Dispersión en una ranura rotórica de un motor de doble jaula

En la Fig. 3 se puede apreciar que existen unas líneas de campo magnético de dispersión que sólo rodean a una de las jaulas (líneas del tipo a y del tipo b en la Fig. 3). El campo magnético de dispersión cuyas líneas de campo sólo rodean a una jaula, en virtud del

Teorema de Ampère, es originado únicamente por la corriente que circula por esta jaula y sólo afecta a dicha jaula. En el circuito equivalente de la Fig. 2 los efectos de estos campos magnéticos de dispersión están representados por las reactancias X'_{2e} y X'_{2i} . Por otra parte, en la Fig. 3 se puede apreciar que también existen otras líneas de campo magnético de dispersión que son comunes a ambas jaulas (líneas del tipo c en la Fig. 3). Este campo de dispersión será originado por el efecto conjunto de las corrientes de las dos jaulas y ejerce influencia sobre ambas. Aunque este campo magnético afecta a dos de los devanados del motor, sigue tratándose de un campo magnético de dispersión pues sus líneas de campo no atraviesan el entrehierro y no afectan al devanado del estator. En el circuito equivalente de la Fig. 2 los efectos de este campo magnético de dispersión común está representado por la reactancia X'_{2c} ¹.

Se van a denominar R'_{20} y X'_{20} a los valores de la resistencia y la reactancia totales del rotor (R'_2 y X'_2) en el caso particular de que el deslizamiento vale 0 (marcha en vacío). Análogamente, se van a denominar R'_{2a} y X'_{2a} a los valores de estos parámetros en el caso particular de que el deslizamiento vale 1 (arranque).

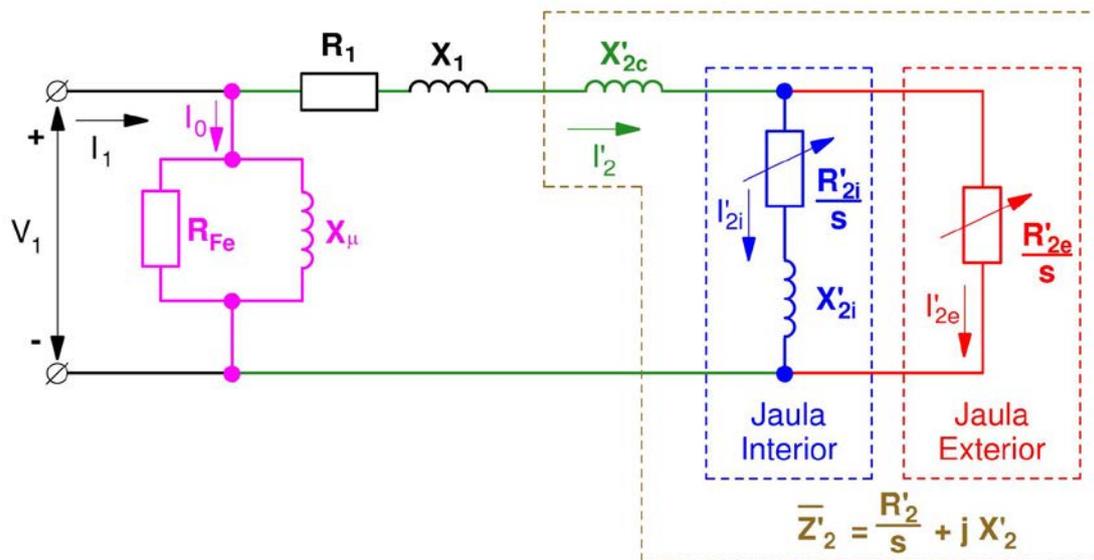


Fig. 4: Circuito equivalente simplificado de un motor asíncrono trifásico de doble jaula

El circuito equivalente de la Fig. 2 se suele simplificar de forma que la rama en paralelo quede situada justo en bornes del estator² y que sólo aparezcan 4 parámetros de resistencia y reactancia en el rotor, ya que así estos parámetros se podrán determinar si se conocen los valores de R'_{20} , X'_{20} , R'_{2a} y X'_{2a} .

¹ En realidad, el campo magnético de dispersión incluye otras líneas de campo además de las que rodean las ranuras del rotor; pero en todas ellas se puede hacer la división que se menciona en el texto: las líneas de campo de dispersión que afectan a cada una de las jaulas por separado (representadas por X'_{2e} y X'_{2i} , respectivamente) y las que son comunes a ambas jaulas (representadas por X'_{2c}).

² El desplazar la rama en paralelo a los bornes del estator introduce un error. En el libro de Kostenko [6] se demuestra que este error se reduce -especialmente en el cálculo del par- si, a la vez que se desplaza la rama en paralelo a los bornes del estator, se modifican ligeramente los parámetros del nuevo circuito equivalente empleando el coeficiente $c_1 = 1 + (X_1 / X_m)$, cuyo valor es ligeramente superior a 1. Así, los parámetros R_1 , X_1 , R_{Fe} y X_m se deben multiplicar por c_1 y los parámetros del rotor, R'_2 , X'_2 , R'_{2c} , R'_{2e} , X'_{2e} , R'_{2i} y X'_{2i} , se deben multiplicar por c_1^2 .

Siempre se suele considerar nula la resistencia común R'_{2c} y, si es preciso, su efecto se incluye dentro de las resistencias de cada jaula, R'_{2e} y R'_{2i} . La mayoría de los autores (por ejemplo, Alger [1] y Kostenko [6]) recomiendan desprestigiar la reactancia X'_{2e} de la jaula externa porque su valor suele ser pequeño comparado con $\frac{R'_{2e}}{s}$ (Fig. 4). Otros autores ([3], [4]) recomiendan desprestigiar la reactancia común X'_{2c} y aumentar las reactancias de cada jaula, X'_{2e} y X'_{2i} , para incluir de un modo aproximado sus efectos (Fig. 5).

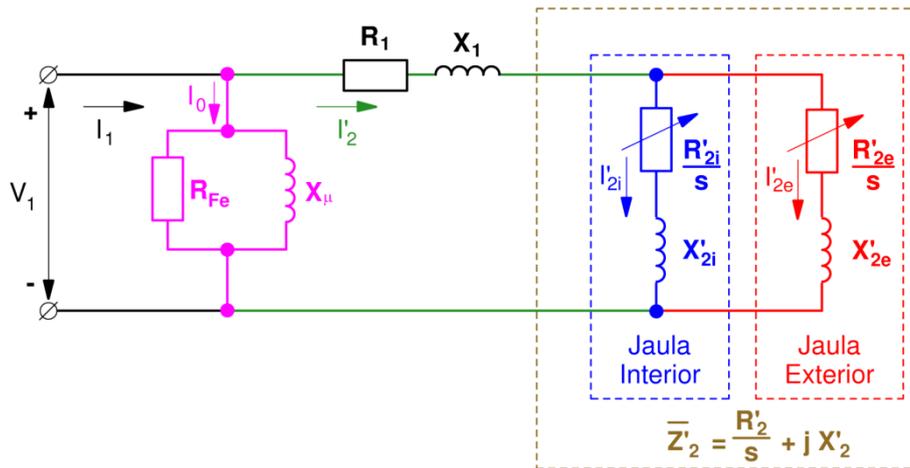


Fig. 5: Otro circuito equivalente simplificado de un motor asíncrono trifásico de doble jaula

También hay otros autores (como Chalmers [2]) que recomiendan desprestigiar en el circuito equivalente de la Fig. 2 sólo la resistencia R'_{2c} y establecer como dato adicional una proporción entre X'_{2e} y X'_{2c} . En efecto, es sabido que X'_{2e} toma valores entre el 5 y el 20% de X'_{2c} . Si no se conocen datos de diseño del motor que permitan establecer una relación más exacta, se puede considerar que X'_{2e} es igual al 7% de X'_{2c} .

Incluso en los motores de simple jaula existe en alguna medida el *efecto pelicular*, es decir, el fenómeno de la modificación de la distribución de la corriente en el interior de las barras cuando varía el deslizamiento (lo cual no sucede en los motores con el rotor bobinado). Por esta razón, es conveniente que en todos los motores de jaula se utilice alguno de los circuitos equivalentes de las Figs. 2, 4 y 5 en lugar del circuito equivalente de simple jaula.

No obstante, si lo que se desea es analizar el comportamiento de la máquina asíncrona con deslizamientos pequeños (para los cuáles los parámetros del rotor son constantes y valen R'_{20} y X'_{20} , respectivamente), sí que se puede emplear el circuito equivalente de un motor de simple jaula.

Impedancia total del rotor

La forma de calcular las características de un motor de doble jaula o de ranura profunda será el determinar para un deslizamiento s dado la impedancia equivalente \bar{Z}'_2 del rotor (de las dos jaulas en paralelo) e identificar esta impedancia con la impedancia $\frac{R'_2}{s} + jX'_2$ de un motor de simple jaula. Se resuelve entonces como si el motor fuera de simple jaula (Fig. 6) con dichos valores de R'_2 y X'_2 .

Téngase presente que estos valores de R'_2 y X'_2 sólo son válidos para un valor dado del deslizamiento s . Para otro valor del deslizamiento habrá que volver a calcular los valores de los parámetros R'_2 y X'_2 que le correspondan.

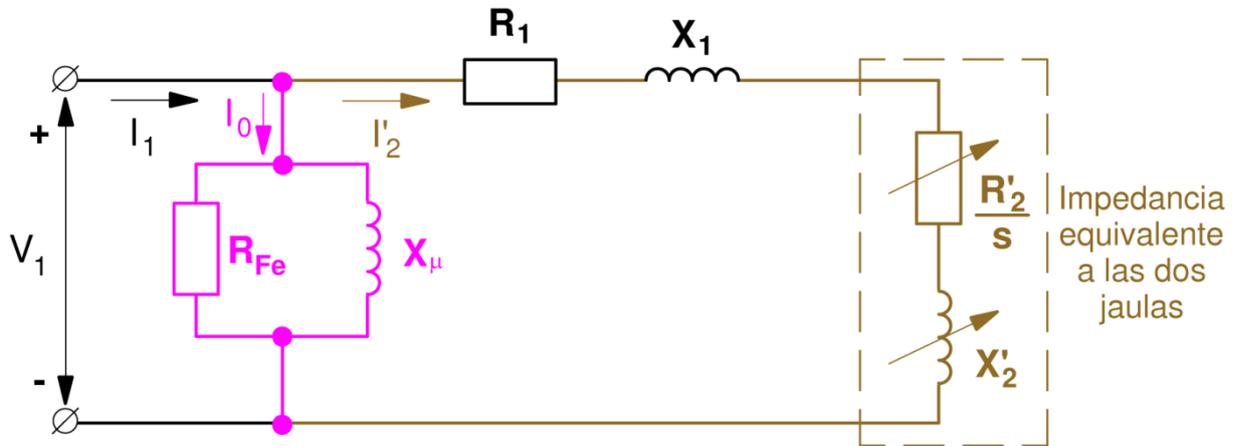


Fig. 6: Circuito equivalente de un motor de doble jaula con resistencia y reactancia del rotor variables con la frecuencia rotórica f_2

Así, si se utiliza el circuito equivalente más completo (Fig. 2), se obtienen estas expresiones:

$$R'_2 = \frac{R'_{2i} R'_{2e} (R'_{2i} + R'_{2e}) + s^2 (R'_{2i} X'^2_{2e} + R'_{2e} X'^2_{2i})}{(R'_{2i} + R'_{2e})^2 + s^2 (X'_{2i} + X'_{2e})^2} + R'_{2c} \quad (2a)$$

$$X'_2 = \frac{R'^2_{2i} X'_{2e} + R'^2_{2e} X'_{2i} + s^2 (X'_{2i} X'_{2e} (X'_{2i} + X'_{2e}))}{(R'_{2i} + R'_{2e})^2 + s^2 (X'_{2i} + X'_{2e})^2} + X'_{2c} \quad (2b)$$

Lo cual da las siguientes relaciones en vacío ($s = 0$):

$$R'_{20} = \frac{R'_{2i} R'_{2e}}{(R'_{2i} + R'_{2e})} + R'_{2c} \quad (3a)$$

$$X'_{20} = \frac{R'^2_{2i} X'_{2e} + R'^2_{2e} X'_{2i}}{(R'_{2i} + R'_{2e})^2} + X'_{2c} \quad (3b)$$

y en el arranque ($s = 1$):

$$R'_{2a} = \frac{R'_{2i} R'_{2e} (R'_{2i} + R'_{2e}) + R'_{2i} X'^2_{2e} + R'_{2e} X'^2_{2i}}{(R'_{2i} + R'_{2e})^2 + (X'_{2i} + X'_{2e})^2} + R'_{2c} \quad (4a)$$

$$X'_{2a} = \frac{R'^2_{2i} X'_{2e} + R'^2_{2e} X'_{2i} + X'_{2i} X'_{2e} (X'_{2i} + X'_{2e})}{(R'_{2i} + R'_{2e})^2 + (X'_{2i} + X'_{2e})^2} + X'_{2c} \quad (4b)$$

Factor de jaula

En los tres circuitos equivalentes indicados anteriormente (Figs. 2, 4 y 5) se deduce que este coeficiente

$$m = \frac{\Delta R'_2}{\Delta X'_2} = \frac{R'_2 - R'_{20}}{X'_{20} - X'_2} \quad (5)$$

denominado *factor de jaula*, es constante. Es decir, m es independiente del deslizamiento s que se elija para calcular los valores R'₂ y de X'₂ en la fórmula (5).

En motores de doble jaula el factor de jaula, m, suele tener valores cercanos a 1. Para un motor de simple jaula m es infinito.

Se puede demostrar que se cumple lo siguiente:

$$m = \frac{R'_{2a} - R'_{20}}{X'_{20} - X'_{2a}} = \frac{R'_{2i} + R'_{2e}}{X'_{2i} + X'_{2e}} \quad (6)$$

Relaciones entre los parámetros del circuito equivalente de la Fig. 4

En el caso particular de utilizar el circuito equivalente de la Fig. 4, en el que se desprecia la reactancia de la jaula externa, X'₂ₑ, se cumplen las siguientes relaciones [1]:

$$m = \frac{R'_{2i} + R'_{2e}}{X'_{2i}} \quad (7a)$$

$$X'_{2c} = (1 + m^2)X'_{2a} - (m^2 \cdot X'_{20}) \quad (7b)$$

$$X'_{20c} = X'_{20} - X'_{2c} = (1 + m^2) \cdot (X'_{20} - X'_{2a}) \quad (7c)$$

$$R'_{2i} = R'_{20} \left(1 + \frac{R'_{20}}{m X'_{20c}} \right) \quad (7d)$$

$$R'_{2e} = R'_{20} + m X'_{20c} \quad (7e)$$

$$X'_{2i} = X'_{20c} \left(1 + \frac{R'_{20}}{m X'_{20c}} \right)^2 = \frac{R'_{2i} + R'_{2e}}{m} \quad (7f)$$

$$\Delta X'_2 = X'_{20} - X'_2 = \frac{X'_{20c} s^2}{m^2 + s^2} = \frac{X'_{20c}}{\left(\frac{m}{s}\right)^2 + 1} \quad (7g)$$

$$\Delta R'_2 = R'_2 - R'_{20} = m \Delta X'_2 = \frac{m X'_{20c} s^2}{m^2 + s^2} = \frac{m X'_{20c}}{\left(\frac{m}{s}\right)^2 + 1} \quad (7h)$$

Se puede apreciar, entonces, que una vez conocidos los parámetros totales del rotor para deslizamientos pequeños (R'₂₀ y X'₂₀) y en el arranque (R'₂ₐ y X'₂ₐ), las relaciones (6) y (7) permiten obtener los parámetros del rotor (R'₂ᵢ, X'₂ᵢ, R'₂ₑ y X'₂ₑ) que se necesitan en el circuito equivalente representado en la Fig. 4.

ANÁLISIS DE LOS PARÁMETROS DE UN MOTOR DE RANURA PROFUNDA

Los motores con rotor de ranura profunda se pueden analizar como si fueran de doble jaula por medio de alguno de los circuitos equivalentes de las Figs. 2, 4 y 5. Alternativamente, estos motores se pueden estudiar mediante el circuito equivalente con parámetros variables de la Fig. 6, si se conocen las relaciones que permiten expresar los valores de R'_2 y de X'_2 en función del deslizamiento s o de la frecuencia rotórica f_2 .

De acuerdo con Kostenko [6], las expresiones que permiten obtener los parámetros R'_2 y X'_2 de un rotor de ranura profunda son las siguientes:

$$R'_2 = R'_{2aro} + k_r R'_{2bar0} \quad (8a)$$

$$X'_2 = X'_{2aro} + k_x X'_{2bar0} \quad (8b)$$

En estas expresiones, R'_{2aro} y X'_{2aro} son los parámetros correspondientes a los anillos de cortocircuito. Estos parámetros no varían con el deslizamiento, pues el fenómeno de desplazamiento de la corriente se produce en las barras alojadas en ranuras.

R'_{2bar0} y X'_{2bar0} son los parámetros correspondientes a las barras de la jaula cuando el deslizamiento es 0.

k_r y k_x son los *factores de efecto pelicular* sobre la resistencia y la reactancia, respectivamente. Mediante estos factores, cuyo valor es igual a la unidad para deslizamiento nulo, se tienen en cuenta los efectos del desplazamiento de la corriente sobre la resistencia y la reactancia de las barras de la jaula.

Se demuestra que:

$$k_r = \xi \frac{\text{sh } 2\xi + \text{sen } 2\xi}{\text{ch } 2\xi - \cos 2\xi} \quad (9a)$$

$$k_x = \frac{3}{2\xi} \frac{\text{sh } 2\xi - \text{sen } 2\xi}{\text{ch } 2\xi - \cos 2\xi} \quad (9b)$$

Aunque el parámetro ξ es adimensional se le suele denominar *altura equivalente*. ξ depende de la geometría y de los materiales de la barra. En la mayor parte de los casos se puede utilizar esta expresión que corresponde a jaulas de barras rectangulares:

$$\xi = h \sqrt{\frac{\pi \mu_0 f_2}{\rho}} = h \sqrt{\left(\frac{\pi \mu_0 f_1}{\rho}\right) s} \quad (10a)$$

donde:

h es la altura de la barra.

μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío (cuyo valor en el S.I. es $4\pi \cdot 10^{-7}$).

f_2 es la frecuencia de las corrientes del rotor (ver la expresión (1)).

f_1 es la frecuencia de las corrientes del estator.

s es el deslizamiento del motor.

ρ es la resistividad eléctrica del material de las barras.

En la expresión (10a) se deben utilizar las unidades de medida del S.I.

Si el motor se alimenta con una tensión de frecuencia 50 Hz ($f_1 = 50$ Hz), la altura de las barras, h , se mide en centímetros y la resistividad ρ se mide en $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$, se obtiene esta otra expresión, más práctica:

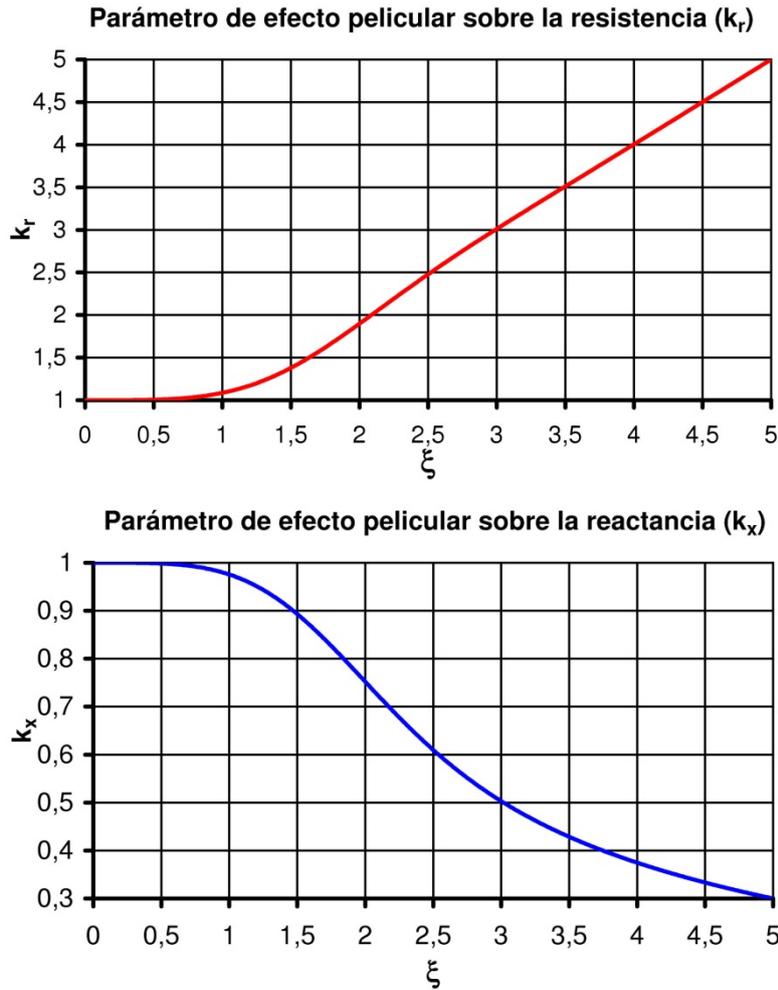


Fig. 7: Variación de los parámetros de efecto pelicular con la altura equivalente ξ .

$$\xi = \left(\frac{0,14 h}{\sqrt{\rho}} \right) \sqrt{s} \quad (10b)$$

Si en las expresiones (10) la altura h de las barras no es conocida, la norma UNE-EN 60034-28 (que se corresponde con la norma IEC 60034-28) sugiere esta estimación:

$$h = \left(0,21 - \frac{2p}{100} \right) H \quad (11)$$

donde:

H es la altura del eje del motor (se expresa en las mismas unidades que se desea obtener).
 p es el número de pares de polos del motor.

En la Fig. 7 se muestra como varían los parámetros k_r y k_x en función de ξ .

Según Alger [1], los valores de k_r y de k_x , dados por las relaciones (9), se pueden aproximar así:

$$\text{Para } \xi \leq 1,5 \rightarrow k_r \approx 1 + \frac{4}{45} \xi^4 - \frac{16}{4725} \xi^8 \quad (12a)$$

$$\text{Para } \xi \geq 2 \rightarrow k_r \approx \xi \quad (12b)$$

$$\text{Para } \xi \leq 1,5 \rightarrow k_x \approx 1 - \frac{8}{315} \xi^4 + \frac{32}{31185} \xi^8 \quad (12c)$$

$$\text{Para } \xi \geq 2 \rightarrow k_x \approx \frac{3}{2\xi} \quad (12d)$$

Las leyes que permiten determinar las variaciones de los parámetros R'_2 y X'_2 de un motor de ranura profunda en función del deslizamiento s son algo complicadas y requieren el conocer la geometría y características del rotor. Por esta razón, algunos autores sugieren el empleo de unas relaciones aproximadas, más fáciles de utilizar.

Así, según Haque [5], se puede aceptar que los valores de R'_2 y X'_2 son constantes para deslizamientos inferiores uno tomado como límite, s_{lim} :

$$\left. \begin{array}{l} R'_2 \approx R'_{20} = \text{constante} \\ X'_2 \approx X'_{20} = \text{constante} \end{array} \right\} \text{ (si } 0 \leq s \leq s_{lim} \text{)} \quad (13)$$

mientras que para deslizamientos s superiores al límite estas magnitudes varían aproximadamente de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} R'_2 \approx R'_{20} (K_1 + K_2 \sqrt{s}) \\ X'_2 \approx X'_{20} (K_3 + K_4 / \sqrt{s}) \end{array} \right\} \text{ (si } s_{lim} < s \leq 1 \text{)} \quad (14)$$

Se suele recomendar el tomar como deslizamiento límite, s_{lim} , al deslizamiento s_{m0} ; esto es, el deslizamiento para par máximo si el motor fuera de simple jaula con unos parámetros del rotor iguales a R'_{20} y X'_{20} :

$$s_{m0} = \frac{R'_{20}}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X'_{20})^2}} \quad (15)$$

Las expresiones (16), deducidas de las (14), permiten calcular los parámetros adimensionales K_1 , K_2 , K_3 y K_4 si se conocen los valores de s_{lim} y de R'_{20} , X'_{20} , R'_{2a} y X'_{2a} :

$$K_1 = \frac{1 - \left(\frac{R'_{2a}}{R'_{20}} \sqrt{s_{lim}} \right)}{1 - \sqrt{s_{lim}}} \quad (16a)$$

$$K_2 = \frac{\frac{R'_{2a}}{R'_{20}} - 1}{1 - \sqrt{s_{lim}}} \quad (16b)$$

$$K_3 = \frac{\left(\frac{X'_{2a}}{X'_{20}} \frac{1}{\sqrt{s_{lim}}} \right) - 1}{\frac{1}{\sqrt{s_{lim}}} - 1} = \frac{\left(\frac{X'_{2a}}{X'_{20}} \right) - \sqrt{s_{lim}}}{1 - \sqrt{s_{lim}}} \quad (16c)$$

$$K_4 = \frac{1 - \left(\frac{X'_{2a}}{X'_{20}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{s_{lim}}} - 1} = \frac{1 - \left(\frac{X'_{2a}}{X'_{20}} \right)}{1 - \sqrt{s_{lim}}} \sqrt{s_{lim}} \quad (16d)$$

Para los motores de diseño B según las normas NEMA (véase el apartado dedicado al par), los valores típicos de estos parámetros son:

$$K_1 = K_2 = 0,5$$

$$K_3 = 0,4$$

$$K_4 = 0,6$$

Obsérvese como mediante estas ecuaciones se comprueba que en un motor de ranura profunda se consigue que la resistencia equivalente del rotor R'_2 sea mayor durante el arranque, logrando así mejorar el par durante el arranque con respecto al de un motor de simple jaula.

EL PAR EN LOS MOTORES DE DOBLE JAULA Y DE RANURA PROFUNDA

La curva del par de un motor de doble jaula (M_t) se puede obtener como suma de las correspondientes a cada una de sus jaulas (M_i y M_e) (Fig. 8). Los motores de ranura profunda tienen curvas de par similares a las de los motores de dos jaulas.

En la Fig. 8 se han señalado los siguientes *puntos notables* en la curva del par de un motor de doble jaula:

- El par de arranque (*starting torque*), M_a .
- El par máximo (*pull-out torque, breakdown torque*), $M_{m\acute{a}x}$.
- El par asignado o de plena carga (*full load torque*), M_N .
- El par de recuperación (*pull-up torque*), M_b .

Los tres primeros puntos notables son similares a los correspondientes del motor de simple jaula. El par de recuperación M_b es el par mínimo en la zona de la curva comprendida entre el arranque y el par máximo.

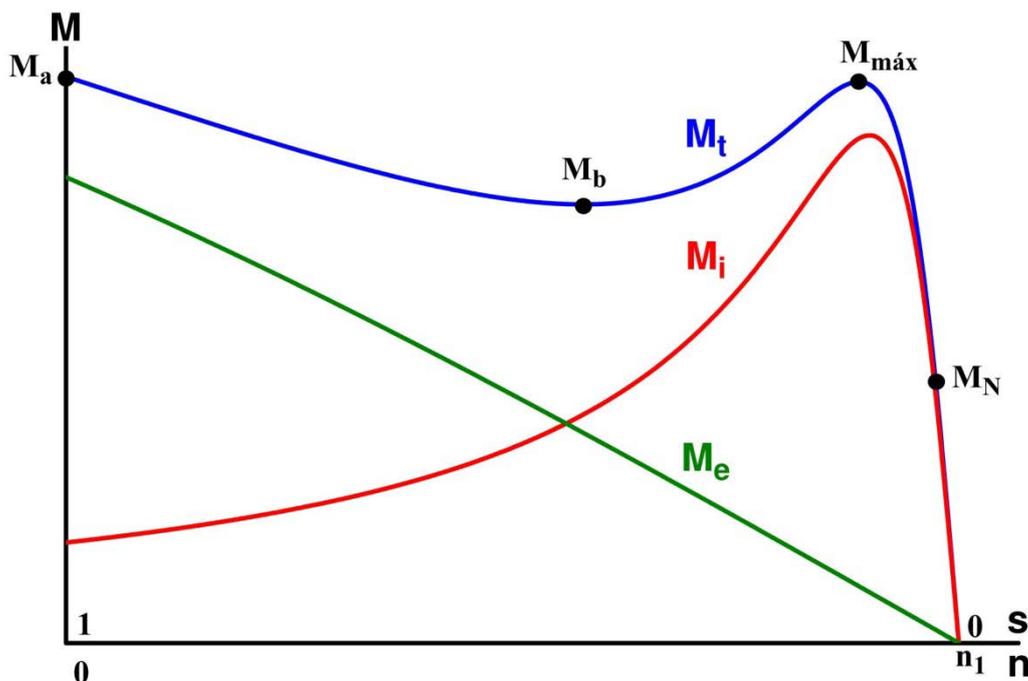


Fig. 8: Curva de par de un motor de doble jaula
(n = velocidad de giro del rotor; n_1 = velocidad de sincronismo)

La forma de esta curva está influida por el factor de jaula, m ; especialmente en la zona de deslizamientos superiores al de par máximo. Así en la Fig. 9 se han mostrado las curvas

de par, obtenidas mediante el circuito equivalente de la Fig. 4, correspondientes a varios motores con iguales parámetros del estator e iguales valores de R'_{20} , X'_{20} y de X'_{2c} , pero con diferentes valores de m .

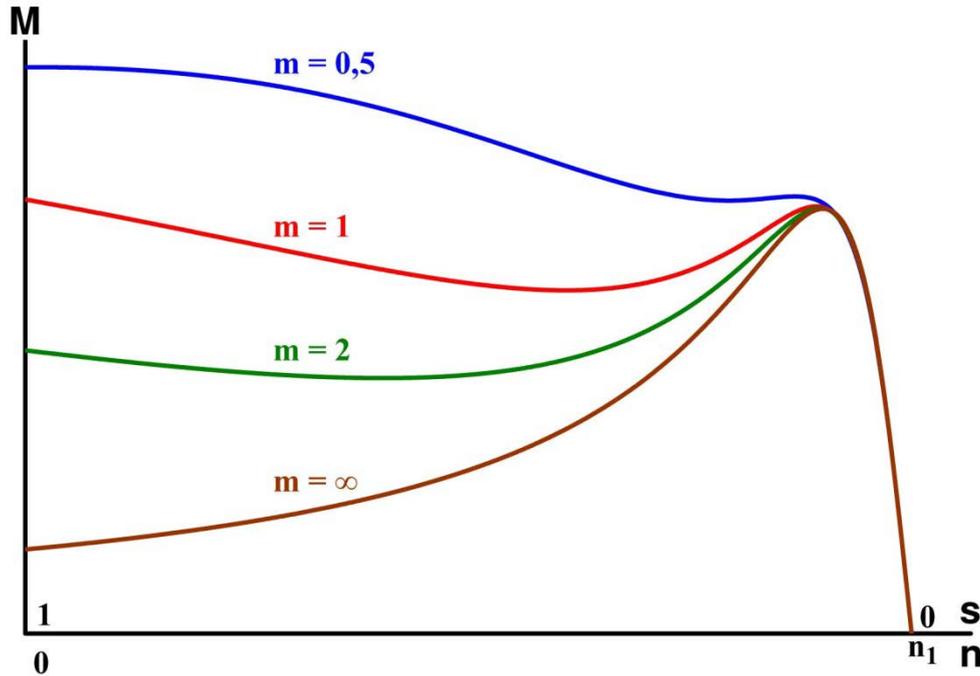


Fig. 9: Efecto del factor de jaula m sobre la curva de par

Como ya se ha indicado anteriormente, el valor del par M de un motor trifásico de doble jaula o de ranura profunda se puede calcular con la misma fórmula que en un motor de simple jaula:

$$M = \frac{3 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2 \pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(\left(R_1 + \frac{R'_2}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right)} \quad (17)$$

(n_1 = velocidad de sincronismo expresada en r.p.m.; $X_{cc} = X_1 + X'_2$)

siempre que se tenga en cuenta que ahora en esta expresión los parámetros del rotor no son constantes, sino que toman diferentes valores para cada deslizamiento s .

Los parámetros del rotor (R'_2 y X'_2) apenas varían para deslizamientos inferiores al del par máximo, tanto en los motores de doble jaula como en los de ranura profunda. Para estos deslizamientos, de una forma aproximada, se puede aceptar que estos parámetros valen R'_{20} y X'_{20} , respectivamente. Esto significa que en estos motores, en general no se comete un error apreciable si el *par máximo*, $M_{m\acute{a}x}$ se calcula utilizando la fórmula correspondiente obtenida para los motores de simple jaula, siempre que en ella se introduzcan los valores que tienen los parámetros del rotor cuando los deslizamientos son pequeños (R'_{20} y X'_{20}):

$$M_{m\acute{a}x} \approx M_{m\acute{a}x0} = \pm \frac{3}{\frac{2 \pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{2 \left(\pm R_1 + \sqrt{R_1^2 + (X_1 + X'_{20})^2} \right)} \quad (18)$$

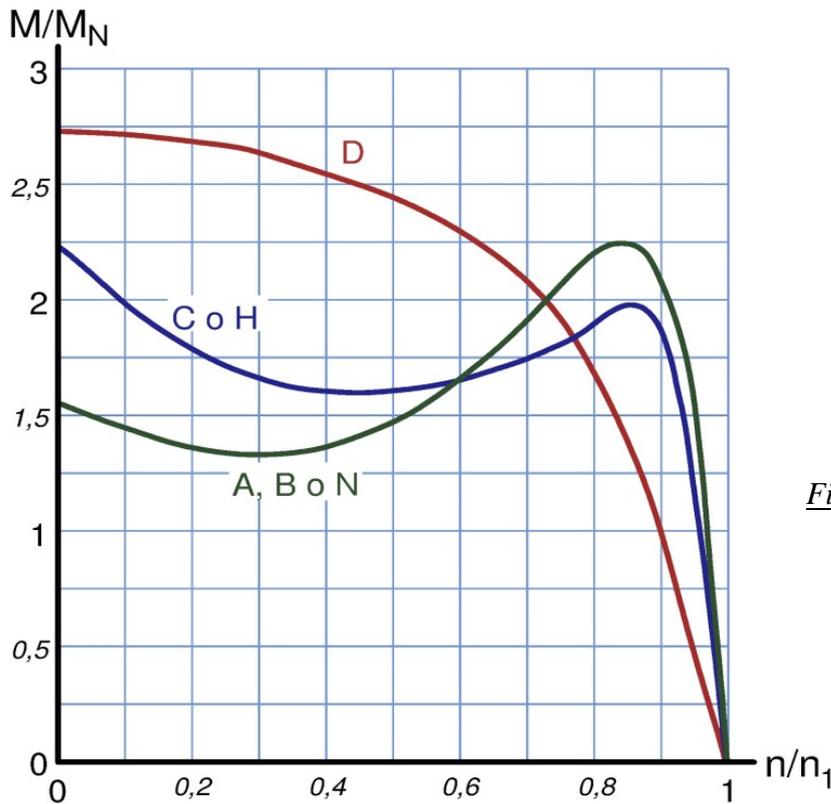


Fig. 10: Curvas par-velocidad para los diseños NEMA A, B, C y D e IEC N y H

CLASE DE MOTOR	X_1	X'_2
A	0,5	0,5
B	0,4	0,6
C	0,3	0,7
D	0,5	0,5
Rotor bobinado	0,5	0,5

Distribución empírica de reactancias. Valores en fracciones respecto al total ($X_1+X'_2$)

La *National Electrical Manufacturers Association* (NEMA), que es una asociación de fabricantes norteamericanos de máquinas eléctricas, y el *Comité Electrotécnico Internacional* (CEI o IEC), han clasificado los motores asíncronos según el diseño de su rotor (ver [11] y [12]). A estos diseños corresponden las curvas de par representadas en la Fig. 10.

Los diseños NEMA más importantes son:

- **Motores de clase A:** Son motores de simple jaula, en los que apenas se da el efecto pelicular, con barras de gran sección y, consecuentemente, de baja resistencia. Tienen pequeños deslizamientos de plena carga y de par máximo, gran par máximo y menor par de arranque que otros motores.
- **Motores de clase B:** Son motores de ranura profunda. Aunque su par de arranque es casi igual al de los motores de clase A (es ligeramente inferior), su corriente de arranque es menor. El rendimiento y el factor de potencia a plena carga son ligeramente inferiores a los de clase A. Este es el tipo de motor más frecuente y es equivalente al diseño N de la IEC.
- **Motores de clase C:** Son motores de doble jaula o de ranura profunda. Tienen mayor par de arranque que los motores A y B y presentan menor par máximo y mayores deslizamientos de plena carga y de par máximo que los motores A y B.

Esto hace que su rendimiento a plena carga sea algo inferior. Este diseño es equivalente al H de la IEC.

- *Motores de clase D*: Son motores de simple jaula en los que las barras del rotor son de pequeña sección y están construidas con un metal de alta resistividad. Esto hace que su resistencia sea elevada, lo que origina que el deslizamiento de par máximo sea muy elevado, así como el correspondiente a la plena carga. El par de arranque es alto, pero el rendimiento a plena carga es bajo. Este tipo de motores se utiliza en accionamientos con control sin variación de la frecuencia o para accionamiento de cargas con fuertes y frecuentes aceleraciones (grúas, prensas, excavadoras,...).

EFECTOS DE LA SATURACIÓN

Hasta ahora se ha supuesto que los parámetros de los circuitos equivalentes (Figs. 2, 4, 5 y 6) no están afectados por el fenómeno de la saturación magnética. Sin embargo, este fenómeno disminuye el valor de los parámetros de reactancia y, además, lo hace en distinta medida según el parámetro de que se trate.

La reactancia magnetizante X_{μ} depende del valor máximo del campo magnético principal de la máquina y este de la corriente I_0 (véase el circuito equivalente de la Fig. 2). Si la tensión, V_1 , y frecuencia, f_1 , de la red de alimentación del motor se mantienen invariables, el valor de X_{μ} prácticamente permanece constante para deslizamientos inferiores al de plena carga. Esta reactancia será, entonces, la correspondiente al nivel de saturación de diseño del motor; es decir, al inicio de la zona de saturación de la curva de magnetización del motor. Para deslizamientos superiores la corriente del estator empieza a aumentar, lo que provoca una mayor caída de tensión en los parámetros del primario, R_1 y X_1 , y una disminución de la corriente de vacío I_0 (véase la Fig. 2). Esto da lugar a una disminución del campo magnético principal que en el arranque (con deslizamiento, s , igual a 1) puede tener un valor máximo del orden del 55 al 65% del correspondiente a plena carga. En consecuencia, la reactancia magnetizante X_{μ} aumenta a medida que aumenta la carga o el deslizamiento s . De todos modos, estas variaciones de X_{μ} no influyen de forma apreciable en el par M de la máquina.

Las reactancias de dispersión -que son el parámetro X_1 y los parámetros X'_2 , X'_{2c} , X'_{2i} y X'_{2e} , según el circuito equivalente utilizado- dependen de la amplitud de los campos magnéticos de dispersión respectivos y, por lo tanto, de las corrientes que las atraviesan. Para pequeños deslizamientos la corriente no aumenta tanto como para que se manifiesten los efectos de la saturación y estas reactancias permanecen constantes. Pero para deslizamientos mayores las intensidades primaria y secundaria toman valores altos y, por lo tanto, generan campos magnéticos de dispersión elevados en los que se la saturación magnética produce efectos apreciables. Se va a denominar I_{sat} al valor de la corriente a partir de la cual la saturación magnética empieza a modificar el valor de una determinada reactancia de dispersión.

El valor de I_{sat} depende del diseño del motor. Para ranuras semicerradas suele tomar valores comprendidos entre 2 y 3 veces la corriente asignada. Para ranuras abiertas la saturación es menor y se da para corrientes mayores. Sin embargo, con ranuras cerradas I_{sat} puede tomar valores próximos a la corriente asignada.

Normalmente, se considera en los circuitos equivalentes de las Figs. 2 y 4 que la saturación afecta sobre todo a los parámetros X_1 y X'_{2c} , mientras que los parámetros X'_{2i} y X'_{2e} se les puede considerar constantes. En el circuito equivalente de la Fig. 6, la saturación afecta a los parámetros X_1 y X'_2 . Esto influye sobre el par máximo del motor, que será algo mayor debido a que cuando el par es máximo estas reactancias ya están afectadas por la saturación. En efecto, este fenómeno provoca una reducción en el valor de X_{cc} ($X_{cc} = X_1 + X'_2$) con respecto al correspondiente sin saturación, con el consiguiente aumento del par máximo (véase la ecuación (18)).

La forma en que varían X_1 , X'_2 y X'_{2c} con la saturación ha sido objeto de varios estudios (véanse las referencias bibliográficas [2] y [7]). En general, se considera que cada una de las reactancias X_1 y X'_{2c} es igual, a su vez, a la suma de dos componentes. Una de estas componentes no se satura y, en consecuencia, es invariable con la corriente. La otra componente es saturable y varía con la corriente siempre que esta sea superior a I_{sat} , ya que por debajo de esta corriente la saturación es inapreciable. La ley que muestra la variación de esta segunda componente con la saturación es función de la inversa de la corriente que la recorre.

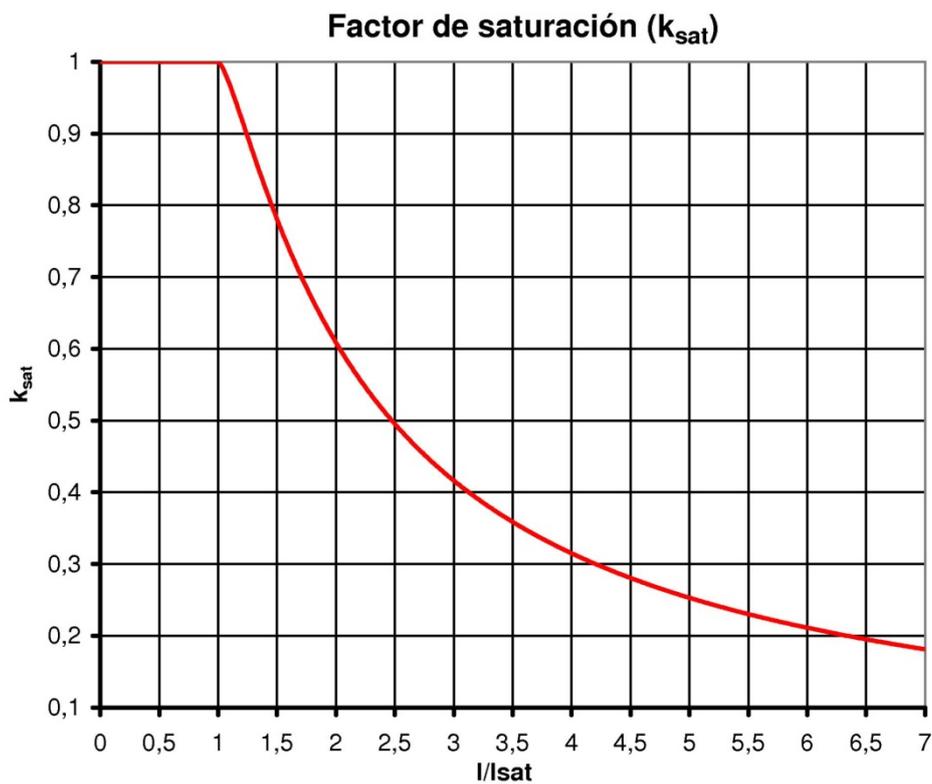


Fig. 11: Variación del factor de saturación, k_{sat} , con la corriente según Rogers

Por lo tanto, estas reactancias (X_1 y X'_{2c}) varían con la saturación según una ley así:

$$X = A + B k_{sat} \quad (19)$$

El parámetro A no varía con la corriente y representa a la componente no saturable de la reactancia X , mientras que el producto ($B k_{sat}$) representa a la componente saturable. B es una constante y k_{sat} es el factor de saturación, que es inversamente proporcional a la corriente. Este parámetro tiene valor unidad cuando no hay saturación (si la corriente es inferior a I_{sat}) y valor inferior a 1 si se manifiesta la saturación (para corrientes superiores a I_{sat}).

Así, por ejemplo, en las ecuaciones (20) y en la Fig. 11 se muestra la ley de variación del factor de saturación, k_{sat} , con la corriente propuesta por Rogers [7].

$$\text{Si } I \leq I_{\text{sat}} \rightarrow k_{\text{sat}} = 1 \quad (20a)$$

$$\text{Si } I > I_{\text{sat}} \rightarrow k_{\text{sat}} = \frac{2}{\pi} \left(\alpha + \frac{1}{2} \text{sen}(2\alpha) \right) \quad (20b)$$

$$\text{donde: } \alpha = \text{arc sen} \left(\frac{I_{\text{sat}}}{I} \right) \quad (20c)$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Alger, P. “*Induction machines. Their behavior and uses*”. Gordon and Breach Science Publishers Ltd. New York. 1970.
- [2] Chalmers, B. J.; Mulki, A. S. “Design synthesis of double-cage induction motors”. *Proc. IEE*, vol. 117, nº 7, pp. 1257-1263. Jul. 1970.
- [3] Cortes Cherta, M. “*Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. Tomo III: Máquinas de corriente alterna asíncronas*”. Editores Técnicos Asociados, S. A. Barcelona. 1986.
- [4] Fraile Mora, J. “*Máquinas Eléctricas*”. Mc Graw-Hill/Interamericana de España, S. A. U. Madrid. 2008.
- [5] Haque, M. H. “Determination of NEMA design induction motor parameters from manufacturer data”. *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. 23, nº 4, pp. 997-1004. Dec. 2008.
- [6] Kostenko, M. P.; Piotrovski, L. M. “*Máquinas eléctricas. Tomo II*”. Editorial Mir. Moscú. 1976.
- [7] Rogers, G. J.; Shirmohammadi, D. “Induction machine modelling for electromagnetic transient program”. *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. EC-2; nº 4, pp. 622-627. Dic. 1987.
- [8] Voldek, A. I. “*Máquinas eléctricas. Tomo II*”. Editorial Pueblo y Educación. La Habana (Cuba). 1990.
- [9] Waters, S. S; Willoughby, R. D. “Modeling induction motor for system studies”. *IEEE Trans. on industry applications*, vol. 1a-19, nº 5, pp. 875-878. Sept/oct. 1983.
- [10] Boldea, I; Nasar, S.A. “*The induction machine handbook*”. CRC Press. 2002.
- [11] AENOR. 2003. UNE-EN 60034-12: *Máquinas eléctricas rotativas. Parte 12: Características de arranque de los motores trifásicos de inducción de jaula con una sola velocidad*. Madrid: AENOR.
- [12] NEMA. 2001. NEMA Standards Publication MG 10-2001 (R2007): *Energy Management Guide For Selection and Use of Fixed Frequency Medium AC Squirrel-Cage Polyphase Induction Motors*. Rosslyn, Virginia. USA.



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA



FRENADO DE MÁQUINAS

ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Doctor Ingeniero Industrial

© 2017, Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Universidad de Cantabria (España)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.



Está permitida la reproducción total o parcial de este documento bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Unported que incluye, entre otras, la condición inexcusable de citar su autoría (Miguel Angel Rodríguez Pozueta - Universidad de Cantabria) y su carácter gratuito.

Puede encontrar más documentación gratuita en la página web del autor:

<http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm>

FRENADO DE MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

INTRODUCCIÓN

Se entiende que una máquina eléctrica funciona como freno cuando ejerce un par de frenado; es decir, de sentido contrario a su velocidad. Dependiendo de cómo sea el par de la carga mecánica, se tiene que el comportamiento del sistema máquina eléctrica-carga mecánica cuando la primera actúa como freno es así:

- * Si la carga mecánica deja de actuar como tal y pasa a ejercer un par motor, el sistema buscará un punto de funcionamiento en el que se equilibre este par con el de frenado de la máquina eléctrica y la velocidad alcanzará un valor constante.

Esto es lo que sucede cuando un vehículo eléctrico desciende una pendiente. Mientras subía la pendiente la máquina eléctrica ejercía un par motor que tenía que vencer al par resistente debido al peso y a los rozamientos. Cuando el vehículo desciende la pendiente el par debido al peso pasa a ser un par motor y la máquina eléctrica se conecta de modo que ejerza un par de frenado que impida que la velocidad aumente excesivamente.

- * Si la carga mecánica sigue actuando como tal, se suman los pares de frenado de la carga y de la máquina eléctrica provocando la disminución de la velocidad, que incluso puede llegar hasta la detención del sistema máquina eléctrica-carga mecánica.

Esto es lo que sucede cuando un vehículo eléctrico circula en un trayecto plano. La máquina actúa, en principio, como motor y los rozamientos del vehículo constituyen la carga mecánica. Si ahora se desea frenar el vehículo, se conecta la máquina eléctrica como freno para que el vehículo disminuya su velocidad merced al efecto conjunto del par de frenado de la máquina eléctrica más el par de carga de los rozamientos.

Existen varios procedimientos para que una máquina asíncrona pase a actuar como freno que se van a explicar más adelante.

FUNDAMENTOS DE LA MÁQUINA ASÍNCRONA

Ecuaciones básicas. Circuito equivalente. Parámetros

Antes de empezar a estudiar los diferentes sistemas de frenado se van a repasar algunos conceptos básicos del comportamiento de una máquina de inducción (para más detalles puede consultar mi texto [13]).

Cuando el estator de una máquina asíncrona de p pares de polos está recorrido por un sistema trifásico equilibrado de corrientes de frecuencia f_1 hercios (Hz), el campo magnético que se obtiene gira con una velocidad de n_1 r.p.m. (que equivale a Ω_1 rad/s) denominada *velocidad de sincronismo* o *velocidad síncrona*:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p}; \quad \Omega_1 = \frac{2 \pi}{60} n_1 = \frac{2 \pi f_1}{p} \quad (1)$$

Si el eje de la máquina gira a una velocidad de n r.p.m. (o Ω rad/s) su deslizamiento s es una magnitud adimensional que se obtiene así:

$$s = \frac{n - n_1}{n_1} = \frac{\Omega_1 - \Omega}{\Omega_1} \quad (2)$$

La velocidad relativa a la cual el rotor "ve" girar el campo magnético se llama n_2 cuando se mide en r.p.m. y Ω_2 si se mide en rad/s:

$$n_2 = n_1 - n = s \cdot n_1; \quad \Omega_2 = \Omega_1 - \Omega = s \cdot \Omega_1 \quad (3)$$

Esto hace que en el rotor se induzcan fuerzas electromotrices (f.e.m.s) y circulen corrientes, todas ellas de frecuencia f_2 y pulsación ω_2 :

$$f_2 = \frac{p \cdot n_2}{60} = \frac{p \cdot \Omega_2}{2\pi} = s \cdot f_1; \quad \omega_2 = 2\pi f_2 = p \cdot \Omega_2 = \frac{2\pi}{60} \cdot p \cdot n_2 \quad (4)$$

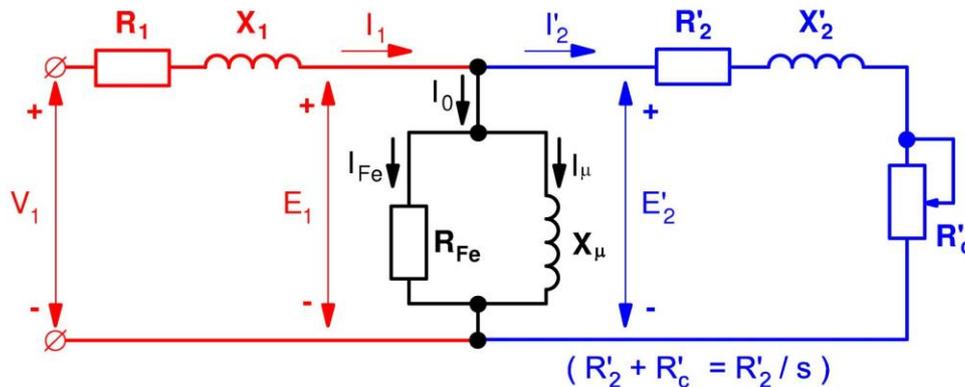


Fig. 1: Circuito equivalente de una máquina asíncrona

La Fig. 1 muestra el *circuito equivalente* completo de una máquina asíncrona con el rotor reducido al estator. Las reactancias que aparecen en este circuito son

$$X_1 = 2\pi f_1 L_{d1}; \quad X'_2 = 2\pi f_1 L'_{d2}; \quad X_\mu = 2\pi f_1 L_\mu \quad (5)$$

En este texto se va a suponer que las resistencias (R_1 y R'_2) y las *inductancias de dispersión* (L_{d1} y L'_{d2}) son constantes e independientes de f_2 . Es decir, no se va a considerar el efecto pelicular que aparece en las máquinas de doble jaula y de ranura profunda. La *inductancia magnetizante* L_μ depende del nivel de saturación de los núcleos magnéticos y permanece constante mientras el campo magnético en el entrehierro permanezca aproximadamente constante. En la mayor parte de los casos se puede prescindir de la *resistencia de pérdidas en el hierro* R_{Fe} y suprimirla del circuito equivalente de la Fig. 1.

La *resistencia de carga* R'_c se obtiene así:

$$R'_c = R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = R'_2 \left(\frac{1-s}{s} \right) \quad (6)$$

Por lo que, en el circuito equivalente de la Fig. 1 la suma de todas las resistencias que hay en el rotor vale

$$R'_2 + R'_c = \frac{R'_2}{s} \quad (7)$$

Balance de potencias de una máquina asíncrona actuando como motor

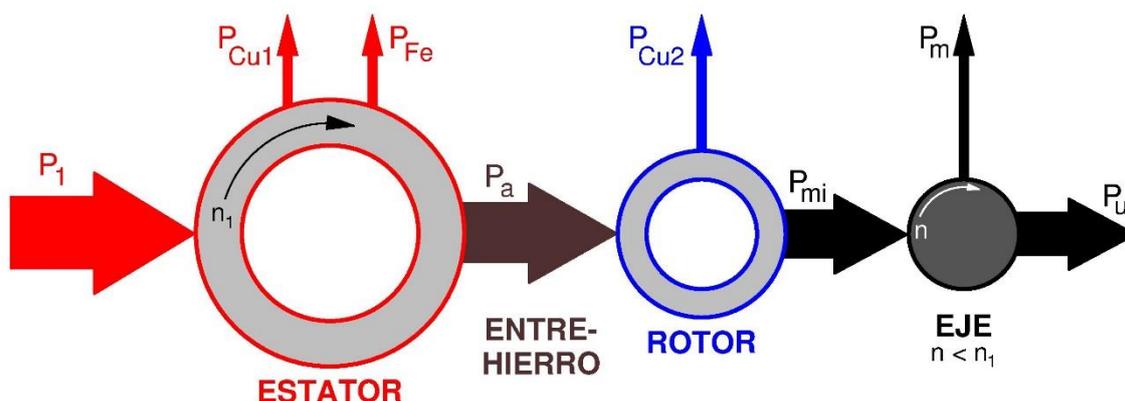


Fig. 2: Balance de potencias de una máquina asíncrona actuando como motor

En la Fig. 2 se muestra el *balance de potencias* de una máquina asíncrona cuando está actuando como motor. En esta forma de funcionamiento la máquina absorbe por el estator una potencia eléctrica (potencia activa) P_1 y suministra por el eje una potencia mecánica P_u . Esta es la potencia útil cuando actúa como motor. Para otras formas de funcionamiento se va a seguir denominando P_u a la potencia mecánica en el eje, aunque ya no se trate de la potencia útil.

En la conversión de la potencia eléctrica P_1 en mecánica P_u se pierde algo de potencia que se disipa en forma de calor. Hay diferentes tipos de potencia perdida o *pérdidas*:

- P_{Cu1} *Pérdidas en el cobre del estator*, debidas a la resistencia R_1 de las fases del devanado del estator.
- P_{Fe} *Pérdidas magnéticas o en el hierro*, debidas a las corrientes de Foucault y a la histéresis en los núcleos magnéticos. En funcionamiento normal el deslizamiento s y la frecuencia rotórica f_2 son pequeños, lo que hace que las pérdidas magnéticas del rotor sean despreciables y solamente se tengan en consideración las pérdidas en el hierro en el estator. En el circuito equivalente de la Fig. 1 estas pérdidas son las que se disipan en la resistencia R_{Fe} .
- P_{Cu2} *Pérdidas en el cobre del rotor*, debidas a la resistencia R_2 (o R'_2 si se usa el rotor reducido al estator) de las fases del devanado del rotor.
- P_m *Pérdidas mecánicas y de ventilación* debidas a los rozamientos mecánicos de la máquina y a la potencia consumida por su sistema de refrigeración. Estas pérdidas no se reflejan en el circuito equivalente de la Fig. 1.

Además de estas pérdidas existen las *pérdidas adicionales* que engloban a pérdidas debidas a diferentes causas de difícil cuantificación y que no se han tenido en cuenta en este estudio.

La *potencia en el entrehierro* P_a (Fig. 2) es la potencia que fluye del estator hacia el rotor a través del entrehierro. En el circuito equivalente de la Fig. 1 esta potencia es la que se gasta en la totalidad de las resistencias del rotor:

$$P_a = P_1 - (P_{Cu1} + P_{Fe}) \quad (8)$$

$$P_a = m_1 I_2^2 \frac{R'_2}{s} \quad (9)$$

En la expresión anterior m_1 es el número de fases del estator, que usualmente va a valer 3 (máquina trifásica).

La potencia interna es la que la máquina transforma de potencia electromagnética en potencia mecánica. Vista desde el lado mecánico se trata de la *potencia mecánica interna* P_{mi} y es la que internamente se ejerce sobre el eje. En el circuito equivalente (Fig. 1) esta potencia es la que se gasta en la resistencia de carga R'_c :

$$P_{mi} = P_a - P_{Cu2} \quad (10)$$

$$P_{mi} = m_1 I_2^2 R'_c = m_1 I_2^2 R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \quad (11)$$

La *potencia mecánica* P_u que la máquina suministra al exterior por su eje se obtiene restando las pérdidas mecánicas P_m de la potencia mecánica interna P_{mi} y, en la práctica, se la puede considerar prácticamente igual a la potencia mecánica interna:

$$P_u = P_{mi} - P_m \approx P_{mi} \quad (12)$$

Sea cual sea el modo de funcionamiento de la máquina asíncrona, sus pérdidas siempre se disipan en forma de calor y, en consecuencia, tienen siempre el sentido mostrado en la Fig. 2. Las potencias P_1 , P_a , P_{mi} y P_u tienen diferentes sentidos según la forma de funcionamiento de la máquina (motor, generador o freno (Fig. 3)). Se considera que estas potencias son positivas cuando tienen el mismo sentido que cuando la máquina actúa como motor; es decir, el sentido indicado en la Fig. 2.

En cualquier tipo de funcionamiento de la máquina de inducción, la potencia P_1 tiene el mismo sentido que la potencia P_a y, por otra parte, también sucede que la potencia P_{mi} tiene el mismo sentido que la potencia P_u . El signo de la potencia P_a (y de P_1) es el de la resistencia R'_2/s (como se deduce de la relación (9)) y el de la potencia P_{mi} (y de P_u) es el signo de la resistencia R'_c (ver (11)).

Curva de par de una máquina asíncrona alimentada con V_1 y f_1 constantes

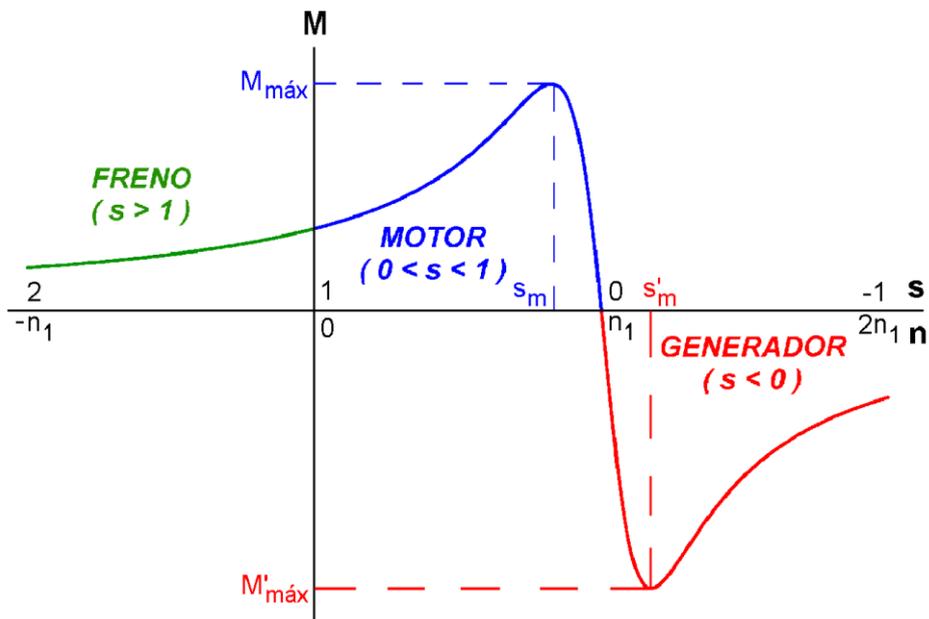


Fig. 3: Curva de par de una máquina asíncrona polifásica a V_1 y f_1 constantes

En la Fig. 3 se muestra la *curva de par* de una máquina asíncrona cuando se la alimenta con una fente de tensión que suministra a las fases del estator un sistema trifásico equilibrado de tensiones sinusoidales cuyo valor eficaz V_1 y cuya frecuencia f_1 son constantes. En el eje de abscisas de esta gráfica se ha colocado una doble escala: una para la velocidad de giro del rotor n y otra para el deslizamiento s correspondiente según (2). En el eje de ordenadas se muestra el par M . Una vez elegido arbitrariamente el sentido positivo para la velocidad n , el par M se considera positivo si intenta hacer girar al eje en sentido positivo (funcionamiento motor en sentido positivo).

En la curva de par de la Fig. 3 se supone que el campo magnético gira con una velocidad n_1 positiva y que las pérdidas mecánicas P_m son despreciables. Es decir, se va a trabajar con el *par interno* M que se supone prácticamente igual al *par útil* M_u .

$$M_u = \frac{P_u}{\Omega}; \quad M = \frac{P_{mi}}{\Omega}; \quad M_u \approx M \quad (13)$$

Por esta razón se obtiene un par M nulo cuando la velocidad n iguala a la velocidad de sincronismo n_1 . En la curva de la Fig. 3 se pueden distinguir tres formas de funcionamiento de la máquina asíncrona:

- Motor: Cuando la velocidad n tiene un valor entre 0 y la velocidad síncrona n_1 , lo que, según (2), equivale a que el deslizamiento s tome valores entre 1 y 0.
- Generador: Cuando la velocidad n tiene un valor superior a la velocidad de sincronismo n_1 , lo que equivale a que el deslizamiento s sea negativo.
- Freno a contracorriente: Cuando la velocidad n es de sentido contrario a la velocidad de sincronismo n_1 , lo que, según la relación (2), equivale a que el deslizamiento s tome valores superiores a 1.

En la Fig. 3 se puede apreciar que cuando la máquina actúa como motor el par M y la velocidad n son del mismo signo. Sin embargo, en los funcionamientos como generador y como freno a contracorriente el par M y la velocidad n son de signos opuestos y, por lo tanto, el par es un par de frenado.

La expresión del par M en función del deslizamiento s utilizada para obtener la curva de la Fig. 3 es la siguiente:

$$M_u \approx M = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{P_a}{\frac{2\pi}{60} n_1} \quad (14)$$

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} \quad (15)$$

Los valores extremos de la curva de par -que son $M_{m\acute{a}x}$ en funcionamiento motor y $M'_{m\acute{a}x}$ funcionando como generador (Fig. 3)- tienen valores absolutos ligeramente distintos y se producen a unos deslizamientos -que son s_m y s'_m , respectivamente- de iguales valores absolutos:

$$M_{m\acute{a}x} = \pm \frac{m_1}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{2\left(\pm R_1 + \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}\right)}; \quad s_m = \pm \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \quad (16)$$

Las fórmulas anteriores dan los valores de $M_{m\acute{a}x}$ y de s_m , respectivamente, cuando se utiliza el signo “+” y los valores de $M'_{m\acute{a}x}$ y de s'_m si se utiliza el signo “-”.

Lo más habitual es que una máquina asíncrona funcione con una velocidad n ligeramente distinta de la de sincronismo n_1 ; es decir, con deslizamientos s muy pequeños. Si V_1 y f_1 son constantes sucede que, cuando el deslizamiento s es pequeño, la amplitud del campo magnético en el entrehierro se conserva prácticamente constante y, entonces, el flujo por polo Φ_M también se mantiene prácticamente constante.

Curva de par de una máquina asíncrona alimentada con I_1 y f_1 constantes

Ahora se va a estudiar a una máquina asíncrona alimentada por una fente de corriente que hace que por las fases del estator circule un sistema trifásico equilibrado de corrientes sinusoidales cuyo valor eficaz I_1 y cuya frecuencia f_1 no varían y tienen siempre los mismos valores a todas las velocidades. Para más información sobre esta forma de funcionamiento se pueden consultar los libros [1] y [3].

En este caso la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) del estator siempre conserva el mismo valor, pues I_1 es constante. Sin embargo, la corriente del rotor I_2 variará con la velocidad y, consecuentemente, la f.m.m. del rotor será variable. El campo magnético en el entrehierro depende del efecto conjunto de ambas f.m.m.s y será, pues, variable con la velocidad y, en consecuencia, el flujo por polo Φ_M también será variable.

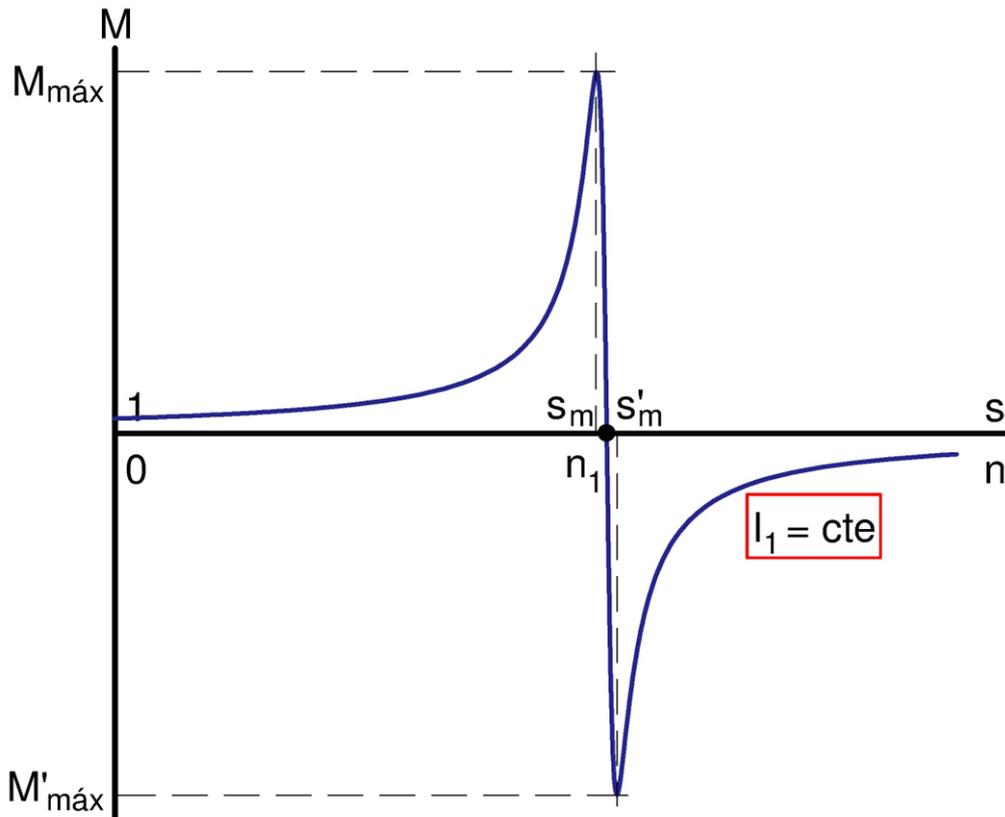


Fig. 4: Curva de par de una máquina asíncrona polifásica a I_1 y f_1 constantes

En la Fig. 4 se muestra la *curva de par* de una máquina asíncrona cuando por el estator se la alimenta con una fuente de corriente de valor eficaz I_1 y frecuencia f_1 constantes. Al igual que en la Fig. 3, en el eje de abscisas se ha colocado una doble escala: una para la velocidad de giro del rotor n y otra para el deslizamiento s correspondiente según (2). En el eje de ordenadas se muestra el par M .

La expresión que ahora relaciona el par M con el deslizamiento s es

$$M = \frac{m_1 p R'_2}{2 \pi f_1} \frac{s \cdot X_\mu^2}{R_2'^2 + s^2 (X_2' + X_\mu)^2} I_1^2 \quad (17)$$

Teniendo en cuenta las relaciones (1) a (5), la expresión anterior se convierte en

$$M = \frac{m_1 p R'_2}{\omega_2} \frac{(\omega_2 \cdot L_\mu)^2}{R_2'^2 + [\omega_2 \cdot (L'_{d2} + L_\mu)]^2} I_1^2 \quad (18)$$

La curva de la Fig. 4 es completamente simétrica; luego, sus valores extremos, $M_{máx}$ y $M'_{máx}$, tienen el mismo valor absoluto:

$$M_{máx} = \pm \frac{m_1 p}{2} \frac{L_\mu^2}{L'_{d2} + L_\mu} I_1^2 \quad (19)$$

Estos valores extremos se producen con deslizamientos (s_m y s'_m), frecuencias (f_{2m} y f'_{2m}) y pulsaciones (ω_{2m} y ω'_{2m}) de iguales valores absolutos, respectivamente:

$$s_m = \pm \frac{R'_2}{X'_2 + X_\mu}; \quad f_{2m} = \pm \frac{R'_2}{2\pi(L'_{d2} + L_\mu)}; \quad \omega_{2m} = \pm \frac{R'_2}{L'_{d2} + L_\mu} \quad (20)$$

De estas expresiones y de la Fig. 4 se deduce que funcionando con corriente I_1 constante la máquina tiene unos valores de s_m -o de ω_{2m} - muy pequeños. Los valores extremos se producen a unas velocidades muy cercanas a la de sincronismo n_1 . También se aprecia que las magnitudes f_{2m} y ω_{2m} no dependen de la frecuencia en el estator f_1 .

La expresión (18) indica que, si la máquina mantiene constante el valor eficaz I_1 de la corriente del estator, proporcionará el mismo par M cuando en el rotor exista la misma pulsación ω_2 (o, lo que es equivalente, la misma frecuencia f_2), con independencia del valor de la frecuencia f_1 en el estator. Según las relaciones (3) y (4), lo anterior equivale a decir que, si la máquina mantiene constante la amplitud de la f.m.m. estática, para iguales valores de la diferencia n_2 entre la velocidad de sincronismo n_1 y de giro de la máquina n se obtendrá el mismo par M , independientemente del valor de la velocidad de sincronismo n_1 .

El circuito equivalente de la Fig. 2 aumenta su impedancia total a medida que disminuye el deslizamiento s . Como ahora este circuito tiene una corriente I_1 constante, esto significa que a medida que disminuye el deslizamiento s aumenta la tensión V_1 en el estator; lo que, a su vez, hace que la amplitud del campo magnético aumente también. Por lo tanto, salvo que la corriente del estator I_1 sea pequeña (inferior a la corriente de vacío que tiene la máquina en condiciones asignadas), para valores muy pequeños del deslizamiento s la máquina estará fuertemente saturada y esto afectará al valor de la inductancia magnetizante L_μ . Este parámetro no permanecerá constante, sino que irá disminuyendo a medida que el núcleo magnético se satura más, es decir, a medida que disminuye el deslizamiento s o, lo que es equivalente, a medida que la velocidad de la máquina n se acerque a la de sincronismo n_1 . En este caso, las expresiones para el par máximo (19) y (20) -obtenidas suponiendo que L_μ es constante- solamente dan valores aproximados y en ellas se deberá emplear el valor correspondiente de dicho parámetro L_μ .

Punto de funcionamiento

Cuando un motor asíncrono mueve una carga mecánica en régimen permanente se establece un equilibrio entre el par motor M proporcionado por la máquina asíncrona y el par resistente M_r de la carga. Por lo tanto, el sistema motor-carga funciona con velocidad constante en un punto en el que se verifica la siguiente igualdad

$$\text{Punto de funcionamiento: } M = M_r \quad (21)$$

En la Fig. 5 se han representado sobre los mismos ejes de coordenadas las curvas par-velocidad del motor y de la carga mecánica. El punto de funcionamiento del sistema (P en la Fig. 5) será el punto de corte de ambas curvas.

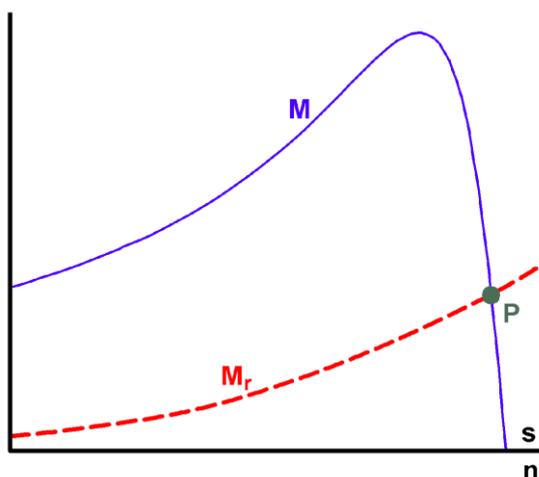


Fig. 5: Punto de funcionamiento

Nótese que los convenios de signos para M y M_r son opuestos:

- M es el par de la máquina asíncrona y con él se usa el convenio de signos motor; esto es, un par a favor de la velocidad de su mismo signo. Por lo tanto, cuando el par M es positivo es un par que intenta que la velocidad sea positiva y cuando M es negativo pretende que la velocidad sea negativa.
- M_r es el par del elemento mecánico acoplado al eje de la máquina asíncrona y que, en principio, se supone que es una carga mecánica. Luego para M_r se aplica el convenio de signos del par resistente: es un par opuesto a la velocidad de su mismo signo. Esto significa que cuando M_r es positivo es un par que se opone a que la velocidad sea positiva; es decir, intenta que la velocidad sea negativa. Mientras que cuando M_r es negativo se opone a que la velocidad sea negativa; es decir, pretende que la velocidad sea positiva.

FRENADO POR RECUPERACIÓN DE ENERGÍA (FRENADO REGENERATIVO)

Este sistema de frenado consiste en hacer funcionar la máquina de inducción como generador, con lo cual se invierte su balance de potencias (Fig. 7) y ejerce un par de sentido contrario a la velocidad (Figs. 3 y 8). Para ello hay que conseguir que la velocidad de la máquina sea superior a su velocidad de sincronismo, bien aumentando la primera o bien disminuyendo la segunda.

Generador asíncrono

Una máquina asíncrona actúa como generador cuando su velocidad n supera a la de sincronismo n_1 , resultando entonces que el deslizamiento s es negativo (ver (2)).

Con deslizamiento s negativo sucede que la resistencia total del rotor R'_2/s es negativa, lo que origina que la potencia en el entrehierro P_a y la potencia eléctrica en el estator P_1 sean negativas (ver las relaciones (8) y (9)). También sucede que la resistencia de carga R'_c es negativa, lo que conlleva que la potencia mecánica interna P_{mi} y la potencia mecánica P_u también sean negativas (ver las relaciones (6), (10) y (11)). Todo esto, que está reflejado en el resumen de la Fig. 6, hace que el balance de potencias (Fig. 7) ahora sea el inverso a cuando la máquina actuaba como motor (Fig. 2).

GENERADOR ASÍNCRONO

$$s < 0 \rightarrow R'_c = R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) < 0; \quad \frac{R'_2}{s} < 0$$

$$P_a = m_1 I_2^2 \frac{R'_2}{s} < 0 \quad (P_a \text{ y } P_1 \text{ generadas})$$

$$P_{mi} = m_1 I_2^2 R'_c = m_1 I_2^2 R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) < 0 \quad (P_{mi} \text{ y } P_u \text{ absorbidas})$$

$$P_a < 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos \varphi_2 < 0 \\ \text{sen } \varphi_2 > 0 \end{array} \right\} \frac{\pi}{2} < \varphi_2 < \pi$$

$$\text{sen } \varphi_2 > 0 \rightarrow \text{sen } \varphi_1 > 0 \text{ y } Q_1 > 0 \quad (Q_1 \text{ absorbida})$$

Absorbe potencia reactiva

Un generador asíncrono con el rotor en cortocircuito produce energía activa pero es incapaz de generar energía reactiva.

Fig. 6: Resumen de la máquina asíncrona con el rotor en cortocircuito actuando como generador

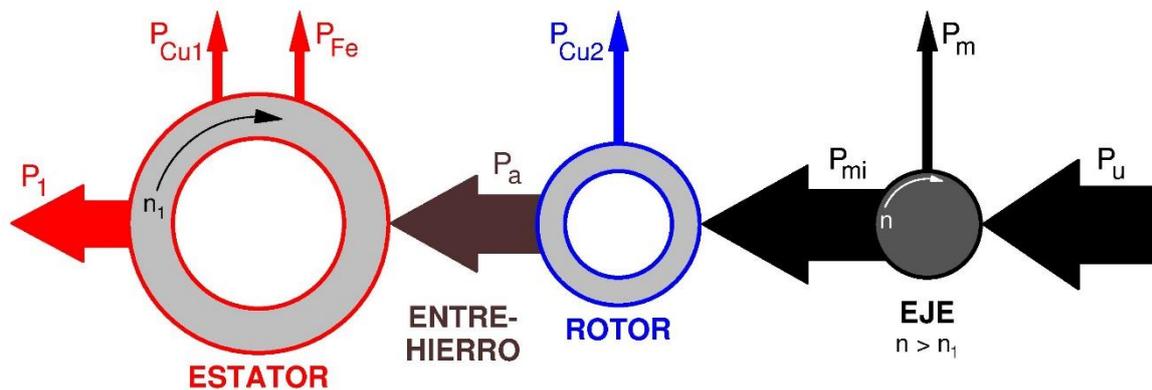


Fig. 7: Balance de potencias en un generador asíncrono con el rotor en cortocircuito

(Se ha mantenido la misma nomenclatura que cuando la máquina actúa como motor. Por esta razón, se ha denominado P_u a la potencia en el eje, aunque ahora -actuando como generador- ya no es la potencia útil)

En funcionamiento como generador la máquina de inducción absorbe una potencia mecánica por el eje P_u , para lo cual debe ejercer un par de frenado M (opuesto a la velocidad n), y genera una potencia eléctrica P_1 que suministra por el estator.

Nótese que en el circuito equivalente de una máquina asíncrona con el rotor en cortocircuito (Fig. 1) las reactancias no cambian nunca de signo y siempre son inductivas. Esto significa que el factor de potencia de la máquina siempre va a ser inductivo y nunca podrá generar potencia reactiva.

Por lo tanto, un generador asíncrono con el rotor en cortocircuito produce potencia activa, pero no potencia reactiva. Esto, en principio, impide que una máquina asíncrona funcione como generador aislado, alimentando ella sola a una carga eléctrica; sino que debe estar acoplado a otro generador o a una red que suministre la potencia reactiva necesaria.

No obstante lo anterior, existe la posibilidad de que la máquina asíncrona pueda funcionar como generador aislado colocando condensadores en paralelo con el estator, los cuales proporcionan potencia reactiva. Sin embargo, es un sistema poco práctico para alimentar cargas eléctricas cuya potencia no permanezca constante. Para más información puede consultar el libro de Fraile [8].

Se puede conseguir que una máquina asíncrona pueda actuar como generador aislado si no tiene su rotor en cortocircuito sino alimentado a través de un convertidor de frecuencia (máquina asíncrona doblemente alimentada), lo que exige que se trate de una máquina de rotor bobinado. En este texto no se estudia esta forma de funcionamiento. Para más detalles consulte mi texto [16].

Ejemplos de frenado regenerativo

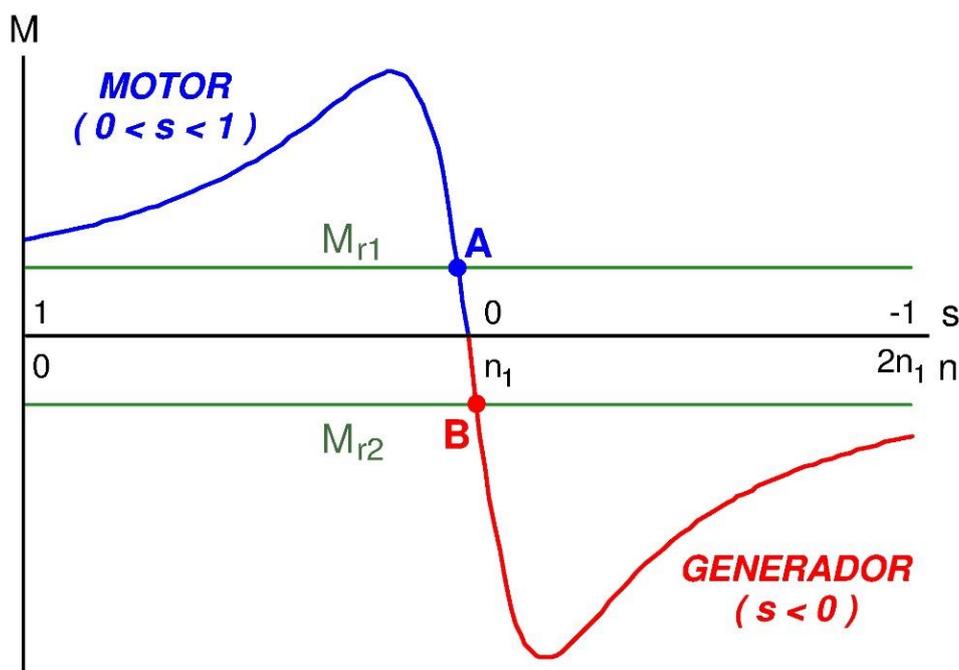


Fig. 8: Frenado regenerativo

Un ejemplo de este tipo de frenado es el vehículo que sube y baja una pendiente que se muestra en la Fig. 8. Si se desprecia el efecto de los rozamientos, mientras el vehículo sube, la máquina asíncrona actúa de motor dando un par M que debe vencer el par resistente M_{r1} debido al peso del vehículo y la velocidad n es ligeramente inferior a la de sincronismo n_1 (punto A de la Fig. 8). Cuando baja la pendiente el par debido al peso es ahora un par motor o, lo que es igual, un par resistente negativo M_{r2} (Fig. 8). El vehículo aumenta su velocidad debido a la acción motora conjunta de la máquina de inducción y de su peso hasta que supera la velocidad de sincronismo. A partir de este momento, la máquina asíncrona comienza a girar con una velocidad superior a la de sincronismo y empieza a actuar de freno (de generador) alcanzándose el equilibrio cuando el par M de la máquina (que ahora es un par de frenado) iguale al par M_{r2} (punto B de la Fig. 8). De esta manera la máquina asíncrona “retiene” el vehículo impidiendo que alcance velocidades excesivas. La velocidad final será pues ligeramente superior a la de sincronismo. Como se aprecia en este ejemplo, una máquina de inducción pasa automáticamente a funcionar como freno regenerativo si el sistema se acelera y su velocidad sobrepasa a la de sincronismo n_1 .

Si la máquina de inducción está alimentada mediante un variador de frecuencia se la puede hacer actuar como generador sin que aumente su velocidad. Para ello hay que reducir la frecuencia f_1 de forma que la velocidad de sincronismo n_1 sea inferior a la de giro del rotor n . De esta manera, disminuyendo gradualmente el valor de la frecuencia f_1 hasta valores muy bajos se puede ir reduciendo paulatinamente la velocidad n hasta casi provocar la parada de la máquina.

En este frenado la máquina actúa como generador por lo que se puede recuperar la energía de frenado (menos la disipada en las pérdidas de la máquina) convirtiéndola en energía eléctrica que se devuelve a la red por el estator de la máquina asíncrona.

FRENADO A CONTRACORRIENTE

En este frenado se invierte el sentido de giro del campo magnético con respecto al de giro del rotor, por lo que, según (2), la máquina empieza a funcionar con un deslizamiento superior a 1 y a ejercer un par de frenado (ver la Fig. 3).

Con deslizamiento s mayor que 1 resulta que la resistencia total del rotor R'_2/s es positiva, lo que origina que la potencia en el entrehierro P_a y la potencia eléctrica en el estator P_1 sean positivas (ver las relaciones (8) y (9)). También sucede que la resistencia de carga R'_c es negativa, lo que conlleva que la potencia mecánica interna P_{mi} y la potencia mecánica P_u sean negativas (ver las relaciones (6), (10) y (11)). Todo esto, que está reflejado en el resumen de la Fig. 9, hace que el balance de potencias sea el de la Fig. 10.

FRENO ASÍNCRONO A CONTRACORRIENTE

$$s > 1 \rightarrow R'_c = R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) < 0; \quad \frac{R'_2}{s} > 0$$

$$P_a = m_1 I_2^2 \frac{R'_2}{s} > 0 \quad (P_a \text{ y } P_1 \text{ absorbidas})$$

$$P_{mi} = m_1 I_2^2 R'_c = m_1 I_2^2 R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) < 0 \quad (P_{mi} \text{ y } P_u \text{ absorbidas})$$

$$\left. \begin{array}{l} P_a > 0 \rightarrow \cos \varphi_2 > 0 \\ \text{sen } \varphi_2 > 0 \end{array} \right\} 0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$$

φ_2 es mayor que cuando funciona como motor, luego peor f.d.p.

Un freno asíncrono a contracorriente absorbe tanto potencia eléctrica por su estator como potencia mecánica por su eje y ambas las transforma íntegramente en calor.

Es un funcionamiento peligroso para el motor. Para reducir las corrientes se utilizan sistemas similares a los de arranque.

Fig. 9: Resumen de la máquina asíncrona actuando como freno a contracorriente

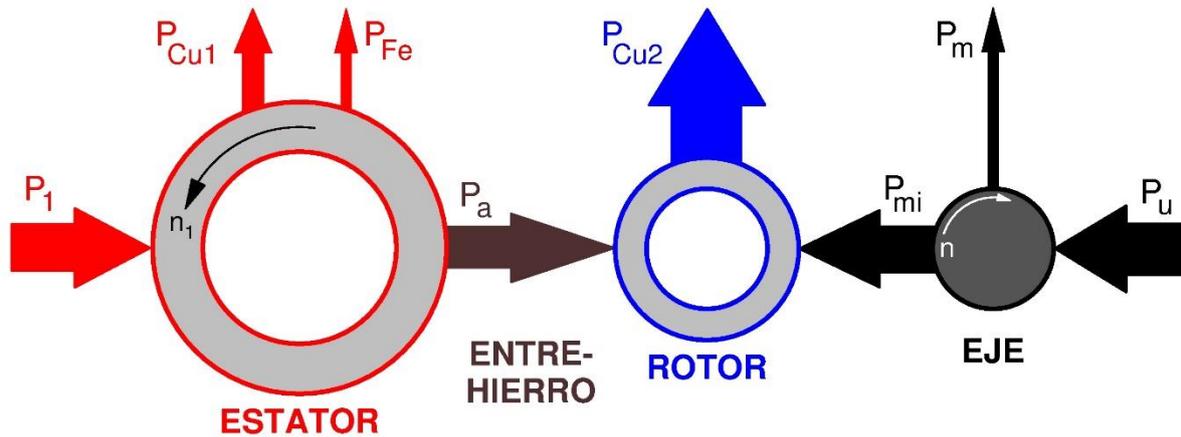


Fig. 10: Balance de potencias en un freno a contracorriente

En funcionamiento como freno a contracorriente la máquina de inducción absorbe una potencia mecánica por el eje P_u , para lo cual debe ejercer un par de frenado M (opuesto a la velocidad n). Por otra parte, por el estator absorbe una potencia eléctrica P_1 que, tras las pérdidas correspondientes, da lugar a una potencia P_a que atraviesa el entrehierro desde el estator hacia el rotor. Es decir, a la máquina le entra potencia eléctrica por el estator y potencia mecánica por su eje. Toda esa potencia acaba disipándose en forma de calor porque en su totalidad se transforma en las diferentes pérdidas de la máquina, especialmente en las pérdidas del cobre del rotor P_{Cu2} .

Todo esto hace que en este tipo de funcionamiento la máquina tenga unas corrientes muy elevadas (superiores a las de arranque) y se caliente mucho, lo que puede provocar su deterioro. Por esta razón, no debe emplearse más que en casos excepcionales o en motores especialmente diseñados. A veces se utilizan sistemas similares a los de arranque (disminuir la tensión del estator o añadir impedancias en serie con el rotor) para reducir las corrientes durante este tipo de frenado.

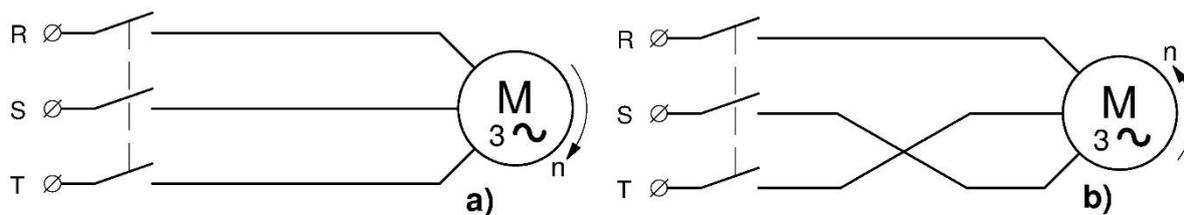


Fig. 11: Inversión del sentido de giro en un motor trifásico

En el caso de motores trifásicos la inversión del sentido de giro del campo magnético se consigue permutando la conexión de dos de las fases del estator (Fig. 11).

Cuando la máquina asíncrona tiene su campo magnético girando en sentido positivo (con velocidad n_1) ejerce el par dado por la curva (1) de la Fig. 12, la cual es similar a la mostrada en la Fig. 3. En estas condiciones, de acuerdo con la relación (2), cuando la máquina gira con una velocidad n el deslizamiento s viene dado por:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = 1 - \frac{n}{n_1} \quad (22)$$

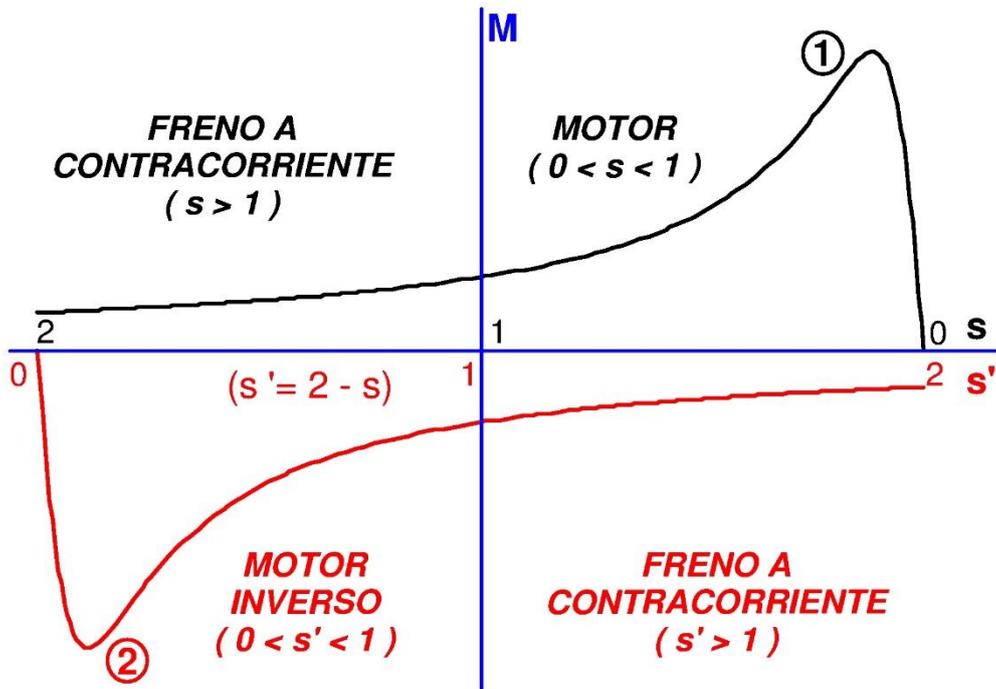


Fig. 12: Curva del par con los 4 cuadrantes de una máquina asíncrona en la que se puede cambiar el sentido de giro de su campo magnético:

(1): Curva de par cuando la velocidad de sincronismo es positiva.

(2): Curva de par cuando se invierte el sentido de giro del campo magnético y la velocidad de sincronismo es negativa.

Si se invierte el sentido de giro del campo magnético, la velocidad de sincronismo pasa a ser $-n_1$ con lo que a la velocidad n el deslizamiento ahora pasa a ser:

$$s' = \frac{-n_1 - n}{-n_1} = 1 + \frac{n}{n_1} = 2 - s \quad (23)$$

Cuando la velocidad de sincronismo es negativa (velocidad $-n_1$), la máquina funciona como motor si su par M y su velocidad n son negativos y, por consiguiente, tienen el mismo sentido. Luego, para deslizamientos s' comprendidos entre 0 y 1 el par es negativo. Para el resto de valores de s' el par M es de sentido contrario a la velocidad n . Entonces, lo que sucede es que la máquina asíncrona ha pasado a funcionar con la curva (2) de la Fig. 12, la cual es simétrica respecto a la curva (1).

De todo lo anterior se deduce que la curva de par de una máquina asíncrona cuando se puede cambiar el signo de su velocidad de sincronismo incluye los cuatro cuadrantes y es la representada en la Fig. 12.

En la Fig. 13 se muestra un ejemplo de este tipo de frenado cuando el par resistente M_r es debido a un rozamiento seco. Este es un par resistente constante, pero siempre de sentido contrario a la velocidad. En este ejemplo el sistema inicialmente se encontraba en el punto A actuando la máquina asíncrona como motor venciendo el par resistente. Ahora se quiere frenar rápidamente el sistema y se invierten las conexiones de las fases del estator para conseguir el cambio de sentido de giro del campo magnético. Esta inversión se puede realizar muy rápidamente, de forma que cuando ya

se ha producido la inversión, la velocidad del rotor aún no le ha dado tiempo a cambiar debido a la inercia mecánica del conjunto máquina asíncrona-carga mecánica. Esto hace que la curva de la máquina pase de ser la (1) a ser la (2) y el motor en el instante de la inversión pase a estar actuando como freno a contracorriente en el punto B. El sistema se ve ahora sometido a un par de frenado total que es la suma del par de la máquina asíncrona y del par resistente M_r de la carga. Esto provoca que la velocidad vaya disminuyendo rápidamente hasta que la máquina se sitúa en el punto C cuando la velocidad se ha anulado. En este instante se debe desconectar la alimentación del estator de la máquina asíncrona. De no hacerse así, la máquina volvería a actuar como motor, pero girando en sentido negativo, y acabaría por funcionar en el punto estable D.

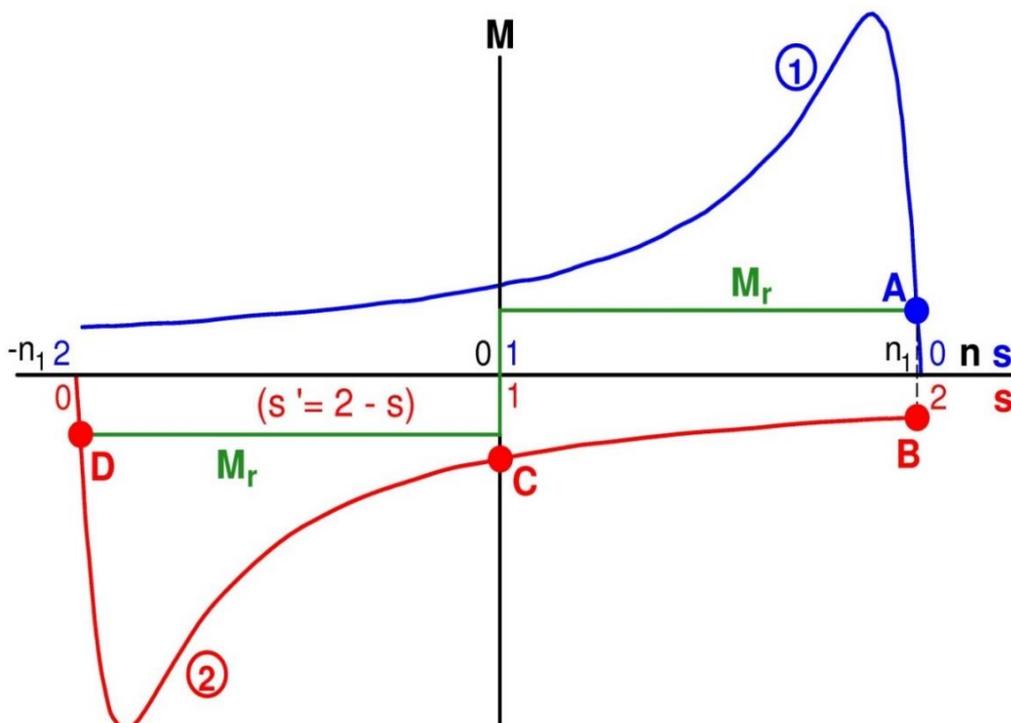


Fig. 13: Frenado a contracorriente

En el momento de la inversión, cuando la máquina aún no ha modificado su velocidad y pasa del punto A al B (Fig. 13), se produce un aumento muy grande de la corriente.

FRENADO POR INYECCIÓN DE CORRIENTE CONTINUA (FRENADO DINÁMICO)

En este procedimiento de frenado se alimenta el estator con corriente continua. De esta manera en el entrehierro de la máquina aparece un campo magnético fijo que induce f.e.m.s en los conductores del rotor si éste se está moviendo. Las corrientes rotóricas debidas a estas f.e.m.s se combinan con el campo magnético para producir un par que trata de evitar las variaciones de flujo sobre el devanado del rotor. Por lo tanto, este par intenta que el rotor no se mueva (para que los conductores rotóricos no “vean” un campo magnético variable) y se trata, pues, de un par de frenado.

Por lo tanto, la máquina asíncrona alimentada con corriente continua se comporta como un generador síncrono cuyo inductor -alimentado con corriente continua- está situado en el estator y cuyo inducido está ubicado en el rotor y está en cortocircuito.

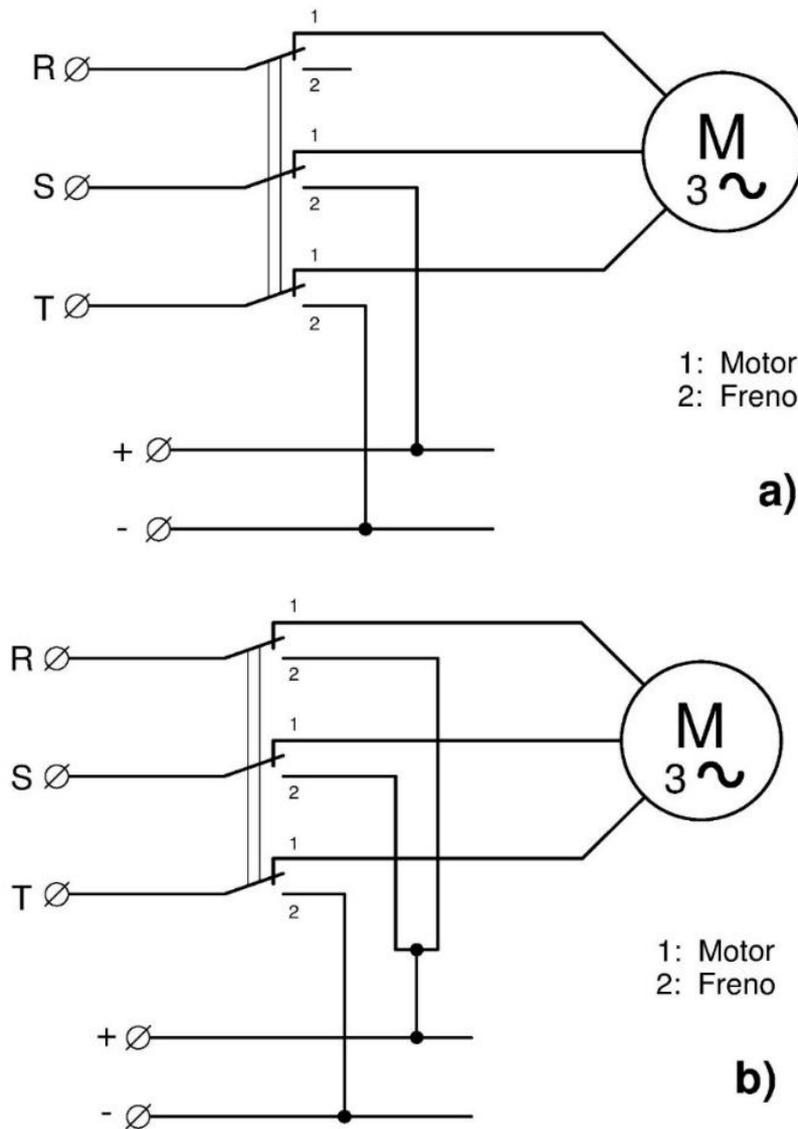


Fig. 14: La conexión de corriente continua al estator de una máquina asíncrona puede realizarse de las dos maneras ("a" y "b") representadas en estos esquemas

Otra forma de comprender este funcionamiento es interpretar que en este caso la máquina funciona como asíncrona con un campo magnético giratorio cuya velocidad de sincronismo es nula (campo magnético inmóvil).

Si durante este frenado se quiere mantener la conexión estrella o triángulo que tenían las fases del estator cuando funcionaba con corriente alterna trifásica, existen dos formas de conectar la corriente continua a la máquina que se muestran en la Fig. 14.

Como con corriente continua en la ley de Ohm sólo intervienen las resistencias, pero no las reactancias, la tensión continua con que se alimenta el estator debe tener un valor pequeño para que no origine corrientes peligrosamente altas.

El par de frenado de la máquina se puede regular variando la tensión continua con que se alimenta el estator y, si la máquina es de rotor bobinado, añadiendo resistencias en serie con las fases del rotor.

Máquina asíncrona alimentada con tensión continua

En este tipo de funcionamiento el estator se ve sometido a un campo magnético constante e inmóvil, por lo que no se inducen f.e.m.s en su devanado. Esto hace que las corrientes continuas que circulan por sus fases no cambien cuando la velocidad varía. Estas corrientes solamente dependen del valor de la tensión continua con que se alimenta al estator. Luego, mientras que no se varíe dicha tensión la máquina funciona con una corriente estática constante. Por otra parte, el núcleo magnético del estator no tiene pérdidas en el hierro, ya que “ve” un campo magnético invariable.

Además, como se ha comentado anteriormente, el estator funciona como el inductor de un generador síncrono y lo único que hace es originar el campo magnético inductor de la máquina. En consecuencia, no se transmite potencia entre el estator y el rotor a través del entrehierro. Es decir, en esta forma de funcionamiento la potencia en el entrehierro, P_a , es nula.

De todo lo anterior se deduce que la potencia eléctrica P_1 absorbida por el estator se consume íntegramente en las pérdidas en el cobre P_{Cu1} .

El rotor actúa como el inducido de un generador síncrono en cortocircuito, ya que se le hace girar a una velocidad de n r.p.m. (lo que equivale a Ω rad/s) bajo la acción de un campo magnético inmóvil. Luego, desde el rotor este campo magnético se lo “ve” variable con el tiempo y da lugar a que en sus fases haya f.e.m.s y corrientes y a que su núcleo magnético tenga pérdidas en el hierro.

El movimiento del rotor se debe a que la máquina absorbe por el eje una potencia mecánica P_u (para lo cual debe ejercer un par de frenado). Una pequeña parte de P_u se pierde en las pérdidas mecánicas P_m y la máquina transforma al resto en potencia electromagnética. Una parte de esta potencia se gasta en las pérdidas en el hierro P_{Fe} y la mayor parte de la potencia electromagnética generada se consume en la propia de resistencia R_2 de los devanados del rotor en forma de pérdidas en el cobre P_{Cu2} . Todo esto se refleja en el resumen de la Fig. 15 y da lugar al balance de potencias de la Fig. 16.

<u>MÁQUINA ASÍNCRONA ALIMENTADA CON C.C.</u>
<p>Estator: Su corriente no depende de la velocidad. Actúa como inductor. No transmite potencia al rotor ($P_a = 0$). Sometido a un campo magnético constante: no tiene pérdidas magnéticas.</p>
<p>Rotor: Al girar “ve” un campo magnético variable: tiene pérdidas magnéticas. Absorbe potencia mecánica por su eje: ejerce un par de frenado. Transforma la energía mecánica absorbida en eléctrica y ésta se disipa en la resistencia de sus fases.</p>

Fig. 15: Resumen de la máquina asíncrona con el estator alimentado con corriente continua

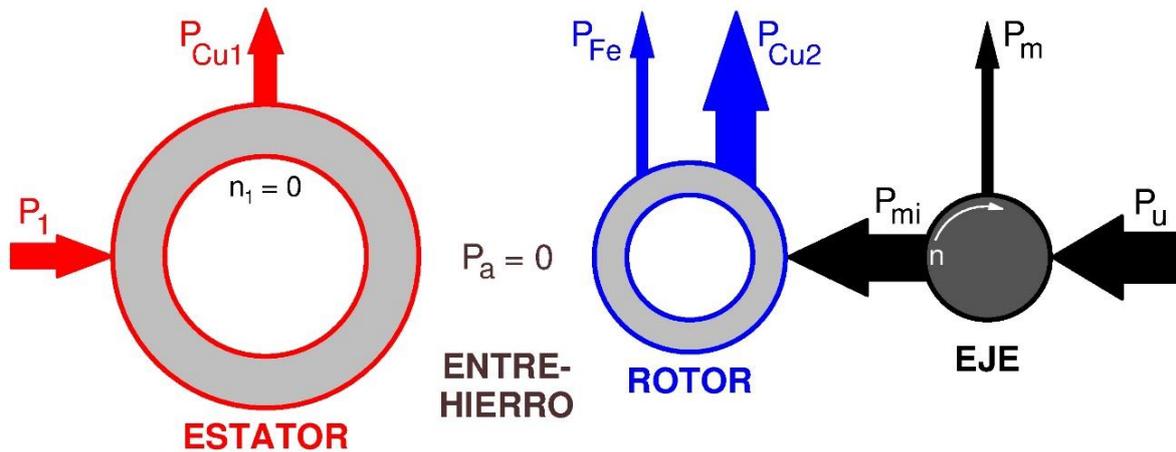


Fig. 16: Balance de potencias de una máquina asíncrona alimentada con corriente continua

La velocidad relativa con que el rotor “ve” girar al campo magnético (ver la relación (3)) es:

$$n_2 = -n; \quad \Omega_2 = -\Omega \quad (24)$$

Luego, desde el rotor este campo se lo “ve” variable con el tiempo y da lugar a que en las fases del rotor haya f.e.m.s y corrientes de frecuencia f_2 y pulsación ω_2 , que se pueden calcular partiendo de las expresiones (4) y (24):

$$f_2 = -\frac{n \cdot p}{60} = -\frac{\Omega \cdot p}{2\pi}; \quad \omega_2 = 2\pi f_2 = -\frac{2\pi}{60} n \cdot p = -\Omega \cdot p \quad (25)$$

El signo negativo de las expresiones anteriores indica que la secuencia de fases en el rotor es de sentido opuesto al de la velocidad de giro n .

La f.m.m. del estator permanece constante, pues la corriente del estator no varía. Es fácil comprobar que el comportamiento de la máquina en estas condiciones se puede analizar como si se trata de una máquina asíncrona alimentada con una corriente constante y cuya velocidad de sincronismo n_1 es nula ($n_1 = 0$).

Nótese que en este caso, donde la velocidad de sincronismo n_1 es nula, no tiene sentido usar el deslizamiento s (relación (2)) como variable de referencia. En su lugar se va a utilizar la pulsación ω_2 de las corrientes del rotor que se obtiene mediante la relación (25).

Se va a denominar I_{1eq} al valor eficaz de las corrientes trifásicas con que sería preciso alimentar al estator para que este originase una fuerza magnetomotriz (f.m.m.) de igual amplitud que cuando se lo está alimentando con corriente continua. Es evidente que ambos casos la velocidad de la f.m.m. no va a ser la misma. Con corriente alterna trifásica la f.m.m. girará con una velocidad que depende de la frecuencia estatórica f_1 y con corriente continua la f.m.m. está inmóvil. Pero en ambos casos la amplitud (el valor máximo) de la f.m.m. del estator tiene el mismo valor. Más adelante, en el Anexo A, se analizará la forma de determinar el valor de I_{1eq} .

Ahora bien, al repasar la teoría de la máquina asíncrona ya se comprobó que, cuando funciona a corriente constante I_1 , el par que origina depende de la frecuencia f_2 (o lo que es equivalente, de la pulsación ω_2) de las corrientes del rotor y es independiente de la frecuencia f_1 de las corrientes del estator. Por lo tanto, se va a obtener el mismo par M con la máquina alimentada con corriente continua que con las corrientes trifásicas de valor eficaz I_{1eq} , independientemente de la frecuencia f_1 de estas, siempre que la pulsación del rotor ω_2 sea la misma en ambos casos. Por lo tanto, en este tipo de frenado el par se calcula a partir de la relación (18) así:

$$M = \frac{m_1 p R'_2}{\omega_2} \frac{(\omega_2 \cdot L_\mu)^2}{R'_2 + [\omega_2 \cdot (L'_{d2} + L_\mu)]^2} I_{1eq}^2 \quad (26)$$

Teniendo en cuenta que la pulsación del rotor ω_2 viene dada por la relación (25), la expresión anterior se puede transformar en:

$$M = - \frac{m_1 R'_2}{\Omega} \frac{(p \cdot \Omega \cdot L_\mu)^2}{R'_2 + [p \cdot \Omega \cdot (L'_{d2} + L_\mu)]^2} I_{1eq}^2 ; \quad \left(\Omega = \frac{2\pi}{60} n \right) \quad (27)$$

Obsérvese en la relación (27) que el par M es siempre de signo opuesto a la velocidad n (o Ω , si se mide en rad/s). Esto significa que la máquina siempre va a dar un par de frenado cuando está alimentada con corriente continua. Es decir, siempre va a actuar de freno.

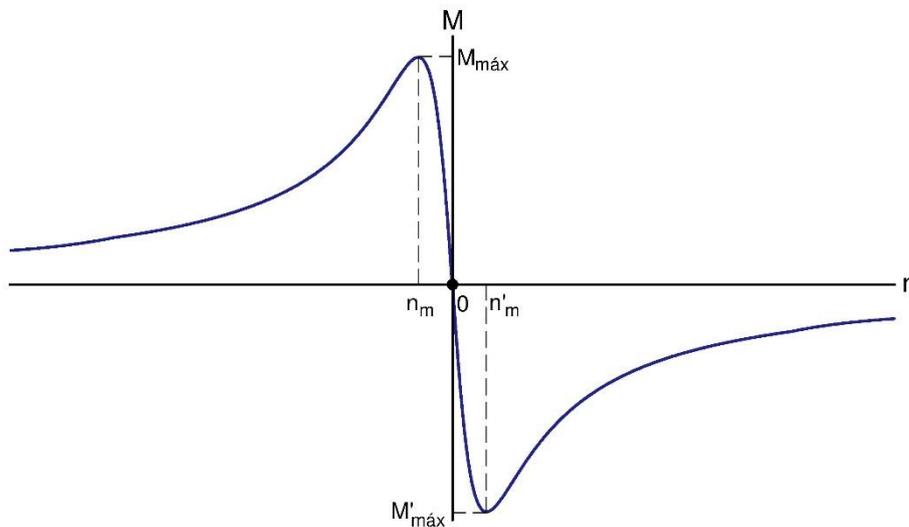


Fig. 17: Curva de par de una máquina asíncrona alimentada con corriente continua

La relación (27) permite obtener la curva de par durante el frenado dinámico, la cual está representada en la Fig. 17. Se aprecia que esta curva es simétrica, por lo que sus valores extremos, $M_{máx}$ el extremo positivo y $M'_{máx}$ el extremo negativo, son de iguales valores absolutos. Estos valores extremos se pueden obtener de la relación (19):

$$M_{máx} = \pm \frac{m_1 p}{2} \frac{L_\mu^2}{L'_{d2} + L_\mu} I_{1eq}^2 \quad (28)$$

Las velocidades donde se producen estos valores extremos se denominan, respectivamente, n_m y n'_m , si se miden en r.p.m., o Ω_m y Ω'_m , si se miden en rad/s, tienen el mismo valor absoluto, que es muy pequeño, y se pueden determinar partiendo de las relaciones (20) y (25):

$$\Omega_m = \pm \frac{-R'_2}{p(L'_{d2} + L_\mu)} ; \quad n_m = \frac{60}{2\pi} \Omega_m \quad (29)$$

Si en las relaciones (28) y (29) se utiliza el signo “+” se obtienen las magnitudes $M_{m\acute{a}x}$ y Ω_m , respectivamente, y si se usa el signo “-” se obtienen $M'_{m\acute{a}x}$ y Ω'_m , respectivamente.

Salvo que la corriente I_{1eq} sea pequeña (inferior a la corriente de vacío en condiciones asignadas), la máquina se satura cada vez más cuanto más pequeña es su velocidad, como ya se indicó al estudiar la máquina alimentada por una fuente de corriente. El parámetro L_μ varía con la saturación magnética y, en consecuencia, a velocidades pequeñas deja de ser constante y su valor disminuye. Esto hace que las expresiones (28) y (29) -obtenidas suponiendo que L_μ es constante- solo den valores aproximados y en ellas se deberá emplear el valor correspondiente de L_μ .

En la relación (27) se aprecia que, para una velocidad Ω dada, el par de frenado se puede modificar actuando sobre la corriente I_{1eq} -lo cual se consigue modificando el valor de la tensión continua aplicada al estator- y sobre la resistencia R_2 , la cual se puede modificar, si la máquina es de rotor bobinado, añadiendo resistencias en serie con las fases del rotor.

Ejemplo de frenado dinámico

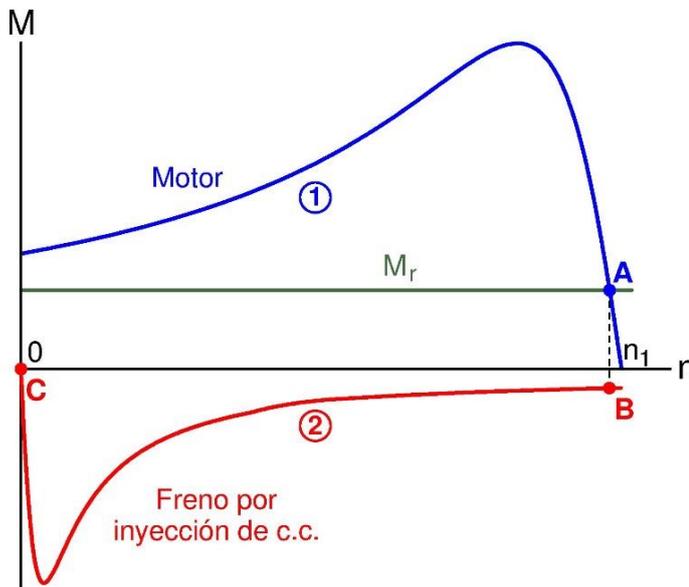


Fig. 18: Ejemplo de frenado dinámico

En la Fig. 18 se muestra un ejemplo de aplicación de un frenado dinámico de una máquina asíncrona que inicialmente actuaba como motor venciendo un par resistente M_r constante con la velocidad como, por ejemplo, el debido a una grúa.

Cuando la máquina asíncrona está actuando como motor su curva de par es la (1) y el punto de funcionamiento es el A (Fig. 18). Estando en dicho punto se quiere frenar rápidamente el sistema máquina asíncrona-carga mecánica, para lo cual se inyecta corriente continua al estator de la máquina asíncrona y su curva de par pasa a ser la (2). En el momento de la conexión de la corriente continua la máquina, por inercia, conserva su velocidad y, por lo tanto, pasa a estar en el punto B. A partir de ese momento el conjunto máquina-carga está sometido a dos pares de frenado: el par resistente M_r de la carga y el par M de la máquina asíncrona. Esto hace que la velocidad descienda rápidamente y la máquina acabará deteniéndose (punto C de la Fig. 18).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] APARICIO, J. L. 1987. *Criterios de diseño de convertidores estáticos para accionamientos regulados en corriente alterna con motores de inducción*. Madrid: Saber Hoy, S. A. de Ediciones.
- [2] AENOR. 2003. UNE-EN 60034-12: *Máquinas eléctricas rotativas. Parte 12: Características de arranque de los motores trifásicos de inducción de jaula con una sola velocidad*. Madrid: AENOR.
- [3] ALGER, P. L. 1970. *Induction machines*. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
- [4] CHAPMAN. 2005. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [5] CORTES CHERTA. 1977. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. Tomo 3: Máquinas de corriente alterna asíncronas*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [6] FAURE BENITO. 2000. *Máquinas y accionamientos eléctricos*. Madrid: Colegio oficial de ingenieros navales y oceánicos.
- [7] FITZGERALD, KINGSLEY Y UMANS. 2004. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [8] FRAILE MORA, J. 2015. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L.
- [9] GURRUTXAGA, J. A. 1985. *El fenómeno electromagnético. Tomo IV. Las máquinas eléctricas II*. Santander: Dpto. de publicaciones de la E.T.S.I.C.C.P. de Santander.
- [10] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas. Tomo 2*. Moscú: Editorial Mir.
- [11] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas. Tomo II*. Moscú: Editorial Mir.
- [12] LANGSDORF. 1977. *Teoría de las máquinas de corriente alterna* Méjico: McGraw-Hill.
- [13] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2008. *Máquinas asíncronas*. Santander: Univ. de Cantabria. Disponible en: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/asincronas caminos.pdf>
- [14] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2011. *Campo magnético en el entrehierro de las máquinas eléctricas simétricas*. Santander: Universidad de Cantabria. Disponible en: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/campo magn entrehierro Web.pdf>
- [15] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2015. *Máquinas síncronas*. Santander: Univ. de Cantabria. Disponible en: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Maquina sincrona aislada.pdf>
- [16] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2016. *Máquina asíncrona doblemente alimentada*. Santander: Universidad de Cantabria. Disponible en: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Asíncrona doblemente alimentada.pdf>
- [17] SANZ FEITO. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Educación.
- [18] SERRANO IRIBARNEGARAY. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [19] SUÁREZ CREO, J. M. y MIRANDA BLANCO, B. N. 2006. *Máquinas eléctricas. Funcionamiento en régimen permanente*. Santiago de Compostela: Tórculo Edicions, S.L.
- [20] WILDI, T. 2007. *Máquinas eléctricas y sistemas de potencia*. México: Pearson Educación.

ANEXOS

ANEXO A: COMPORTAMIENTO DEL ESTATOR Y DETERMINACIÓN DE I_{1eq} CUANDO UNA MÁQUINA ASÍNCRONA SE ALIMENTA CON CORRIENTE CONTINUA

F.m.m. de un devanado trifásico alimentado con corriente alterna trifásica

En este apartado se va a analizar la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) en el entrehierro originada por un bobinado trifásico cuando sus fases están recorridas por un sistema trifásico equilibrado de corrientes sinusoidales. El lector interesado en profundizar en este tema puede consultar mi texto [14].

Inicialmente se va a considerar la actuación de una sola fase que está recorrida por una corriente. Esta fase origina a lo largo del entrehierro una f.m.m. que se distribuye periódicamente en p ciclos. Al descomponer esta distribución espacial de f.m.m. en series de Fourier se obtiene que solamente el primer armónico produce efectos apreciables y se pueden despreciar el resto de los armónicos. Por esta razón, a partir de ahora se aceptará que una fase recorrida por corriente origina una f.m.m. en el entrehierro que varía sinusoidalmente a lo largo del mismo; es decir, es una función sinusoidal de la coordenada angular. Si la corriente es constante (corriente continua) y vale I , el valor máximo en el espacio del primer armónico de la f.m.m. en el entrehierro originada por la fase vale:

$$\text{En c.c.: } \mathcal{F}_M = \frac{4}{\pi} \frac{\xi_b \cdot N}{2p} I = C_F \cdot I \quad (A1)$$

$$\left(C_F = \frac{2}{\pi} \frac{\xi_b \cdot N}{p} \right) \quad (A2)$$

En las fórmulas anteriores N y ξ_b son, respectivamente, el número de espiras y el factor de bobinado. Ambos, y también C_F , son parámetros constructivos y para un devanado dado permanecen constantes.

Si la corriente que circula por la fase varía sinusoidalmente con el tiempo (corriente alterna monofásica) resultará que la f.m.m. no solamente variará sinusoidalmente en el espacio con la coordenada angular, sino que también será función sinusoidal del tiempo. El valor máximo en el espacio y en el tiempo de la f.m.m. originada por una fase recorrida por una corriente alterna cuyo valor eficaz es I , vale:

$$\text{En c.a. monofásica: } \mathcal{F}_M = \frac{4}{\pi} \frac{\xi_b \cdot N}{2p} (\sqrt{2} \cdot I) = C_F \cdot (\sqrt{2} \cdot I) \quad (A3)$$

En un devanado trifásico se tienen tres fases -U, V y W- de geometría idéntica y con un ángulo de desfase entre cada par de ellas de $2\pi/3$ radianes eléctricos; esto es, 120° eléctricos. En la Fig. A1 se muestra de una forma esquemática el estator de una máquina asíncrona trifásica de dos polos. En esta figura se indica el sentido positivo de la corriente de cada fase y se muestran las f.m.m.s generadas por las tres fases -cuando sus corrientes son positivas- mediante los vectores $\overline{\mathcal{F}}_U$, $\overline{\mathcal{F}}_V$ y $\overline{\mathcal{F}}_W$. Estos son *fasores espaciales* de f.m.m., es decir, vectores dirigidos hacia la posición donde la f.m.m. en el entrehierro es máxima positiva y cuyo módulo es la amplitud (valor máximo) de la f.m.m. correspondiente.

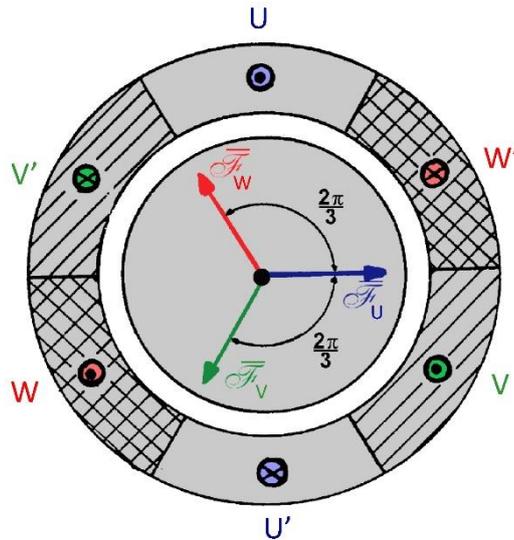


Fig. A1: F.m.m.s originadas por las fases de un devanado trifásico recorridas por corrientes positivas

Si un devanado trifásico se alimenta con un sistema trifásico equilibrado de corrientes sinusoidales, el *Teorema de Ferraris* señala que el efecto conjunto de las tres fases origina una fuerza magnetomotriz (f.m.m.) en el entrehierro giratoria cuya amplitud es igual a 3/2 del valor máximo de la f.m.m. generada por una fase actuando aisladamente. Por consiguiente, se verifica que:

$$\text{En c.a. trifásica: } \mathcal{F}_M = \frac{3}{2} \left[\frac{4}{\pi} \frac{\xi_b \cdot N}{2p} (\sqrt{2} \cdot I) \right] = \frac{3}{\sqrt{2}} [C_F \cdot I] \quad (\text{A4})$$

Análisis del estator de una máquina asíncrona alimentada con corriente continua

Se va a considerar la situación en la que el estator de una máquina trifásica se conecta a una red de corriente continua (c.c.) que proporciona una tensión V_{cc} .

En lo que sigue se van a utilizar estas magnitudes:

- \mathcal{F}_{1M} es la amplitud (valor máximo) de la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) originada por el conjunto de las tres fases del estator.
- \mathcal{F}_{FM} es la amplitud (valor máximo) de la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) originada por la fase que está recorrida por la corriente I_F .
- I_{1Cu} es el valor eficaz de las corrientes trifásicas de fase en el estator que originan las mismas pérdidas en el cobre P_{Cu1} que cuando está conectado a la red de c.c.
- I_{1CuL} es el valor eficaz de las corrientes trifásicas de línea en el estator que originan las mismas pérdidas en el cobre P_{Cu1} que cuando está conectado a la red de c.c.
- I_{1eq} es el valor eficaz de las corrientes trifásicas de fase que deberían circular por el estator para originar la misma amplitud de la f.m.m. total \mathcal{F}_{1M} que cuando está conectado a la red de c.c.
- I_{cc} es la corriente total que la red de corriente continua (c.c.) suministra al estator.

- I_F es la mayor de las corrientes que circulan por las fases del estator cuando se lo conecta a la red de corriente continua (c.c.).
- R_1 es la resistencia de una de las fases del estator.
- R_{cc} es la resistencia equivalente que el conjunto de las tres fases del estator presenta frente a la red de c.c.
- V_{cc} es la tensión que proporciona la red de corriente continua (c.c.) a la que se conecta el estator.

Sean I_{cc} la corriente total que el estator demanda de la red de c.c. y R_{cc} su resistencia equivalente. Es evidente que, según la Ley de Ohm, se cumplirá que:

$$I_{cc} = \frac{V_{cc}}{R_{cc}} \quad (A5)$$

El valor de R_{cc} y el reparto de la corriente total I_{cc} entre las fases del estator dependen de la conexión de las fases entre sí y con la red. En el texto se ha indicado que hay dos formas de conectar el estator a la red de c.c. (“a” y “b” en la Fig. 14) cuando se desea conservar la conexión, estrella o triángulo, que la máquina tenía cuando estaba conectada a una red trifásica. Esto permite cuatro posibles combinaciones: estrella-a, estrella-b, triángulo-a y triángulo-b.

Además, es posible utilizar otras conexiones a la red de c.c. si se deshace la conexión estrella o triángulo: conectar una sola fase, conectar las tres fases en serie con una fase invertida y conectar las tres fases en paralelo con una fase invertida. Aquí no se van a tratar estas conexiones.

Seguidamente, a modo de ejemplo, se va a analizar una de las posibles conexiones, la cual va a ser la conexión **triángulo-a**. En la Fig. A2 se muestra como queda el estator conectado de esta manera a una red de c.c. Hay que tener en cuenta que en corriente continua no intervienen las reactancias de las fases y solamente hay que considerar sus resistencias, que es lo que se ha representado en la Fig. A2.

En la Fig. A2 es fácil comprobar que, frente a la red de c.c., las fases del estator, cuya resistencia es R_1 , quedan conectadas formando dos ramas en paralelo: una de ellas incluye una sola fase (la U) y la otra consta de dos fases (V y W) en serie. Luego:

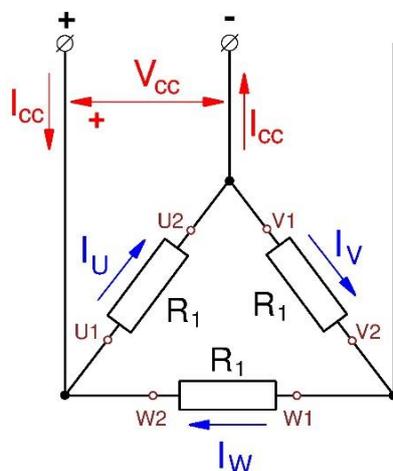


Fig. A2: Conexión triángulo-a

$$\frac{1}{R_{cc}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2 R_1} = \frac{3}{2 R_1} \rightarrow R_{cc} = \frac{2}{3} R_1 \quad (A6)$$

Por lo tanto, aplicando la Ley de Ohm (A5) se comprueba que con esta conexión sucede que:

$$I_{cc} = \frac{V_{cc}}{R_{cc}} = \frac{3}{2} \frac{V_{cc}}{R_1} \quad (A7)$$

De la Fig. A2 y de la relación (A7) se deduce que:

$$I_U = \frac{V_{cc}}{R_1} = \frac{2}{3} I_{cc} \quad (A8)$$

$$I_V = I_W = -\frac{V_{cc}}{2 R_1} \rightarrow I_V = I_W = -\frac{I_{cc}}{3} = -\frac{I_U}{2} \quad (A9)$$

Por consiguiente, la corriente de fase I_{1Cu} que en trifásica produce las mismas pérdidas en el cobre P_{Cu1} que con corriente continua vale:

$$\begin{aligned} P_{Cu1} &= 3 \cdot R_1 \cdot I_{1Cu}^2 = R_1 \left[I_U^2 + I_V^2 + I_W^2 \right] \\ 3 \cdot I_{1Cu}^2 &= I_{cc}^2 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] = \frac{6}{9} I_{cc}^2 = \frac{2}{3} I_{cc}^2 \\ I_{1Cu} &= \sqrt{\frac{2}{9}} I_{cc} = \frac{\sqrt{2}}{3} I_{cc} \end{aligned} \quad (A10)$$

Y, dado que la conexión entre las fases del estator con que se está trabajando es triángulo, la corriente de línea correspondiente I_{1CuL} resulta ser:

$$\text{Conexión triángulo-a: } I_{1CuL} = \sqrt{3} I_{1Cu} = \sqrt{\frac{2}{3}} I_{cc} \quad (A11)$$

De la relación (A9) se deduce que en c.c. la mayor corriente de fase I_F es I_U . Luego, teniendo también en cuenta las relaciones (A1) y (A8) se llega a:

$$I_F = I_U; \quad \mathcal{F}_{FM} = C_F \cdot I_F = \frac{2}{3} C_F \cdot I_{cc} \quad (A12)$$

$$\mathcal{F}_{UM} = \mathcal{F}_{FM}; \quad \mathcal{F}_{VM} = \mathcal{F}_{WM} = \frac{\mathcal{F}_{FM}}{2} \quad (A13)$$

$$\overline{\mathcal{F}}_U > 0; \quad \overline{\mathcal{F}}_V < 0; \quad \overline{\mathcal{F}}_W < 0 \quad (A14)$$

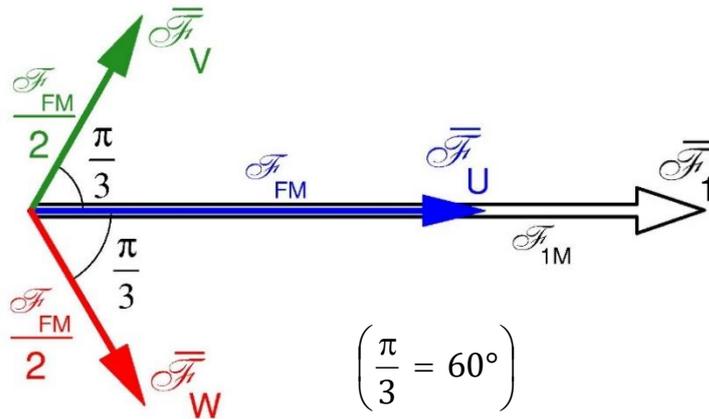


Fig. A3: F.m.m.s cuando el estator se conecta a una fuente de c.c. con la conexión triángulo-a

Teniendo en cuenta la Fig. A1 y las relaciones (A13) y (A14), la Fig. A3 muestra los tres fasores espaciales de f.m.m. de fase en este caso. La suma vectorial de estos fasores proporciona el fasor de la f.m.m. total del estator \overline{F}_1 , cuya amplitud es F_{1M} . Luego:

$$F_{1M} = F_{FM} + 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) \frac{F_{FM}}{2} = \frac{3}{2} F_{FM} = \frac{3}{2} C_F I_F = C_F I_{cc} \quad (A15)$$

La fórmula (A4) señala que la corriente I_{1eq} debe cumplir esta relación:

$$F_{1M} = \frac{3}{\sqrt{2}} [C_F \cdot I_{1eq}] \quad (A16)$$

Identificando (A15) con (A16) se llega finalmente a:

$$I_{1eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} I_{cc} \quad (A17)$$

Estudiando de la misma manera el resto de las conexiones del estator se obtienen los resultados indicados en la Tabla A.I.

Tabla A.I: Comportamiento de las diferentes conexiones del estator a una red de c.c.

CONEXIÓN:	$k_R = \frac{R_{cc}}{R_1}$	$k_F = \frac{I_F}{I_{cc}}$	$k_{CuL} = \frac{I_{1CuL}}{I_{cc}}$	$k_{eq} = \frac{I_{1eq}}{I_{cc}}$
Estrella-a	2	1	$\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816$	$\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816$
Estrella-b	$\frac{3}{2} = 1,5$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$
Triángulo-a	$\frac{2}{3} = 0,667$	$\frac{2}{3} = 0,667$	$\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816$	$\frac{\sqrt{2}}{3} = 0,471$
Triángulo-b	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$	$\frac{1}{\sqrt{6}} = 0,408$

ANEXO B: CONSIDERACIONES SOBRE LA MÁQUINA ASÍNCRONA ALIMENTADA CON CORRIENTE CONTINUA (FRENADO DINÁMICO)

En este anexo se van a tratar con más detalle algunos aspectos de la máquina asíncrona alimentada con corriente continua; es decir, cuando realiza un frenado dinámico.

Velocidad de la f.m.m. del rotor

Cuando una máquina asíncrona se alimenta con corriente continua (c.c.) la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) del estator es fija e inmóvil ($n_1 = 0$). Sin embargo, el rotor al girar se ve sometido a un campo magnético variable, pues existe una velocidad relativa n_2 no nula de esta f.m.m. respecto al rotor (n_2 se calcula mediante la relación (24)). Esto provoca que en el rotor se induzcan unas fuerzas electromotrices (f.e.m.s) que dan lugar a que por sus fases circulen corrientes. Todas estas magnitudes del rotor tienen una frecuencia f_2 que se puede obtener mediante la relación (25):

$$n_2 = -n; \quad f_2 = \frac{p \cdot n_2}{60} = -\frac{p \cdot n}{60} \quad (B1)$$

Las corrientes rotóricas de frecuencia f_2 originan una f.m.m. que gira respecto al rotor con una velocidad que se puede calcular utilizando una fórmula análoga a la empleada en (1):

$$\frac{60 f_2}{p} = n_2 = -n \quad (B2)$$

Luego, la f.m.m. rotórica gira con una velocidad $-n$ respecto al rotor, el cual gira con una velocidad n . Esto significa que la f.m.m. del rotor tiene velocidad nula; es decir, la f.m.m. del rotor es inmóvil.

Dado que tanto la f.m.m. del estator como la f.m.m. del rotor son inmóviles, la f.m.m. total también es inmóvil y la máquina tiene un campo magnético total en el entrehierro fijo e invariable en el tiempo. Por esta razón, en el estator no hay pérdidas en el hierro ni se inducen f.e.m.s; por lo que la corriente del estator no está influenciada por lo que suceda en el rotor y no se transfiere potencia entre el estator y el rotor a través del entrehierro (ver la Fig. 16).

Ecuación eléctrica del rotor

En la Fig. B1 se muestra como es el circuito eléctrico de una fase del rotor. En esta figura y en lo que sigue se va a mantener la misma nomenclatura y los mismos convenios de signos que se explicaron en mi texto [13] y que son los que se han utilizado en la Fig. 1. Por esta razón, se han mantenido las denominaciones E_{2s} y X_{2s} para las magnitudes que varían con la frecuencia del rotor (y, por tanto, también con la velocidad); aunque en alimentación con corriente continua ya no se utilice el deslizamiento s como variable de referencia, sino la pulsación ω_2 .

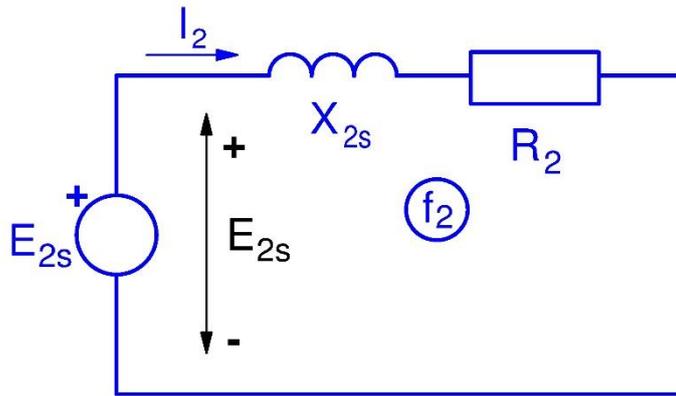


Fig. B1: Circuito de una fase del rotor

La corriente en una fase del rotor, cuyo valor eficaz es I_2 , se considera positiva cuando origina una f.m.m. que, al contrario de la f.m.m. del estator, da lugar a un campo magnético negativo.

Aunque, por abreviar, en este texto se le llame f.e.m. a E_{2s} , realmente su convenio de signos es el de una fuerza contraelectromotriz (f.c.e.m.); esto es, en una fase su valor instantáneo e_{2s} se calcula empleando la Ley de Faraday con signo "+":

$$e_{2s} = + \frac{d \psi_2}{d t} \quad (B3)$$

ψ_2 es el valor instantáneo de los *enlaces de flujo* Ψ_2 que el campo magnético común total origina en una fase del rotor. Este campo magnético da lugar a un *flujo por polo* Φ_M y el valor máximo de Ψ_2 se obtiene así:

$$\Psi_{2M} = N_2 \xi_{b2} \Phi_M \quad (B4)$$

En la expresión anterior N_2 es el número de espiras en serie y ξ_{b2} es el factor de bobinado de una fase del rotor. Aplicando la *Ley de Faraday* (B3) y operando se deduce que el fasor \bar{E}_{2s} y el valor eficaz E_{2s} de la f.e.m. del rotor son:

$$\bar{E}_{2s} = j \omega_2 \bar{\Psi}_2 \quad (B5)$$

$$E_{2s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_2 \Psi_{2M} \quad (B6)$$

$$E_{2s} = \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \pi f_2) (N_2 \xi_{b2} \Phi_M) = 4,44 f_2 N_2 \xi_{b2} \Phi_M \quad (B7)$$

En la expresión (B5) $\bar{\Psi}_2$ es el fasor de enlaces de flujo del rotor.

Por otra parte, la *reactancia de dispersión del rotor* X_{2s} se puede expresar en función de la *inductancia de dispersión del rotor* L_{d2} así:

$$X_{2s} = 2 \pi f_2 L_{d2} = \omega_2 L_{d2} \quad (B8)$$

De la Fig. B1 se deduce que:

$$\bar{E}_{2s} = j\omega_2 \bar{\Psi}_2 = \bar{I}_2 (R_2 + jX_{2s}) = \bar{I}_2 (R_2 + j\omega_2 L_{d2}) \quad (B9)$$

Para trabajar más cómodamente se va a realizar la **reducción del rotor al estator**. Esto equivale a sustituir el rotor real por uno equivalente que sigue girando a la velocidad n y que tiene los mismos parámetros que el estator:

$$m'_2 = m_1; \quad N'_2 = N_1; \quad \xi'_{b2} = \xi_{b1} \quad (B10)$$

En las relaciones anteriores m_1 , N_1 y ξ_{b1} son, respectivamente: el número de fases, el número de espiras en serie de una fase y el factor de bobinado del estator.

Esto hace que las magnitudes del rotor reducidas al estator se obtengan a partir de sus correspondientes magnitudes del rotor real y de las relaciones de transformación de tensiones m_v y de corrientes m_i de la máquina mediante estas expresiones:

$$\left. \begin{aligned} m_v &= \frac{N_1 \xi_{b1}}{N_2 \xi_{b2}}; & m_i &= \frac{m_1}{m_2} m_v \\ \bar{E}'_{2s} &= m_v \cdot \bar{E}_{2s}; & \bar{\Psi}'_2 &= m_v \cdot \bar{\Psi}_2; & \bar{I}'_2 &= \frac{\bar{I}_2}{m_i} \\ R'_2 &= m_v \cdot m_i \cdot R_2 \\ X'_{2s} &= m_v \cdot m_i \cdot X_{2s}; & L'_{d2} &= m_v \cdot m_i \cdot L_{d2} \end{aligned} \right\} \quad (B11)$$

$$\Psi'_{2M} = N_1 \xi_{b1} \Phi_M \quad (B12)$$

$$E'_{2s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_2 \Psi'_{2M} = 4,44 f_2 N_1 \xi_{b1} \Phi_M \quad (B13)$$

Esta reducción al estator es un poco diferente a la que se utiliza cuando la máquina funciona alimentada con corriente alterna trifásica, que es con la que se dedujo el circuito equivalente de la Fig. 1 (ver mi texto [13]). Esto se debe a que ahora se utiliza un rotor equivalente que sigue girando a la velocidad n y no un rotor equivalente inmóvil. Por lo tanto, las magnitudes reducidas al estator son de frecuencia f_2 y pulsación ω_2 y la ecuación del rotor queda similar a la (B9); esto es, no hay que introducir ninguna resistencia de carga:

$$\bar{E}'_{2s} = j\omega_2 \bar{\Psi}'_2 = \bar{I}'_2 (R'_2 + jX'_{2s}) = \bar{I}'_2 (R'_2 + j\omega_2 L'_{d2}) \quad (B14)$$

En efecto, al aplicar las relaciones (B11) en (B9) se obtiene que:

$$\frac{\bar{E}'_{2s}}{m_v} = j\omega_2 \frac{\bar{\Psi}'_2}{m_v} = (m_i \cdot \bar{I}'_2) \cdot \left(\frac{R'_2}{m_v \cdot m_i} + j \frac{X'_{2s}}{m_v \cdot m_i} \right) = \frac{\bar{I}'_2}{m_v} \cdot (R'_2 + jX'_{2s})$$

Luego, se comprueba que se cumple la relación (B14).

Si se linealiza el circuito magnético de la máquina y, en consecuencia, se supone que se mantiene constante su nivel de saturación tanto cuando actúa la f.m.m. total como cuando actúa aisladamente la f.m.m. estática o la f.m.m. rotórica; se puede aceptar que el fasor de los enlaces de flujo totales del rotor reducido al estator $\bar{\Psi}'_2$ se obtiene sumando los respectivos fasores de enlaces de flujo originados por la f.m.m. del estator $\bar{\Psi}'_{21}$ y por la f.m.m. del rotor $\bar{\Psi}'_{22}$:

$$\bar{\Psi}'_2 = \bar{\Psi}'_{21} + \bar{\Psi}'_{22} \quad (\text{B15})$$

Los enlaces de flujo Ψ'_{22} en el rotor reducido al estator debidos al campo magnético originado por la acción exclusiva de la f.m.m. del rotor constituyen un fenómeno de autoinducción y se pueden calcular mediante la inductancia magnetizante L_μ . Dado el convenio de signos establecido para I_2 e I'_2 (producen una f.m.m. opuesta al campo magnético) y teniendo presente la relación (B15) se deduce que:

$$\bar{\Psi}'_{22} = -L_\mu \bar{I}'_2; \quad \bar{\Psi}'_2 = \bar{\Psi}'_{21} - L_\mu \bar{I}'_2 \quad (\text{B16})$$

Mientras no se modifique la tensión continua V_{cc} con que se alimenta a la máquina, las corrientes de las fases del estator no varían y, por tanto, tampoco, cambia la f.m.m. estática. En consecuencia, mientras que no se modifique la tensión continua V_{cc} , los enlaces de flujo Ψ'_{21} que el estator origina sobre una fase del rotor reducido al estator se mantienen constantes.

Si el rotor estuviera en circuito abierto, su corriente I'_2 sería nula y los enlaces de flujo en una fase del rotor reducido al estator se deberían únicamente a la f.m.m. del estator y, por consiguiente, serían iguales a Ψ'_{21} (cuyo valor máximo es Ψ'_{21M}). El fasor de la f.e.m. que se induce en esta situación en cada fase del rotor reducido al estator es \bar{E}'_{0s} y su valor eficaz es E'_{0s} . Estas magnitudes se calculan así:

$$\bar{E}'_{0s} = j\omega_2 \bar{\Psi}'_{21}; \quad E'_{0s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_2 \Psi'_{21M} \quad (\text{B17})$$

Combinando las relaciones (B14), (B16) y (B17) se llega a:

$$\bar{E}'_{0s} = j\omega_2 \bar{\Psi}'_{21} = \bar{I}'_2 \left[R'_2 + j\omega_2 (L'_{d2} + L_\mu) \right] \quad (\text{B18})$$

Se sabe que I_{1eq} es el valor eficaz de las corrientes trifásicas que hacen que el estator origine una f.m.m. de la misma amplitud que cuando se lo alimenta con corriente continua. Los enlaces de flujo Ψ'_{21} en el rotor reducido al estator debidos al campo magnético originado por la acción exclusiva de la f.m.m. del estator constituyen un fenómeno de inducción mutua. Dado que (si el rotor está reducido al estator) los bobinados del estator y del rotor son iguales, Ψ'_{21} se puede calcular también mediante la inductancia magnetizante L_μ . Luego, trabajando con valores eficaces se deduce que:

$$\Psi'_{21} = L_\mu I_{1eq} \quad (\text{B19})$$

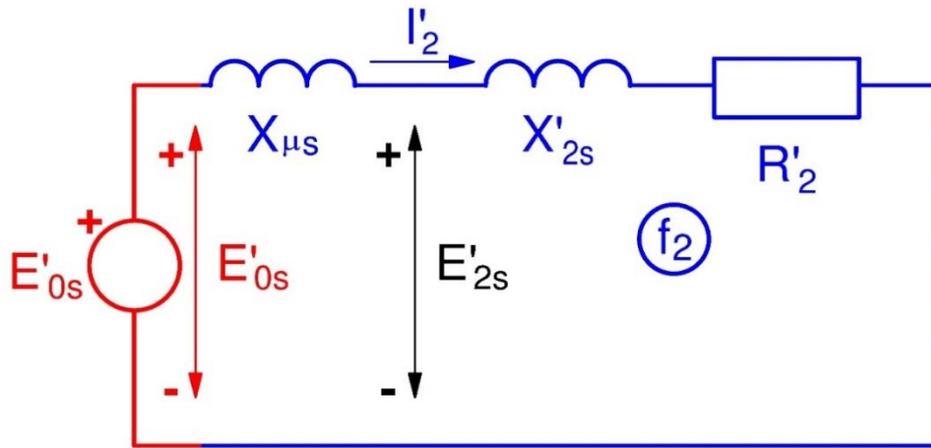


Fig. B3: Circuito equivalente del rotor reducido al estator

La relación (B22) da lugar al diagrama fasorial de la Fig. B2 y permite obtener el circuito equivalente del rotor mostrado en la Fig. B3.

Ya se indicó en el texto que cuando la pulsación ω_2 tiene signo negativo significa que la secuencia de las fases del rotor se invierte respecto a cuando ω_2 es positivo. Pero, puesto que en este tipo de funcionamiento la única fuente de energía eléctrica que actúa en cada fase del rotor es la f.e.m. que se induce sobre ella (Fig. B3), el comportamiento de una fase individual debe ser independiente del signo de ω_2 . Siempre sucede que una fase del rotor se comporta como una f.e.m. inducida actuando sobre una impedancia inductiva (Fig. B3). Por el hecho de que la pulsación ω_2 cambie de signo no puede suceder que la impedancia cambie a ser capacitiva. Viéndolo de otra manera, ya que el convenio de signos es arbitrario, no puede suceder que el comportamiento de una fase sea inductivo o capacitivo según el signo de ω_2 . Finalmente, el balance de potencias en el rotor (Fig. 16) no depende del signo de ω_2 : independientemente del sentido de giro del rotor, la máquina absorbe una potencia mecánica P_u por su eje, ejerciendo un par de frenado, y la disipa en las pérdidas en el rotor, especialmente en las pérdidas en el cobre. Es por esta razón que en las expresiones anteriores se debe usar el valor absoluto de ω_2 .

Otra forma de entender esto es percatarse que cuando la pulsación ω_2 es negativa, los ángulos entre fasores se deben interpretar en sentido contrario a como se hace habitualmente (cuando ω_2 es positiva). Así, si un fasor queda adelantado en sentido antihorario un ángulo respecto a otro y la pulsación ω_2 es negativa, esto significa que la magnitud que representa el primer fasor no está adelantada, sino que está retrasada en el tiempo respecto a la del segundo. Por lo tanto, aunque en la expresión (B21) se dé signo negativo a ω_2 se obtiene los mismos resultados que cuando se le da signo positivo.

Para comprobarlo, ahora se va a utilizar una versión reducida del diagrama fasorial de la Fig. B2 y, además, en vez de \bar{E}'_{2s} se va a tomar como fasor de referencia al fasor $\bar{\Psi}'_{21}$, que no depende de ω_2 . Se dibujan dos diagramas fasoriales, uno con una pulsación ω_2 positiva y otro con una pulsación ω'_2 negativa ($\omega'_2 = -\omega_2$). Estos diagramas fasoriales están representados en la Fig. B4a y en la Fig. B4b. En dichas figuras se tiene que:

$$\omega'_2 = -\omega_2; \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \quad (B24)$$

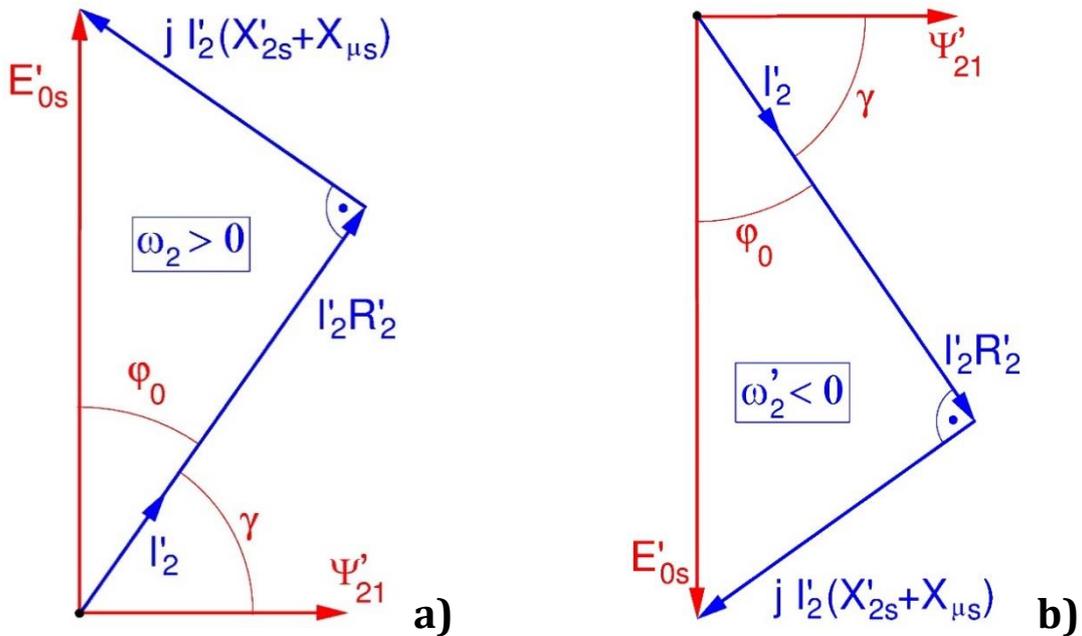


Fig. B4: Diagramas fasoriales de una máquina asíncrona alimentada con corriente continua:
a) utilizando una pulsación ω_2 positiva; **b)** utilizando una pulsación ω'_2 negativa ($\omega'_2 = -\omega_2$)

En la Fig. B4a se trabaja con una pulsación ω_2 positiva. Esto quiere decir que los fasores son vectores que giran con una velocidad ω_2 en sentido antihorario y cuya proyección horizontal multiplicada por $\sqrt{2}$ da el valor instantáneo de la magnitud que representan. Luego, de la Fig. B4a se deduce que:

$$\left. \begin{aligned} \psi'_{21} &= \sqrt{2} \Psi'_{21} \cos(\omega_2 t) \\ i'_2 &= \sqrt{2} I'_2 \cos(\omega_2 t + \gamma) \\ e'_{0s} &= \sqrt{2} E'_{0s} \cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (B25)$$

Supóngase que ahora se invierte el sentido de giro de la velocidad, aunque conservando su valor absoluto. La pulsación obtenida mediante la fórmula (25) sale negativa y ahora es $\omega'_2 = -\omega_2$. De momento, se va a utilizar la pulsación tal cual, sin poner su valor absoluto, en las expresiones (B21) y (B22). Esto significa que todos los fasores conservan su módulo, pero que los fasores de f.e.m., y también las reactancias, cambian de signo; lo que obliga a que el fasor de corriente \bar{I}'_2 ahora aparezca adelantado respecto al fasor de f.e.m. \bar{E}'_{0s} . En consecuencia, el diagrama fasorial pasa a ser el mostrado en la Fig. B4b.

En la Fig. B4b se trabaja con una pulsación ω'_2 negativa, cuyo valor absoluto es ω_2 . Esto quiere decir que ahora los fasores son vectores que giran con una velocidad ω_2 en sentido horario y cuya proyección horizontal multiplicada por $\sqrt{2}$ da el valor instantáneo de la magnitud que representan. Luego, de la Fig. B4b se deduce que:

$$\left. \begin{aligned} \psi'_{21} &= \sqrt{2} \Psi'_{21} \cos(\omega'_2 t) = \sqrt{2} \Psi'_{21} \cos(-\omega_2 t) \\ i'_2 &= \sqrt{2} I'_2 \cos(\omega'_2 t - \gamma) = \sqrt{2} I'_2 \cos(-\omega_2 t - \gamma) \\ e'_{0s} &= \sqrt{2} E'_{0s} \cos\left(\omega'_2 t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} E'_{0s} \cos\left(-\omega_2 t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (B26)$$

Es sabido que se verifica esta relación trigonométrica:

$$\cos(-x) = \cos x \quad (B27)$$

Por consiguiente, las relaciones (B26) se convierten en:

$$\left. \begin{aligned} \psi'_{21} &= \sqrt{2} \Psi'_{21} \cos(-\omega_2 t) = \sqrt{2} \Psi'_{21} \cos(\omega_2 t) \\ i'_2 &= \sqrt{2} I'_2 \cos(-\omega_2 t - \gamma) = \sqrt{2} I'_2 \cos(\omega_2 t + \gamma) \\ e'_{0s} &= \sqrt{2} E'_{0s} \cos\left(-\omega_2 t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} E'_{0s} \cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (B28)$$

Es decir, se obtienen exactamente los mismos resultados que en las relaciones (B25), cuando la pulsación ω_2 era positiva. Esto quiere decir, que ambos diagramas fasoriales de la Fig. B4 representan las mismas magnitudes y son equivalentes. Pero trabajar con el diagrama de la Fig. B4b es farragoso, ya que cambia los convenios de signos utilizados usualmente en la Electrotecnia. Es por esta razón que en las expresiones (B21) y (B22) se usa el valor absoluto de ω_2 y se va a trabajar con el diagrama fasorial de la Fig. B2, del cual el representado en la Fig. B4a es una versión reducida.

Dado que en este tipo de funcionamiento de la máquina asíncrona la pulsación ω_2 se obtiene mediante la relación (25) y que en la relación (B21) se debe emplear su valor absoluto, se deduce que:

$$j p |\Omega| L_\mu \bar{I}_{1eq} = \bar{I}'_2 \left[R'_2 + j p |\Omega| (L'_{d2} + L_\mu) \right] \quad (B29)$$

Cuando se realiza el análisis lineal de un generador síncrono de rotor cilíndrico (método de Behn-Escheburg), el cual se describe en mi texto [15], se obtiene un circuito equivalente del inducido similar al mostrado en la Fig. B3 si el generador está en cortocircuito. En el generador síncrono, X'_{2s} sería -al igual que en la máquina asíncrona- la *reactancia de dispersión* (X_σ), $X_{\mu s}$ vendría a ser la *reactancia de reacción de inducido* (X_p) y la suma ($X'_{2s} + X_{\mu s}$) pasaría a ser la *reactancia síncrona* (X_s).

Lo anterior confirma la afirmación que se ha hecho anteriormente en el texto: una máquina asíncrona alimentada con corriente continua se comporta como un generador síncrono en cortocircuito cuyo inducido está ubicado en el rotor.

Corriente en el rotor. Saturación magnética. Inductancia magnetizante L_μ

De las expresiones (B21), (B22) y (B29) se deduce que el fasor y el valor eficaz de la corriente del rotor reducida al estator se pueden obtener así:

$$\bar{I}'_2 = \frac{\bar{E}'_{0s}}{R'_2 + j(X'_{2s} + X_{\mu s})} = \frac{\bar{E}'_{0s}}{R'_2 + j p |\Omega| (L'_{d2} + L_\mu)} = \frac{j p |\Omega| L_\mu \bar{I}_{1eq}}{R'_2 + j p |\Omega| (L'_{d2} + L_\mu)} \quad (B30)$$

$$I'_2 = \frac{p |\Omega| L_\mu}{\sqrt{R'^2_2 + [p \Omega (L'_{d2} + L_\mu)]^2}} I_{1eq} = \frac{L_\mu}{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{p \Omega}\right)^2 + (L'_{d2} + L_\mu)^2}} I_{1eq} \quad (B31)$$

Estas relaciones permiten extraer una serie de conclusiones sobre la corriente del rotor:

- La corriente del rotor no depende del signo de la velocidad (n en r.p.m. o Ω en rad/s) de giro de la máquina.
- La corriente del rotor aumenta con la velocidad. Cuanto mayor es la velocidad Ω a la que gira la máquina, mayor es la corriente del rotor (ver la relación (B31)).

Cuando la velocidad del rotor es nula, la relación (B31) indica que corriente del rotor también es nula. Esto es lógico, si el rotor no se mueve no se inducen f.e.m.s en sus fases y, consecuentemente, no hay corriente circulando por ellas.

Aunque la corriente del rotor reducida al estator aumenta con la velocidad, su valor eficaz I'_2 siempre permanece con un valor inferior a I_{1eq} . Así, en el límite I'_2 vale:

$$\Omega \rightarrow \infty \Rightarrow I'_2 = \frac{L_\mu}{L'_{d2} + L_\mu} I_{1eq} = \frac{1}{\frac{L'_{d2}}{L_\mu} + 1} I_{1eq} \quad (B32)$$

- La relación (B30) y el diagrama fasorial de la Fig. B2 indican que cuanto mayor es la velocidad Ω y, por lo tanto, mayores son la pulsación ω_2 y las reactancias X'_{2s} y $X_{\mu s}$, más inductivo es el circuito del rotor y mayor es el ángulo φ_0 de desfase entre los fasores \bar{E}'_{0s} e \bar{I}'_2 . En el límite \bar{I}'_2 estaría retrasada 90° con respecto a \bar{E}'_{0s} .

Al estudiar la máquina síncrona (ver mi texto [15]) se comprueba que cuanto más inductiva es la corriente del inducido su f.m.m. se opone cada vez más a la f.m.m. del inductor. En el límite, cuando la corriente inducida es inductiva pura, su f.m.m. es *desmagnetizante* porque tiene la misma dirección que la f.m.m. del inductor, pero crea un campo magnético de sentido contrario. Ambas f.m.m.s se oponen y el campo magnético total es inferior al de vacío.

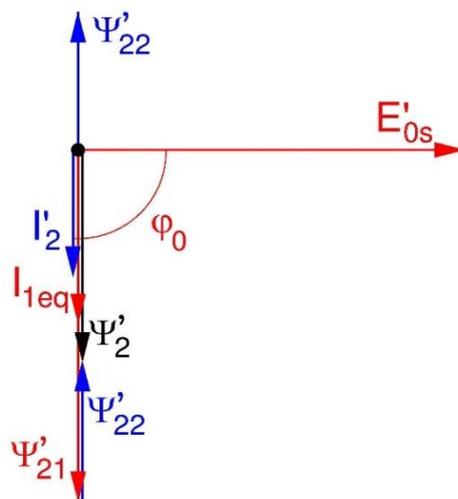


Fig. B5: Efecto desmagnetizante de una corriente rotórica puramente inductiva

Para el caso de la máquina asíncrona alimentada con corriente continua este efecto desmagnetizante de I'_2 se puede comprobar mediante el diagrama fasorial de la Fig. B5, que se ha deducido de la Fig. B2 tomando como referencia al fasor \bar{E}'_{0s} . En esta figura se observa que cuando el ángulo φ_0 vale 90° el fasor $\bar{\Psi}'_{22}$ tiene sentido opuesto al fasor $\bar{\Psi}'_{21}$, lo que hace que el fasor de los enlaces de flujo totales $\bar{\Psi}'_2$ sea menor.

De todo lo anterior se desprende que a medida que aumenta la velocidad crece el efecto desmagnetizante de la *reacción de inducido* (es decir, de la f.m.m. originada por el rotor) porque aumenta su valor y su efecto es cada vez más opuesto al de la f.m.m. del inductor (es decir, del estator). Pero la f.m.m. del inducido nunca superará la f.m.m. inductora (pues siempre sucede que $I'_2 < I_{1eq}$). En consecuencia, el campo magnético en el entrehierro disminuye al aumentar la velocidad, mientras que a bajas velocidades el campo magnético aumenta. Esto hace que la máquina se sature apreciablemente cuando la velocidad es baja, salvo que la corriente I_{1eq} sea muy pequeña.

Si se supone a la máquina con un comportamiento lineal (con saturación magnética constante), de las relaciones (B16) y (B19) se deduce que:

$$\bar{\Psi}'_2 = L_\mu (\bar{I}_{1eq} - \bar{I}'_2) \quad (B33)$$

$$\bar{\Psi}'_2 = L_\mu \bar{I}_{0eq}; \quad \bar{I}_{0eq} = \bar{I}_{1eq} - \bar{I}'_2 \quad (B34)$$

La relación (B33) vuelve a mostrar como la corriente del rotor I'_2 tiene un efecto desmagnetizante, opuesto a la f.m.m. originada por I_{1eq} . En la relación (B34) se ha introducido el fasor \bar{I}_{0eq} , el cual se ha definido por analogía con la corriente de vacío utilizada al estudiar la máquina asíncrona alimentada con corriente alterna trifásica.

Aplicando la relación (B30) en (B34) se obtienen estas expresiones para el fasor y el valor eficaz de I_{0eq} :

$$\bar{I}_{0eq} = \frac{R'_2 + jX'_{2s}}{R'_2 + j(X'_{2s} + X_{\mu s})} \bar{I}_{1eq} = \frac{R'_2 + jp|\Omega|L'_{d2}}{R'_2 + jp|\Omega|(L'_{d2} + L_\mu)} \bar{I}_{1eq} \quad (B35)$$

$$I_{0eq} = \sqrt{\frac{R'^2_2 + (p\Omega L'_{d2})^2}{R'^2_2 + [p\Omega(L'_{d2} + L_\mu)]^2}} I_{1eq} = \sqrt{\frac{\left(\frac{R'_2}{p\Omega}\right)^2 + L'^2_{d2}}{\left(\frac{R'_2}{p\Omega}\right)^2 + (L'_{d2} + L_\mu)^2}} I_{1eq} \quad (B36)$$

Mediante estas expresiones se observa que -como es lógico por la relación (B34)- la corriente I_{0eq} varía con la velocidad de forma inversa a como lo hace la corriente del rotor I'_2 . Para una velocidad nula I_{0eq} es igual a I_{1eq} (ya que entonces $I'_2 = 0$). A medida que aumenta la velocidad de giro Ω , la corriente I_{0eq} disminuye -y, en consecuencia, también se reduce el campo magnético de la máquina- hasta que en el límite esta intensidad vale:

$$\Omega \rightarrow \infty \Rightarrow I_{0eq} = \frac{L'_{d2}}{L'_{d2} + L_{\mu}} I_{1eq} = \frac{1}{\frac{L'_{\mu}}{L_{d2}} + 1} I_{1eq} \quad (B37)$$

A efectos prácticos se puede considerar que la máquina se satura a partir del momento en que la corriente I_{0eq} tiene un valor mayor que la corriente de vacío de la máquina cuando está alimentada por una fuente de tensión alterna trifásica y funciona en condiciones asignadas. Entonces, este criterio permite que, para un valor dado y constante de la corriente I_{1eq} , mediante la relación (B36) se pueda determinar la velocidad límite por debajo de la cual la máquina se considera que está saturada. En efecto, poniendo en la relación (B36) que la corriente I_{0eq} es igual a la corriente de vacío en condiciones asignadas, se obtiene una ecuación que, para un valor dado de I_{1eq} , permite despejar la velocidad a la cual la máquina se empieza a saturar (véanse también las últimas páginas del anexo C).

En resumen, si -como es habitual- la corriente I_{1eq} es mayor que la corriente de vacío en condiciones asignadas, sucede que para velocidades pequeñas la máquina puede llegar a alcanzar una saturación magnética elevada y esto hace que la *inductancia magnetizante* L_{μ} se vaya reduciendo a medida que la velocidad disminuye. Es decir, la saturación magnética hace que a bajas velocidades la inductancia magnetizante L_{μ} no sea un parámetro constante.

En la práctica se puede dar al parámetro L_{μ} un valor constante e igual al que tiene en condiciones asignadas, si la velocidad Ω es superior a aquella que hace que la corriente I_{0eq} sea igual a la intensidad de vacío en condiciones asignadas. Para velocidades inferiores a esta, se considera que la máquina empieza a saturarse y la inductancia magnetizante L_{μ} tiene un valor variable y menor que en condiciones asignadas; tanto más pequeño cuanto menor es la velocidad (y más se satura la máquina). Habrá que tener en cuenta esta variación de la inductancia L_{μ} en las expresiones obtenidas anteriormente.

Potencias en el rotor. Par

El balance de potencias, representado en la Fig. 16, señala que la potencia mecánica absorbida en el eje se transforma en las pérdidas en el cobre, en el hierro y mecánicas. Por lo tanto, se puede escribir que:

$$- P_u = P_{Cu2} + P_{Fe} + P_m \quad (B38)$$

El signo “-“ que parece afectando a la potencia mecánica P_u en la relación anterior se debe al convenio de signos que se ha establecido. Recuerde que se consideran positivas las potencias que tienen el mismo signo que cuando la máquina actúa como motor (Fig. 2), lo que significa que la potencia mecánica P_u es positiva cuando la máquina la produce y, consecuentemente, P_u es negativa cuando la máquina la absorbe, que es lo que sucede ahora.

Todas las pérdidas que figuran en el lado derecho del balance (B38) aumentan con la velocidad:

- Las *pérdidas en el cobre del rotor* P_{Cu2} dependen del cuadrado del valor eficaz I'_2 de la corriente rotórica, que, como se ha indicado en el apartado anterior, aumenta su valor con la velocidad de giro Ω .
- Las *pérdidas en el hierro* P_{Fe} se producen solamente en el rotor, pues el estator está sometido a un campo magnético fijo e inmóvil. Estas pérdidas son debidas a la histéresis magnética y a las corrientes parásitas de Foucault, las cuales dependen de la frecuencia y de la inducción magnética. Como estas dos magnitudes aumentan con la velocidad, resulta que P_{Fe} es una potencia que aumenta con la velocidad.
- Las *pérdidas mecánicas y de ventilación* P_m se deben a los rozamientos en los cojinetes donde se apoya el eje y al consumo de potencia del equipo de refrigeración de la máquina. Estas pérdidas también aumentan con la velocidad.

Si se acepta que las pérdidas mecánicas son despreciables y se tiene en cuenta el convenio de signos usado para las potencias, se deduce que, como en casos anteriores, la *potencia mecánica interna* P_{mi} es prácticamente igual a la potencia mecánica P_u . Luego, teniendo presente el balance (Fig. 16 y relación (B38)), sucede que:

$$\begin{aligned} -P_{mi} &= P_{Cu2} + P_{Fe} = -(P_u - P_m) \approx -P_u \\ P_u &\approx P_{mi} = -(P_{Cu2} + P_{Fe}) \end{aligned} \quad (B39)$$

Si, como es lo más frecuente, se puede aceptar que las pérdidas en el hierro P_{Fe} son mucho más pequeñas que las pérdidas en el cobre P_{Cu2} y se tienen en cuenta las relaciones (B31) y (B39), se deduce que:

$$\begin{aligned} P_{mi} &\approx -P_{Cu2} = -m_1 R'_2 I_2'^2 \\ P_{mi} &\approx -m_1 R'_2 \frac{L_\mu^2}{\left(\frac{R'_2}{p \cdot \Omega}\right)^2 + (L'_{d2} + L_\mu)^2} I_{1eq}^2 \end{aligned} \quad (B40)$$

En consecuencia, el par de la máquina se puede calcular de esta manera:

$$M = \frac{P_{mi}}{\Omega} = -\frac{m_1 R'_2}{\Omega} \frac{L_\mu^2}{\left(\frac{R'_2}{p \cdot \Omega}\right)^2 + (L'_{d2} + L_\mu)^2} I_{1eq}^2 \quad (B41)$$

Este par M siempre es de frenado, pues siempre tiene signo opuesto al de la velocidad Ω . El verdadero par de frenado de la máquina es algo superior al que se calcula mediante la relación anterior debido a las pérdidas en el hierro y mecánicas que se han despreciado en dicha fórmula.

Aceptando, de momento, que la inductancia magnetizante L_μ es constante, los valores de velocidad a la cual el par M alcanza sus valores extremos se obtienen derivando la expresión (B41) respecto a la velocidad Ω e igualando dicha derivada a cero. Se obtienen dos velocidades de iguales valores absolutos:

$$\Omega_m = \pm \frac{-R'_2}{p(L'_{d2} + L_\mu)}; \quad n_m = \frac{60}{2\pi} \Omega_m \quad (B42)$$

Sustituyendo estos valores de velocidad, obtenidos mediante la relación (B42), en la fórmula del par (B41), se deduce que los valores extremos del par son:

$$M_{\text{máx}} = \pm \frac{m_1 p}{2} \frac{L_\mu^2}{L'_{d2} + L_\mu} I_{1\text{eq}}^2 \quad (B43)$$

En (B43) y (B42) se emplea el signo “+” para obtener el par máximo positivo $M_{\text{máx}}$ y su correspondiente velocidad negativa Ω_m (o n_m) y se usa el signo “-” para obtener el par máximo negativo $M'_{\text{máx}}$ y su correspondiente velocidad positiva Ω'_m (o n'_m) (Fig. B6).

El parámetro L_μ es bastante mayor que el resto de parámetros de resistencia y de inductancia del circuito equivalente. Observando la relación (B42), esto significa que los valores extremos del par se producen para unas velocidades muy pequeñas.

Las fórmulas (B41), (B42) y (B43) confirman lo indicado en el texto: la curva par-velocidad es completamente simétrica y sus dos valores extremos tienen los mismos valores absolutos y se producen para velocidades también de iguales valores absolutos. Como el nivel de saturación de la máquina depende del valor de la velocidad, pero no de su signo, sucede que, incluso considerando el efecto de la saturación magnética, la curva par-velocidad sigue siendo simétrica.

La citada curva par-velocidad de una máquina asíncrona está representada en la Fig. 17, que se repite seguidamente:

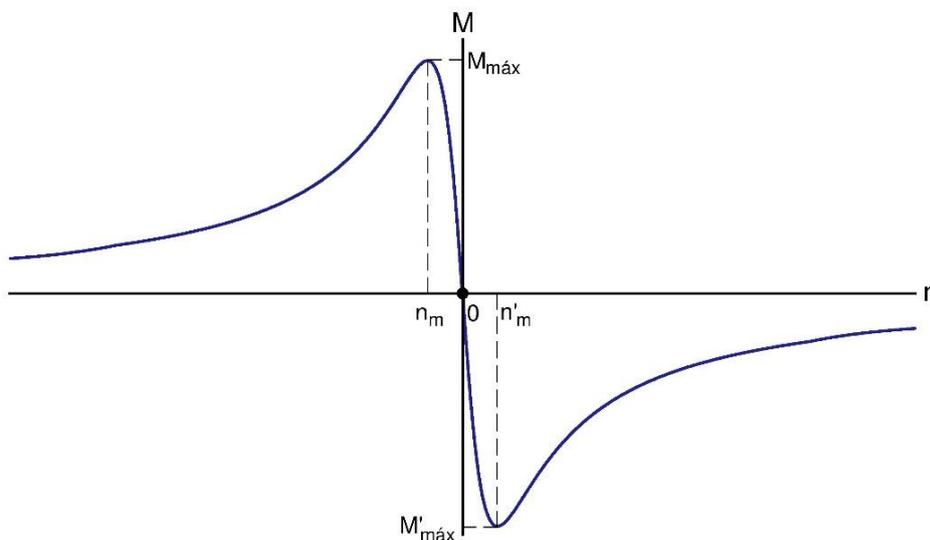


Fig. B6: Curva de par de una máquina asíncrona alimentada con corriente continua

Las relaciones (B42) y (B43) se han obtenido suponiendo que la inductancia L_{μ} es constante, lo que no es cierto si la máquina llega a saturarse. Además, como se acaba de comprobar, los valores extremos del par se producen a velocidades muy bajas donde la máquina tendrá altos niveles de saturación. Luego, en general no es correcto considerar que el parámetro L_{μ} permanece constante. Por lo tanto, las fórmulas (B42) y (B43) dan solamente valores aproximados de Ω_m y $M_{m\acute{a}x}$ y en ellas habrá que utilizar el valor de L_{μ} que corresponda al nivel de saturación magnética para la velocidad Ω_m .

Esto hace que los valores máximos de par sean algo menores que los que se obtendrían en la relación (B43) con el valor no saturado de L_{μ} y que la curva par-velocidad no presente una variación de pendiente tan abrupta cuando el par es máximo, sino que la saturación "aplana" dicha zona. La saturación también hace que la velocidad Ω_m , que se calcula mediante la relación (B42), sea algo mayor que sin saturación magnética.

En la expresión (B41) que calcula el par también debe tenerse en cuenta que la inductancia magnetizante L_{μ} es variable y usar el valor de este parámetro que corresponda al nivel de saturación para la velocidad que se esté analizando. En esta fórmula se observa que el par de frenado se puede controlar actuando sobre I_{1eq} y sobre R'_2 .

De lo indicado en el anexo A, especialmente en la tabla A.1 y en la relación (A5), se deduce que la corriente I_{1eq} se puede obtener así:

$$I_{1eq} = \frac{k_{eq}}{k_R} \cdot \frac{V_{cc}}{R_1}; \quad (k_{eq} = \frac{I_{1eq}}{I_{cc}}; k_R = \frac{R_{cc}}{R_1}) \quad (B44)$$

En esta relación k_{eq} y k_R son unas constantes que dependen de la forma de conexión del estator (tabla A.1). Se deduce, pues, que modificando la tensión de continua V_{cc} con que se alimenta al estator se puede regular la corriente I_{1eq} . Por otra parte, el campo magnético y, por lo tanto, también el nivel de saturación de la máquina dependen de I_{1eq} . En consecuencia, según (B41), el par M variará cuadráticamente con V_{cc} mientras la máquina no se sature y en una medida algo menor cuando hay saturación magnética.

La regulación del par mediante la resistencia del rotor R'_2 solamente se puede realizar en máquinas de rotor bobinado y se consigue añadiendo resistencias en serie con las fases del rotor a través del colector de anillos. Si no hay saturación, el añadir resistencias en serie con el rotor -lo que equivale a aumenta la resistencia R'_2 - no modifica el valor de $M_{m\acute{a}x}$, pero aumenta la velocidad Ω_m a la que se produce (ver las relaciones (B42) y (B43)). Además, al aumentar R'_2 disminuye la corriente del rotor I'_2 , lo que origina que el campo magnético aumente (ver las relaciones (B16) y (B31)). Por lo tanto, si hay saturación magnética sucede que al aumentar R'_2 también aumenta la saturación y la inductancia L_{μ} disminuye, lo que provoca que el par máximo $M_{m\acute{a}x}$ disminuya algo y la velocidad de par máximo Ω_m sea algo mayor que sin saturación.

ANEXO C:

EJEMPLO DE CÁLCULO DE DIFERENTES SISTEMAS DE FRENADO DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA

Una máquina asíncrona trifásica tiene estas características:

$V_{1NL} = 500 \text{ V}$	Estator conectado en <u>triángulo</u>	$f_1 = 50 \text{ Hz}$
$R_1 = 0,1 \Omega$	$R'_2 = 0,24 \Omega$	$2p = 4 \text{ polos}$
$X_{cc} = 1,2 \Omega$	$X'_2/X_{cc} = 0,5$	$X_\mu = 24,4 \Omega$
		$n_N = 1446 \text{ r.p.m.}$

Responda a las siguientes cuestiones:

- a)** Inicialmente la máquina está funcionando como motor alimentada a su tensión y frecuencia asignadas. Calcule el par M_N y la corriente en cada fase del estator I_{1N} cuando la máquina funciona en las condiciones asignadas ¿cuál será el máximo par motor que la máquina puede proporcionar funcionando de esta manera y a qué velocidad se produce?
- b)** Estando la máquina funcionando como motor a la velocidad asignada se la quiere frenar haciéndola funcionar como freno a contracorriente. Para ello se permutan dos fases de la red de alimentación. Calcule la corriente de fase en el estator y el par de frenado justo después de realizar esta conmutación de las fases cuando, por inercia, la máquina aún no ha cambiado su velocidad ¿Cuál será el máximo par de frenado que la máquina puede proporcionar funcionando de esta manera y a qué velocidad se produce?
- c)** **1.** Ahora la máquina está alimentada mediante un convertidor de frecuencia que actúa como una fuente de tensión. Estando la máquina funcionando como motor a la velocidad asignada, se la quiere frenar haciéndola funcionar como generador (frenado regenerativo). Para ello se reduce la frecuencia del estator a $f_1 = 47 \text{ Hz}$ y la tensión de línea pasa a ser $V_{1L} = 471 \text{ V}$. Calcule los valores de la corriente de fase en el estator y del par de frenado justo después de realizar este cambio de la frecuencia cuando, por inercia, la máquina aún no ha cambiado su velocidad.
- 2.** Cuando la máquina funciona alimentada con su tensión y frecuencia asignadas ¿Cuál será el máximo par de frenado regenerativo que la máquina puede proporcionar y a qué velocidad se produce?
- d)** Por último, estando la máquina funcionando como motor a la velocidad asignada se la quiere frenar alimentándola con corriente continua (frenado dinámico) Para ello se usa la conexión b de la Fig. 14 (máquina con la conexión triángulo-b) y la tensión de continua con que se la alimenta V_{cc} tiene un valor tal que la corriente I_{1eq} es igual a la corriente de fase asignada I_{1N} obtenida en el apartado **a)**.
- 1.** Calcule el valor de la tensión continua V_{cc} .
- 2.** Calcule la corriente del rotor reducida al estator I'_2 y el par de frenado justo después de alimentar con corriente continua a la máquina cuando, por inercia, aún no ha cambiado su velocidad ¿Cuál será el máximo par de frenado que la máquina puede proporcionar funcionando de esta manera y a qué velocidad se produce?
- NOTA: En este frenado suponer que a la velocidad asignada la inductancia magnetizante L_μ tiene el mismo valor que en condiciones asignadas y que cuando proporciona el máximo par de frenado la saturación reduce este parámetro L_μ en un 25%.

SOLUCIÓN:

- a) $M_N = 674 \text{ Nm}$; $I_{1N} = 75,5 \text{ A}$;
 $M_{\text{máx}} = 1831 \text{ Nm}$; $n_m = 1201 \text{ r.p.m.}$
- b) $M = -392 \text{ Nm}$; $I_1 = 410 \text{ A}$;
 El máximo par de frenado se produce en el arranque ($n = 0 \text{ r.p.m.}$); $M_a = -737 \text{ Nm}$
- c) 1. Para 47 Hz y 471 V: $M = -482 \text{ Nm}$; $I_1 = 54 \text{ A}$
 2. Para 50 Hz y 500 V: $M'_{\text{máx}} = -2162 \text{ Nm}$; $n'_{\text{máx}} = 1800 \text{ r.p.m.}$
- d) 1. $V_{cc} = 9,25 \text{ V}$
 2. $M = -25,8 \text{ Nm}$; $I'_2 = 73,7 \text{ A}$;
 $M'_{\text{máx}} = -965 \text{ Nm}$; $n'_m = 19 \text{ r.p.m.}$

SOLUCIÓN DETALLADA:

Cuestiones preliminares

- Tensión asignada de fase, V_{1N} :

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_{1N} = V_{1NL} \Rightarrow \underline{V_{1N} = 500 \text{ V}}$$

- Número de pares de polos, p :

$$2p = 4 \text{ polos} \Rightarrow \underline{p = 2 \text{ pares de polos}}$$

- Velocidad asignada en rad/s, Ω_N :

$$\Omega = \frac{2\pi}{60} n; \quad n = \frac{60}{2\pi} \Omega \quad (\text{C0})$$

$$(\text{C0}): \quad \Omega_N = \frac{2\pi}{60} n_N = \frac{2\pi}{60} \cdot 1446 \Rightarrow \underline{\Omega_N = 151,42 \text{ rad/s}}$$

- Velocidad de sincronismo a frecuencia asignada ($f_1 = 50 \text{ Hz}$):

$$(1): \quad n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} \Rightarrow \underline{n_1 = 1500 \text{ r.p.m.}}$$

$$(1): \quad \Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{2\pi \cdot 50}{2} \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 157,08 \text{ rad/s}}$$

- Reactancias de dispersión a frecuencia asignada ($f_1 = 50 \text{ Hz}$):

$$X'_2/X_{cc} = 0,5; \quad X_{cc} = X_1 + X'_2; \quad X_{cc} = 1,2 \Omega$$

$$\underline{X_1 = 0,6 \Omega}; \quad \underline{X'_2 = 0,6 \Omega}$$

- Inductancias:

$$L_{d1} = \frac{X_1}{2 \pi f_1} = \frac{0,6}{2 \pi 50} \Rightarrow \underline{L_{d1} = 0,00191 \text{ H}}$$

$$L'_{d2} = \frac{X'_2}{2 \pi f_1} = \frac{0,6}{2 \pi 50} \Rightarrow \underline{L'_{d2} = 0,00191 \text{ H}}$$

$$L_{cc} = L_{d1} + L'_{d2} = \frac{X_{cc}}{2 \pi f_1} = \frac{1,2}{2 \pi 50} \Rightarrow \underline{L_{cc} = 0,00382 \text{ H}}$$

$$L_{\mu} = \frac{X_{\mu}}{2 \pi f_1} = \frac{24,4}{2 \pi 50} \Rightarrow \underline{L_{\mu} = 0,0777 \text{ H}}$$

- Ecuaciones de la máquina asíncrona conectada a una tensión trifásica:

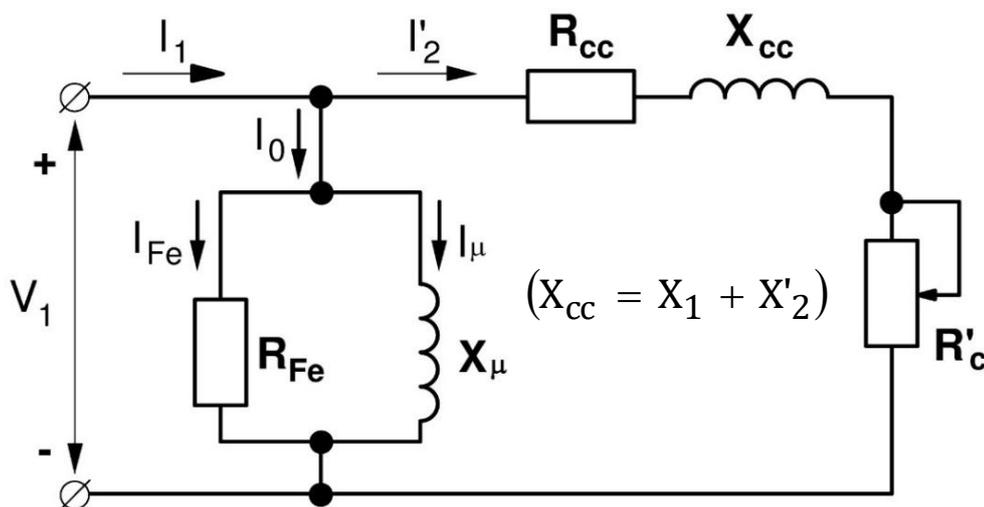


Fig. C1: Circuito equivalente aproximado de una máquina asíncrona

Del circuito equivalente aproximado de la máquina asíncrona (Fig. C1) se obtiene que:

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} \quad (C1)$$

Por otra parte, se va a utilizar esta variable auxiliar que simplifica los cálculos:

$$x = R'_2/s \quad (C2)$$

Con esta variable auxiliar la ecuación (C1) se convierte en:

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{(R_1 + x)^2 + X_{cc}^2}} \quad (C3)$$

Utilizando esta variable auxiliar -dada por (C2)- y teniendo en cuenta, además, la relación (C3), la ecuación del par (15) cuando la máquina funciona alimentada con una fuente de tensión alterna trifásica se convierte en:

$$M = \frac{m_1 \times}{\Omega_1} \frac{V_1^2}{(R_1 + x)^2 + X_{cc}^2} = \frac{m_1 \times}{\Omega_1} I_2'^2 \quad (C4)$$

En esta máquina el número de fases del estator es tres, es decir: $m_1 = 3$ fases.

La corriente de pérdidas en el hierro I_{Fe} es mucho más pequeña que la corriente magnetizante I_μ . Por lo tanto, la corriente de vacío I_0 es prácticamente igual a la corriente I_μ y no se comete un error apreciable si en el circuito equivalente exacto de la Fig. 1 se suprime la resistencia de pérdidas en el hierro R_{Fe} y se utiliza el circuito equivalente mostrado en la Fig. C2:

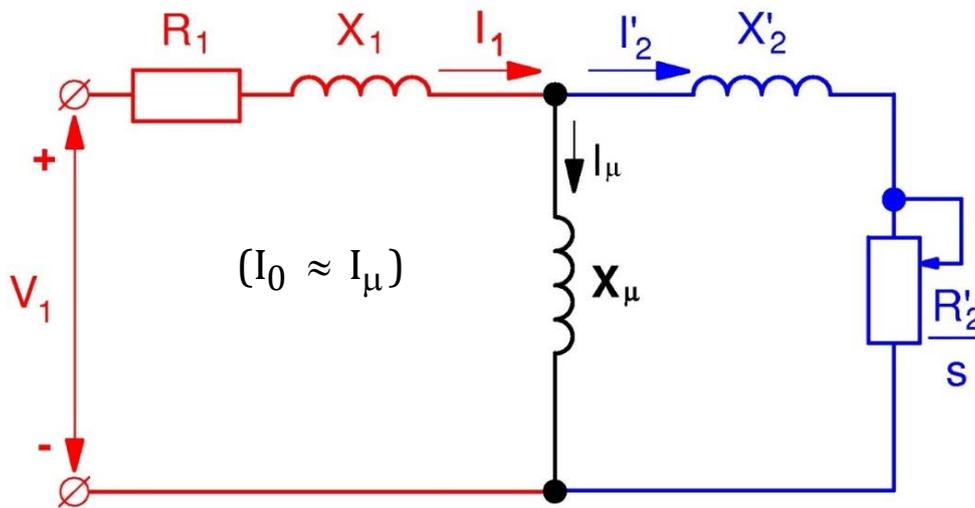


Fig. C2: Circuito equivalente de una máquina asíncrona sin la resistencia R_{Fe}

En vacío, la corriente I'_2 es nula y la corriente I_0 se puede deducir de la Fig. C2:

$$I_0 \approx I_\mu = \frac{V_1}{\sqrt{R_1 + (X_1 + X_\mu)^2}} \approx \frac{V_1}{X_1 + X_\mu} \quad (C5)$$

En los circuitos equivalentes de la Fig. 1, la Fig. C1 y la Fig. C2 se observa que:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 + \bar{I}'_2 \quad (C6)$$

Cuando el deslizamiento s es pequeño las corrientes I_0 e I'_2 son casi perpendiculares entre sí y se puede utilizar esta aproximación:

$$|s| \ll 1 \Rightarrow I_1 \approx \sqrt{I_0^2 + I_2'^2} \quad (C7)$$

Cuando el deslizamiento s es elevado la corriente del rotor I'_2 aumenta y se puede despreciar la corriente I_0 en la relación (C6). En consecuencia, se verifica esta aproximación:

$$|s| \gg 1 \Rightarrow I_1 \approx I'_2 \quad (C8)$$

Esto es lo que sucede en el arranque, donde el deslizamiento s vale 1, y para deslizamientos superiores ($|s| \geq 1$).

- Ecuaciones de la máquina asíncrona conectada a una tensión continua:

En este caso se va a utilizar una nueva variable auxiliar para simplificar los cálculos:

$$y = \frac{R'_2}{\omega_2} = \frac{R'_2}{p \Omega} \quad (C9)$$

Con esta variable auxiliar la ecuación (B31), que permite calcular la corriente del rotor reducida al estator I'_2 , se convierte en:

$$I'_2 = \frac{L_\mu}{\sqrt{y^2 + (L'_{d2} + L_\mu)^2}} I_{1eq} \quad (C10)$$

Utilizando esta variable auxiliar -dada por (C9)- y teniendo en cuenta, además, la relación (C10), la ecuación del par (B41) (o su equivalente, la relación (27)) cuando la máquina funciona alimentada con una fuente de tensión continua se transforma en:

$$M = -(m_1 \cdot p \cdot y) \frac{L_\mu^2}{y^2 + (L'_{d2} + L_\mu)^2} I_{1eq}^2 = -(m_1 \cdot p \cdot y) I'^2_2 \quad (C11)$$

a) Motor alimentado por una fuente de tensión trifásica de V_{1N} y f_{1N}

- En este caso la velocidad vale $n_N = 1446$ r.p.m. y el deslizamiento correspondiente se calcula mediante la relación (2):

$$(2): \quad s_N = \frac{1500 - 1446}{1500} \Rightarrow \underline{s_N = 0,036}$$

Cuando la máquina está funcionando a la velocidad asignada, la variable auxiliar definida mediante la relación (C2) vale:

$$(C2): \quad x_N = \frac{0,24}{0,036} \Rightarrow x_N = 6,667 \Omega$$

- La corriente del rotor reducida al estator I'_{2N} y el par M_N se obtienen mediante las relaciones (C3) y (C4), respectivamente:

$$(C3): \quad I'_{2N} = \frac{500}{\sqrt{(0,1 + 6,667)^2 + 1,2^2}} \Rightarrow \underline{I'_{2N} = 72,75 \text{ A}}$$

$$(C4): \quad M_N = \frac{3 \cdot 6,667}{157,08} 72,75^2 \Rightarrow \boxed{M_N = 674 \text{ Nm}}$$

- La corriente de vacío en condiciones asignadas se obtiene usando la relación (C5):

$$(C5): \quad I_0 = \frac{500}{0,6 + 24,4} \Rightarrow \underline{I_0 = 20 \text{ A}}$$

- La corriente de fase del estator se puede calcular mediante la expresión (C7) puesto que el deslizamiento asignado s_N es pequeño:

$$(C7): \quad I_{1N} = \sqrt{20^2 + 72,8^2} \Rightarrow \boxed{I_{1N} = 75,5 \text{ A}}$$

Como el estator está conectado en triángulo, su corriente de línea asignada vale:

$$\text{Conexión triángulo} \Rightarrow I_{1NL} = \sqrt{3} I_{1N} = \sqrt{3} \cdot 75,5 \Rightarrow \underline{I_{1NL} = 131 \text{ A}}$$

- El deslizamiento de par máximo actuando la máquina como motor se calcula utilizando el signo “+” en la segunda de las relaciones (16):

$$(16): \quad s_m = \frac{0,24}{\sqrt{0,1^2 + 1,2^2}} \Rightarrow \underline{s_m = 0,199}$$

Luego, la velocidad de par motor máximo se obtiene despejándola en la relación (2):

$$(2): \quad n_m = n_1 (1 - s_m) = 1500 \cdot (1 - 0,199) \Rightarrow \boxed{n_m = 1201 \text{ r.p.m.}}$$

$$(2): \quad \Omega_m = \Omega_1 (1 - s_m) = 157,08 \cdot (1 - 0,199) \Rightarrow \Omega_m = 125,82 \text{ rad/s}$$

La variable auxiliar ahora vale:

$$(C2): \quad x_m = \frac{0,24}{0,199} \Rightarrow x_m = 1,206 \Omega$$

El par motor máximo se puede calcular mediante la relación (C4) si en ella se utiliza x_m :

$$(C4): \quad M_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot 1,206}{157,08} \frac{500^2}{(0,1 + 1,206)^2 + 1,2^2} \Rightarrow \boxed{M_{\text{máx}} = 1831 \text{ Nm}}$$

Alternativamente, el par motor máximo también se puede calcular directamente por medio de la primera de las expresiones (16) si en ella se utiliza el signo “+”:

$$(16): \quad M_{\text{máx}} = \frac{3}{157,08} \frac{500^2}{2 \left(0,1 + \sqrt{0,1^2 + 1,2^2} \right)} \Rightarrow M_{\text{máx}} = 1831 \text{ Nm}$$

- Cuando la máquina actúa como motor a la tensión y frecuencia asignadas, la corriente asignada de fase vale $I_{1N} = 75,5 \text{ A}$, el par asignado es $M_N = 674 \text{ Nm}$, el par máximo vale $M_{\text{máx}} = 1831 \text{ Nm}$ y la velocidad de par máximo es $n_m = 1201 \text{ r.p.m.}$

b) Funcionamiento como freno a contracorriente

- En este caso la velocidad sigue siendo la asignada ($n_N = 1446 \text{ r.p.m.}$), pero la velocidad de sincronismo es negativa. El deslizamiento en este caso se puede calcular mediante la expresión (23):

$$(23): \quad \begin{aligned} n_1 &= -1500 \text{ r.p.m.}; & \Omega_1 &= -157,08 \text{ rad/s} \\ s &= 2 - s_N = 2 - 0,036 \Rightarrow & s &= \underline{1,964} \end{aligned}$$

En consecuencia, según (C2), la variable auxiliar ahora vale:

$$(C2): \quad x = \frac{0,24}{1,964} \Rightarrow x = 0,1222 \Omega$$

- La corriente del rotor reducida al estator I'_2 y el par M se obtienen mediante las relaciones (C3) y (C4), respectivamente:

$$(C3): \quad I'_2 = \frac{500}{\sqrt{(0,1 + 0,1222)^2 + 1,2^2}} \Rightarrow \underline{I'_2 = 410 \text{ A}}$$

$$(C4): \quad M = \frac{3 \cdot 0,1222}{-157,08} 409,7^2 \Rightarrow \boxed{M = -392 \text{ Nm}}$$

Ahora el deslizamiento tiene un valor elevado y la corriente I'_2 es mucho mayor que la corriente I_0 . Por lo tanto, se puede usar la aproximación (C8):

$$(C8): \quad I_1 \approx I'_2 \Rightarrow \boxed{I_1 = 410 \text{ A}}$$

Como el estator está conectado en triángulo, su corriente de línea vale:

$$\text{Conexión triángulo} \Rightarrow I_{1L} = \sqrt{3} I_1 = \sqrt{3} \cdot 410 \Rightarrow \underline{I_{1L} = 710 \text{ A}}$$

- Observando la curva de par de la Fig. 12 se aprecia que, cuando la velocidad de sincronismo es negativa, el par máximo (en valor absoluto) se produce cuando la máquina actúa como motor inverso (con velocidad negativa). Por lo tanto, este valor máximo no es el mayor par de frenado. En dicha Fig. 12 se deduce que, actuando como freno, el máximo par de la máquina asíncrona se produce en el arranque; es decir, cuando la velocidad es nula y el deslizamiento s vale 1:

$$\text{Par máximo de frenado a contracorriente} \Rightarrow \boxed{n = 0 \text{ r.p.m.}}$$

El par de arranque se puede obtener mediante la fórmula del par (15) si en ella se da el valor 1 al deslizamiento s :

$$(15): \quad M_a = \frac{3 \cdot \frac{0,24}{1}}{-157,08} \frac{500^2}{\left(0,1 + \frac{0,24}{1}\right)^2 + 1,2^2} \Rightarrow \boxed{M_a = -737 \text{ Nm}}$$

- En el frenado a contracorriente de esta máquina se obtiene que el par de frenado a la velocidad asignada vale $M = -392 \text{ Nm}$ y la corriente de fase del estator correspondiente vale $I_1 = 410 \text{ A}$. El máximo par de frenado a contracorriente se produce en el arranque ($n = 0 \text{ r.p.m.}$) donde el par vale $M_a = -737 \text{ Nm}$.

c) Funcionamiento como freno regenerativo

1. Funcionamiento a la velocidad asignada y alimentada a 47 Hz y 471 V

- Dada la conexión triángulo del estator, ahora su tensión de fase vale:

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_1 = V_{1L} \Rightarrow \underline{V_1 = 471 \text{ V}}$$

- Con una frecuencia en el estator $f_1 = 47 \text{ Hz}$, los valores de la velocidad síncrona y de las reactancias se modifican con respecto a sus valores a la frecuencia asignada de 50 Hz (estos últimos aparecen en el enunciado y se han obtenido en el apartado "Cuestiones preliminares"). Por lo tanto, ahora estas magnitudes pasan a valer:

$$(1): \quad n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 47}{2} \Rightarrow \underline{n_1 = 1410 \text{ r.p.m.}}$$

$$(1): \quad \Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{2\pi \cdot 47}{2} \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 147,65 \text{ rad/s}}$$

$$X_1 = 2\pi f_1 L_{d1} = 2\pi \cdot 47 \cdot 0,00191 \Rightarrow \underline{X_1 = 0,564 \Omega}$$

$$X_{cc} = 2\pi f_1 L_{cc} = 2\pi \cdot 47 \cdot 0,00382 \Rightarrow \underline{X_{cc} = 1,128 \Omega}$$

$$X_\mu = 2\pi f_1 L_\mu = 2\pi \cdot 47 \cdot 0,0777 \Rightarrow \underline{X_\mu = 22,94 \Omega}$$

- La velocidad asignada vale $n_N = 1446$ r.p.m. y el deslizamiento correspondiente se calcula mediante la relación (2):

$$(2): \quad s = \frac{1410 - 1446}{1410} \Rightarrow \underline{s = -0,0255}$$

El deslizamiento negativo indica que ahora la máquina está actuando como generador y, por lo tanto, ejerce un par de frenado en su eje.

En este estado de funcionamiento la variable auxiliar definida mediante la relación (C2) vale:

$$(C2): \quad x = \frac{0,24}{-0,0255} \Rightarrow x = -9,412 \Omega$$

Este parámetro no es una resistencia real sino una resistencia equivalente que puede tomar valores negativos, como sucede ahora.

- La corriente del rotor reducida al estator I'_2 y el par M se obtienen mediante las relaciones (C3) y (C4), respectivamente:

$$(C3): \quad I'_2 = \frac{471}{\sqrt{(0,1 - 9,412)^2 + 1,128^2}} \Rightarrow \underline{I'_2 = 50,22 \text{ A}}$$

$$(C4): \quad M = \frac{3 \cdot (-9,412)}{-147,65} 50,22^2 \Rightarrow \boxed{M = -482 \text{ Nm}}$$

- Si el convertidor consigue que al cambiar la frecuencia el campo magnético permanezca constante, la corriente de vacío debe conservar el mismo valor que en condiciones asignadas. Esto se va a comprobar usando la relación (C5):

$$(C5): \quad I_0 = \frac{471}{0,564 + 22,94} \Rightarrow \underline{I_0 = 20 \text{ A}}$$

- La corriente de fase del estator ahora se puede calcular mediante la expresión (C7) puesto que el valor absoluto del deslizamiento es pequeño:

$$(C7): \quad I_1 = \sqrt{20^2 + 50,2^2} \Rightarrow \boxed{I_1 = 54 \text{ A}}$$

Como el estator está conectado en triángulo, su corriente de línea vale:

$$\text{Conexión triángulo} \Rightarrow I_{1L} = \sqrt{3} I_1 = \sqrt{3} \cdot 54 \Rightarrow \underline{I_{1L} = 93,6 \text{ A}}$$

- En el frenado regenerativo de esta máquina se obtiene que el par de frenado con 47 Hz y 471 V a la velocidad asignada vale $M = -482$ Nm y la corriente de fase del estator correspondiente vale $I_1 = 54$ A.

2. Par máximo de frenado alimentada a la tensión y frecuencia asignadas

- Ahora los valores de la tensión de fase, de la velocidad de sincronismo y de las reactancias vuelven a ser los que aparecen en el enunciado y los que se calcularon en el apartado “Cuestiones preliminares”.

Con esta alimentación la máquina deberá girar a una velocidad superior a la de sincronismo para que actúe como generador.

- El deslizamiento de par máximo actuando la máquina como generador se calcula utilizando el signo “-” en la segunda de las relaciones (16). Es evidente que este deslizamiento será igual al obtenido en el funcionamiento como motor cambiado de signo:

$$(16): \quad s'_m = -s_m \Rightarrow \underline{s'_m = -0,199}$$

La velocidad de par generador máximo se obtiene despejándola en la relación (2):

$$(2): \quad n'_m = n_1 (1 - s'_m) = 1500 \cdot (1 - (-0,199)) \Rightarrow \boxed{n'_m = 1800 \text{ r.p.m.}}$$

$$(2): \quad \Omega'_m = \Omega_1 (1 - s'_m) = 157,08 \cdot (1 - (-0,199)) \Rightarrow \Omega'_m = 188,34 \text{ rad/s}$$

Las relaciones (16) y (C2) indican que ahora el valor de la variable auxiliar será igual al obtenido en el funcionamiento como motor cambiado de signo:

$$(16) \text{ y } (C2): \quad x'_m = -x_m \Rightarrow x'_m = -1,206 \Omega$$

El par generador máximo se puede calcular mediante la relación (C4) si en ella se utiliza x'_m :

$$(C4): \quad M'_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot (-1,206)}{157,08} \frac{500^2}{(0,1 - 1,206)^2 + 1,2^2} \Rightarrow \boxed{M'_{\text{máx}} = -2162 \text{ Nm}}$$

Alternativamente, el par generador máximo también se puede calcular directamente por medio de la primera de las expresiones (16) en la que se utiliza el signo “-”:

$$(16): \quad M'_{\text{máx}} = -\frac{3}{157,08} \frac{500^2}{2 \left(-0,1 + \sqrt{0,1^2 + 1,2^2} \right)} \Rightarrow M'_{\text{máx}} = -2162 \text{ Nm}$$

- Estando la máquina alimentada con su tensión y frecuencia asignadas, su par máximo efectuando un frenado regenerativo (funcionamiento como generador) vale $M'_{\text{máx}} = -2162 \text{ Nm}$ y se produce a una velocidad $n'_m = 1800 \text{ r.p.m.}$

d) Funcionamiento como freno dinámico con la conexión triángulo-b y con $I_{1eq} = I_{1N}$

1. Tensión continua necesaria

- La conexión del estator a la red de corriente continua (c.c.) en este caso es como se indica en la Fig. C3.

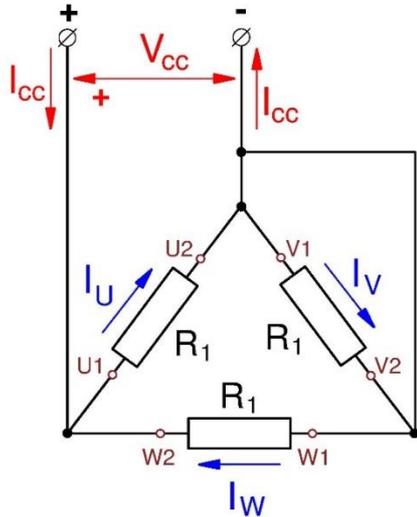


Fig. C3: Conexión triángulo-b

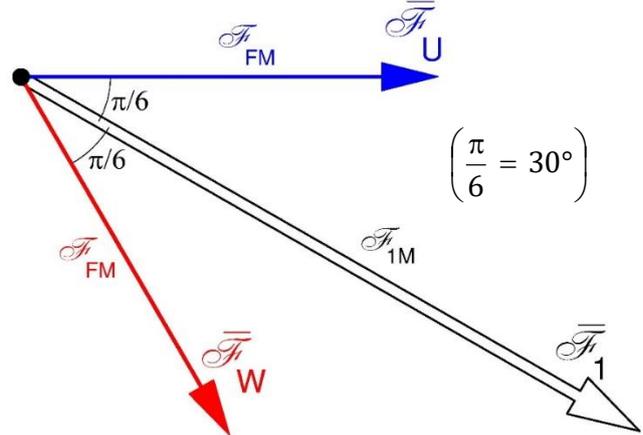


Fig. C4: F.m.m.s cuando el estator se conecta a una fuente de c.c. con la conexión triángulo-b

- Se va a analizar esta conexión siguiendo un procedimiento similar al empleado con la conexión triángulo-a en el anexo A.

En la Fig. C3 se observa que la fase V queda cortocircuitada y frente a la red de corriente continua el estator consiste en dos fases (la U y la W) en paralelo. Por lo tanto, se deduce que:

Triángulo-b:

$$R_{cc} = \frac{R_1}{2}; \quad k_R = \frac{R_{cc}}{R_1} = \frac{1}{2} \quad (C12)$$

$$I_U = I_F; \quad I_V = 0; \quad I_W = -I_F \quad (C13)$$

$$I_F = \frac{I_{cc}}{2}; \quad k_F = \frac{I_F}{I_{cc}} = \frac{1}{2} \quad (C14)$$

Las dos fases U y W tienen corrientes de igual valor (aunque de signos contrarios) y se ha elegido la fase U como la fase F; es decir, la fase por donde circula la corriente mayor. De (C13) se deduce que los fasores de f.m.m. de las fases son así:

$$\mathcal{F}_{UM} = \mathcal{F}_{FM}; \quad \mathcal{F}_{VM} = 0; \quad \mathcal{F}_{WM} = \mathcal{F}_{FM} \quad (C15)$$

$$\overline{\mathcal{F}}_U > 0; \quad \overline{\mathcal{F}}_V = 0; \quad \overline{\mathcal{F}}_W < 0 \quad (C16)$$

Con los resultados obtenidos en las relaciones (C15) y (C16) y de la Fig. A1, se deduce que los fasores espaciales de f.m.m. en la conexión triángulo-b (Fig. C3) son como se muestra en la Fig. C4. El fasor de f.m.m. total $\overline{\mathcal{F}}_1$ se obtiene sumando vectorialmente los fasores de f.m.m. de las fases y su módulo es \mathcal{F}_{1M} :

$$\mathcal{F}_{1M} = 2 \mathcal{F}_{FM} \left(\cos \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \mathcal{F}_{FM} \quad (C17)$$

Teniendo presente ahora que \mathcal{F}_{FM} se obtiene mediante la fórmula (A1) y que se verifica la relación (C14) se deduce que:

$$\mathcal{F}_{1M} = \sqrt{3} C_F I_F = \frac{\sqrt{3}}{2} C_F I_{CC} \quad (C18)$$

Por otra parte, el valor máximo de la f.m.m. total producida por una corriente trifásica cuyo valor eficaz sea I_{1eq} se obtiene mediante la fórmula (A16), que proviene de la expresión (A4). Este valor máximo también vale \mathcal{F}_{1M} . Identificando (C18) con (A16), finalmente se llega a:

$$k_{eq} = \frac{I_{1eq}}{I_{CC}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (C19)$$

Disponiendo de la Tabla A.I no era preciso realizar este análisis, pues de ella se pueden obtener directamente los parámetros k_R y k_{eq} (relaciones (C12) y (C19)).

- En el motor que se está estudiando, la corriente I_{CC} que se demanda a la red de c.c. (Fig. C3) se puede obtener mediante el parámetro k_{eq} . Este parámetro viene dado por la relación (C19) o, alternativamente, por la tabla A.I:

$$(C19) \text{ o (A.I):} \quad k_{eq} = \frac{75,5}{I_{CC}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \underline{I_{CC} = 184,9 \text{ A}}$$

La resistencia equivalente R_{CC} del estator se puede obtener mediante el parámetro k_R . Este parámetro viene dado por la relación (C12) o, alternativamente, por la tabla A.I:

$$(C12) \text{ o (A.I):} \quad k_R = \frac{R_{CC}}{0,1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{R_{CC} = 0,05 \Omega}$$

Finalmente, de la relación (A7) se deduce que:

$$(A7): \quad 184,9 = V_{CC}/0,05 \Rightarrow \boxed{V_{CC} = 9,25 \text{ V}}$$

- La tensión continua con que hay que alimentar esta máquina, si su estator tiene la conexión triángulo-b, para que $I_{1eq} = 75,5 \text{ A}$ vale $V_{CC} = 9,25 \text{ V}$.

2. Pares y otras magnitudes

- A la velocidad asignada la variable auxiliar definida por la relación (C9) tiene este valor:

$$(C9): \quad y_N = \frac{0,24}{2 \cdot 151,42} \Rightarrow y_N = 0,0007925 \frac{\Omega \cdot s}{\text{rad}}$$

Se va a denominar L' a esta inductancia:

$$L' = L'_{d2} + L_{\mu} \Rightarrow L' = 0,00191 + 0,0777 \Rightarrow L' = 0,07961 \text{ H}$$

La corriente del rotor reducida al estator I'_2 y el par de frenado se pueden obtener mediante las relaciones (C10) y (C11), respectivamente:

$$(C10): \quad I'_2 = \frac{0,0777}{\sqrt{0,0007925^2 + 0,07961^2}} 75,5 \Rightarrow I'_2 = 73,68 \text{ A}$$

$$(C11): \quad M = -(3 \cdot 2 \cdot 0,0007925) \cdot 73,68^2 \Rightarrow M = -25,8 \text{ Nm}$$

- Cuando la máquina suministra el máximo par de frenado dinámico su circuito magnético está saturado y esto, según indica el enunciado, hace que la inductancia magnetizante L_{μ} se reduzca un 25%. respecto a su valor en condiciones asignadas. Por lo tanto, para el cálculo del par máximo se usa este nuevo valor del parámetro L_{μ} :

$$L_{\mu} = 0,75 \cdot 0,0777 \Rightarrow \underline{L_{\mu} = 0,0583 \text{ H}}$$

Luego, ahora la inductancia L' vale

$$L' = L'_{d2} + L_{\mu} \Rightarrow L' = 0,00191 + 0,0583 \Rightarrow L' = 0,06021 \text{ H}$$

La velocidad a la cual se obtiene el máximo par de frenado se obtiene mediante la relación (29) en la que se debe usar el signo “-“ (ver la Fig. 17):

$$(29): \quad \Omega_m = -\frac{-0,24}{2 \cdot 0,06021} \Rightarrow \underline{\Omega_m = 1,99 \text{ rad/s}}$$

$$(29): \quad n_m = \frac{60}{2\pi} 1,99 \Rightarrow \underline{n_m = 19 \text{ r.p.m.}}$$

- Cuando la máquina está proporcionando su máximo par de frenado dinámico, la variable auxiliar definida por (C9) vale:

$$(C9): \quad y_m = \frac{0,24}{2 \cdot 1,99} \Rightarrow y_m = 0,0603 \frac{\Omega \cdot s}{\text{rad}}$$

Luego, el par máximo durante el frenado dinámico se puede calcular empleando este valor de la variable auxiliar en la fórmula del par (C11):

$$(C11): \quad M'_{\text{máx}} = -(3 \cdot 2 \cdot 0,0603) \frac{0,0583^2}{0,0603^2 + 0,06021^2} 75,5^2 \Rightarrow$$

$$M'_{\text{máx}} = -965 \text{ Nm}$$

A este mismo resultado se podría haber llegado aplicando directamente la relación (28) en la que se debe usar el signo “-“ (ver la Fig. 17):

$$(28): \quad M'_{\text{máx}} = -\frac{3 \cdot 2}{2} \frac{0,0583^2}{0,06021} 75,5^2 \Rightarrow M'_{\text{máx}} = -965 \text{ Nm}$$

- En el frenado dinámico de esta máquina se obtiene que el par de frenado a la velocidad asignada vale $M = -25,8 \text{ Nm}$ y la corriente del rotor reducida al estator correspondiente vale $I'_2 = 73,7 \text{ A}$. El máximo par en este frenado dinámico vale $M'_{\text{máx}} = -965 \text{ Nm}$ y se produce a una velocidad $n'_m = 19 \text{ r.p.m.}$
- Para rematar el análisis de este frenado dinámico, seguidamente se van a estudiar varios aspectos relacionados con el nivel de **saturación magnética** de la máquina.
- Para tratar la saturación magnética de manera sencilla y práctica, lo que se hace es considerar que la máquina no se satura si su velocidad Ω es superior a una dada Ω_{sat} (o n_{sat} , si se mide en r.p.m.) y, entonces, la inductancia magnetizante L_μ se mantiene constante. Para velocidades por debajo de Ω_{sat} la máquina se satura, tanto más cuanto más baja sea su velocidad. En este caso la inductancia L_μ no es constante y es tanto más pequeña cuanto más baja sea su velocidad. Justo en el límite, cuando la máquina gira exactamente a la velocidad Ω_{sat} , la inductancia magnetizante L_μ aún conserva el mismo valor que sin saturación.

Como valor constante de la inductancia magnetizante L_μ cuando la máquina no está saturada (es decir, cuando su velocidad Ω es igual o superior a Ω_{sat}) se suele emplear el valor de este parámetro L_μ en condiciones asignadas, que en esta máquina es $L_\mu = 0,0777 \text{ H}$.

La velocidad límite Ω_{sat} depende de la corriente $I_{1\text{eq}}$ y el criterio que se suele establecer para determinarla es que la corriente $I_{0\text{eq}}$ a esta velocidad sea exactamente igual a la corriente de vacío que tiene la máquina cuando funciona conectada a una red trifásica y está en las condiciones asignadas. En este motor dicha corriente de vacío asignada vale 20 A .

Por lo tanto, partiendo de la relación (B36) se obtiene que:

$$(B36): 20 = \sqrt{\frac{\left(\frac{0,24}{2\Omega_{\text{sat}}}\right)^2 + 0,00191^2}{\left(\frac{0,24}{2\Omega_{\text{sat}}}\right)^2 + (0,00191 + 0,0777)^2}} 75,5 \Rightarrow \underline{\Omega_{\text{sat}} = 5,51 \text{ rad/s}}$$

$$(C0): n_{\text{sat}} = \frac{60}{2\pi} 5,51 \Rightarrow \underline{n_{\text{sat}} = 52,6 \text{ r.p.m.}}$$

Luego, en esta forma de funcionamiento la máquina se satura para velocidades inferiores a 52,6 r.p.m.

- Alimentada con tensión continua y a la velocidad asignada esta máquina tiene estos valores de las magnitudes que varían con la velocidad (y con la pulsación del rotor ω_2):

$$(25): \omega_2 = 2 \cdot 151,42 \Rightarrow \omega_2 = 302,84 \text{ rad/s}$$

$$(25): f_2 = \frac{302,84}{2\pi} \Rightarrow \underline{f_2 = 48,2 \text{ Hz}}$$

$$(B23): X'_{2s} = 302,84 \cdot 0,00191 \Rightarrow X'_{2s} = 0,578 \Omega$$

$$(B23): X_{\mu s} = 302,84 \cdot 0,0777 \Rightarrow X_{\mu s} = 23,53 \Omega$$

$$(B23): E'_{0s} = 23,53 \cdot 75,5 \Rightarrow \underline{E'_{0s} = 1776,5 \text{ V}}$$

$$(Fig. B2): \text{tg } \varphi_0 = \frac{X'_{2s} + X_{\mu s}}{R'_2} \Rightarrow \text{tg } \varphi_0 = \frac{0,578 + 23,53}{0,24} = 100 \Rightarrow \underline{\varphi_0 = 89,4^\circ}$$

Como el ángulo φ_0 es prácticamente igual a 90° , la f.m.m. del rotor es desmagnetizante y su efecto se opone directamente al de la f.m.m. del estator. Además, como la corriente del rotor reducida al estator I'_2 es alta, de un valor muy cercano al de $I_{1\text{eq}}$, resulta que el campo magnético total será pequeño. Esta situación es la mostrada en el diagrama de la Fig. B5 donde los fasores $\bar{I}_{1\text{eq}}$ e \bar{I}'_2 están en fase y, entonces, la segunda de las relaciones(B34) se convierte en una resta aritmética:

$$(B34): I_{0\text{eq}} \approx I_{1\text{eq}} - I'_2 \Rightarrow I_{0\text{eq}} \approx 75,5 - 73,7 \Rightarrow I_{0\text{eq}} \approx 1,8 \text{ A}$$

Esto se puede comprobar calculando la corriente $I_{0\text{eq}}$ de forma más exacta mediante la relación (B36). Para ello se introducen las variables y_N y L' en (B36):

$$(B36): I_{0\text{eq}} = \sqrt{\frac{0,0007925^2 + 0,00191^2}{0,0007925^2 + 0,07961^2}} 75,5 \Rightarrow \underline{I_{0\text{eq}} = 2 \text{ A}}$$

Esta corriente I_{0eq} (2 A) es muy inferior a la corriente de vacío asignada (20 A), lo que ratifica que en este estado el campo magnético es muy bajo y la máquina no se satura. A esta misma conclusión se puede llegar observando que la velocidad asignada n_N (1446 r.p.m.) es bastante mayor que la velocidad límite de inicio de la saturación n_{sat} (52,6 r.p.m.).

- Alimentada con tensión continua y a la velocidad de par máximo esta máquina tiene estos valores de las magnitudes que varían con la velocidad (y con la pulsación del rotor ω_2):

$$(25): \quad \omega_2 = 2 \cdot 1,99 \Rightarrow \omega_2 = 3,98 \text{ rad/s}$$

$$(25): \quad f_2 = \frac{3,98}{2\pi} \Rightarrow \underline{f_2 = 0,63 \text{ Hz}}$$

$$(B23): \quad X'_{2s} = 3,98 \cdot 0,00191 \Rightarrow X'_{2s} = 0,00760 \Omega$$

$$(B23): \quad X_{\mu s} = 3,98 \cdot 0,0583 \Rightarrow X_{\mu s} = 0,232 \Omega$$

$$(B23): \quad E'_{0s} = 0,232 \cdot 75,5 \Rightarrow E'_{0s} = 17,52 \text{ V}$$

$$(Fig. B2): \quad \text{tg } \varphi_0 = \frac{X'_{2s} + X_{\mu s}}{R'_2} \Rightarrow \text{tg } \varphi_0 = \frac{0,00760 + 0,232}{0,24} = 1 \Rightarrow \underline{\varphi_0 = 45^\circ}$$

La corriente del rotor reducida al estator I'_2 vale ahora

$$(C10): \quad I'_2 = \frac{0,0583}{\sqrt{0,0603^2 + 0,06021^2}} 75,5 \Rightarrow \underline{I'_2 = 51,65 \text{ A}}$$

La corriente I_{0eq} se calcula mediante la relación (B36):

$$(B36): \quad I_{0eq} = \sqrt{\frac{0,0603^2 + 0,00191^2}{0,0603^2 + 0,06021^2}} 75,5 \Rightarrow \underline{I_{0eq} = 53,45 \text{ A}}$$

Esta corriente I_{0eq} (53,5 A) es muy superior a la corriente de vacío asignada (20 A), lo que ratifica que en este estado el campo magnético es muy alto y la máquina se satura de forma notable. A esta misma conclusión se puede llegar observando que la velocidad de par máximo n_m (19 r.p.m.) es bastante menor que la velocidad límite de inicio de la saturación n_{sat} (52,6 r.p.m.).

La saturación hace que la inductancia magnetizante L_μ ahora tenga un valor inferior a cuando la máquina funciona en las condiciones asignadas (el enunciado supone que en este estado -cuando el par de frenado dinámico es máximo- el parámetro L_μ ha reducido su valor en un 25% a causa de la saturación magnética).

VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN MOTORES ASÍNCRONOS

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

PRESENTACIÓN

Este texto muestra los principios en los que se basa la variación de la velocidad en los motores asíncronos y está pensado como introducción para un curso posterior de accionamientos eléctricos donde se analizará este tema más extensamente y con más profundidad.

Se supone que el lector ya posee unos conocimientos previos de los fundamentos de las máquinas eléctricas y del comportamiento de las máquinas asíncronas o de inducción (ver mis textos [21], [22] y [23]).

Cuando un motor cambia de velocidad pasa de un estado permanente con una velocidad dada a otro nuevo estado permanente con una velocidad distinta. En la transición entre estos dos estados la máquina está acelerando, si la nueva velocidad es mayor que la antigua, o decelerando, si la velocidad se reduce (lo cual se trata de un proceso de frenado que se estudia con más detalle en mi texto [26]).

Por lo tanto, esta transición hasta alcanzar la nueva velocidad constituye un proceso transitorio cuyo estudio exacto requiere de métodos de análisis -como la máquina generalizada o los fasores espaciales- que se salen fuera de los límites de este texto. Aquí sobre todo se estudiará cómo conseguir un nuevo estado permanente con la velocidad deseada y sólo se prestará una atención secundaria al proceso de paso de una velocidad a la otra, el cual se estudiará de forma aproximada mediante la ecuación que calcula el par en los regímenes permanentes.

Es preciso indicar que, aunque aquí no se estudien, hoy en día los métodos de análisis de los regímenes transitorios de las máquinas eléctricas y los avances en la electrónica de potencia y en los microprocesadores han permitido desarrollar sistemas de control de velocidad avanzados -como son los de control por orientación del campo o de control directo del par- que consiguen una variación rápida y precisa de la velocidad en los accionamientos donde se emplean estos motores.

CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS PARA LA VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN LOS MOTORES ASÍNCRONOS

Cuando un motor asíncrono mueve una carga mecánica en régimen permanente la velocidad se mantiene constante, lo que significa que hay un equilibrio entre el par motor M proporcionado por la máquina asíncrona y el par resistente M_r de la carga. En consecuencia, el sistema motor-carga permanece en un *punto de funcionamiento* en el que se verifica la siguiente igualdad:

$$\text{Punto de funcionamiento: } M = M_r \quad (1)$$

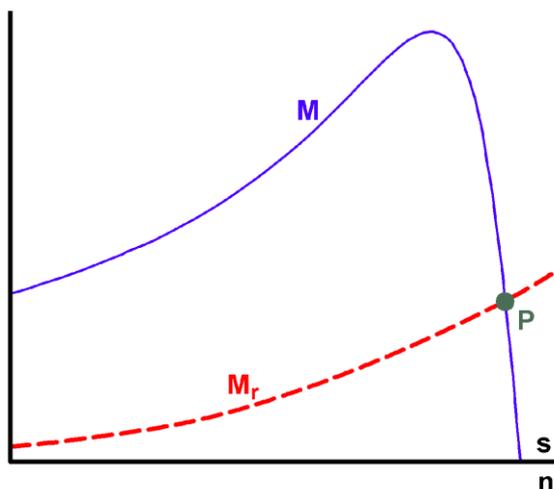


Fig. 1: Punto de funcionamiento P del sistema formado por un motor de inducción, que proporciona el par M, y de una carga mecánica, cuyo par resistente es M_r

En la Fig. 1 se han representado sobre los mismos ejes de coordenadas las curvas par-velocidad del motor y de la carga. El punto de funcionamiento del sistema (P en la Fig. 1) será el punto de corte de ambas curvas y el sistema girará a la velocidad correspondiente a dicho punto.

De lo anterior se deduce que si se desea modificar la velocidad de este sistema motor-carga, lo que hay que hacer es cambiar su punto de funcionamiento de forma que se produzca a la velocidad buscada. Para ello se puede actuar sobre la curva del par motor o sobre la curva del par resistente (por ejemplo, cerrando parcialmente la válvula de entrada de agua cuando la carga mecánica es una bomba). Aquí se van a estudiar los sistemas que permiten actuar sobre el par motor para conseguir la velocidad deseada.

Al igual que en el resto de mis textos, una velocidad de giro se va a representar mediante la letra n si está medida en revoluciones por minuto (r.p.m.) y mediante la letra Ω si se mide en radianes por segundo (rad/s).

En un motor asíncrono trifásico el campo magnético en el entrehierro gira a una velocidad de n_1 r.p.m. o Ω_1 rad/s que se denomina *velocidad síncrona* o *velocidad de sincronismo*:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} \quad \Omega_1 = \frac{2\pi f_1}{p} \quad (2)$$

En las expresiones anteriores f_1 es la frecuencia de las corrientes que circulan por el estator y p es el número de pares de polos del motor asíncrono.

La velocidad n (en r.p.m.) o Ω (en rad/s) a la que gira el motor es distinta de la velocidad de sincronismo y se define la magnitud adimensional *deslizamiento* s mediante esta relación:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{\Omega_1 - \Omega}{\Omega_1} \quad (3)$$

Combinando las expresiones (2) y (3) se obtiene que:

$$n = n_1 (1 - s) \qquad \Omega = \Omega_1 (1 - s)$$

$$n = n_1 (1 - s) = \frac{60 f_1}{p} (1 - s) \qquad (4)$$

Esta relación indica que se puede regular la velocidad de un motor asíncrono modificando su número de polos ($2p$), la frecuencia de las corrientes del estator (f_1) o el deslizamiento (s). Esto da lugar a los diferentes sistemas de variación de la velocidad que se van a analizar seguidamente y que se resumen en la Fig. 2.

Variación de velocidad

$$n = n_1 (1 - s) = \frac{60 f_1}{p} (1 - s)$$

Hay tres métodos básicos de variar la velocidad de un motor asíncrono, cada uno de los cuáles se subdivide en otros varios:

- 1. Modificación del número de polos $2p$ (sólo máquinas de jaula de ardilla).**
 - a. Devanados independientes con distintos números de polos.
 - b. Conexión Dahlander.
 - c. Modulación de la amplitud polar (PAM).
- 2. Modificación de la frecuencia f_1 del estator.**
 - a. Convertidor de frecuencia actuando como fuente de tensión.
 - b. Convertidor de frecuencia actuando como fuente de corriente.
- 3. Modificación del deslizamiento s**
 - a. Mediante la tensión V_1 del estator.
 - b. Mediante resistencias en serie con el rotor.
 - c. Por inyección de una f.e.m. al rotor. } *Sólo máquinas de rotor bobinado*

Fig. 2: Resumen de los sistemas de variación de velocidad en un motor asíncrono

VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD MODIFICANDO EL NÚMERO DE POLOS

El cambio del número de polos no permite ajustar la velocidad n del motor de forma exacta, ya que lo que se modifica es la velocidad de sincronismo n_1 (ver la relación (2)) y no se controla el deslizamiento s (ver la relación (4)).

La variación de velocidad cambiando el número de polos únicamente permite alcanzar unos pocos valores (hasta cuatro) de velocidad de sincronismo diferentes, ya que el número de pares de polos p sólo puede adoptar valores enteros y, en consecuencia, no se puede variar de forma continua.

Los devanados del estator y del rotor de un motor asíncrono deben tener el mismo número de polos. Por lo tanto, estos métodos exigen modificar el número de polos en ambos devanados.

En una jaula de ardilla las corrientes en las barras se originan por inducción electromagnética y dan lugar a un campo magnético del mismo número de polos que el que actúa sobre ella. Es decir, un rotor de jaula de ardilla adapta automáticamente su número de polos al del estator y, de esta manera, ambos devanados siempre tienen el mismo número de polos. Por lo tanto, los motores con modificación del número de polos son siempre de jaula de ardilla y en ellos basta con cambiar el número de polos del devanado del estator.

El cambio del número de polos no se utiliza en los motores de rotor devanado porque esto exigiría que el devanado del rotor también tuviera que conmutar su número de polos y complicaría enormemente el diseño y el manejo de estos motores.

Así pues, los motores asíncronos en los que se puede modificar el número de polos son máquinas de jaula de ardilla cuyo estator dispone, bien de dos devanados trifásicos independientes, cada uno de ellos con un número de polos distinto; o bien de un sólo devanado trifásico con un diseño especial que admite diferentes formas de conexión para modificar su número de polos.

En el arranque de estos motores se aprovecha el que se puede variar su velocidad y se hace siempre de forma gradual, iniciando el arranque a la velocidad más baja para luego conmutar progresivamente a las velocidades más altas. De esta manera, el arranque es más suave y da lugar a un menor calentamiento del motor (para más detalles puede consultar mi texto [27]).

Devanados independientes con distintos números de polos

Este método consiste en emplear devanados independientes en el estator, con diferentes números de polos y energizar solamente uno cada vez.

Por necesidades constructivas, el uso de devanados independientes con distintos números de polos sólo admite un máximo de dos devanados independientes.

Constructivamente los devanados van alojados en las mismas ranuras, ocupando cada uno la mitad de las mismas. Mediante un conmutador se conecta un devanado a la red, al mismo tiempo que se desconecta el otro, con lo cual en el devanado desconectado no se circula ninguna corriente por tener su circuito abierto.

Con dos bobinados independientes se desaprovecha tanto el hierro como el cobre debido a que al mismo tiempo solamente se utiliza media ranura. De esto resulta que estos motores son de bajo rendimiento, mayor tamaño y alto coste. Por esta razón, siempre que sea posible se prefiere utilizar un único devanado que sea capaz de proporcionar dos velocidades diferentes antes que dos devanados separados.

Si en cada uno de estos devanados se usa la conexión Dahlander o la PAM (que se estudian en los siguientes apartados), como mucho se pueden llegar a conseguir hasta cuatro velocidades de sincronismo diferentes (ya que cada uno de los dos devanados independientes podría proporcionar a su vez dos velocidades de sincronismo).

Conexión Dahlander

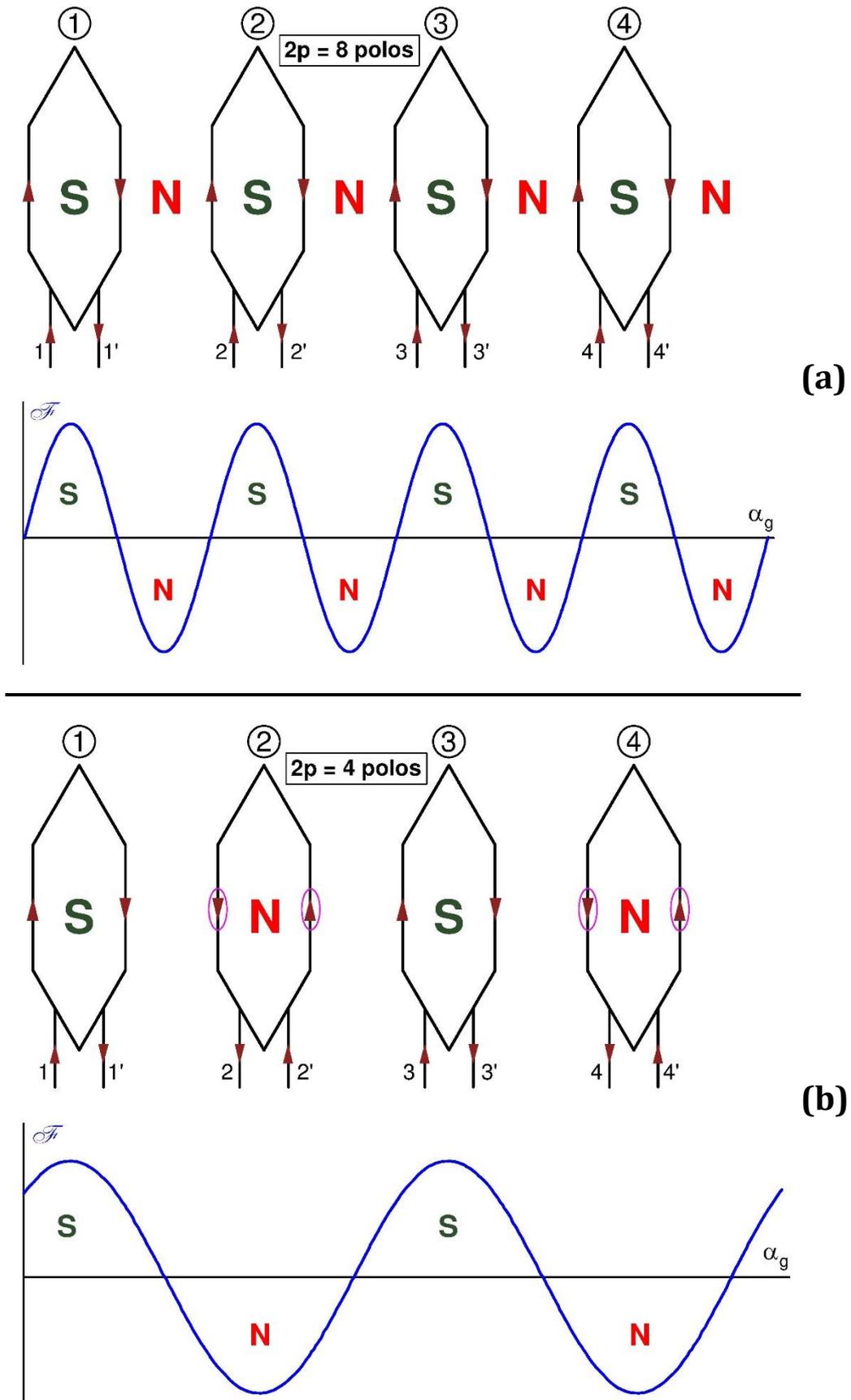


Fig. 3: Ejemplo de cómo una fase puede generar tanto 8 polos (a) como 4 polos (b)

VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN MOTORES ASÍNCRONOS

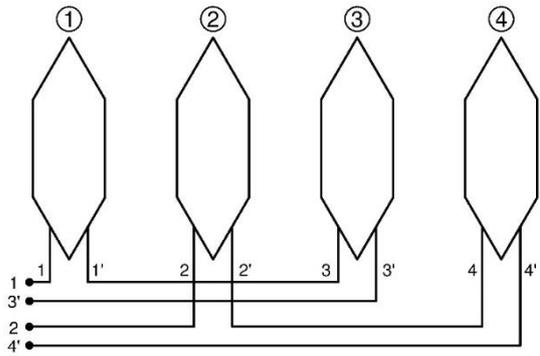
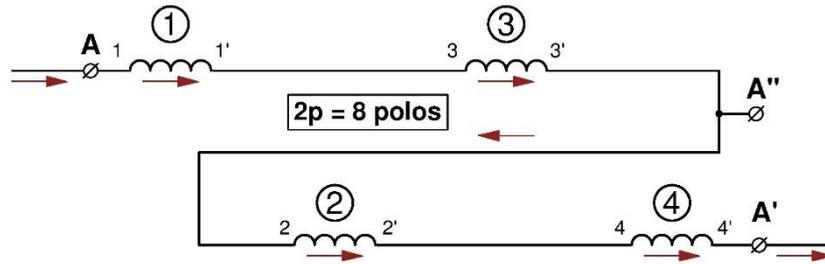
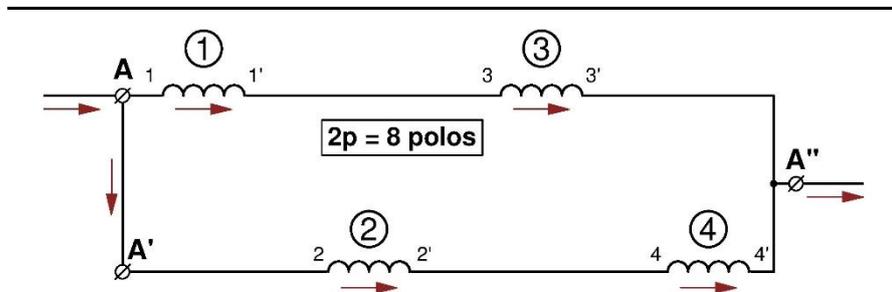
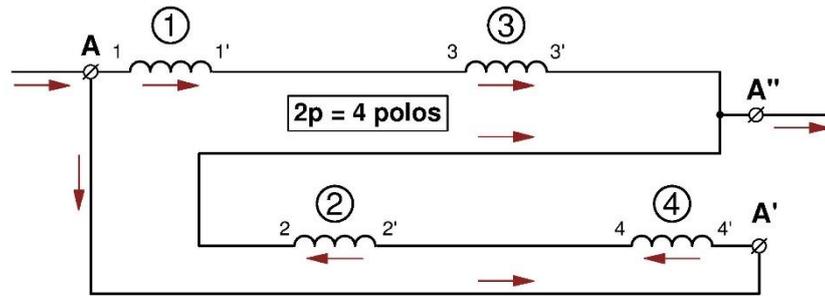


Fig. 4: En la conexión Dahlander cada fase se divide en dos mitades formadas por grupos polares en serie. Una de las mitades incluye los grupos polares pares y la otra los grupos polares impares



(a)



(b)

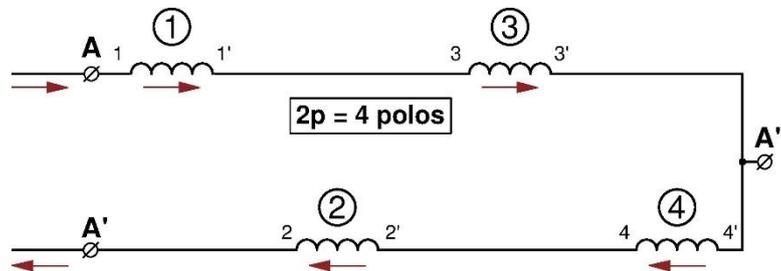


Fig. 5: Las dos mitades de una fase de un devanado Dahlander se pueden conectar entre sí de dos maneras:

- (a): La conexión serie corresponde al mayor número de polos (velocidad baja) y la conexión paralelo al menor número de polos (velocidad alta).
- (b): La conexión paralelo corresponde al mayor número de polos (velocidad baja) y la conexión serie al menor número de polos (velocidad alta).

Mediante la **conexión Dahlander** se consigue que un mismo devanado funcione con dos números de polos diferentes que siempre están en la proporción 2:1. En consecuencia, según indica la fórmula (2), mediante esta conexión se pueden obtener dos velocidades de sincronismo distintas que guardan la proporción 1:2; es decir, una es la mitad de la otra.

En los devanados de corriente alterna una fase está constituida por varios grupos polares distribuidos a lo largo de la circunferencia del entrehierro. Un *grupo polar* es un conjunto de bobinas de la misma fase conectadas en serie que están alojadas en ranuras contiguas y que actúan conjuntamente para generar los mismos polos. Los grupos polares se conectan entre sí para constituir una fase del devanado. Si el diseño del bobinado hace que cada grupo polar genere un par de polos cuando circula corriente por él, el devanado es *por polos consecuentes* y si cada grupo polar solamente origina un polo magnético, el devanado es *por polos* (para profundizar sobre los devanados de las máquinas eléctricas puede consultar mi texto [22]).

En un motor Dahlander cada fase del estator está dividida en dos mitades. Una mitad incluye todos los grupos polares pares de la fase y la otra incluye a todos los grupos polares impares. Inicialmente el devanado es por polos consecuentes y para reducir el número de polos a la mitad (y así duplicar la velocidad de sincronismo) lo que se hace en cada una de las fases del estator es cambiar el sentido de la corriente en una de sus mitades manteniendo el mismo sentido de la corriente en la otra mitad. De esta manera el devanado pasa a ser por polos.

Para comprender mejor cómo funciona la conexión Dahlander en la Fig. 3 se muestra un ejemplo en el que cada fase consta de 4 grupos polares que pueden generar 8 o 4 polos. En esta figura se ha supuesto que se observa el devanado del estator desde el entrehierro después de que la máquina haya sido cortada longitudinalmente y luego enderezada de tal forma que la superficie interior del estator pasa de ser cilíndrica a ser plana (es esta superficie la que se observa en la Fig. 3). Se han representado solo los grupos polares de una fase y se ha supuesto el caso más sencillo de que cada grupo polar está formado únicamente por una bobina. Cada bobina consta de dos lados colocados dentro de ranuras que se han representado mediante rectas verticales y de dos cabezas de bobina que se han dibujado mediante dos rectas formando una V o una Λ . Cada grupo polar se ha designado mediante un número dentro de una circunferencia ①, ②, ... y sus extremos inicial y final mediante el mismo número sin y con apóstrofe, respectivamente: 1 y 1', 2 y 2', ... Dado que el devanado no está realmente sobre una superficie plana sino sobre una superficie cilíndrica, sucede que a la derecha del grupo polar ④ lo siguiente que se encuentra es el grupo polar ①.

En la Fig. 3a se muestra que, cuando la corriente de la fase es positiva, en todos los grupos polares la corriente circula en el mismo sentido (horario) y todos ellos generan en su interior un polo magnético del mismo signo (sur), mientras que en cada uno de los espacios que separan dos grupos polares consecutivos se crea un polo de signo contrario (norte). En efecto, por ejemplo, el lado derecho de grupo polar ① y el lado izquierdo del grupo polar ② equivalen a una bobina en la que la corriente circula en sentido antihorario, por lo que origina un polo norte. Esto significa que cada grupo polar da lugar a dos polos magnéticos y el bobinado es, pues, por polos consecuentes.

En la parte inferior de la Fig. 3a se muestra la distribución espacial del primer armónico de la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) del entrehierro donde aprecia claramente que en este caso el devanado es de 8 polos. En esta figura se ha tomado el convenio de considerar positiva la f.m.m. cuando las líneas de inducción en el entrehierro se dirigen desde el rotor hacia el estator; es decir, la f.m.m. es positiva en los polos sur del estator.

En la Fig. 3b se muestra que, cuando la corriente de los grupos polares pares se invierte respecto a la situación de la Fig. 3a y la corriente de los grupos polares impares se mantiene igual que en Fig. 3a, se consigue que cada grupo polar solo origine un polo; por lo que el bobinado pasa a ser por polos y ahora se tienen 4 polos magnéticos. En efecto, en este caso sucede que, cuando la corriente de la fase es positiva, por los grupos polares la corriente circula alternativamente en sentido horario y en sentido antihorario. En consecuencia, en el interior los grupos polares van apareciendo sucesivamente polos magnéticos sur y norte y en los espacios que separan dos grupos polares consecutivos ya no se crean nuevos polos magnéticos.

En la parte inferior de la Fig. 3b se muestra la nueva distribución espacial del primer armónico de f.m.m. del entrehierro y ahí se aprecia claramente que ahora el devanado origina 4 polos magnéticos (la mitad que en la Fig. 3a) y, por lo tanto, como señala la relación (2), la velocidad de sincronismo pasa a ser el doble que en la Fig. 3a.

De todo lo anterior se deduce que para formar la fase completa lo primero que hay que hacer es montar sus dos mitades; una mitad está constituida por los grupos polares impares conectados en serie entre sí y la otra mitad la constituyen los grupos polares pares conectados en serie entre sí. A modo de ejemplo, en la Fig. 4 se muestran las dos mitades en que queda dividida la fase formada por los grupos polares de la Fig. 3.

Finalmente, la fase completa se forma uniendo en serie entre sí ambas mitades y dejando accesibles al exterior los extremos de las fases y su punto medio (donde se unen las dos mitades). De esta manera, si la fase se alimenta por ambos extremos (A y A' en la Fig. 5a y en la Fig. 5b) las dos mitades de la fase quedan conectadas en serie. Pero si se unen entre sí ambos extremos (A y A') y se alimenta la fase por uno de los extremos y el punto medio (A y A'' en la Fig. 5a y en la Fig. 5b), las dos mitades quedan conectadas en paralelo y el sentido de la corriente en una de las mitades se invierte respecto a la conexión en serie (en la Fig. 5a y en la Fig. 5b la mitad cuya corriente se invierte es la de los grupos polares pares). Por simplicidad, en la Fig. 5a y en la Fig. 5b los grupos polares (que son los mismos que en la Fig. 3 y en la Fig. 4) se representan con el símbolo que se emplea para una autoinducción en los circuitos eléctricos.

Hay dos formas de unir ambas mitades de una fase, las cuales se indican en la Fig. 5a y en la Fig. 5b. Uniendo las mitades de la fase como se indica en la Fig. 5a sucede que en la conexión en serie de ambas mitades las corrientes en los grupos polares son como en la Fig. 3a y el devanado tiene 8 polos y en la conexión en paralelo de ambas mitades las corrientes en los grupos polares son como en la Fig. 3b y el devanado tiene 4 polos. Uniendo las mitades de la fase como se muestra en la Fig. 5b sucede lo contrario, la conexión en serie da lugar a 4 polos y la conexión en paralelo origina 8 polos. Recuerde que, en este ejemplo, con 8 polos la velocidad es baja y con 4 polos la velocidad es alta (doble que la velocidad baja).

Hasta ahora se ha hablado de una sola fase, pero también hay que fijarse en cómo queda el conjunto de las tres fases del devanado del estator.

El ángulo geométrico de separación entre dos fases Δ_g debe ser tal que el ángulo eléctrico entre dos fases Δ sea igual a 120° . Un ángulo eléctrico se obtiene multiplicando el correspondiente ángulo geométrico por el número de pares de polos (p), luego:

$$\Delta = p \cdot \Delta_g \quad (5)$$

Dado que en la conexión Dahlander se tienen dos valores de p , uno doble que el otro, sucede que si para el menor valor de p el ángulo eléctrico Δ vale 120° , entonces con el mayor valor de p el desfase Δ pasa a valer $240^\circ = -120^\circ$. Así, en el ejemplo mostrado en las figuras anteriores, si el ángulo geométrico de separación es $\Delta_g = 60^\circ$ se obtiene que:

$$2p = 4 \text{ polos} \Rightarrow p = 2 \text{ pares de polos} \Rightarrow \Delta = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

$$2p = 8 \text{ polos} \Rightarrow p = 4 \text{ pares de polos} \Rightarrow \Delta = 4 \cdot 60^\circ = 240^\circ = -120^\circ$$

Esto hace que, cuando en la conexión Dahlander se conmuta el número de polos, se cambie el orden de fases en el espacio y sea preciso permutar la corriente entre dos de las tres fases para conseguir que la máquina continúe girando en el mismo sentido. En efecto, el cambio en el orden de las fases en el espacio provocaría un cambio en el sentido de giro del campo magnético si se mantuviera el mismo desfase en el tiempo entre las corrientes que alimentan a las tres fases. Si se invierte la secuencia temporal de las estas tres corrientes de fase (para lo cual basta con intercambiar las corrientes entre dos fases) se compensa dicho cambio del sentido de giro.

La designación de bornes utilizada en la Fig. 5 no está normalizada. Es en la Fig. 6a donde se muestra la designación normalizada de los bornes de un devanado trifásico con la conexión Dahlander según la norma UNE-EN 60034-8 [2]. Nótese que la letra usada en los bornes de los puntos medios de las fases U y W tienen sus letras intercambiadas para, de esta manera, realizar el cambio de la secuencia temporal de la alimentación explicado en el párrafo anterior y lograr que la máquina siga girando en el mismo sentido a ambas velocidades.

En principio las tres fases se pueden conectar entre sí en estrella o en triángulo, tanto cuando las dos mitades de cada fase están conectadas en serie como cuando lo están en paralelo. Sin embargo, la conexión en triángulo cuando las dos mitades de cada fase están en paralelo no se usa en la práctica. Se denominará conexión *doble estrella (YY)* cuando las tres fases se conectan en estrella y las dos mitades de cada fase están en paralelo. La designación *estrella (Y)* y *triángulo (D)* se reserva para cuando las dos mitades de cada fase están en serie. En la Fig. 6b, la Fig. 6c y la Fig. 6d y en la Tabla I se muestra la forma de realizar estos tres tipos de conexión.

En la Fig. 6 se ha supuesto que en la caja de bornes están accesibles los dos extremos y el punto medio de las tres fases, por lo que en total hay 9 bornes en la caja de bornes y esto permite realizar los tres tipos de conexión Y, D e YY, citadas anteriormente.

VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN MOTORES ASÍNCRONOS

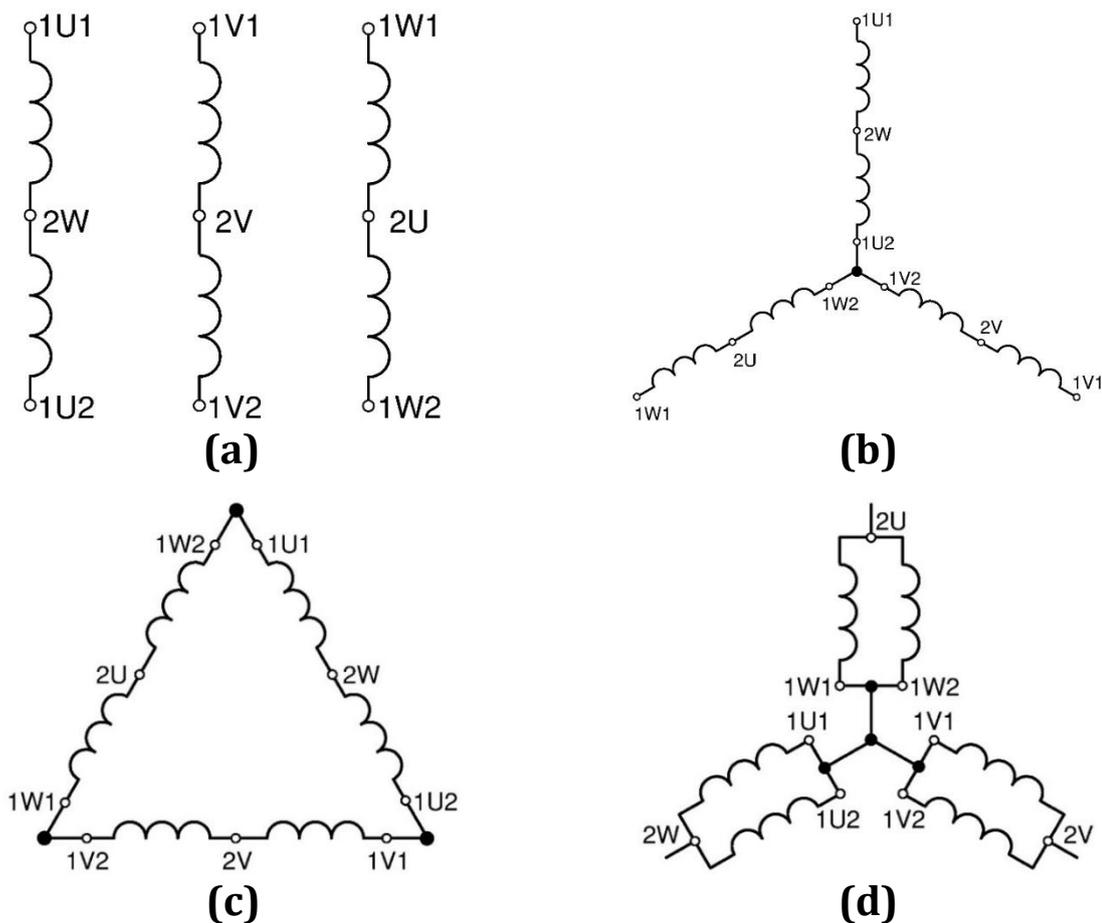


Fig. 6: **(a):** Designación normalizada (UNE-EN 60034-8 [2]) de los bornes del devanado del estator de un motor trifásico con conexión Dahlander. **(b):** Conexión estrella (Y). **(c):** Conexión triángulo (D). **(d):** Conexión doble estrella (YY).

Tabla I: Formas de conexión de un devanado trifásico Dahlander (UNE-EN 60034-8 [2])

Conexión	Alimentar por	Unir entre sí	Aislar separadamente
Estrella (Y)	1U1, 1V1, 1W1	1U2-1V2-1W2	2U, 2V, 2W
Triángulo (D)	1U1, 1V1, 1W1	1U1-1W2; 1V1-1U2; 1W1-1V2	2U, 2V, 2W
Doble estrella (YY)	2U, 2V, 2W	1U1-1V1-1W1-1U2-1V2-1W2	---

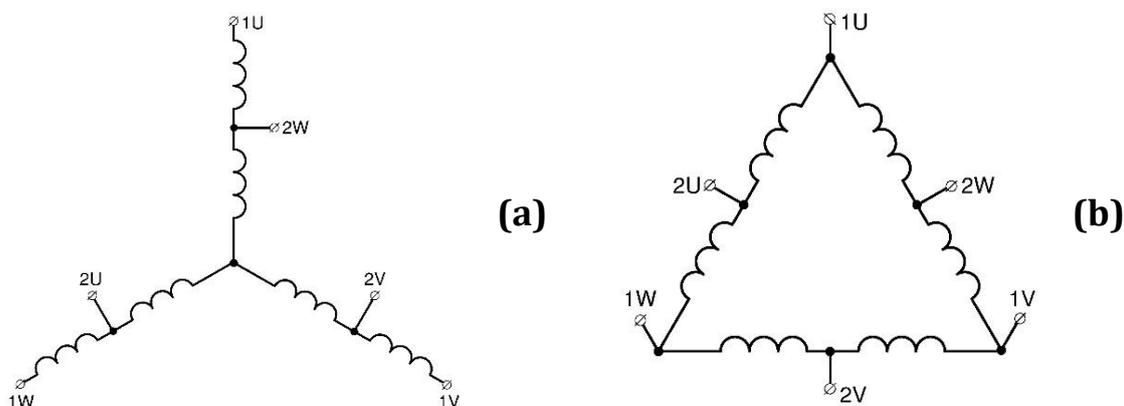


Fig. 7: Bornes de un motor Dahlander que internamente ya tiene hecha la conexión estrella (a) o triángulo (b) (UNE-EN 60034-8 [2])

Pero, en ocasiones, el fabricante deja el bobinado del estator conectado de forma permanente en estrella o en triángulo y solo deja accesibles al exterior dos bornes en cada fase, es decir 6 bornes en total. Según la norma UNE-EN 60034-8 [2] estos bornes serán, por un lado, los extremos de las fases 1U1, 1V1 y 1W1, que en la caja de bornes se designan simplemente 1U, 1V y 1W (pues no es necesario distinguirlos de los otros extremos de fase, ya que no se llevan a la caja de bornes), y, por otro lado, los bornes correspondientes a los puntos medios de las fases: 2U, 2V y 2W (Fig. 7). Luego, en este caso las conexiones en la caja de bornes se realizan así:

- En la conexión *estrella* (Fig. 7a) o *triángulo* (Fig. 7b):
 - El estator se alimenta por los bornes: 1U, 1V y 1W.
 - Se dejan aislados los bornes: 2U, 2V y 2W.
- En la conexión *doble estrella* ((Fig. 7a y Fig. 7b):
 - El estator se alimenta por los bornes: 2U, 2V y 2W.
 - Se conectan entre sí los bornes: 1U-1V-1W.

Las formas de conexión que se utilizan para las dos velocidades de un motor Dahlander se designan indicando primero la conexión para la velocidad baja y luego la conexión para la velocidad alta. La elección entre estas formas de conexión está condicionada por el tipo de carga mecánica que tiene que mover el motor. En la práctica, se utilizan estas tres conexiones (ver la Tabla II y el anexo A):

- Conexión D-YY: cuando la carga mecánica presenta un **par constante** e independiente de la velocidad, como sucede con: ascensores, grúas, ...
- Conexión YY-D: cuando la carga mecánica presenta una **potencia constante** e independiente de la velocidad; es decir, un par que disminuye con la velocidad, como sucede con: tornos, fresadoras, ...
- Conexión Y-YY: cuando la carga mecánica presenta un **par variable** que aumenta con la velocidad, como sucede con: ventiladores, bombas, ...

Tabla II: Conexiones de un motor Dahlander según el tipo de carga

Tipo de carga	Velocidad baja	Velocidad alta
Par constante	Triángulo (D)	Doble estrella (YY)
Potencia constante	Doble estrella (YY)	Triángulo (D)
Par variable	Estrella (Y)	Doble estrella (YY)

Modulación de la amplitud polar (PAM)

La modulación de la amplitud polar (*Pole-Amplitude Modulation: PAM*) fue introducida en 1957 por Rawcliffe [20], de la Universidad de Bristol, y es otro método de variar el número de polos de un motor de jaula de ardilla mediante un único devanado en el estator. La PAM permite obtener dos velocidades de sincronismo con una proporción diferente a 1:2 y se la puede considerar una generalización de la conexión Dahlander.

Al igual que en la conexión Dahlander, un devanado en el que se aplique la PAM tiene cada una de sus fases dividida en dos mitades que se pueden conectar en serie o en paralelo, lo cual permite cambiar el sentido de la corriente en la mitad de sus grupos polares. Lo que, en principio, diferencia esta conexión de la Dahlander son los grupos polares que se incluyen cada una de las dos mitades de cada fase; es decir, el criterio para seleccionar los grupos polares cuya polaridad se invierte.

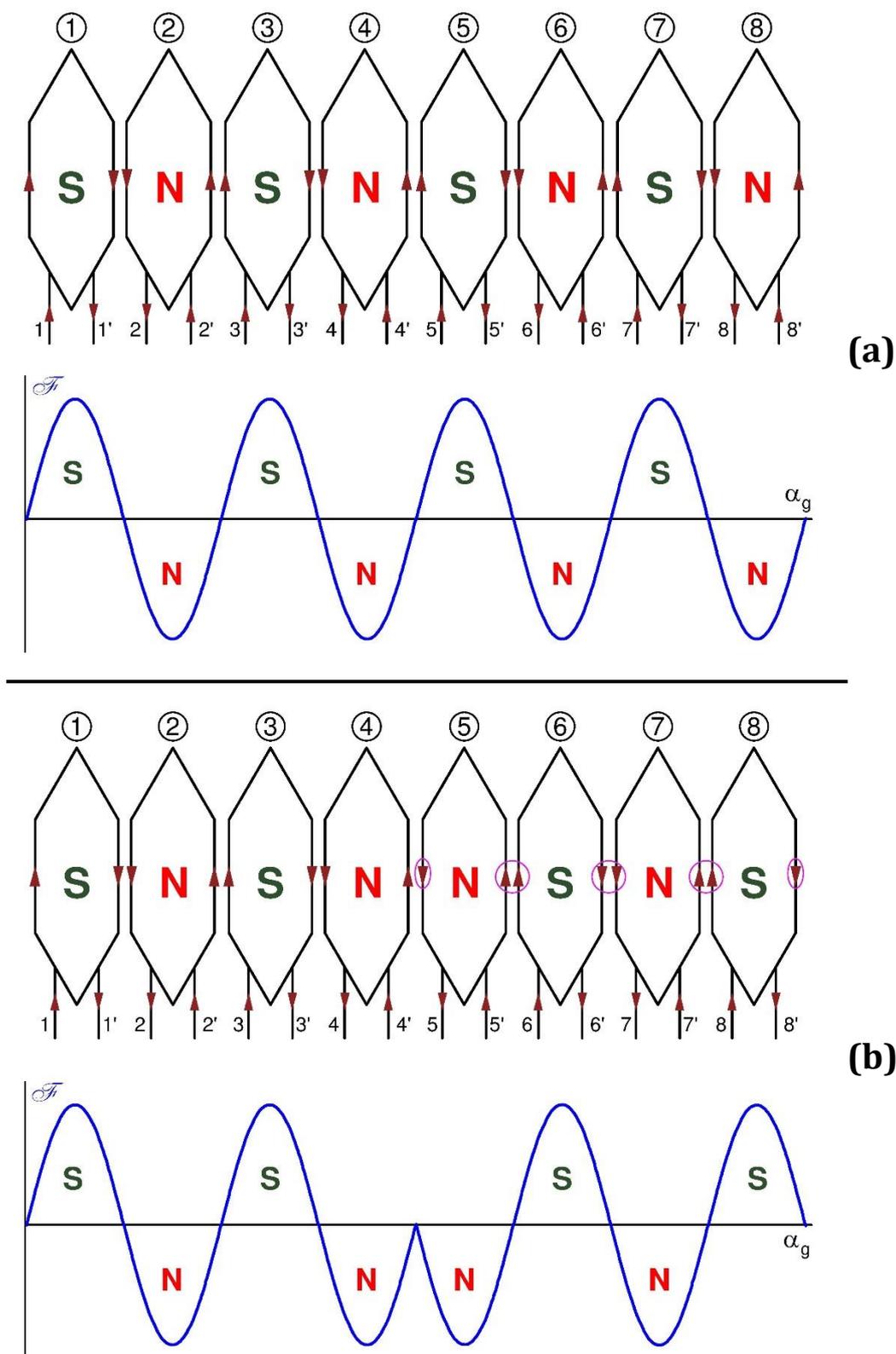


Fig. 8: Ejemplo de aplicación de la PAM a un devanado de 8 polos

Para entender cómo funciona este método se va a estudiar un ejemplo en el que se parte de un devanado por polos de 8 polos (también sería posible partir de un devanado por polos consecuentes como el de la Fig. 3a). Dado que el devanado es por polos, cada grupo polar solo genera un polo magnético que se sitúa en su interior. Por lo tanto, en este ejemplo el devanado en cada fase deberá tener 8 grupos polares y la corriente

circulará por ellos alternativamente en sentido horario y en sentido antihorario para conseguir generar polos magnéticos que van cambiando de signo sucesivamente a lo largo de la circunferencia del entrehierro. En la Fig. 8a se muestran los grupos polares de una fase de dicho devanado y la distribución del primer armónico de la f.m.m. a que dan lugar.

La variación del número de polos mediante la modulación de la amplitud polar (PAM) se consigue cambiando el sentido de la corriente en la mitad de los grupos polares siguiendo una ley periódica, que es la *función de modulación*.

En ocasiones la función de modulación también incluye zonas de valor cero (ver el artículo [20]) lo que equivale anular algunos de los grupos polares, bien desconectándolos o bien dividiendo cada uno de estos grupos polares en dos mitades que, según como se conecten, pueden sumar sus f.m.m.s o restarlas (anulándose mutuamente). Esto exige que cada fase tenga unas conexiones especiales. Aquí no se profundizará en este sistema.

Una posible modulación del devanado de 8 polos de la Fig. 8a sería invertir el sentido de la corriente cada dos grupos polares. Es decir, inicialmente los 8 grupos polares de una fase originan a lo largo de la circunferencia del entrehierro una distribución de los polos magnéticos así:

S – N – S – N – S – N – S – N

y, tras esta modulación, la distribución a lo largo del entrehierro queda así:

S – N – N – S – S – N – N – S

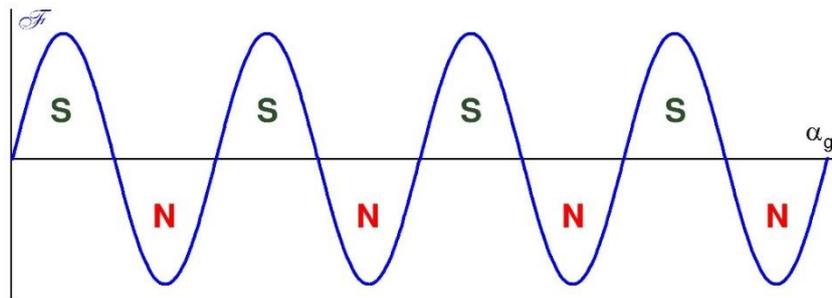
Luego, lo que se obtiene tras esta modulación es un campo magnético de 4 polos de igual forma (salvo el signo), cada uno de los cuáles es debido a la acción conjunta de dos grupos polares.

Esta modulación, por lo tanto, es realmente una conexión Dahlander en la que se ha partido de un bobinado por polos. Esta forma de realizar la conexión Dahlander es menos eficiente que cuando se parte de un devanado por polos consecuentes (que es lo que se ha explicado en la sección anterior); pero es plenamente operativa y demuestra que la conexión Dahlander se la puede considerar como un caso particular de PAM.

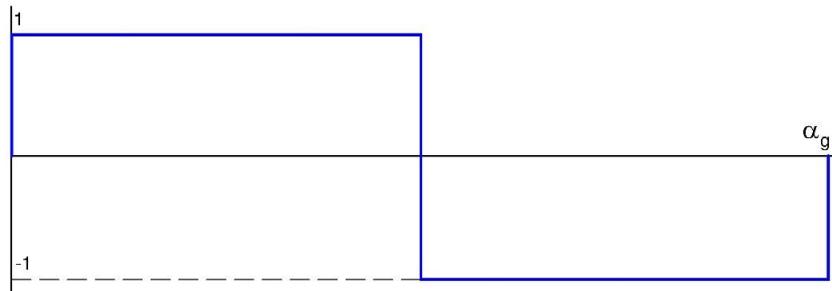
En la Fig. 8b se muestra el efecto de aplicar a una fase de 8 polos (Fig. 8a) una modulación consistente en mantener el sentido de la corriente en los 4 primeros grupos polares e invertir el sentido de la corriente en los 4 últimos. La distribución de f.m.m. que se obtiene es asimétrica: tiene 6 polos, algunos de los cuales tiene el doble de ancho que los otros.

En la Fig. 9 a, b y c se muestra que la modulación aplicada en la Fig. 8b equivale a multiplicar la f.m.m. de fase de 8 polos original (Fig. 9a) por una función de modulación (Fig. 9b) rectangular que toma un valor +1 en la primera mitad de la circunferencia del entrehierro y un valor -1 en la segunda mitad. La Fig. 9c vuelve a mostrar la f.m.m. asimétrica de 6 polos que se obtiene.

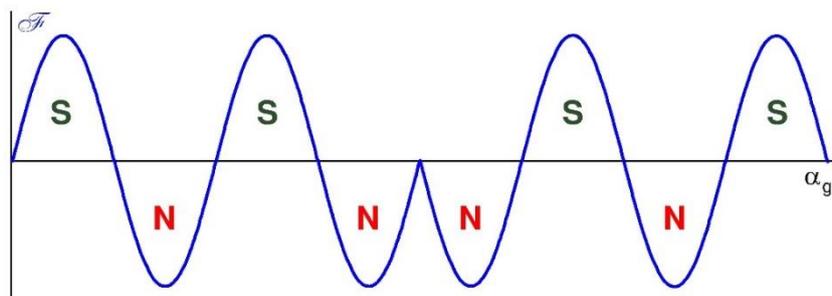
Al descomponer en serie de Fourier la distribución espacial de esta f.m.m. asimétrica (Fig. 8b y Fig. 9c) se obtiene que, además de otros armónicos de menor importancia (que se intentarán reducir lo más posible mediante las técnicas habituales en los devanados de corriente alterna: acortamiento del paso de las bobinas, inclinación de las ranuras, ...), hay dos armónicos que ejercen un efecto importante, que son de igual amplitud y que tienen 6 y 10 polos, respectivamente (Fig. 9d y Fig. 9e).



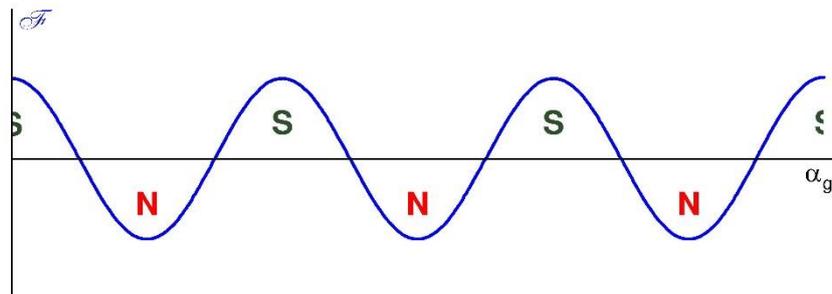
(a): F.m.m. sinusoidal de 8 polos



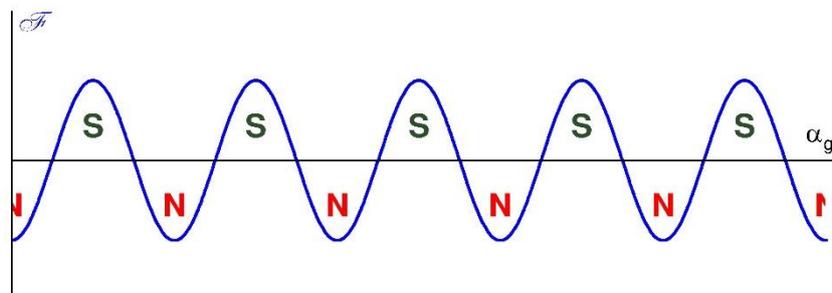
(b): Función de modulación



(c): F.m.m. de 6 polos asimétrica



(d): F.m.m. sinusoidal de 6 polos



(e): F.m.m. sinusoidal de 10 polos

Fig. 9: Aplicando la función de modulación (b) a una f.m.m. sinusoidal de 8 polos (a) se obtiene una f.m.m. asimétrica (c) que es igual a la suma de dos f.m.m.s sinusoidales de 6 polos (d) y 10 polos (e)

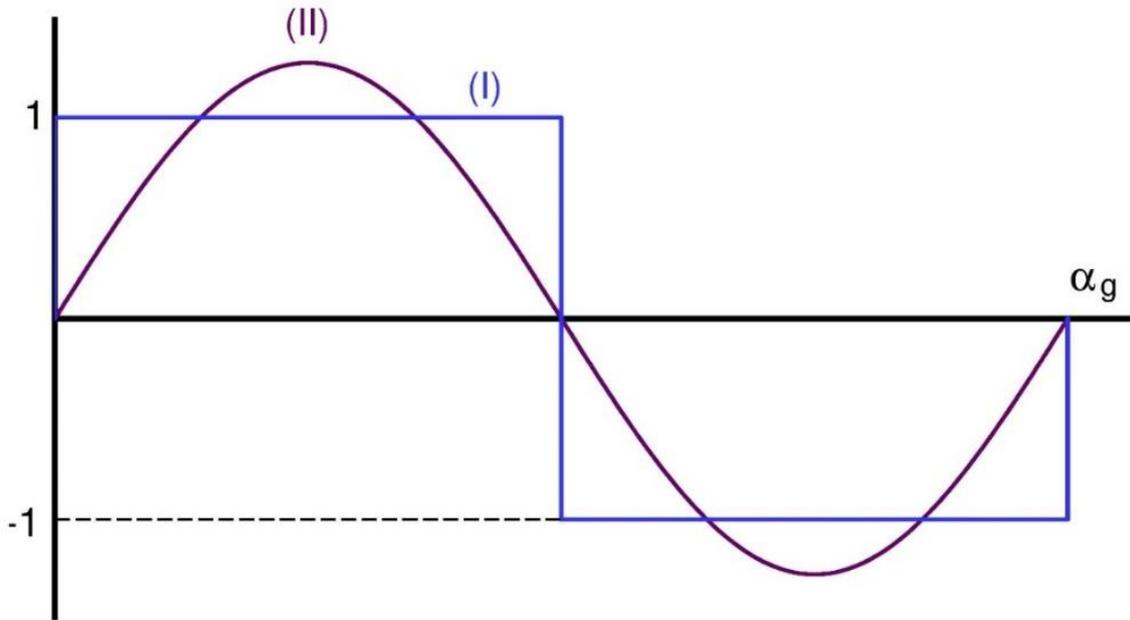


Fig. 10: Función de modulación (I) y su primer armónico (II)

Para comprender por qué está f.m.m. asimétrica originada por una fase equivale básicamente a la suma de dos armónicos de 6 y 10 polos se sustituye la función de modulación por su primer armónico (Fig. 10). Este primer armónico (que se va a denominar M_1) es una función sinusoidal de la coordenada angular en ángulos geométricos α_g así:

$$M_1 = \frac{4}{\pi} \text{sen}(r\alpha_g) \quad (6)$$

En esta expresión r es el número de inversiones de signo de la función de modulación. En el ejemplo de la Fig. 9 b y la Fig. 10 este parámetro vale $r = 1$ inversión.

Por otra parte, la fase inicialmente origina una f.m.m. sinusoidal de $2p = 8$ polos ($p = 4$ pares de polos) así:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_M(t) \text{sen}(p\alpha_g) \quad (7)$$

En la fórmula anterior $\mathcal{F}_M(t)$ es el valor máximo en el espacio de la f.m.m. Esta es una magnitud que varía en el tiempo de la misma manera que la corriente con que se alimenta la fase considerada.

Invertir la mitad de los grupos polares equivale a multiplicar la f.m.m. inicial (7) por la función de modulación, la cual se acepta que, a efectos prácticos, es igual a su primer armónico (6):

$$\mathcal{F} \cdot M_1 = \frac{4}{\pi} \mathcal{F}_M(t) \text{sen}(p\alpha_g) \text{sen}(r\alpha_g) \quad (8)$$

Teniendo en cuenta esta propiedad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)] = \left[\frac{1}{2} \cos(x - y) \right] + \left[-\frac{1}{2} \cos(x + y) \right] \quad (9)$$

la expresión (8) se convierte en:

$$\mathcal{F} \cdot M_1 = \left[\frac{4}{\pi} \frac{\mathcal{F}_M(t)}{2} \cos((p - r)\alpha_g) \right] + \left[-\frac{4}{\pi} \frac{\mathcal{F}_M(t)}{2} \cos((p + r)\alpha_g) \right] \quad (10)$$

Lo anterior indica que, tras la PAM, cada una de las tres fases del estator da lugar a dos ondas de f.m.m. de igual amplitud y de $2(p - r)$ y de $2(p + r)$ polos, respectivamente. En el ejemplo de la Fig. 8 y de la Fig. 9 se obtienen dos ondas de f.m.m. de 6 y de 10 polos, las cuales se representan en la Fig. 9d y en la Fig. 9e, respectivamente.

Ahora bien, lo que interesa es que tras la PAM se obtenga una única onda de f.m.m. sinusoidal de diferente número de polos que la f.m.m. inicial. Es decir, es preciso suprimir una de estas dos ondas de f.m.m. de la relación (10). Para ello se actúa sobre el ángulo geométrico de separación Δ_g entre dos fases consecutivas y se tiene en cuenta la relación (5) entre este ángulo geométrico y el ángulo eléctrico de separación entre fases Δ . En la expresión (5) el número de pares de polos p adopta valores diferentes según el armónico de f.m.m. que se estudie.

Es sabido que si un devanado trifásico está alimentado por un sistema trifásico equilibrado de corrientes que varían sinusoidalmente en el tiempo sucede que:

- Para aquellos armónicos espaciales de f.m.m. cuyo número de polos provoque que el ángulo eléctrico entre dos fases consecutivas valga $\Delta = 120^\circ$, la f.m.m. resultante de la acción conjunta de las tres fases es giratoria en sentido positivo.
- Para aquellos armónicos espaciales de f.m.m. cuyo número de polos provoque que el ángulo eléctrico entre dos fases consecutivas valga $\Delta = -120^\circ$ ($-120^\circ = 240^\circ$), la f.m.m. resultante de la acción conjunta de las tres fases es giratoria en sentido negativo (y habrá que cambiar la sucesión temporal de las corrientes de fase -intercambiado la corriente de dos fases- si se desea que la f.m.m. gire en sentido positivo).
- Para aquellos armónicos espaciales de f.m.m. cuyo número de polos provoque que el ángulo eléctrico entre dos fases consecutivas valga $\Delta = 0^\circ$ ($0^\circ = 360^\circ$), la f.m.m. resultante de la acción conjunta de las tres fases es nula. En efecto, para este armónico espacial las tres fases originan f.m.m.s que están en fase en el espacio. Por lo tanto, el efecto conjunto de las tres fases equivale al de una sola fase si por ella circula una corriente igual a la suma de las corrientes de las tres fases. Dado que estas corrientes están equilibradas, en todo momento su suma es nula y, consecuentemente, originan una f.m.m. total nula.

En resumen, hay que dar al ángulo geométrico Δ_g un valor tal que anule una de las dos f.m.m.s que genera cada fase tras la PAM (las cuales se indican en la relación (10)). Así, si en el ejemplo de la Fig. 8 y de la Fig. 9 se adopta este valor $\Delta_g = 120^\circ$, sucede que:

- Para la f.m.m. inicial de 8 polos ($p = 4$ pares de polos):

$$\Delta = 4 \cdot 120^\circ = 480^\circ = 480^\circ - 360^\circ = 120^\circ$$

- Para la f.m.m. de 10 polos ($p = 5$ pares de polos):

$$\Delta = 5 \cdot 120^\circ = 600^\circ = 600^\circ - (2 \cdot 360^\circ) = -120^\circ$$

- Para la f.m.m. de 6 polos ($p = 3$ pares de polos):

$$\Delta = 3 \cdot 120^\circ = 360^\circ = 0^\circ$$

Luego, en este ejemplo se consigue eliminar la f.m.m. de 6 polos y, por lo tanto, empleando la PAM es posible que este motor tenga 10 u 8 polos. Es decir, se consigue una relación del número de polos igual 5:4; lo que, según la relación (2), significa que las velocidades de sincronismo correspondientes están en la proporción 4:5 (600 y 750 r.p.m. para una frecuencia $f_1 = 50$ Hz). También se aprecia que, al igual que en la conexión Dahlander, es preciso cambiar la secuencia temporal de las corrientes con que se alimentan las fases (intercambiando las corrientes de dos fases) si se desea que el motor continúe girando en el mismo sentido cuando se conmuta su número de polos.

Tomando como base el artículo de Rawcliffe y otros [20] se van a determinar las condiciones que se deben cumplir para aplicar correctamente la PAM y eliminar una de las dos f.m.m. que aparecen tras su aplicación.

Lo primero es observar que la modulación del devanado inicial de p pares de polos se consigue cambiando el signo de la corriente en la mitad de los grupos polares. Esto obliga a que el número de inversiones r sea un divisor de p y, además, a que r sea inferior a p .

El ángulo geométrico Δ_g entre dos fases consecutivas debe ser tal que para el número de pares de polos inicial p el ángulo eléctrico Δ (dado por la relación (5)) valga 120° o -120° ($-120^\circ = 240^\circ$). Luego, se debe cumplir que:

$$p \cdot \Delta_g = k_3 \cdot 120^\circ \quad (k_3 = \text{número natural no múltiplo de 3}) \quad (11)$$

Teniendo en cuenta que un ángulo no varía si se le suma o se le resta 360° una o varias veces y que k_3 es un número natural (es decir, un número entero positivo no nulo) no múltiplo de 3, se deduce que el ángulo que resulta a la derecha del signo = de la fórmula anterior sólo puede tomar los valores 120° (si k_3 es impar) y 240° ($240^\circ = -120^\circ$) (si k_3 es par), que es lo que se desea.

Tras aplicar la PAM aparecen dos f.m.m.s, dadas por la relación (10), cuyos números de pares de polos se van a designar p' y p'' , respectivamente. La f.m.m. de p'' pares de polos es la que se va a eliminar por la acción conjunta de las tres fases. Dependiendo de que esta f.m.m. sea la de mayor o menor número de polos se deduce lo siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{Si } p'' > p \Rightarrow p' = p - r \quad p'' = p + r \quad r = p'' - p \quad p' = 2p - p'' \quad (a) \\ \text{Si } p'' < p \Rightarrow p' = p + r \quad p'' = p - r \quad r = p - p'' \quad p' = 2p - p'' \quad (b) \end{array} \quad (12)$$

La f.m.m. de p' pares de polos deberá tener un ángulo eléctrico entre dos fases de 120° o -120° ($-120^\circ = 240^\circ$). Luego, de forma similar a la expresión (11), se debe cumplir que:

$$p' \cdot \Delta_g = k'_3 \cdot 120^\circ \quad (k'_3 = \text{número natural no múltiplo de 3}) \quad (13)$$

VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN MOTORES ASÍNCRONOS

La f.m.m. de p'' pares de polos debe ser eliminada, por consiguiente, deberá tener un ángulo eléctrico entre dos fases de 0° ($0^\circ = 360^\circ$). Luego, se debe cumplir que:

$$p'' \cdot \Delta_g = k'' \cdot 360^\circ = (3k'') \cdot 120^\circ \quad (k'' = \text{número natural}) \quad (14)$$

Combinando las relaciones (11) y (13) se deduce que:

$$p' = \frac{k'_3}{k_3} p \quad (15)$$

($k_3, k'_3 = \text{números naturales no múltiplos de 3}$)

Luego, el parámetro p' es múltiplo de 3 solamente si p también lo es.

Combinando las relaciones (11) y (14) se deduce que:

$$p'' = \frac{3k''}{k_3} p \quad (16)$$

($k_3 = \text{número natural no múltiplo de 3; } k'' = \text{número natural}$)

Luego, el número de pares de polos p'' es siempre múltiplo de 3. Tras aplicar la PAM solo es posible eliminar una f.m.m. cuyo número de pares de polos sea múltiplo de tres.

De las relaciones (12) se obtiene que:

$$r = |p - p''| \quad (17)$$

De las relaciones (15), (16) y (17) se deduce que los parámetros p' y r son múltiplos de 3 únicamente cuando el número de pares de polos inicial p también lo es. Es decir, o bien los tres parámetros p, p' y r son todos múltiplos de 3, o bien ninguno de ellos es múltiplo de 3.

Combinando las relaciones (11), (12), (13) y (14) se deduce que:

$$p' \cdot \Delta_g = (2p - p'') \cdot \Delta_g = 2 \cdot (k_3 \cdot 120^\circ) - (k'' \cdot 360^\circ) = k_3 \cdot 240^\circ = k_3 \cdot (-120^\circ) \quad (18)$$

($k_3 = \text{número natural no múltiplo de 3}$)

De esta expresión y de la (13) se deduce que la f.m.m. de p' pares de polos no se va a anular (se elimina únicamente la f.m.m. de p'' pares de polos) y que su orden de fases a lo largo de la circunferencia del entrehierro es el opuesto al de la f.m.m. inicial de p pares de polos. Por lo tanto, al conmutar el número de polos hay que cambiar también la secuencia temporal de las corrientes que circulan por las fases (intercambiando las corrientes entre dos fases) si se quiere mantener el mismo sentido de giro del motor.

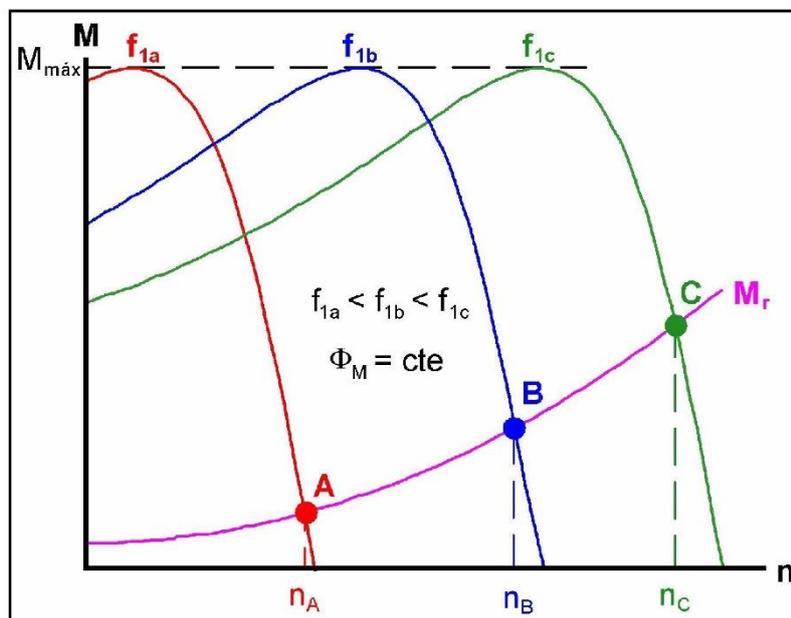
En el artículo [20] se señala que el ángulo geométrico de separación entre dos fases Δ_g usualmente vale 120° o -120° ($-120^\circ = 240^\circ$). En ese caso, la relación (11) indica que el número inicial de pares de polos p no puede ser múltiplo de 3 y, en consecuencia, los parámetros p' y r tampoco lo son. En resumen, cuando el ángulo geométrico de separación entre dos fases Δ_g vale $\pm 120^\circ$, mediante la PAM se pueden conseguir dos números de polos que nunca son múltiplos de 3 y el número de inversiones r de la función de modulación tampoco puede ser múltiplo de 3.

El artículo de Chandrasekar y otros [7] indica la posibilidad de conseguir mediante un único devanado trifásico tres diferentes números de polos (y, por lo tanto, tres velocidades síncronas distintas). Para ello cada fase no se divide en dos mitades, sino en cuatro partes. Las tres velocidades se consiguen conectando en cada fase las cuatro partes serie, formando dos ramas en paralelo o formando cuatro ramas en paralelo. Esto aumenta el número de bornes en la caja de bornes y complica la conmutación del número de polos. Por estas razones, en la práctica este método no se suele emplear.

VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD MODIFICANDO LA FRECUENCIA DEL ESTATOR

Variación de velocidad modificando la frecuencia f_1 del estator (1)

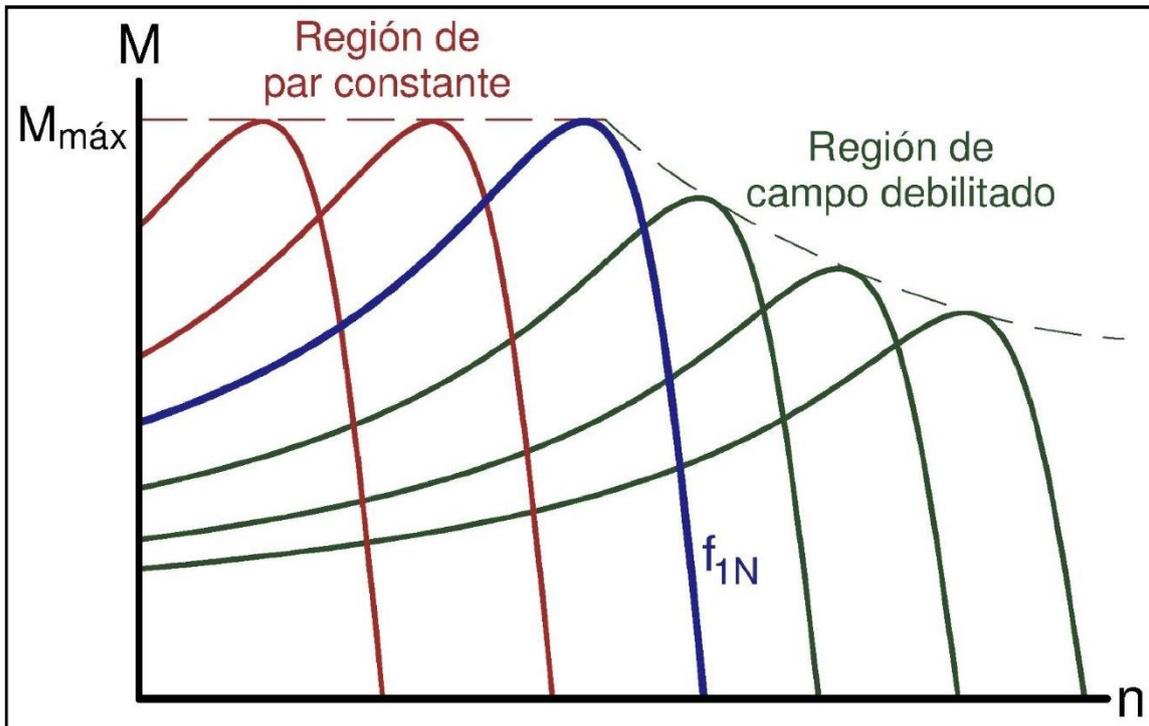
Se pretende variar la frecuencia f_1 (con lo que se modifica la velocidad síncrona n_1) manteniendo constante el flujo por polo Φ_M . De esta manera, para todas las frecuencias la máquina proporciona el mismo par (el par asignado M_N) si la intensidad es la asignada I_{1N} y también conserva el mismo par máximo $M_{m\acute{a}x}$ (ver mi texto [24] y el anexo C en la página 39 y siguientes).



Variación de velocidad modificando la frecuencia f_1 del estator (2)

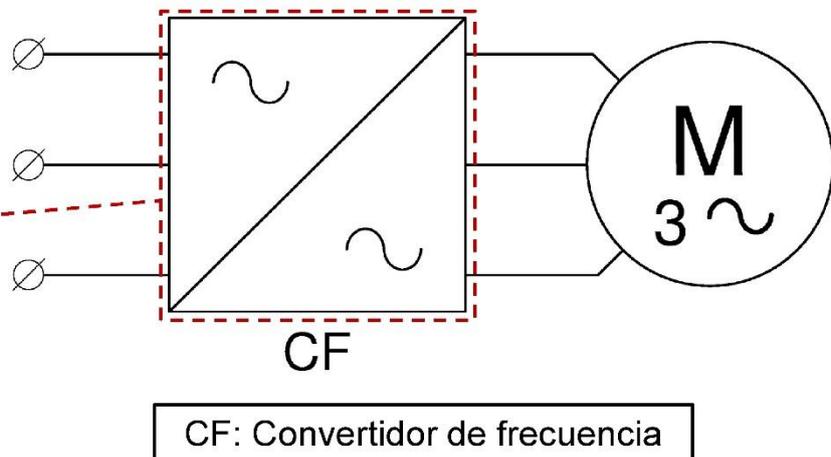
- Para frecuencias f_1 superiores a la asignada f_{1N} la f.e.m. E_1 sería mayor que la asignada ($E_1 = 4,44 N_1 \xi_{b1} f_1 \Phi_M$) y, consecuentemente, también la tensión V_1 sería superior a la tensión asignada V_{1N} , lo que podría resultar peligroso.
- Por consiguiente, para frecuencias f_1 por encima de la asignada f_{1N} ya no se mantiene el flujo Φ_M constante sino que se deja constante la tensión V_1 . Esta zona de funcionamiento se denomina **de campo debilitado**.
- Esto hace que el flujo y el par máximo disminuyan a medida que aumenta la frecuencia.
- Cuando f_1 es menor que la frecuencia asignada f_{1N} la máquina trabaja en la región de par constante (y de flujo constante) y cuando trabaja por encima de f_{1N} la máquina está en la región de campo debilitado (con V_1 constante).

Variación de velocidad modificando la frecuencia f_1 del estator. Curva de par



Convertidor o variador de frecuencia

Fuente: Wikimedia Commons
Autor: J. C. Cowie



Tipos de convertidores o variadores de frecuencia para la regulación de velocidad por variación de la frecuencia del estator f_1 :

1. Convertidor de frecuencia actuando como fuente de tensión.

- En lazo abierto de velocidad.
- En lazo cerrado de velocidad.
- Sin frenado regenerativo.
- Con frenado regenerativo.

2. Convertidor de frecuencia actuando como fuente de corriente.

(Siempre es en lazo cerrado de velocidad y admite el frenado regenerativo)

Convertidor de frecuencia actuando como fuente de tensión

$$E_1 = 4,44 N_1 \xi_{b1} f_1 \Phi_M \Rightarrow \Phi_M = \text{cte} \rightarrow \frac{E_1}{f_1} = \text{cte}$$

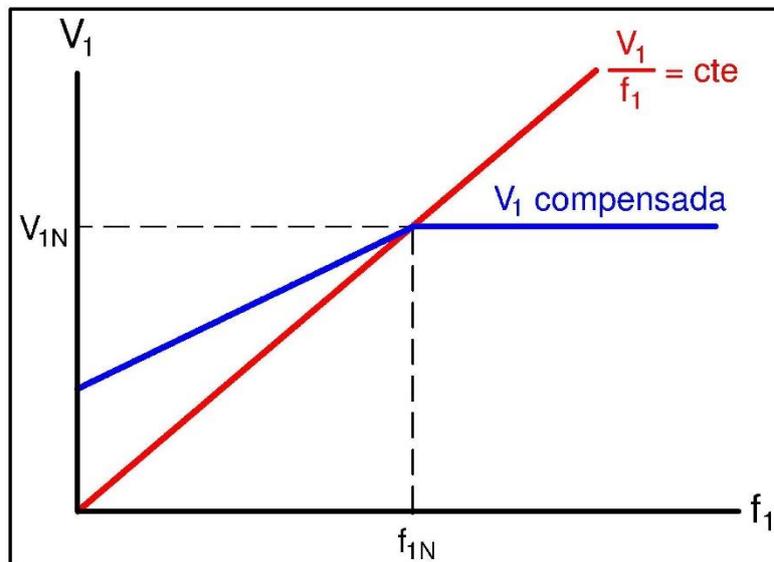
$$\bar{E}_1 = \bar{V}_1 - \bar{I}_1 (R_1 + j X_1) = \bar{V}_1 - \bar{I}_1 \bar{Z}_1$$

- Si el convertidor de frecuencia actúa como fuente de tensión y se quiere mantener constante el flujo Φ_M para todas las frecuencias por debajo de f_{1N} , hay que variar la tensión V_1 de forma que se mantenga constante el cociente E_1/f_1 .
- Para conseguir que el cociente E_1/f_1 fuera exactamente constante habría que variar E_1 no sólo con f_1 sino también con la corriente I_1 .
- Usualmente la caída de tensión en Z_1 es pequeña frente a V_1 si el deslizamiento s no es grande y, por consiguiente, $E_1 \approx V_1$. Por lo tanto, en estas circunstancias, se puede adoptar esta aproximación:

$$\Phi_M = \text{cte} \rightarrow \frac{V_1}{f_1} = \text{cte}$$

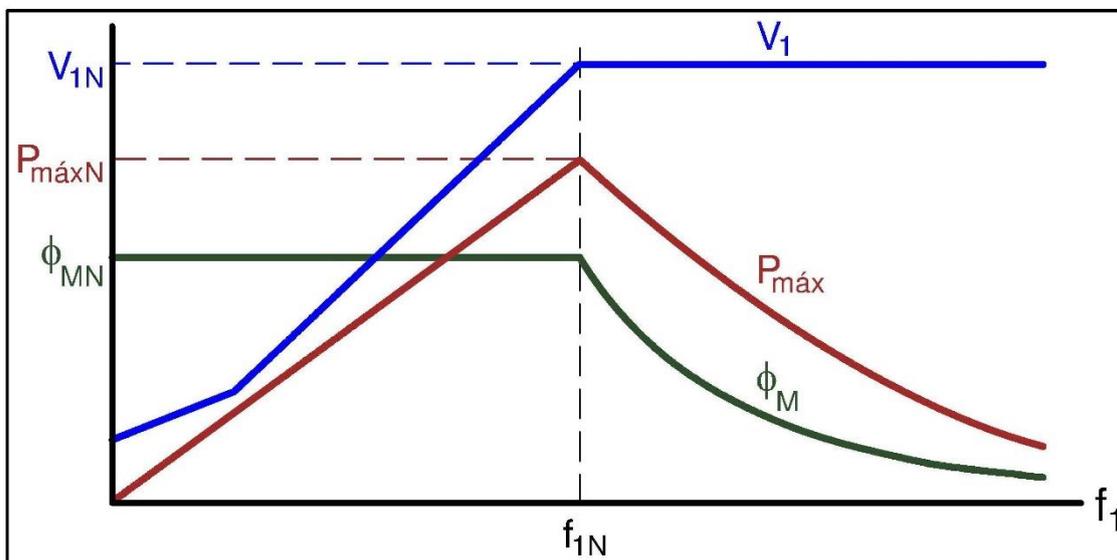
Compensación de la tensión a bajas frecuencias

- A frecuencias pequeñas la f.e.m. E_1 es pequeña y, en consecuencia, la caída de tensión en Z_1 deja de ser despreciable frente a E_1 .
- Esto hace que, a bajas frecuencias, para que Φ_M sea constante la tensión V_1 deba tener un valor mayor que el que se obtiene con la aproximación $V_1/f_1 = \text{cte}$.



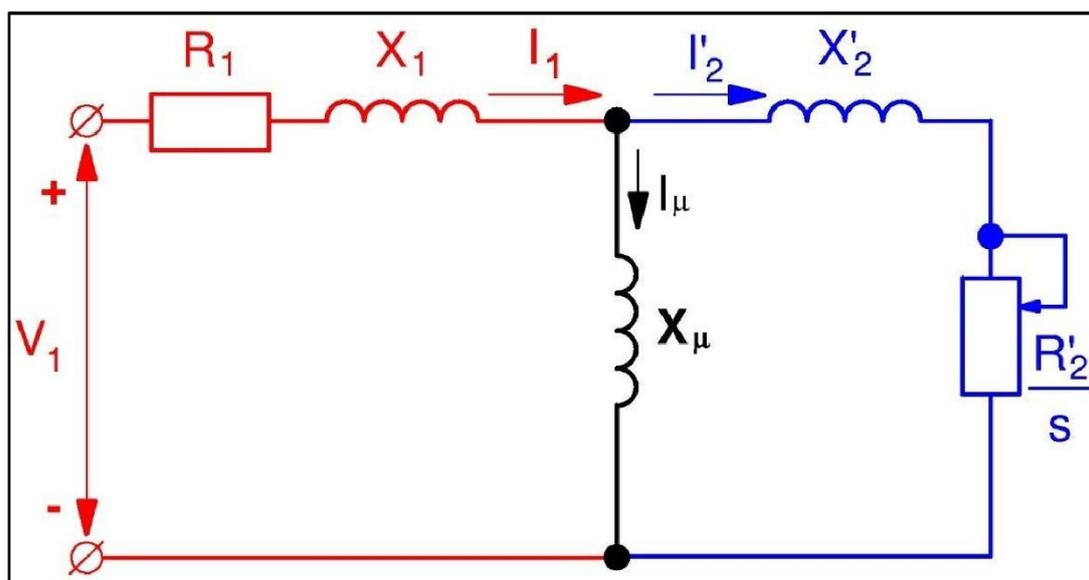
- Para tener esto en cuenta de una forma aproximada –lo que permite usar un convertidor de frecuencia más barato– se aumenta el valor de V_1 a bajas frecuencias siguiendo una ley sencilla (usualmente lineal). En las figuras adjunta y siguiente se muestran dos de las formas de como se hace esto.

Convertidor de frecuencia actuando como fuente de tensión con compensación de la tensión a bajas frecuencias



En esta figura se muestra que para frecuencias por encima de f_{1N} la tensión V_1 se mantiene constante, lo que hace que el flujo Φ_M ya no sea constante y se vaya debilitando a medida que aumenta la frecuencia f_1 .

Circuito equivalente de un motor



Circuito equivalente de un motor asíncrono trifásico en el que se ha despreciado la resistencia de pérdidas en el hierro R_{Fe} .

Convertidor de frecuencia actuando como fuente de corriente

- La estrategia para mantener el flujo Φ_M constante –para frecuencias por debajo de f_{1N} – es actuar sobre la corriente I_1 de forma que la corriente de excitación I_μ se conserve constante.
- Del circuito equivalente de un motor (ver la figura anterior y mi texto [24]) se deduce que la ley de variación de I_1 con f_1 para mantener I_μ constante es:

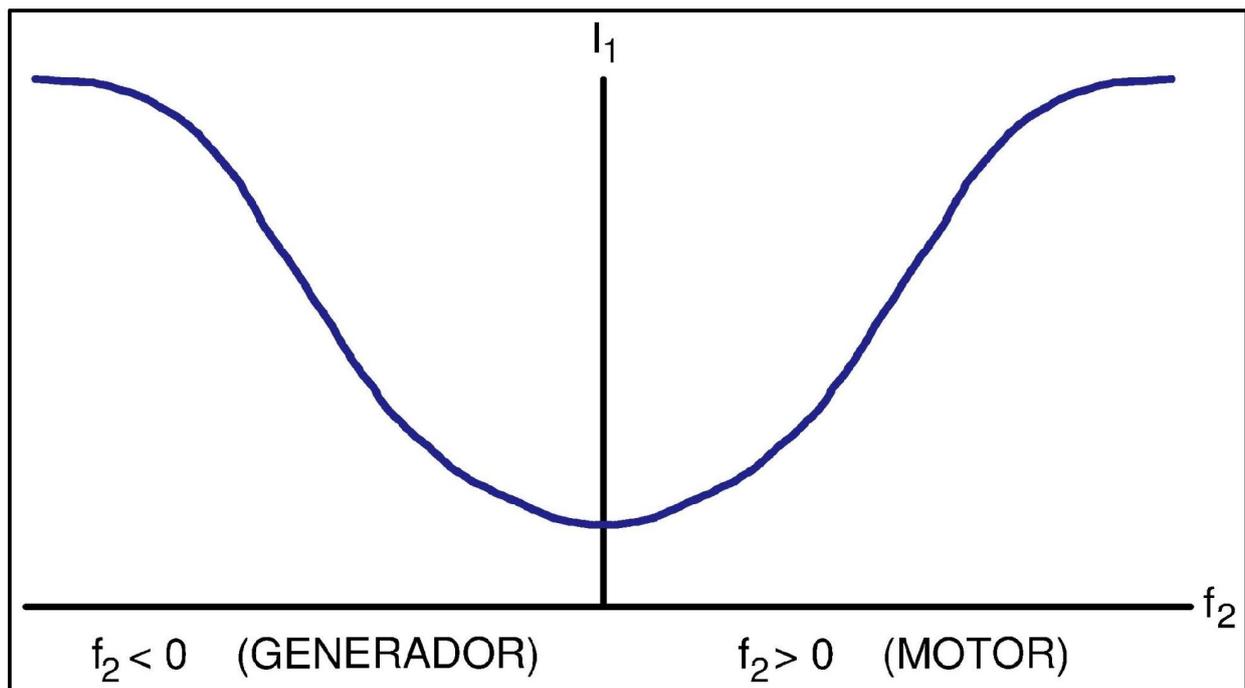
$$I_1 = \frac{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{2\pi f_2}\right)^2 + (L'_2 + L_\mu)^2}}{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{2\pi f_2}\right)^2 + (L'_2)^2}} I_\mu$$

$$f_2 = s \cdot f_1$$

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1}$$

- Para mantener I_μ (y Φ_M) constante hay que variar la corriente I_1 en función solo de la frecuencia del rotor f_2 (ver la figura siguiente), lo cual exige medir la velocidad del motor n . Por lo tanto, en este caso el convertidor de frecuencia funciona forzosamente con un control en lazo cerrado de velocidad.
- Para frecuencias por encima de la asignada f_{1N} (zona de campo debilitado) la corriente I_1 se varía de forma que la tensión V_1 se conserve constante.

Ley de variación de la corriente del estator I_1 con la frecuencia f_1



Control en lazo abierto y en lazo cerrado de velocidad

- Cuando el convertidor de frecuencia es una fente de tensión no es indispensable que el control de velocidad sea en lazo cerrado. Variando el valor eficaz de la tensión V_1 con la frecuencia f_1 de la forma que se ha visto antes se consigue que, para deslizamientos no muy grandes, el flujo permanezca prácticamente constante. Lo que sucede es que se controla la velocidad de sincronismo n_1 , pero no el deslizamiento s y hay cierta indeterminación en la velocidad final que alcanza la máquina asíncrona.
- Evidentemente, también es posible que un convertidor de frecuencia que actúa como fuente de tensión funcione en lazo cerrado de velocidad. Así se consigue un control más preciso de la velocidad, ya que el control en lazo cerrado permite tener en cuenta el deslizamiento.
- Algunos convertidores que actúan como fuente de tensión permiten que la potencia circule tanto hacia como desde la máquina asíncrona. Es decir, permiten que la máquina asíncrona también actúe como generador (luego, puede efectuar un **frenado regenerativo**). En este caso, la energía eléctrica que les envía la máquina asíncrona la devuelven a la red o la disipan en una resistencia.
- Por el contrario, existen convertidores que actúan como fuente de tensión y con los cuáles no se puede realizar el frenado regenerativo. No permiten que la potencia fluya de la máquina eléctrica hacia el convertidor.
- Cuando el convertidor actúa como fente de corriente es preciso que el control siempre sea en lazo cerrado de velocidad. Estos convertidores siempre permiten que la máquina asíncrona actúe como generador (permiten el frenado regenerativo) devolviendo energía a la red.

Aumento de velocidad con control en lazo cerrado

- Seguidamente se va a estudiar como son las estrategias de control en **lazo cerrado de velocidad** para aumentar o disminuir la velocidad cuando el motor se mantiene funcionando en la zona de par (y flujo) constante.
- Recuerde que cuando la máquina asíncrona mantiene su flujo constante el par M es directamente proporcional a la frecuencia del rotor f_2 , independientemente del valor de la frecuencia del estator f_1 (ver mi texto [24]).
- Para aumentar la velocidad lo que se hace es acelerar aumentando la frecuencia f_1 (manteniendo el flujo Φ_M constante) a medida que varía la velocidad de la máquina de forma que, manteniendo la velocidad síncrona por encima de la de giro, la frecuencia rotórica f_2 ($f_2 = s \cdot f_1$) sea siempre la misma y que, además, tenga un valor tal que proporcione un par alto.
- El par durante la aceleración no se elige igual al par máximo $M_{m\acute{a}x}$, que parecería lo lógico, porque entonces la corriente del estator I_1 sería demasiado grande. Normalmente el par durante la aceleración se elige igual a $1,5 M_N$. Con este elevado par la nueva velocidad se alcanza rápidamente.
- El convertidor también permite realizar un **arranque** suave, con un par elevado y con una corriente menor que en el arranque directo, ya que el arranque es también una maniobra de aumento de velocidad.

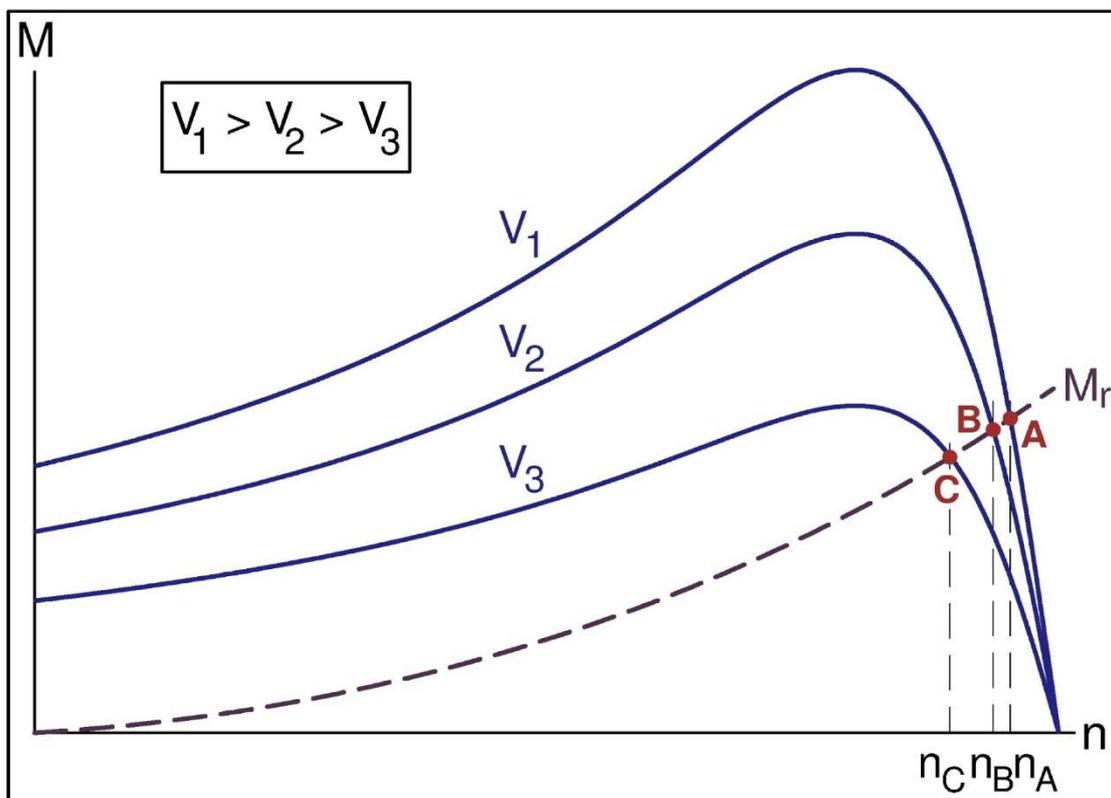
Disminución de velocidad con control en lazo cerrado

- Disminuir la velocidad constituye una maniobra de frenado (como las que se estudian en mi texto [24]).
- Si el convertidor de frecuencia no admite el frenado regenerativo la estrategia consiste en desconectar la alimentación del motor y dejar que los rozamientos y la carga mecánica acoplada a la máquina asíncrona vayan decelerando al sistema hasta alcanzar la nueva velocidad. En ese momento se pasa a alimentar a la máquina con la frecuencia que la mantiene girando a la velocidad final.
- Si el convertidor admite el frenado regenerativo, la reducción de velocidad se acelera haciendo que la máquina asíncrona actúe como generador (frenado regenerativo) y proporcione un par de frenado elevado (aunque, como sucede al acelerar, no se llega al par generador máximo para evitar corrientes en el estator I_1 elevadas). Para ello, durante el frenado la frecuencia f_1 se va reduciendo al compás de la velocidad para conseguir que, manteniendo la velocidad síncrona por debajo de la de giro, la frecuencia rotórica f_2 ($f_2 = s \cdot f_1$) sea siempre constante y su valor sea el correspondiente al elevado par de frenado elegido.

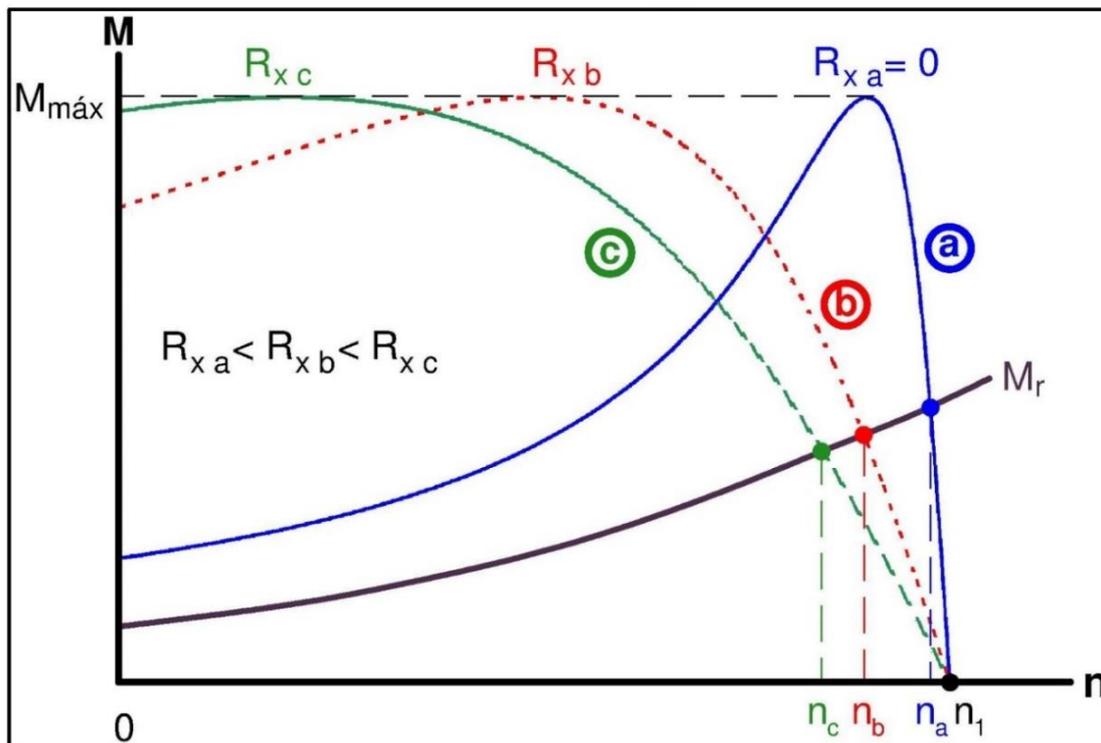
VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD MODIFICANDO EL DESLIZAMIENTO

- Hay 3 métodos básicos de variar la velocidad a través del deslizamiento s:
 1. Mediante la tensión V_1 del estator.
 2. Mediante resistencias en serie con el rotor. } *Sólo máquinas de rotor bobinado*
 3. Por inyección de una f.e.m. al rotor.
- En estos métodos, en general, lo que se hace es variar la velocidad dentro de un margen estrecho. Estos métodos también sirven para el arranque. (Ver mi texto [27]).
- La **variación de la velocidad mediante la tensión del estator V_1** se puede utilizar tanto en motores de jaula de ardilla como de rotor bobinado y su principio de funcionamiento se muestra en la figura siguiente (ver el anexo B).
- Es un método poco eficiente; al aumentar el deslizamiento crecen las pérdidas en el cobre del rotor P_{Cu2} , lo que incrementa la temperatura del motor.
- Además, al reducir la tensión V_1 se disminuye cuadráticamente el par M que puede proporcionar la máquina.
- Se consigue una variación mayor de la velocidad con este método si se aplica en un motor que tiene una curva de par poco rígida, como los motores tipo D de NEMA.
- Este método es más interesante para cargas mecánicas cuyo par resistente M_r sea cuadrático (bombas, ventiladores, ...).

**Variación de velocidad mediante V_1 .
Curvas de par**

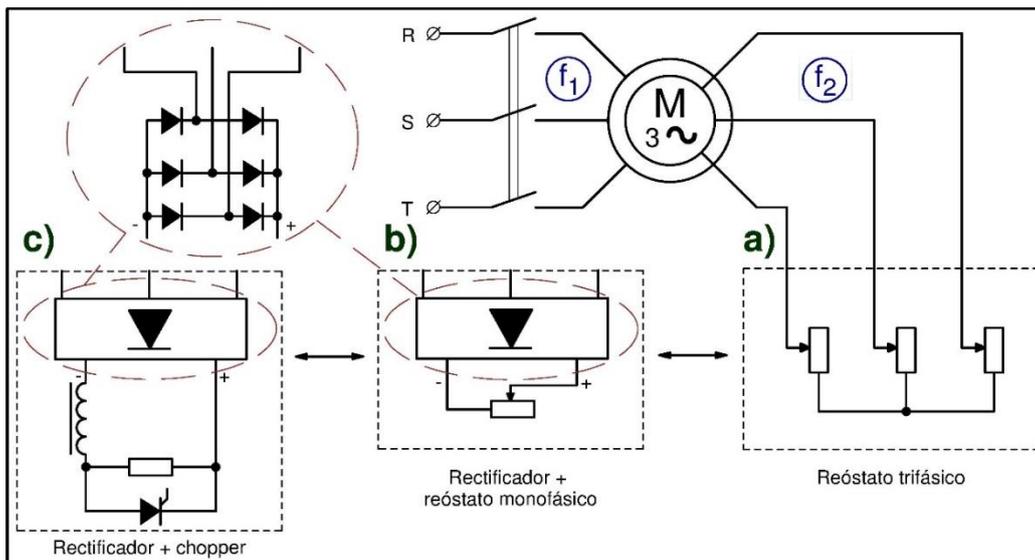


Variación de velocidad mediante R_2 . Curvas de par



- La **variación de la velocidad mediante resistencias en serie con las fases del rotor** sólo se puede utilizar en motores de rotor bobinado (ver el anexo C).
- Con este método no se reduce la capacidad de la máquina para proporcionar par, como se aprecia en la figura precedente.
- También es poco eficiente; al aumentar el deslizamiento s crecen las pérdidas. Pero en este método este incremento de pérdidas se produce en el reóstato que se conecta al rotor, por lo que es este el que se calienta y no la máquina asíncrona.
- Existen sistemas que permiten la variación electrónica de la resistencia puesta en serie con cada fase del rotor (en la figura siguiente se muestra uno de los diferentes sistemas que se pueden emplear).
- La **variación de la velocidad mediante inyección de una f.e.m. a cada fase del rotor** sólo se puede utilizar en motores de rotor bobinado (ver el anexo C y mi texto [25]).
- En este método el incremento de pérdidas que, en principio, se produciría al aumentar el deslizamiento se recupera reinyectando esta potencia a la red a través de un convertidor de frecuencia y de un transformador (ver figura).
- Requiere un convertidor de menor potencia que el necesario para controlar la velocidad a través de la frecuencia del estator f_1 .
- Con los convertidores adecuados este método permite a un motor asíncrono variar su velocidad no solo por debajo sino también por encima de la velocidad de sincronismo e , incluso, controlar su factor de potencia.

Variación de velocidad mediante una resistencia en serie con cada fase del rotor

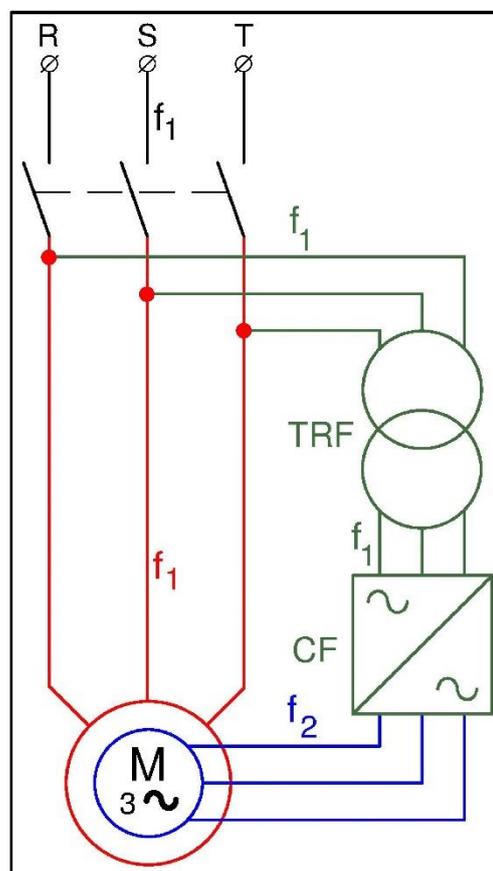


El sistema electrónico mostrado en **c)** varía la resistencia efectiva en el lado de continua del rectificador mediante un *chopper* (interruptor electrónico que se abre y se cierra periódicamente) puesto en paralelo con un reóstato monofásico. Esta resistencia efectiva varía entre cero y la resistencia del reóstato, dependiendo de la proporción entre los tiempos que el chopper está cerrado y está abierto.

Variación de velocidad mediante inyección de una f.e.m. al rotor

Este sistema de variación de velocidad solo es aplicable a la máquina de anillos. Lo que se hace es alimentar el rotor con una tensión de frecuencia f_2 regulable, para lo cual se usa un *convertidor de frecuencia* (también denominado *variador de frecuencia*). El estator se conecta directamente a la red de frecuencia f_1 . Se dice entonces que la máquina está doblemente alimentada (ver mi texto [25]).

CF: Convertidor de frecuencia
TRF: Transformador



BIBLIOGRAFÍA

- [1] ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN. *Máquinas eléctricas rotativas. Parte 17: Guía de aplicación a los motores de inducción de jaula alimentados con convertidores*. UNE 203001-17. Madrid: AENOR, 2000. (Se corresponde con la norma CEI 60034-17 de 1998).
- [2] ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN. *Máquinas eléctricas rotativas. Parte 8: Marcas en los bornes y sentido de giro*. UNE-EN 60034-8. Madrid: AENOR, 2008. (Se corresponde con la norma CEI 60034-8 de 2007).
- [3] ALGER, P. L. 1970. *Induction machines. Their behavior and uses*. 2ª edición. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
- [4] APARICIO, J. L. 1987. *Criterios de diseño de convertidores estáticos para accionamientos regulados en corriente alterna con motores de inducción*. Madrid: Saber Hoy, S. A. de Ediciones.
- [5] BOLDEA, I. 2006. *Variable speed generators*. Florida-U.S.A.: CRC Press, Taylor&Francis Group.
- [6] BOSE, B. K. 1986. *Power electronics and AC drives*. New Jersey - U.S.A. Prentice-Hall.
- [7] CHANDRASEKAR, L.; ANBUCHANDRAN, S.; SANKAR; R. Performance analysis of pole amplitude modulated three-phase squirrel-cage induction motor. *International Journal of Emerging Technology in Computer Science & Electronics (IJETCSE)*. March 2015, vol. 13, issue 1, p. 611-621.
- [8] CHAPMAN. 2005. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [9] CIRCUIT GLOBE. *Induction motor*. Está disponible en esta dirección web: <http://circuitglobe.com/category/electrical-terms/electrical-machines/induction-motor>
- [10] CORTES. 1977. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. Tomo 3: Máquinas de corriente alterna asíncronas*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [11] FAURE BENITO. 2000. *Máquinas y accionamientos eléctricos*. Madrid: Colegio oficial de ingenieros navales y oceánicos.
- [12] FITZGERALD, KINGSLEY y UMANS. 2004. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [13] FRAILE MORA, J. 2015. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L.
- [14] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas. Tomo 2*. Moscú: Editorial Mir.
- [15] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas. Tomo II*. Moscú: Editorial Mir.
- [16] LANGSDORF. 1977. *Teoría de las máquinas de corriente alterna* Méjico: McGraw-Hill.
- [17] LEONHARD, W. 1985. *Control of electrical drives*. Berlín. Springer-Verlag.
- [18] MURPHY, J. M. D. & TURNBULL, F. G. 1988. *Power electronic control of AC motors*. Oxford - Gran Bretaña. Pergamon Press.
- [19] PICHOR, J. 1969. *Curso de electrotecnia IV. Máquinas eléctricas: máquinas de inducción*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [20] RAWCLIFFE, G. H.; BURBIDGE, B.; FONG, W. Induction-motor speed-changing by pole-amplitude modulation. *Proceedings of the IEE-Part A: Power Engineering*. August 1958, vol. 105, issue 22, p. 411-419.
- [21] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2008. *Máquinas asíncronas*. Santander: Universidad de Cantabria. Disponible en web: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/asincronas caminos.pdf>
- [22] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2010. *Constitución de las máquinas eléctricas (Bobinados)*. Santander: Universidad de Cantabria. Está disponible en esta dirección web: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/constitucion maq elec.pdf>
- [23] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2011. *Campo magnético en el entrehierro de las máquinas eléctricas simétricas (nivel avanzado)*. Santander: Universidad de Cantabria. Disponible en la dirección web: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/campo magn entrehierro Web.pdf>

- [24] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2015. *Máquina asíncrona: Circuitos equivalentes simplificados. Otros pares*. Santander: Universidad de Cantabria. Está disponible en esta dirección web: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Máquinas asíncronas. Otros circuitos eq. y pares.pdf>
- [25] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2016. *Máquina asíncrona doblemente alimentada*. Santander: Universidad de Cantabria. Está disponible en esta dirección web: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Asíncrona doblemente alimentada.pdf>
- [26] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2017. *Frenado de máquinas asíncronas o de inducción*. Santander: Universidad de Cantabria. Está disponible en esta dirección web: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Frenado asincronas Web.pdf>
- [27] RODRÍGUEZ POZUETA, Miguel Angel. 2017. *Arranque de motores asíncronos*. Santander: Universidad de Cantabria. Está disponible en esta dirección web: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Arranque Asincronas.pdf>
- [28] SANZ FEITO, J. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Educación.
- [29] SERRANO IRIBARNEGARAY, L. y ROGER FOLCH, J. 1986. Control electrónico de velocidad de motores asíncronos. *Automática e instrumentación*. Mayo 1986, año 20, nº 158, p. 171-185.
- [30] SERRANO IRIBARNEGARAY, L. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [31] SUÁREZ CREO, J. M. y MIRANDA BLANCO, B. N. 2006. *Máquinas eléctricas. Funcionamiento en régimen permanente*. Santiago de Compostela: Tórculo Ediciones, S.L.
- [32] WEG. *Motors: Specification of Electric Motors*. Está disponible en esta dirección web: <http://ecatalog.weg.net/files/wegnet/WEG-specification-of-electric-motors-50039409-manual-english.pdf>
- [33] WILDI, T. 2007. *Máquinas eléctricas y sistemas de potencia*. México: Pearson Educación.

ANEXO A: PARÁMETROS DE UN MOTOR DAHLANDER

En la Tabla A.I se muestra la relación aproximada que existe entre los parámetros del circuito equivalente de un motor Dahlander a sus dos velocidades. En dicha tabla se ha utilizado el subíndice A para la velocidad alta y el subíndice B para la velocidad baja.

Tabla A.I: Relación entre los parámetros de un motor Dahlander

Conexión:	$\frac{R_{1A}}{R_{1B}} = \frac{X_{1A}}{X_{1B}} =$	$\frac{R'_{2A}}{R'_{2B}} = \frac{X'_{2A}}{X'_{2B}} \approx$	$\frac{X_{ccA}}{X_{ccB}} \approx$
D - YY	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{8} = 0,125$	$\frac{1}{5,75} = 0,174$
Y - YY	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{8} = 0,125$	$\frac{1}{5,75} = 0,174$
YY - D	4	2	2,8

(A: parámetros para la velocidad alta; B: parámetros para la velocidad baja)

No se va a desarrollar la demostración de esta tabla, pero sí se van a hacer algunas indicaciones sobre estos parámetros. Para empezar, es evidente que se verifica que:

$$p_B = 2 p_A \quad \Omega_{1A} = 2 \Omega_{1B} \quad (A.1)$$

Se ha supuesto que el motor cuando funciona a baja velocidad verifica las siguientes relaciones, similares a las de un motor tipo B de NEMA (ver mi texto [21]):

$$X_{1B} = 0,4 X_{ccB} \quad X'_{2B} = 0,6 X_{ccB} \quad (A.2)$$

A baja velocidad el devanado es por polos consecuentes y las bobinas son de paso diametral. Cuando el motor se conecta a la velocidad alta el devanado pasa a ser por polos y el número de polos se reduce a la mitad (ver la relación (A.1)). Esto hace que el paso polar sea el doble de ancho que a baja velocidad y, entonces, la bobina, cuyo ancho no varía, pase a estar acortada a la mitad del paso polar. En consecuencia, los factores de acortamiento a ambas velocidades son:

$$\xi_{a1B} = 1 \quad \xi_{a1A} = 0,707 \quad (A.3)$$

El factor de distribución también varía, pero la diferencia a ambas velocidades es pequeña. Por lo tanto, la Tabla A.I se ha obtenido suponiendo que los factores de bobinado del estator (productos de los respectivos factores de distribución y de acortamiento, como se indica en mi texto [23]) a ambas velocidades guardan esta proporción aproximada:

$$\frac{\xi_{b1A}}{\xi_{b1B}} \approx 0,7 \quad (A.4)$$

VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN MOTORES ASÍNCRONOS

De las relaciones entre los parámetros a alta y baja velocidad de la Tabla A.I se deduce como son las curvas de par a las dos velocidades de un motor Dahlander. En la Fig. A.1 se muestran estas curvas de par-velocidad para las distintas conexiones que se indicaron en la Tabla II.

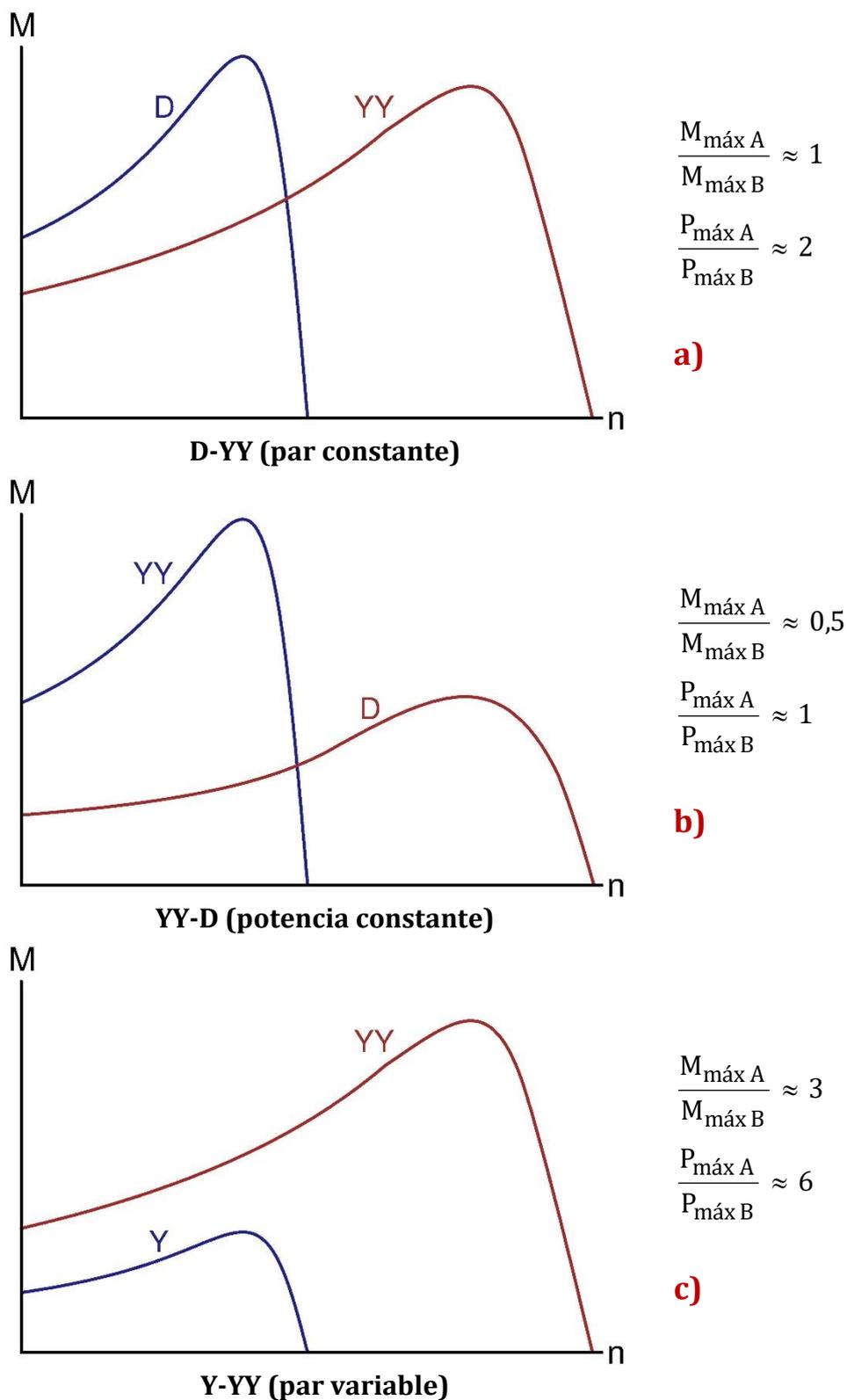


Fig. A.1: Curvas par-velocidad para diferentes conexiones de un motor Dahlander

ANEXO B: EJEMPLO DE CÁLCULO DE VARIOS SISTEMAS DE VARIACIÓN DE VELOCIDAD DE UN MOTOR TRIFÁSICO DAHLANDER

Un motor asíncrono trifásico Dahlander D-YY tiene una tensión de línea y una frecuencia asignadas de $V_{1NL} = 400$ V y $f_1 = 50$ Hz, respectivamente. Sus características son:

Conexión triángulo (D):

$$2p = 4 \text{ polos} \quad R_1 = 1 \, \Omega \quad R'_2 = 2,4 \, \Omega \quad X_{cc} = 12 \, \Omega$$

Conexión doble estrella (YY):

$$2p = 2 \text{ polos} \quad R_1 = 0,25 \, \Omega \quad R'_2 = 0,3 \, \Omega \quad X_{cc} = 2,1 \, \Omega$$

Este motor mueve una carga que presenta un par resistente M_r constante, de tal manera que su velocidad cuando está conectado en triángulo a la tensión asignada es $n = 1464$ r.p.m.

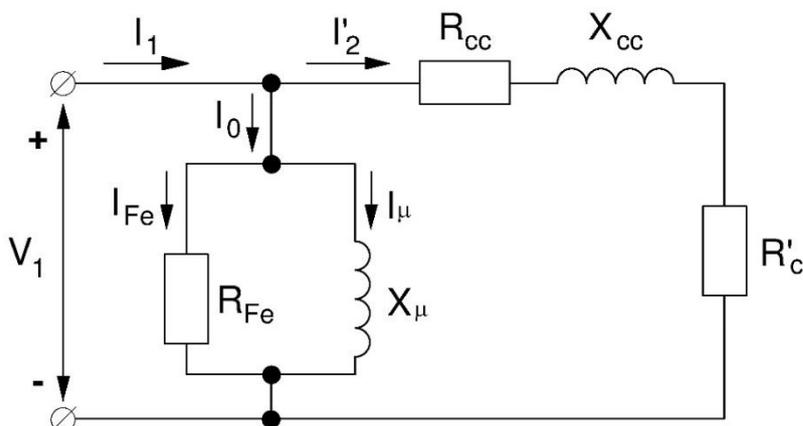
- a) En estas condiciones (conexión triángulo a la velocidad asignada) calcule el par que está desarrollando el motor y también su par máximo.
- b) Ahora, manteniendo la conexión triángulo, se quiere reducir la tensión para conseguir que el motor gire a 1398 r.p.m. ¿Cuál es la tensión de línea a la que es preciso alimentar a esta máquina?
- c) Por último, se conecta este motor en doble estrella (YY) y se lo alimenta con su tensión asignada. En estas condiciones ¿A qué velocidad girará? ¿Cuánto vale su par máximo?

SOLUCIÓN:

- a) $M = 29,5$ Nm; $M_{m\acute{a}x} = 117$ Nm
- b) $V_{1L} = 253$ V
- c) $n = 2945$ r.p.m.; $M_{m\acute{a}x} = 108$ Nm

SOLUCIÓN DETALLADA:

Cuestiones preliminares



$$R'_c = R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$$

$$R_{cc} = R_1 + R'_2$$

$$X_{cc} = X_1 + X'_2$$

$$R_{cc} + R'_c = R_1 + \frac{R'_2}{s}$$

Fig. B.1: Circuito equivalente aproximado de una máquina asíncrona trifásica con el rotor en cortocircuito

- La ecuación del par cuando un motor asíncrono trifásico funciona alimentado con una fuente de tensión alterna trifásica es (ver la Fig. B.1 y mi texto [21]):

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s} \right)^2 + X_{cc}^2} = \frac{3x}{\Omega_1} \frac{V_1^2}{(R_1 + x)^2 + X_{cc}^2} \quad (B.1)$$

En la expresión anterior \$m_1\$ es el número de fases del estator (\$m_1 = 3\$ fases en una máquina trifásica) y se ha introducido la variable auxiliar \$x\$ que va a facilitar los cálculos. La variable \$x\$ se define mediante esta fórmula:

$$x = \frac{R'_2}{s} \quad \left(\Rightarrow s = \frac{R'_2}{x} \right) \quad (B.2)$$

- Observando la Fig. B.1 se deduce que la corriente del rotor reducida al estator \$I'_2\$ se puede calcular así:

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s} \right)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{V_1}{\sqrt{(R_1 + x)^2 + X_{cc}^2}} \quad (B.3)$$

- Cuando el par es máximo el deslizamiento \$s_m\$ y la variable auxiliar \$x_m\$ correspondientes se calculan así:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \quad x_m = \frac{R'_2}{s_m} = \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2} \quad (B.4)$$

a) Motor conectado en triángulo a 400 V y 50 Hz y girando a 1464 r.p.m.

- Cuando este motor está conectado en triángulo a 400 V y 50 Hz sucede que:

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_{1N} = V_{1NL} \Rightarrow \underline{V_{1N} = 400 \text{ V}}$$

$$2p = 4 \text{ polos} \Rightarrow \underline{p = 2 \text{ pares de polos}}$$

$$(2): \quad n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} \Rightarrow \underline{n_1 = 1500 \text{ r.p.m.}}$$

$$(2): \quad \Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{2\pi \cdot 50}{2} \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 157,08 \text{ rad/s}}$$

- El deslizamiento para la velocidad $n = 1464$ r.p.m. se calcula mediante la relación (3):

$$(3): \quad s = \frac{1500 - 1464}{1500} \Rightarrow \underline{s = 0,024}$$

Cuando la máquina está funcionando con este deslizamiento, la variable auxiliar x -definida mediante la relación (B.2)- vale:

$$(B.2): \quad x = \frac{2,4}{0,024} \Rightarrow \underline{x = 100 \Omega}$$

- El par motor M , que es igual al par resistente M_r , se puede calcular en este estado de funcionamiento mediante la relación (B.1):

$$(B.1): \quad M = \frac{3 \cdot 100}{157,08} \frac{400^2}{(1 + 100)^2 + 12^2} \Rightarrow \boxed{M = 29,5 \text{ Nm}}$$

- Con esta forma de conexión el valor de la variable auxiliar cuando el par es máximo x_m -que se puede calcular mediante la relación (B.4)- vale:

$$(B.4): \quad x_m = \sqrt{1^2 + 12^2} \Rightarrow \underline{x_m = 12,04 \Omega}$$

El par máximo se obtiene introduciendo este valor de x_m en la fórmula del par (B.1):

$$(B.1): \quad M_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot 12,04}{157,08} \frac{400^2}{(1 + 12,04)^2 + 12^2} \Rightarrow \boxed{M_{\text{máx}} = 117,2 \text{ Nm}}$$

- Cuando este motor está conectado en triángulo a la tensión y frecuencia asignadas, el par máximo vale $M_{\text{máx}} = 117 \text{ Nm}$. Con esta conexión y girando a la velocidad de $n = 1464$ r.p.m. el par vale $M = 29,5 \text{ Nm}$ y es igual al par resistente M_r .

b) Motor conectado en triángulo a tensión reducida y 50 Hz y girando a 1398 r.p.m.

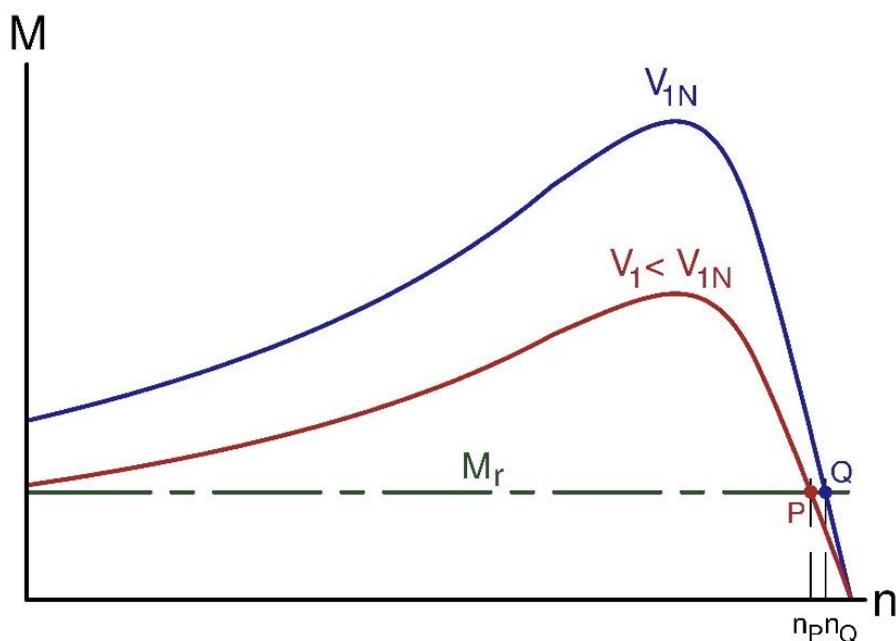


Fig. B.2: Efecto del cambio de la tensión del estator V_1 sobre la velocidad

- En la Fig. B.2 se muestra cómo se consigue variar la velocidad al disminuir la tensión con que alimenta a un motor que acciona una carga con un par resistente M_r constante. A la tensión asignada V_{1N} la velocidad es n_Q y a la tensión reducida la velocidad es n_P .
- Se desea que la nueva velocidad sea $n = 1398$ r.p.m. A esta velocidad el deslizamiento s y la variable auxiliar x tienen los siguientes valores, que se han obtenido mediante las relaciones (3) y (B.2):

$$(3): \quad s = \frac{1500 - 1398}{1500} \Rightarrow \underline{s = 0,068}$$

$$(B.2): \quad x = \frac{2,4}{0,08} \Rightarrow \underline{x = 35,29 \Omega}$$

El par resistente tiene el mismo valor que en el apartado anterior ($M_r = 29,5$ Nm), por lo que de la expresión (B.1) se deduce que se debe verificar esta igualdad:

$$(B.1): \quad 29,5 = \frac{3 \cdot 35,29}{157,08} \frac{V_1^2}{(1 + 35,29)^2 + 12^2} \Rightarrow \underline{V_1 = 253 \text{ V}}$$

Dada la conexión triángulo del estator, la tensión de línea tiene este valor:

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_{1L} = V_1 \Rightarrow \boxed{V_{1L} = 253 \text{ V}}$$

- La tensión de línea necesaria para que el motor gire a $n = 1398$ r.p.m. es $V_{1L} = 253$ V.

c) Motor conectado en doble estrella a 400 V y 50 Hz

- Con esta conexión sucede que:

$$\text{Estator con conexión estrella} \Rightarrow V_{1N} = \frac{V_{1NL}}{\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{V_{1N} = 231 \text{ V}}$$

$$2p = 2 \text{ polos} \Rightarrow \underline{p = 1 \text{ par de polos}}$$

$$(2): \quad n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{1} \Rightarrow \underline{n_1 = 3000 \text{ r.p.m.}}$$

$$(2): \quad \Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{2\pi \cdot 50}{1} \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 314,16 \text{ rad/s}}$$

- El par resistente tiene el mismo valor que en los apartados anteriores ($M_r = 29,5 \text{ Nm}$), por lo que partiendo de la expresión (B.1) se deduce que se debe verificar que:

$$(B.1): \quad 29,5 = \frac{3x}{314,16} \frac{231^2}{(0,25 + x)^2 + 2,1^2}$$

Operando sobre la expresión anterior se obtiene una ecuación de segundo grado cuya variable independiente es x. Al resolver esta ecuación se calculan dos valores de x, a partir de los cuales (mediante la relación (B.2)) se obtienen dos valores del deslizamiento s:

$$x = \begin{cases} 16,49 \Omega \\ 0,271 \Omega \end{cases} \Rightarrow s = \begin{cases} 0,0182 \\ 1,107 \end{cases}$$

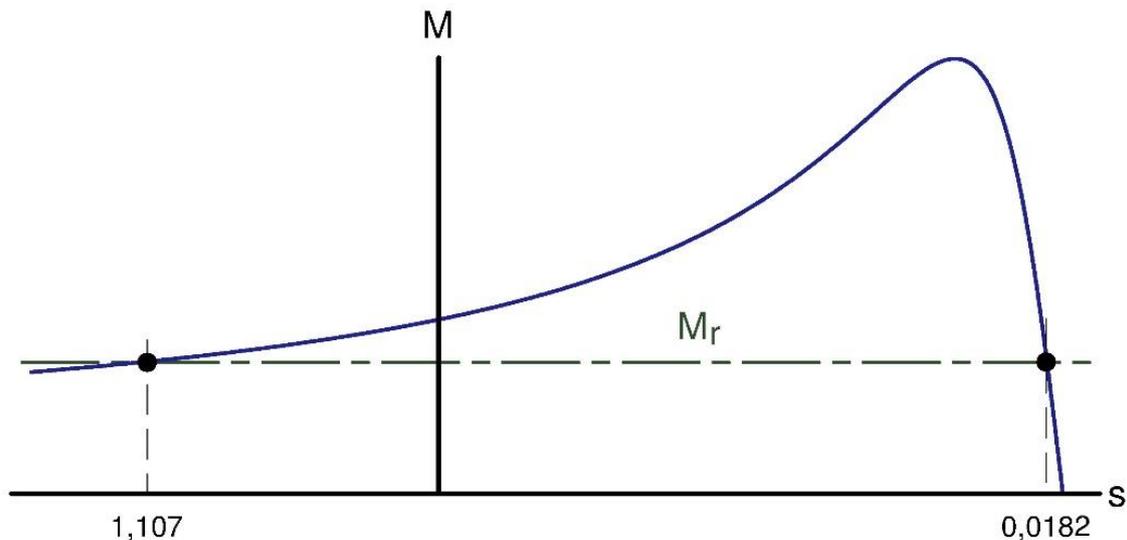


Fig. B.3: Visualización sobre la curva del par de las soluciones obtenidas

Estos dos valores del deslizamiento s se han mostrado sobre la curva par-velocidad en la Fig. B.3. Uno de ellos es mayor que 1 y corresponde al funcionamiento de la máquina asíncrona como freno a contracorriente, que no es como está funcionando ahora. Por lo tanto, el valor que hay que utilizar es el correspondiente a la zona de deslizamientos pequeños -es decir, $s = 0,0182$ - donde la máquina actúa como motor en la zona estable.

- Conocidas la velocidad de sincronismo n_1 y el deslizamiento s , la velocidad n se obtiene rápidamente utilizando la relación (4):

$$(4): \quad n = 3000 (1 - 0,0182) \Rightarrow \boxed{n = 2945,4 \text{ r.p.m.}}$$

- Con esta nueva forma de conexión el valor de la variable auxiliar cuando el par es máximo x_m -que se puede calcular mediante la relación (B.4)- vale:

$$(B.4): \quad x_m = \sqrt{0,25^2 + 2,1^2} \Rightarrow \underline{x_m = 2,115 \Omega}$$

El par máximo se determina introduciendo este valor de x_m en la fórmula del par (B.1):

$$(B.1): \quad M_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot 2,115}{314,16} \frac{231^2}{(0,25 + 2,115)^2 + 2,1^2} \Rightarrow \boxed{M_{\text{máx}} = 107,7 \text{ Nm}}$$

Nótese que cuando se usa la conexión D-YY los valores del par máximo a ambas velocidades son casi iguales (ver la Fig. A.1a).

- Cuando este motor está conectado en doble estrella a la tensión y frecuencia asignadas, el par máximo vale $M_{\text{máx}} = 108 \text{ Nm}$. Con esta conexión y proporcionando un par de 29,5 Nm su velocidad es 2945 r.p.m.

ANEXO C: EJEMPLO DE CÁLCULO DE VARIOS SISTEMAS DE VARIACIÓN DE VELOCIDAD DE UN MOTOR ASÍNCRONO TRIFÁSICO DE ROTOR BOBINADO

Un motor asíncrono trifásico de rotor bobinado y colector de anillos tiene estas características:

$V_{1NL} = 400 \text{ V}$	Estator conectado en <u>triángulo</u>	$f_{1N} = 50 \text{ Hz}$
$R_1 = 0,1 \ \Omega$	$R'_2 = 0,14 \ \Omega$	$X_{ccN} = 1,42 \ \Omega$
$2p = 6 \text{ polos}$	$m_i = m_v = 0,24$	$n_N = 980 \text{ r.p.m.}$

Este motor mueve una carga que presenta un par resistente M_r constante e igual al par asignado M_N .

- a) Calcular la velocidad de este motor cuando tiene su rotor en cortocircuito y su estator se alimenta a 40 Hz mediante un convertidor de frecuencia que consigue mantener el flujo magnético constante e igual al flujo en condiciones asignadas.

Ahora se sigue dejando el rotor en cortocircuito y el estator se alimenta mediante otro convertidor de frecuencia que suministra una tensión que sigue esta ley:

$$\text{Si } f_1 < 50 \text{ Hz} \Rightarrow V_{1L} = 50 + 7 f_1$$

$$\text{Si } f_1 \geq 50 \text{ Hz} \Rightarrow V_{1L} = 400 \text{ V}$$

- b) Calcular la velocidad cuando este convertidor proporciona 40 Hz.
c) Calcular la velocidad cuando este convertidor proporciona 60 Hz.

Por último, el motor se lo mantiene alimentado a la tensión y frecuencia asignadas y ya no se deja su rotor en cortocircuito:

- d) Calcular el valor óhmico de la resistencia R_x que hay que conectar en serie con cada fase del rotor para conseguir que la máquina gire a 908,6 r.p.m.
e) Se sustituye la resistencia R_x por un convertidor de frecuencia conectado al rotor. La tensión que proporciona este convertidor al rotor está en fase con la corriente. Calcular el valor eficaz V_{2L} y la frecuencia f_2 de la tensión de línea que debe proporcionar este convertidor para que la máquina gire a la misma velocidad que en el apartado anterior. ¿Qué potencia activa P_2 envía el rotor hacia el convertidor?

NOTAS:

- Expresar todas las velocidades en revoluciones por minuto (r.p.m.).
- El rotor está conectado en estrella.

SOLUCIÓN:

- a) $n = 780 \text{ r.p.m.}$
b) $n = 781 \text{ r.p.m.}$
c) $n = 1170 \text{ r.p.m.}$
d) $R_x = 8,68 \ \Omega$
e) $V_{2L} = 199 \text{ V}; f_2 = 4,57 \text{ Hz}; P_2 = 4578 \text{ W}$

SOLUCIÓN DETALLADA:

Cuestiones preliminares

- En este problema la frecuencia del estator f_1 va a tomar diferentes valores. Por esta razón se distingue con la denominación f_{1N} , n_{1N} , Ω_{1N} y X_{ccN} a los correspondientes valores de la frecuencia del estator f_1 , de la velocidad de sincronismo (n_1 en r.p.m. y Ω_1 en rad/s) y de la reactancia de cortocircuito X_{cc} cuando la máquina está funcionando en condiciones asignadas.
- Seguidamente se muestran las fórmulas para obtener algunas magnitudes de una máquina asíncrona.

La frecuencia de las corrientes del rotor f_2 vale (ver mi texto [21]):

$$f_2 = s \cdot f_1 \quad (C.1)$$

Partiendo de las relaciones (2) se deduce que la velocidad de sincronismo (n_1 en r.p.m. o Ω_1 en rad/s) para una frecuencia f_1 se puede calcular así:

$$(2): \quad n_1 = \frac{f_1}{f_{1N}} n_{1N} \quad \Omega_1 = \frac{f_1}{f_{1N}} \Omega_{1N} \quad (C.2)$$

La impedancia de cortocircuito X_{cc} se puede determinar así:

$$X_{cc} = 2 \pi f_1 L_{cc} \quad (C.3)$$

$$(C.3): \quad X_{cc} = X_{ccN} \frac{f_1}{f_{1N}} \quad (C.4)$$

- En la Fig. C.1 se muestra una máquina asíncrona de rotor bobinado y colector de anillos en la que se ha conectado un reóstato trifásico en el rotor de forma que cada fase del rotor tiene conectada en serie una resistencia R_x :

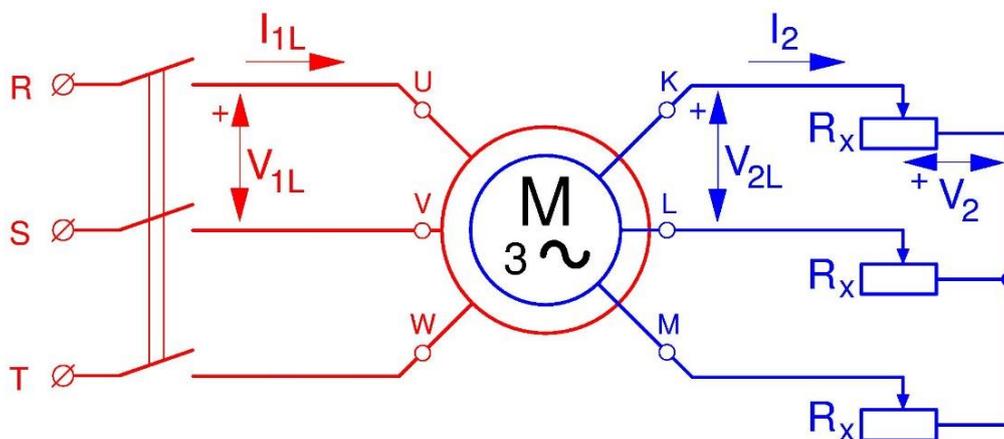


Fig. C.1: Motor asíncrono de rotor bobinado con un reóstato trifásico en el rotor

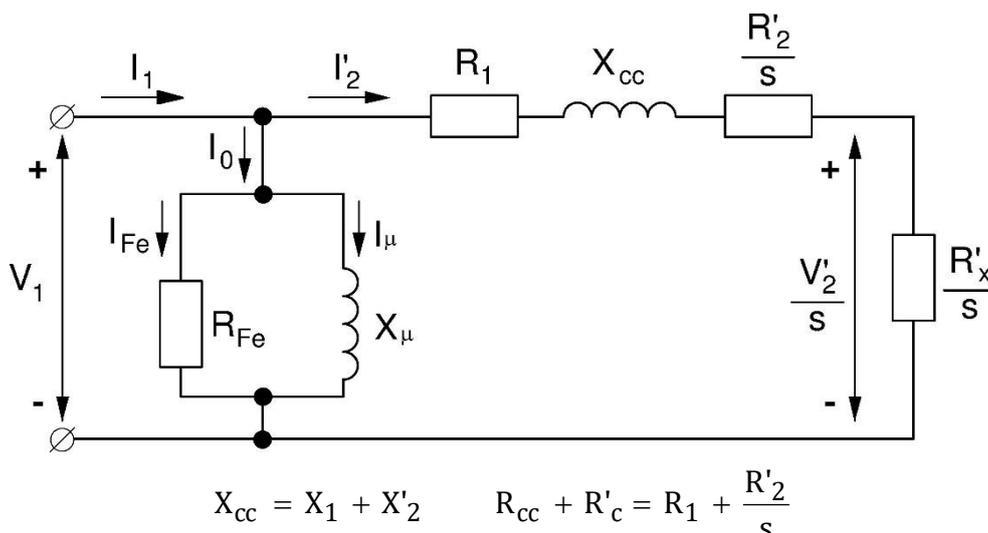


Fig. C.2 :Circuito equivalente aproximado de una máquina asíncrona trifásica en la que cada fase del rotor se conecta en serie con una resistencia R_x

La Fig. C.2 muestra el circuito equivalente aproximado del motor asíncrono de la Fig. C.1 (ver mi texto [25]). Comparando este circuito equivalente aproximado con el de una máquina asíncrona con el rotor en cortocircuito (Fig. B.1), se comprueba que las ecuaciones obtenidas para un motor con el rotor en cortocircuito valen también para un motor con un reóstato trifásico en serie con el rotor si en dichas ecuaciones se sustituye el parámetro R'_2 por la suma $(R'_2 + R'_x)$, donde R'_x es la resistencia reducida al estator de una de las fases del reóstato.

Por consiguiente, de las relaciones (B.1), (B.2) y (B.3) se obtiene que:

$$(B.1): \quad \left. \begin{aligned} M &= \frac{m_1 \frac{R'_2 + R'_x}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2 + R'_x}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} \\ M &= \frac{3x}{\Omega_1} \frac{V_1^2}{(R_1 + x)^2 + X_{cc}^2} \end{aligned} \right\} \quad (C.5)$$

$$(B.2): \quad x = \frac{R'_2 + R'_x}{s} \quad \left(\Rightarrow s = \frac{R'_2 + R'_x}{x} \right) \quad (C.6)$$

$$(B.3): \quad I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2 + R'_x}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{V_1}{\sqrt{(R_1 + x)^2 + X_{cc}^2}} \quad (C.7)$$

Ahora la variable auxiliar x se define mediante la relación (C.6) y se comprueba que cuando las fórmulas (C.5) y (C.7) para el cálculo del par M y de la corriente I'_2 , respectivamente, se expresan en función de x se obtienen exactamente las mismas fórmulas (B.1) y (B.3) del motor asíncrono con el rotor en cortocircuito.

También se deduce que, como es lógico, las fórmulas del motor con el rotor en cortocircuito (B.1), (B.2) y (B.3) se pueden considerar como un caso particular de las expresiones (C.5), (C.6) y (C.7) cuando la resistencia de las fases del reóstato tienen un valor nulo ($R_x = 0$).

- Para reducir al estator las magnitudes del rotor que aparecen en la Fig. C.1 se usan las siguientes relaciones (ver mi texto [21]):

$$V'_2 = m_v \cdot V_2 \quad I'_2 = \frac{I_2}{m_i} \quad R'_x = m_i \cdot m_v \cdot R_x \quad (C.8)$$

En las fórmulas anteriores m_v es la relación de transformación de tensiones y m_i es la relación de transformación de intensidades. En un motor asíncrono trifásico de rotor bobinado ambas relaciones de transformación tienen el mismo valor.

- El rotor de una máquina asíncrona trifásica de rotor bobinado está siempre conectado en estrella. Luego:

$$\text{Rotor con conexión estrella} \Rightarrow \begin{cases} I_{2L} = I_2 \\ V_{2L} = \sqrt{3} \cdot V_2 \end{cases} \quad (C.9)$$

- Observando la Fig. C.1 se aprecia que el reóstato también está en estrella. Por tanto, el rotor y el reóstato tienen la misma tensión V_2 e intensidad I_2 de fase. Luego:

$$V_2 = R_x \cdot I_2 \quad V'_2 = R'_x \cdot I'_2 \quad (C.10)$$

$$P_2 = m_2 \cdot R_x \cdot I_2^2 \quad P_2 = m_1 \cdot R'_x \cdot I'^2_2$$

$$P_2 = 3 \cdot R_x \cdot I_2^2 \quad P_2 = 3 \cdot R'_x \cdot I'^2_2 \quad (C.11)$$

P_2 es la potencia activa que sale del rotor y se disipa en las resistencias del reóstato trifásico. m_1 y m_2 son, respectivamente, el número de fases del estator y del rotor. En un motor asíncrono trifásico de rotor bobinado tanto el estator como el rotor son trifásicos ($m_1 = m_2 = 3$ fases), lo cual se ha tenido en cuenta en las relaciones (C.11).

Funcionamiento en condiciones asignadas

- Cuando este motor está conectado en triángulo a 400 V y 50 Hz sucede que:

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_{1N} = V_{1NL} \Rightarrow \underline{V_{1N} = 400 \text{ V}}$$

$$2p = 6 \text{ polos} \Rightarrow \underline{p = 3 \text{ pares de polos}}$$

$$(2): \quad n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} \Rightarrow \underline{n_1 = 1000 \text{ r.p.m.}}$$

$$(2): \quad \Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{2\pi \cdot 50}{3} \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 104,72 \text{ rad/s}}$$

- El deslizamiento s_N para la velocidad asignada $n_N = 980$ r.p.m. se calcula mediante la relación (3):

$$(3): \quad s_N = \frac{1000 - 980}{1000} \Rightarrow \underline{s_N = 0,020}$$

La variable auxiliar en condiciones asignadas x_N -que se define mediante la relación (B.2)- vale:

$$(B.2): \quad x_N = \frac{0,14}{0,020} \Rightarrow \underline{x_N = 7 \Omega}$$

- El par asignado M_N se puede calcular introduciendo la variable x_N en la fórmula (B.1):

$$(B.1): \quad M_N = \frac{3 \cdot 7}{104,72} \frac{400^2}{(0,1 + 7)^2 + 1,42^2} \Rightarrow \underline{M_N = 612 \text{ Nm}} \quad (C.12)$$

- La frecuencia del rotor en condiciones asignadas f_{2N} se obtiene mediante (C.1):

$$(C.1): \quad f_{2N} = 0,02 \cdot 50 \Rightarrow \underline{f_{2N} = 1 \text{ Hz}}$$

a) Convertidor de frecuencia que suministra flujo constante y 40 Hz

- Cuando el flujo permanece constante sucede que el par de un motor es directamente proporcional a la frecuencia del rotor f_2 , independientemente del valor de la frecuencia del estator f_1 . Ahora el flujo y el par son los mismos que en condiciones asignadas, lo cual significa que la frecuencia del rotor también debe ser igual a la asignada ($f_2 = f_{2N}$). Por lo tanto, teniendo presente la relación (C.1) se deduce que:

$$(C.1): \quad f_2 = f_{2N}; \quad f_2 = s \cdot f_1 \Rightarrow 1 = s \cdot 40 \Rightarrow \underline{s = 0,025}$$

- La velocidad de sincronismo para $f_1 = 40$ Hz se puede calcular mediante (C.2):

$$(C.2): \quad n_1 = \frac{40}{50} 1000 \Rightarrow \underline{n_1 = 800 \text{ r.p.m.}}$$

- Conocidas la velocidad de sincronismo n_1 y el deslizamiento s , la velocidad n se obtiene rápidamente utilizando la relación (4):

$$(4): \quad n = 1000 (1 - 0,025) \Rightarrow \boxed{n = 780 \text{ r.p.m.}}$$

- Cuando este motor se alimenta mediante un convertidor de frecuencia que conserva el flujo constante y proporciona una frecuencia $f_1 = 40$ Hz, la velocidad pasa a ser $n = 780$ r.p.m.

b) Convertidor de frecuencia que actúa como fuente de tensión y suministra 40 Hz

- Con $f_1 = 40$ Hz la tensión que suministra este convertidor es:

$$f_1 = 40 \text{ Hz} < f_{1N} \Rightarrow V_{1L} = 50 + 7 \cdot 40 \Rightarrow \underline{V_{1L} = 330 \text{ V}}$$

La tensión de fase V_1 se determina teniendo en cuenta que el estator está conectado en triángulo:

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_1 = V_{1L} \Rightarrow \underline{V_1 = 330 \text{ V}}$$

- Con una frecuencia $f_1 = 40$ Hz se tienen estas magnitudes:

$$(C.2): \quad n_1 = \frac{40}{50} 1000 \Rightarrow \underline{n_1 = 800 \text{ r.p.m.}}$$

$$(C.2): \quad \Omega_1 = \frac{40}{50} 104,72 \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 83,78 \text{ rad / s}}$$

$$(C.4): \quad X_{cc} = \frac{40}{50} 1,42 \Rightarrow \underline{X_{cc} = 1,136 \Omega}$$

- Dado que el par resistente M_r es constante el motor ahora sigue proporcionando el par asignado ($M_N = 612$ Nm) y la relación (B.1) se convierte en:

$$(B.1): \quad 612 = \frac{3 \cdot x}{83,78} \frac{330^2}{(0,1 + x)^2 + 1,136^2}$$

Operando sobre la expresión anterior se obtiene una ecuación de segundo grado cuya variable independiente es x. Al resolver esta ecuación se calculan dos valores de x, a partir de los cuales (mediante la relación (B.2)) se obtienen dos valores del deslizamiento s:

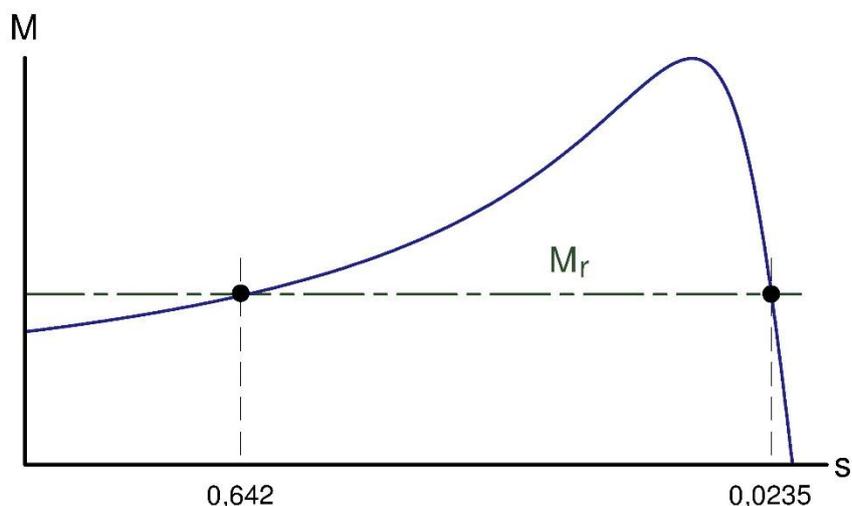


Fig. C.3: Visualización sobre la curva del par de las soluciones obtenidas

$$x = \begin{cases} 5,954 \Omega \\ 0,218 \Omega \end{cases} \Rightarrow s = \begin{cases} 0,0235 \\ 0,642 \end{cases}$$

Estos dos valores del deslizamiento s se han mostrado sobre la curva par-velocidad en la Fig. C.3. Uno de ellos es inferior a 1, pero superior al deslizamiento de par máximo. Esto significa que corresponde a un funcionamiento como motor en la zona inestable, lo cual no es deseable. Por lo tanto, el valor que hay que utilizar es el correspondiente a la zona de deslizamientos pequeños, es decir, $s = 0,0235$, donde la máquina actúa como motor en la zona estable (ver mi texto [21]).

Conocidas la velocidad de sincronismo n_1 y el deslizamiento s , la velocidad n se obtiene rápidamente utilizando la relación (4):

$$(4): \quad n = 800 (1 - 0,0235) \Rightarrow \boxed{n = 781,2 \text{ r.p.m.}}$$

- La frecuencia del rotor f_2 se obtiene mediante (C.1):

$$(C.1): \quad f_2 = 0,0235 \cdot 40 \Rightarrow \underline{f_2 = 0,94 \text{ Hz}}$$

Lógicamente, esta frecuencia es prácticamente igual a la que se tiene con el convertidor perfecto del apartado anterior. En consecuencia, también se obtienen unas velocidades muy similares con ambos convertidores.

- Cuando este motor se alimenta mediante un convertidor de frecuencia que actúa como fuente de tensión y proporciona de 330 V y 40 Hz, la velocidad pasa a ser $n = 781 \text{ r.p.m.}$

c) Convertidor de frecuencia que actúa como fuente de tensión y suministra 60 Hz

- Con $f_1 = 60 \text{ Hz}$ la tensión que suministra este convertidor es:

$$f_1 = 60 \text{ Hz} \geq f_{1N} \Rightarrow \underline{V_{1L} = 400 \text{ V}}$$

La tensión de fase V_1 se determina teniendo en cuenta que el estator está conectado en triángulo:

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_1 = V_{1L} \Rightarrow \underline{V_1 = 400 \text{ V}}$$

- Con una frecuencia $f_1 = 60 \text{ Hz}$ se tienen estas magnitudes:

$$(C.2): \quad n_1 = \frac{60}{50} 1000 \Rightarrow \underline{n_1 = 1200 \text{ r.p.m.}}$$

$$(C.2): \quad \Omega_1 = \frac{60}{50} 104,72 \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 125,66 \text{ rad / s}}$$

$$(C.4): \quad X_{cc} = \frac{60}{50} 1,42 \Rightarrow \underline{X_{cc} = 1,704 \Omega}$$

- Dado que el par resistente M_r es constante el motor ahora sigue proporcionando el par asignado y la relación (B.1) se convierte en:

$$(B.1): \quad 612 = \frac{3 \cdot x}{125,66} \frac{400^2}{(0,1 + x)^2 + 1,704^2}$$

Operando sobre la expresión anterior se obtiene una ecuación de segundo grado cuya variable independiente es x . Al resolver esta ecuación se calculan dos valores de x , a partir de los cuales (mediante la relación (B.2)) se obtienen dos valores del deslizamiento s :

$$x = \begin{cases} 5,513 \Omega \\ 0,529 \Omega \end{cases} \Rightarrow s = \begin{cases} 0,0254 \\ 0,265 \end{cases}$$

Razonando como en el apartado anterior se deduce que la solución correcta es $s = 0,0254$.

Conocidas la velocidad de sincronismo n_1 y el deslizamiento s , la velocidad n se obtiene rápidamente utilizando la relación (4):

$$(4): \quad n = 1200 (1 - 0,0254) \Rightarrow \boxed{n = 1169,5 \text{ r.p.m.}}$$

La Fig. C.4 muestra cómo son las velocidades a la que gira este motor cuando el convertidor le proporciona 40, 50 y 60 Hz, respectivamente, y debe mover una carga mecánica con un par resistente M_r constante.

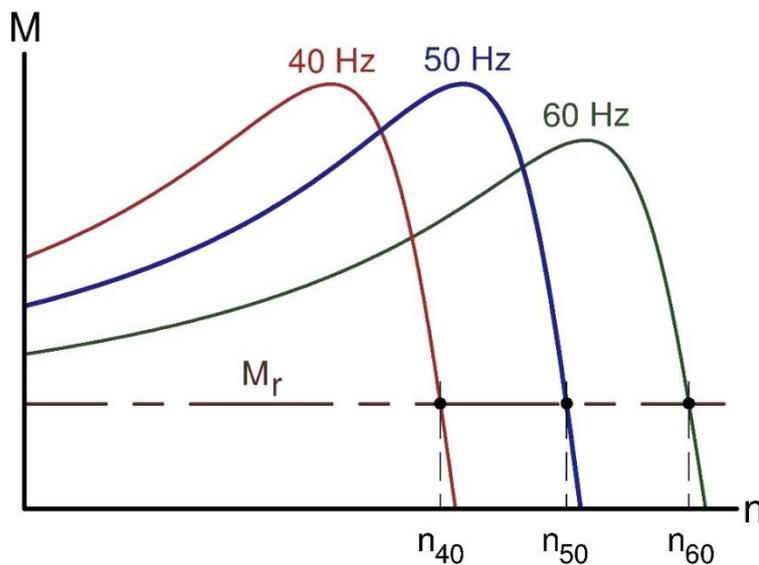


Fig. C.4: Variación de velocidad mediante un convertidor de frecuencia en el estator

- Cuando este motor se alimenta mediante un convertidor de frecuencia que actúa como fuente de tensión y proporciona de 400 V y 60 Hz, la velocidad pasa a ser $n = 1170 \text{ r.p.m.}$

d) Motor alimentado a 400 V y 50 Hz y con una resistencia R_x en serie con cada fase del rotor para que gire a $n = 908,6$ r.p.m.

- Ahora la máquina está a su tensión y frecuencia asignadas y tiene un reóstato trifásico conectado en serie con el rotor; es decir, está conectada como se muestra en la Fig. C.1.
- El deslizamiento s para la velocidad $n = 908,6$ r.p.m. se calcula mediante la relación (3):

$$(3): \quad s = \frac{1000 - 908,6}{1000} \Rightarrow \underline{s = 0,0914}$$

- El motor debe proporcionar un par M igual al par resistente M_r , que es igual al par asignado ($M_r = M_N = 612$ Nm). Luego, aplicando la fórmula (C.5) se obtiene esta igualdad:

$$(C.5): \quad 612 = \frac{3 \cdot x}{104,72} \frac{400^2}{(0,1 + x)^2 + 1,42^2} \quad (C.13)$$

La igualdad anterior permite despejar la variable auxiliar x . Sin embargo, no es necesario resolver dicha igualdad, ya que si se la compara con la expresión (C.12) que se utilizó para calcular el par asignado M_N , es fácil comprobar que se debe cumplir que:

$$(C.12) \text{ y } (C.13): \quad x = x_N = 7 \Omega$$

Teniendo en cuenta que ahora la variable auxiliar x se define mediante la relación (C.6) se deduce que:

$$(C.6): \quad x = 7 = \frac{0,14 + R'_x}{0,0914} \Rightarrow \underline{R'_x = 0,5 \Omega}$$

Finalmente, según (C.8) el verdadero valor -sin reducir al estator- de la resistencia R_x puesta en serie con cada fase del rotor debe valer:

$$(C.8): \quad R_x = \frac{R'_x}{m_v \cdot m_i} = \frac{0,5}{0,24 \cdot 0,24} \Rightarrow \boxed{R_x = 8,68 \Omega}$$

- Cuando esta máquina tiene su estator a la tensión y frecuencia asignadas y se desea que gire a una velocidad $n = 908,6$ r.p.m., es preciso conectar un reóstato trifásico de tal forma que cada fase del rotor quede en serie con una resistencia $R_x = 8,68 \Omega$.

e) Motor alimentado a 400 V y 50 Hz y con un convertidor de frecuencia en el rotor que lo hace girar a $n = 908,6$ r.p.m.

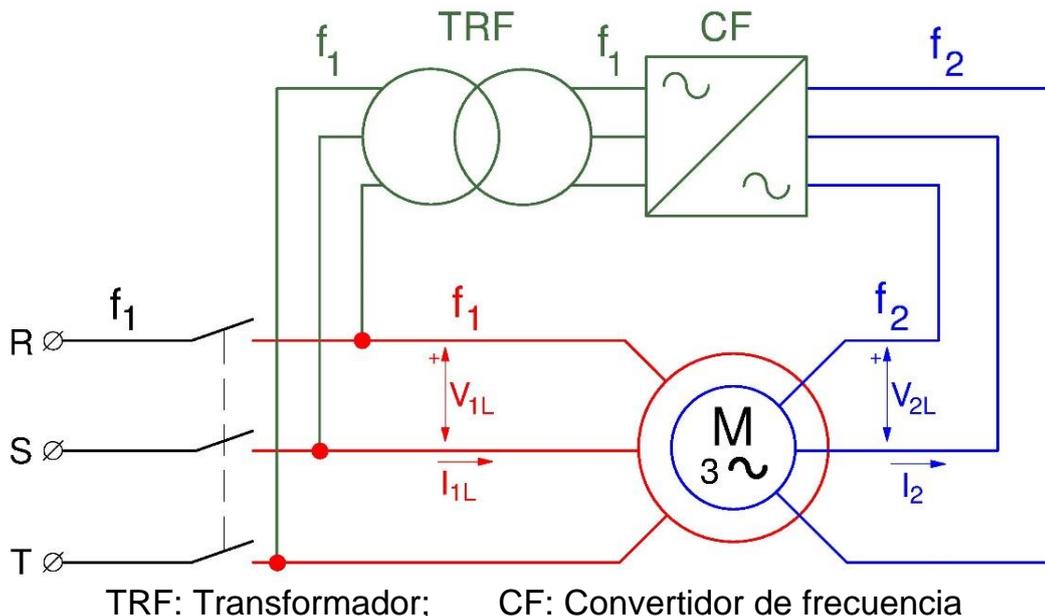


Fig. C.5 : Motor asíncrono trifásico con un convertidor de frecuencia en el rotor

La Fig. C.5 muestra cómo se conecta ahora el motor asíncrono de rotor bobinado. El estator está a su tensión y frecuencia asignadas y, a través del colector de anillos, el rotor se conecta a un convertidor de frecuencia (junto con un transformador) que es capaz de devolver a la red la potencia activa P_2 (menos unas pequeñas pérdidas) que le suministra el rotor. En mi texto [25] se estudia de forma detallada el comportamiento de una máquina asíncrona conectada de esta manera.

El convertidor de frecuencia es tal que, en cada fase del rotor, la tensión V_2 y la corriente I_2 están en fase. Por lo tanto, el rotor está exactamente en las mismas condiciones que en el apartado anterior, en el que se conectaba un reóstato trifásico al rotor. La diferencia entre ambas formas de funcionamiento consiste en que la potencia P_2 antes se disipaba en forma de calor en las resistencias R_x del reóstato y ahora dicha potencia P_2 -menos unas pequeñas pérdidas en el convertidor y en el transformador- se recupera y se reinyecta a la red eléctrica.

Dado que el rotor está en las mismas condiciones que en el apartado anterior, se van a calcular sus magnitudes suponiendo que tiene conectado el reóstato trifásico que se estudió anteriormente.

- La corriente del rotor reducida al estator I'_2 se obtiene mediante (C.7):

$$(C.7): \quad I'_2 = \frac{400}{\sqrt{(0,1 + 7)^2 + 1,42^2}} \Rightarrow \underline{I'_2 = 55,24 \text{ A}}$$

La verdadera corriente I_2 -sin reducir al estator- que circula por las fases del rotor se puede despejar de (C.8):

$$(C.8): \quad I_2 = m_i \cdot I'_2 = 0,24 \cdot 55,24 \Rightarrow \underline{I_2 = 13,26 \text{ A}}$$

- La tensión de fase V_2 y la potencia activa P_2 del rotor se van a calcular mediante las fórmulas (C.10) y (C.11), respectivamente:

$$(C.10): \quad V_2 = 8,68 \times 13,26 \Rightarrow \underline{V_2 = 115,1 \text{ V}}$$

$$(C.11): \quad P_2 = 3 \times 8,68 \times 13,26^2 \Rightarrow \boxed{P_2 = 4578 \text{ W}}$$

Dada la conexión estrella del rotor, la tensión entre fases V_{2L} se calcula empleando la relación (C.9):

$$(C.9): \quad V_{2L} = \sqrt{3} \cdot 115,1 \Rightarrow \boxed{V_{2L} = 199,4 \text{ V}}$$

- La frecuencia f_2 de las corrientes del rotor se obtiene mediante la fórmula (C.1):

$$(C.1): \quad f_2 = 0,0914 \cdot 50 \Rightarrow \boxed{f_2 = 4,57 \text{ Hz}}$$

- Cuando esta máquina tiene su estator a la tensión y frecuencia asignadas y se desea que gire a una velocidad $n = 908,6$ r.p.m., es preciso conectar a su rotor un convertidor de frecuencia que suministra una tensión de línea $V_{2L} = 199 \text{ V}$ con una frecuencia $f_2 = 4,57 \text{ Hz}$ y que demanda al rotor una potencia activa $P_2 = 4578 \text{ W}$.

Comparación entre variar la velocidad colocando un convertidor de frecuencia en el estator y en el rotor

- En el caso que se acaba de analizar, con un convertidor de frecuencia en el rotor, la potencia útil que suministra el motor vale

$$P_u = \Omega \cdot M_u = \frac{2\pi}{60} n \cdot M_u = \frac{2\pi}{60} 908,6 \times 612 \Rightarrow \underline{P_u = 58231 \text{ W}}$$

Suponiendo que el rendimiento del motor en este estado fuera $\eta = 93\%$, resulta que la potencia activa P_1 que absorbe por el estator es

$$P_1 = \frac{P_u}{\eta} = \frac{58231}{0,93} \Rightarrow \underline{P_1 = 62614 \text{ W}}$$

La relación entre la potencia activa P_2 que sale del rotor y la potencia activa P_1 que entra por el estator vale

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{4578}{62614} = 0,0731 \Rightarrow \underline{\frac{P_2}{P_1} = 7,31\%}$$

En general, esta relación entre las potencias activas del rotor P_2 y del estator P_1 es tanto mayor cuanto mayor es el deslizamiento s al que esté funcionando el motor asíncrono.

- El resultado obtenido anteriormente indica que para conseguir la misma velocidad de giro de este motor (908,6 r.p.m.) mediante un convertidor de frecuencia en el rotor se necesita un convertidor de solamente un 7,31% de la potencia del convertidor que sería necesario para variar la velocidad actuando sobre la frecuencia del estator f_1 .

Es decir, se necesita un convertidor de frecuencia más pequeño y, por consiguiente, más económico si se regula la velocidad conectando el convertidor al rotor en vez de al estator. Esto es tanto más cierto cuanto más pequeño sea el máximo deslizamiento que se desea conseguir.

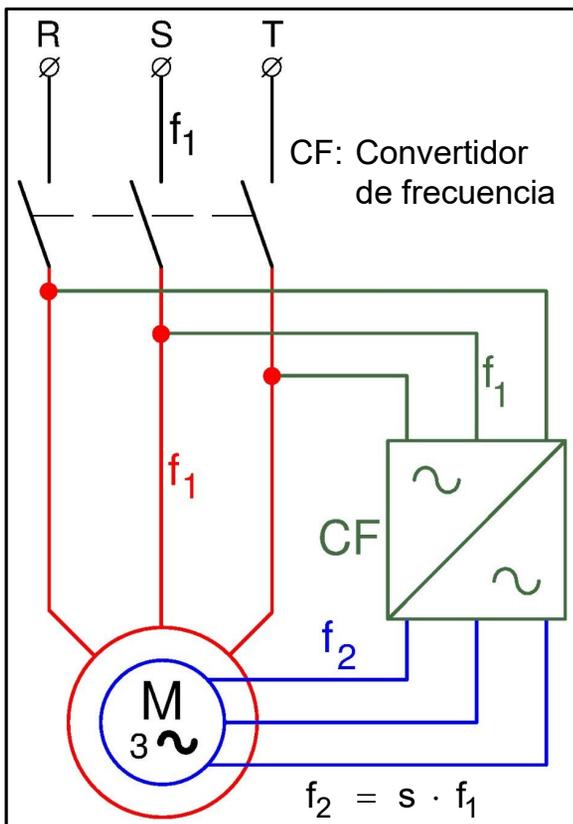
En general, salvo que se desee alcanzar deslizamientos elevados, cuando se varía la velocidad se necesita un convertidor de frecuencia más barato si se conecta al rotor en lugar de al estator. Pero esto solamente se puede hacer si se utiliza un motor asíncrono de rotor bobinado que es una máquina más cara y delicada y que requiere más mantenimiento que un motor de jaula de ardilla.

Normalmente, lo que se ahorra en el convertidor cuando se conecta al rotor no compensa lo que se encarece el equipo porque motor tenga que ser de rotor bobinado y, además, haya que colocar un transformador entre el convertidor y la red eléctrica. Por esta razón, es mucho más frecuente el empleo de motores de jaula de ardilla cuya velocidad se varía actuando sobre la frecuencia del estator f_1 mediante un convertidor de frecuencia conectado a su estator.

MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

MÁQUINA ASÍNCRONA DE ANILLOS DOBLEMENTE ALIMENTADA (1)



- Esta forma de funcionamiento consiste en alimentar el rotor de una máquina asíncrona de anillos con una tensión de frecuencia f_2 mediante un convertidor de frecuencia (que normalmente está conectado a la red a través de un transformador, que no aparece en la figura). El estator se conecta directamente a la red de frecuencia f_1 .
- La potencia eléctrica P_2 que se extrae a través del colector de anillos del rotor se reinyecta a la red mediante el convertidor.

MÁQUINA ASÍNCRONA DE ANILLOS DOBLEMENTE ALIMENTADA (2)

- El campo magnético del rotor debe girar a una velocidad absoluta igual a la velocidad de sincronismo n_1 del estator. Esto obliga a que el campo giratorio del rotor gire con una velocidad relativa n_2 con respecto al rotor tal que

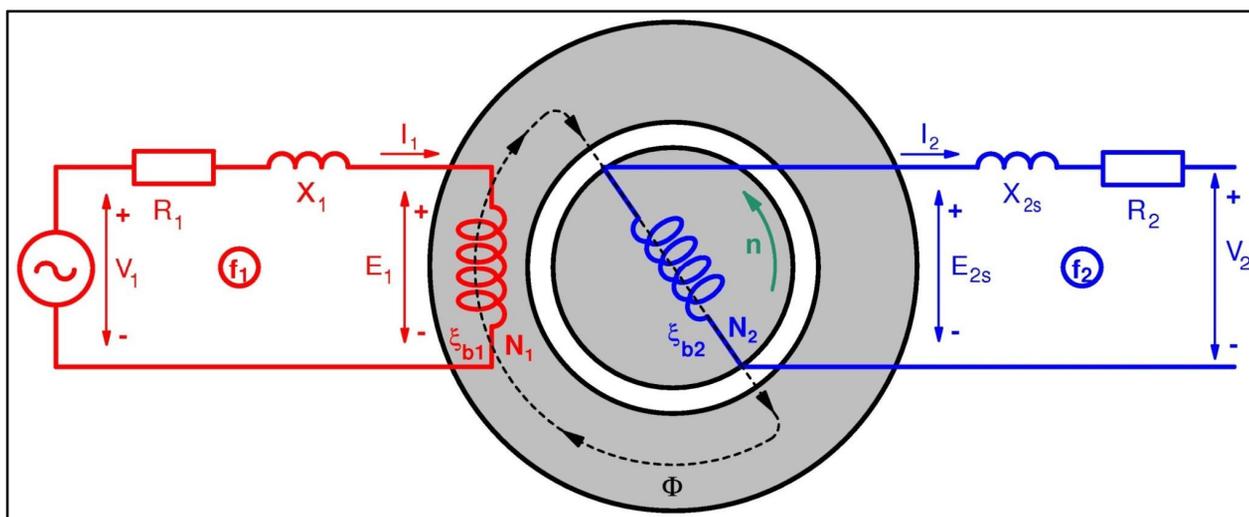
$$n_1 = n_2 + n \Rightarrow n_2 = n_1 - n = s \cdot n_1$$

- Esto exige que la frecuencia f_2 de la tensión que se conecta a los anillos del rotor sea igual a:

$$f_2 = s \cdot f_1$$

- Si la velocidad n de giro del rotor es inferior a la de sincronismo n_1 ($s > 0$) el campo giratorio del rotor debe girar con una velocidad n_2 del mismo sentido que n_1 .
- Si la velocidad n de giro del rotor es superior a la de sincronismo n_1 ($s < 0$) se debe invertir el orden de fases del rotor para que su campo giratorio gire con una velocidad n_2 de sentido contrario a n_1 .

CIRCUITO EQUIVALENTE DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (1)

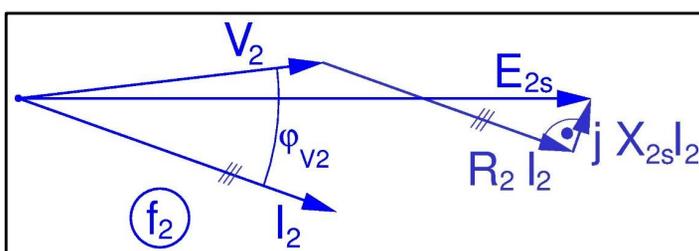


$$\bar{E}_{2s} = s \bar{E}_2 = \bar{V}_2 + \bar{I}_2 (R_2 + j X_{2s})$$

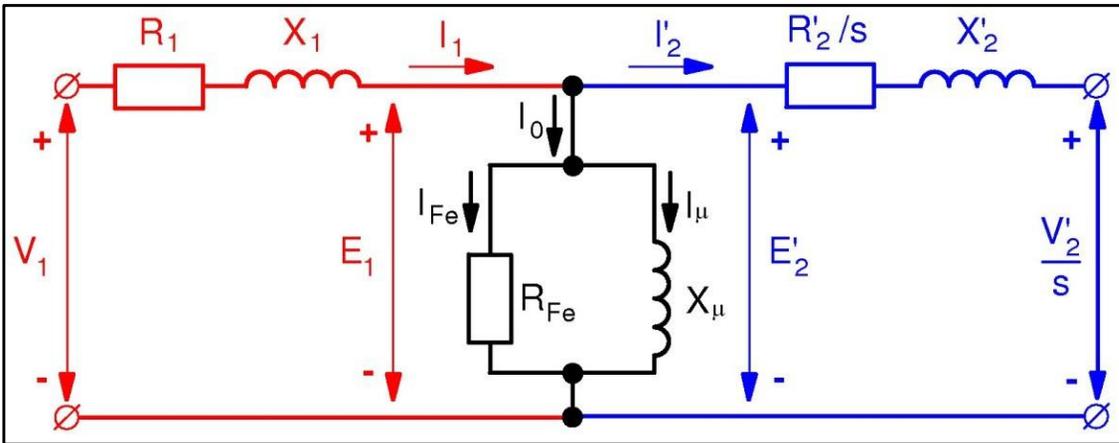
$$X_{2s} = s X_2$$

$$P_2 = m_2 V_2 I_2 \cos \varphi_{V2}$$

φ_{V2} : ángulo entre \bar{V}_2 e \bar{I}_2



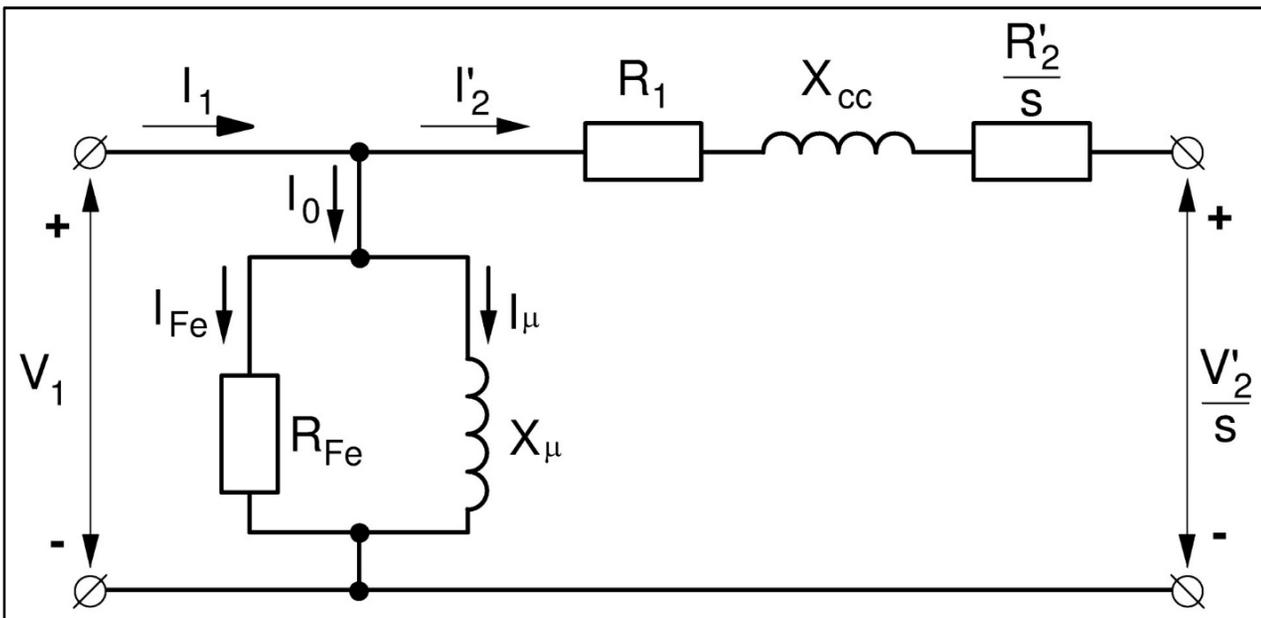
CIRCUITO EQUIVALENTE DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (2)



$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{I}_0 + \bar{I}'_2 \\ \bar{I}_0 &= \bar{I}_{Fe} + \bar{I}_\mu \\ \bar{V}_1 &= \bar{E}_1 + \bar{I}_1 (R_1 + jX_1) \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \bar{E}'_2 &= \bar{E}_1 = \frac{\bar{V}'_2}{s} + \bar{I}'_2 \left(\frac{R'_2}{s} + jX'_2 \right) \\ \bar{E}'_r &= \bar{E}'_2 - \frac{\bar{V}'_2}{s} = \bar{I}'_2 \left(\frac{R'_2}{s} + jX'_2 \right) \end{aligned} \right.$$

$$(P_2 = m_1 V'_2 I'_2 \cos \phi_{V2})$$

CIRCUITO EQUIVALENTE APROXIMADO DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA



$$X_{cc} = X_1 + X'_2$$

DIAGRAMA FASORIAL DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA CON EL ROTOR REDUCIDO AL ESTATOR

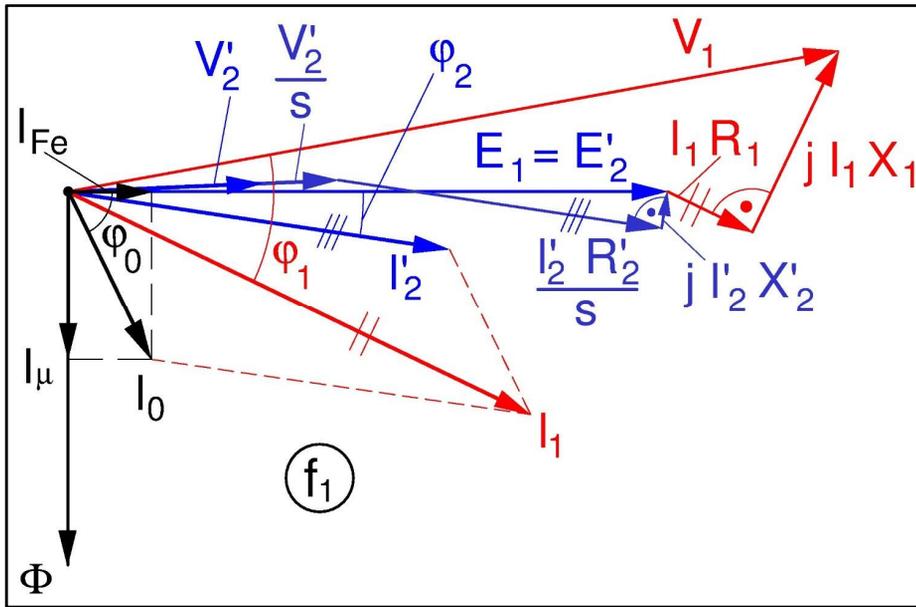


Diagrama fasorial de una máquina asíncrona doblemente alimentada con el rotor reducido al estator cuando funciona como motor y su deslizamiento s y potencia P_2 son positivos

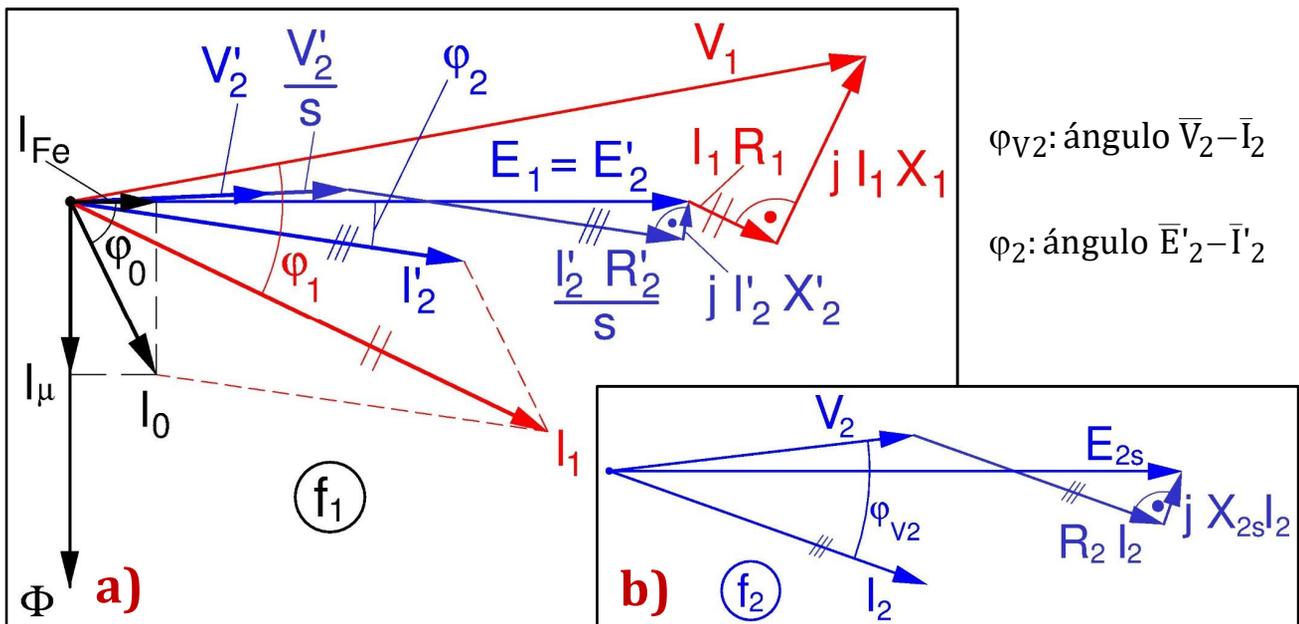
$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 + \bar{I}'_2$$

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_{Fe} + \bar{I}_\mu$$

$$\bar{V}_1 = \bar{E}_1 + \bar{I}_1 (R_1 + jX_1)$$

$$\bar{E}'_2 = \bar{E}_1 = \frac{\bar{V}'_2}{s} + \bar{I}'_2 \left(\frac{R'_2}{s} + jX'_2 \right)$$

DIAGRAMAS FASORIALES DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA



φ_{V2} : ángulo $\bar{V}_2 - \bar{I}_2$

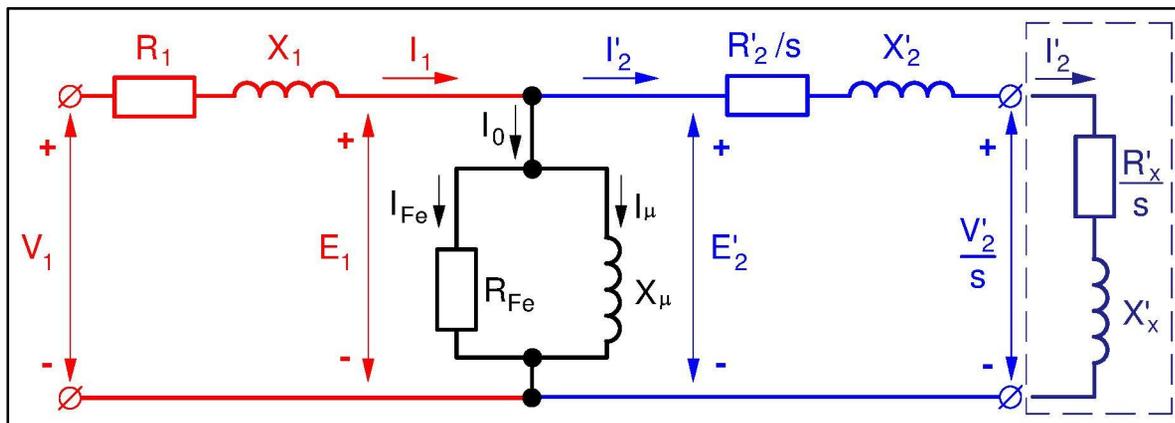
φ_2 : ángulo $\bar{E}'_2 - \bar{I}'_2$

Diagramas fasoriales de una máquina asíncrona doblemente alimentada cuando funciona como motor y su deslizamiento s y potencia P_2 son positivos.

a) Diagrama completo con el rotor reducido al estator (a frecuencia f_1)

b) Diagrama del rotor real (a frecuencia f_2)

IMPEDANCIA EXTERNA EQUIVALENTE A UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (1)

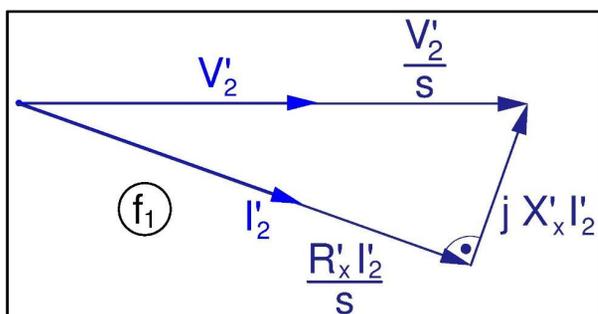


- Para un estado de funcionamiento concreto de una máquina asíncrona doblemente alimentada se puede considerar que el efecto de la tensión V_2 que se conecta a cada fase del rotor es el mismo que el de haberle conectado una impedancia externa equivalente cuyo valor reducido al estator es:

$$\bar{Z}'_x = R'_x + j X'_x = Z'_x \mid \varphi_x$$

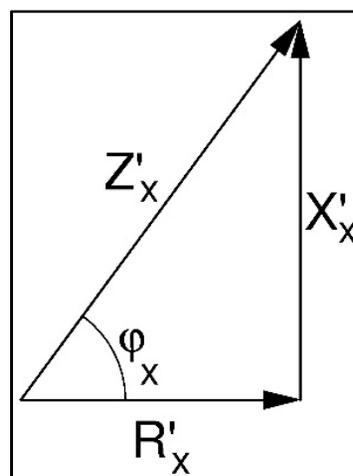
IMPEDANCIA EXTERNA EQUIVALENTE A UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (2)

- Esta impedancia externa equivalente sólo es válida para un estado de funcionamiento de la máquina. Para otro estado la impedancia externa equivalente tomará un valor distinto.
- Del circuito equivalente se deduce que:



$$\frac{\bar{V}'_2}{s} = \bar{I}'_2 \left(\frac{R'_x}{s} + j X'_x \right)$$

$$R'_x + j |s| \cdot X'_x = \frac{\bar{V}'_2}{\bar{I}'_2}$$



$$V_2 = I_2 \sqrt{R_x^2 + (s \cdot X'_x)^2}$$

IMPEDANCIA EXTERNA EQUIVALENTE A UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (3)

- Si la tensión \bar{V}_2 está desfasada con respecto a la corriente \bar{I}_2 , a través de los anillos del rotor se extrae una potencia reactiva Q_2 a frecuencia f_2 , la cual repercute sobre el estator como una potencia reactiva del mismo signo Q'_2 a frecuencia f_1 ($f_2 = s f_1$):

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= m_2 V_2 I_2 \operatorname{sen} \varphi_{v2} = m_1 I_2^2 (s |X'_x|) \\ Q'_2 &= m_1 \frac{V'_2}{|s|} I'_2 \operatorname{sen} \varphi_{v2} = m_1 I_2^2 X'_x \end{aligned} \right\} Q_2 = |s| \cdot Q'_2$$

Si \bar{I}_2 está retrasada con respecto a \bar{V}_2 , Q_2 y Q'_2 son positivas; pero si \bar{I}_2 está adelantada con respecto a \bar{V}_2 , Q_2 y Q'_2 son negativas. En este último caso X'_x es negativa y la máquina puede actuar como generador de potencia reactiva.

- El hecho de que Q_2 y Q'_2 tengan el mismo signo justifica el que se use el valor absoluto de s en la fórmula de R'_x y X'_x de la diapositiva anterior.
(Ver el anexo I).

IMPEDANCIA EXTERNA EQUIVALENTE A UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (4)

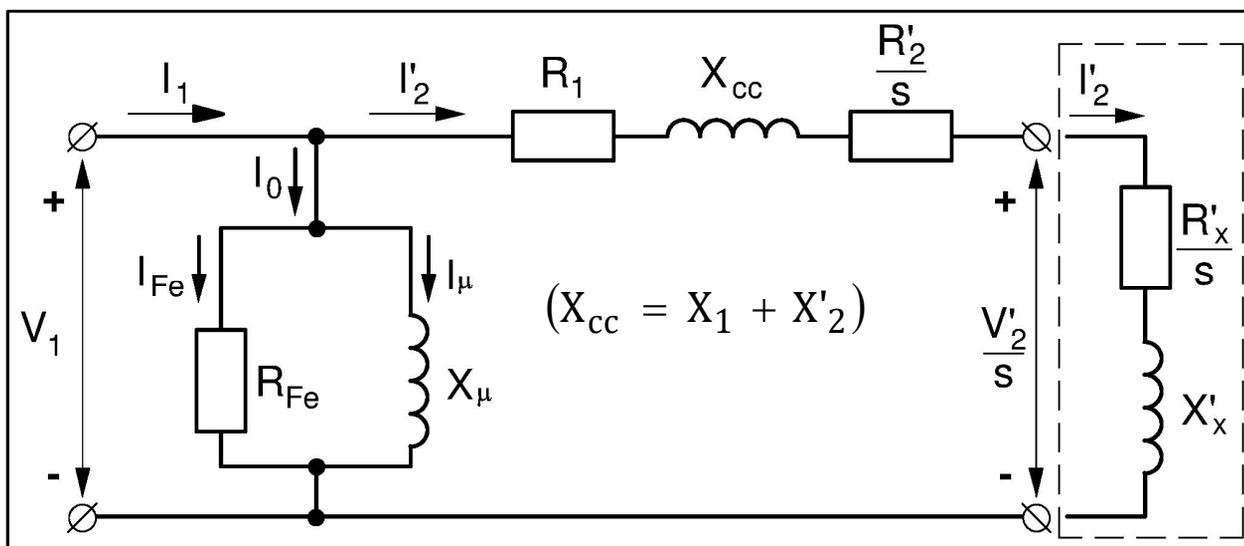
- La potencia activa P_2 que se extrae del rotor y se devuelve a la red a través del convertidor de frecuencia vale:

$$P_2 = m_2 V_2 I_2 \cos \varphi_{v2}$$

$$P_2 = m_1 V'_2 I'_2 \cos \varphi_{v2} = m_1 I_2^2 R'_x$$

Si esta potencia P_2 es negativa, significa que no se devuelve a la red sino que, al contrario, se absorbe de la red a través del convertidor de frecuencia y es enviada hacia el rotor. En este caso la resistencia adicional equivalente R'_x es negativa.

IMPEDANCIA EXTERNA EQUIVALENTE A UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (5)



Circuito equivalente aproximado de una máquina asíncrona doblemente alimentada con el rotor reducido al estator e incluyendo la impedancia externa equivalente.

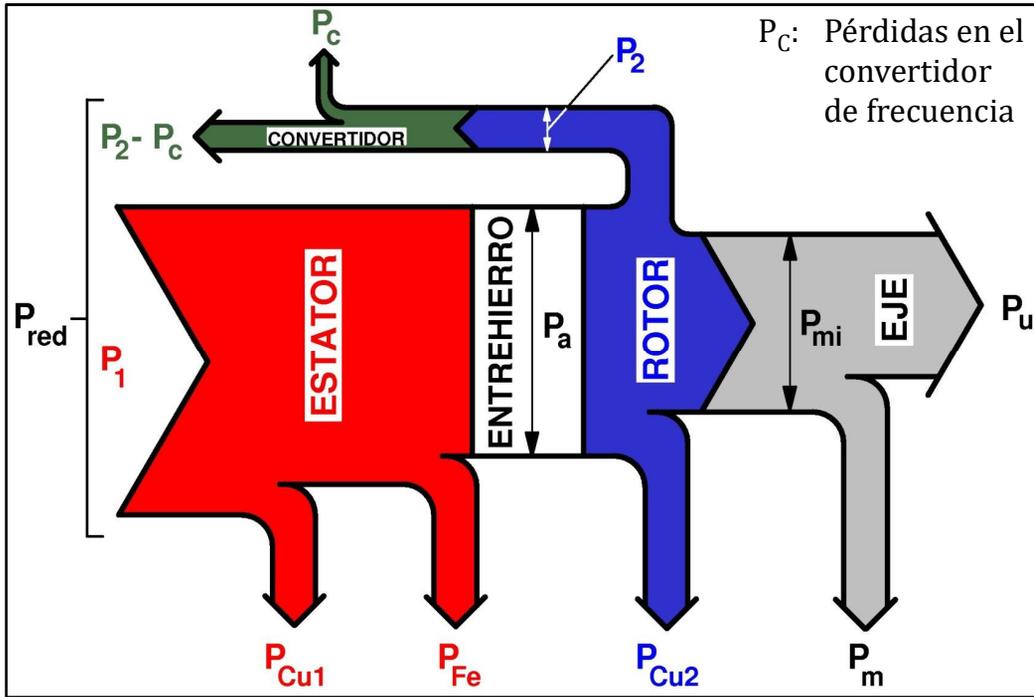
IMPEDANCIA EXTERNA EQUIVALENTE A UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (6)

- Se puede analizar un estado de funcionamiento de una máquina asíncrona doblemente alimentada utilizando las mismas fórmulas que para la máquina con el rotor en cortocircuito si se sustituyen sus parámetros del rotor R'_2 y X'_2 por $(R'_2 + R'_x)$ y $(X'_2 + X'_x)$, respectivamente :

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2 + R'_x}{s}\right)^2 + (X_1 + X'_2 + X'_x)^2}}$$

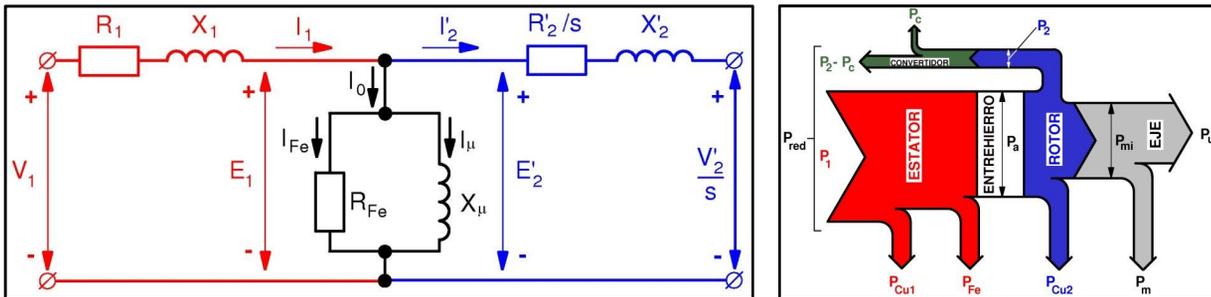
$$M = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{m_1 V_1^2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{\frac{R'_2 + R'_x}{s}}{\left(R_1 + \frac{R'_2 + R'_x}{s}\right)^2 + (X_1 + X'_2 + X'_x)^2}$$

BALANCE DE POTENCIAS DE UN MOTOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO CON DESLIZAMIENTO POSITIVO



En esta figura se ha adoptado el convenio de signos motor y se supone que el deslizamiento es positivo ($1 > s > 0$; $0 < n < n_1$)

RELACIONES ENTRE LAS POTENCIAS DE UN MOTOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO



$\phi_2 = \text{Ángulo entre } \bar{E}'_2 \text{ e } \bar{I}'_2$

$\phi_{V2} = \text{Ángulo entre } \bar{V}_2 \text{ e } \bar{I}_2$

$P_a = m_1 E'_2 I'_2 \cos \phi_2$

$P_2 = m_1 V'_2 I'_2 \cos \phi_{V2}$

$P_{Cu2} = m_1 R'_2 I'^2_2$

$P_a = P_{mi} + P_2 + P_{Cu2}$

$P_{mi} = (1 - s)P_a$

$(P_2 + P_{Cu2}) = s \cdot P_a$

$P_{mi} = \left(\frac{1 - s}{s}\right) (P_2 + P_{Cu2})$

$P_{mi} = \left(\frac{1 - s}{s}\right) (m_1 V'_2 I'_2 \cos \phi_{V2} + m_1 R'_2 I'^2_2)$

En el circuito equivalente se aprecia que la potencia activa total consumida en el rotor, P_a , es igual a la suma de la gastada en la resistencia R'_2/s más la debida a V'_2/s :

$$P_a = m_1 I_2^2 \frac{R'_2}{s} + m_1 \frac{V'_2}{s} I'_2 \cos \varphi_{V2}$$

En consecuencia:

$$P_a = \frac{m_1 I_2^2 R'_2 + m_1 V'_2 I'_2 \cos \varphi_{V2}}{s} \rightarrow \boxed{P_a = \frac{P_{Cu2} + P_2}{s}}$$

$$P_{mi} = P_a - (P_{Cu2} + P_2) = P_a - s \cdot P_a$$

$$\boxed{P_{mi} = (1 - s) P_a}$$

$$\boxed{P_{mi} = \left(\frac{1 - s}{s} \right) (P_2 + P_{Cu2})}$$

Luego, en el circuito equivalente la potencia mecánica interna P_{mi} es la suma de la gastada en la resistencia R'_c más la correspondiente a la tensión V'_c :

$$R'_c = R'_2 \left(\frac{1 - s}{s} \right) = R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \quad V'_c = V'_2 \left(\frac{1 - s}{s} \right) = V'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$$

- En la práctica el valor absoluto de la potencia P_2 es siempre superior a P_{Cu2} . Por lo tanto, el signo de la suma $(P_2 + P_{Cu2})$ es el mismo que el de P_2 .

$$\boxed{P_a = \frac{P_{Cu2} + P_2}{s}}$$

$$\boxed{P_{mi} = \left(\frac{1 - s}{s} \right) (P_2 + P_{Cu2})}$$

- Si la potencia **P_2 es positiva** (P_2 es devuelta a la red a través del convertidor de frecuencia), sucede que $(P_{Cu2} + P_2) > 0$. Luego:
 - Si el deslizamiento **s es positivo ($s > 0$)**:
 $P_a > 0$; $P_{mi} > 0$: Funcionamiento como **motor**.
 - Si el deslizamiento **s es negativo ($s < 0$)**:
 $P_a < 0$; $P_{mi} < 0$: Funcionamiento como **generador**.
- Si la potencia **P_2 es negativa** (P_2 es inyectada al rotor mediante el convertidor de frecuencia), sucede que $(P_{Cu2} + P_2) < 0$. Luego:
 - Si el deslizamiento **s es positivo ($s > 0$)**:
 $P_a < 0$; $P_{mi} < 0$: Funcionamiento como **generador**.
 - Si el deslizamiento **s es negativo ($s < 0$)**:
 $P_a > 0$; $P_{mi} > 0$: Funcionamiento como **motor**.

CONTROL DE LA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA

- La máquina asíncrona doblemente alimentada puede actuar de motor y de generador, tanto con deslizamientos positivos como negativos.
- Si el convertidor de frecuencia permite variar tanto el valor eficaz de V_2 como su ángulo de desfase, se pueden controlar (en valor y en signo) las potencias activa y reactiva absorbidas de la red y el par y el deslizamiento de la máquina. Todo esto con un convertidor que maneja la potencia P_2 que es sólo una fracción de la potencia P_1 del estator:
 - La componente de \bar{V}_2 paralela a \bar{E}_2 sobre todo afecta a la potencia activa P_1 absorbida por la máquina, al par M y al deslizamiento s .
 - La componente de \bar{V}_2 perpendicular a \bar{E}_2 básicamente influye sobre la potencia reactiva Q_1 absorbida por la máquina.

(ver el anexo II)

SIMPLIFICACIÓN DEL BALANCE DE POTENCIAS DE UN MOTOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO

Si se desprecian todas las pérdidas: P_{Cu1} , P_{Cu2} , P_{Fe} , P_m y P_c (P_c son las pérdidas en el convertidor de frecuencia), el balance de potencias de la máquina asíncrona queda así:

$$P_{Cu1} \text{ y } P_{Fe} \approx 0 \Rightarrow P_1 \approx P_a = m_1 E'_2 I'_2 \cos \varphi_2 \quad \boxed{P_1 \approx P_a}$$

$$P_{Cu2} \approx 0 \Rightarrow P_2 = s \cdot P_a \approx s \cdot P_1 \quad \boxed{P_2 \approx s \cdot P_1}$$

$$P_m \approx 0 \Rightarrow P_u \approx P_{mi} = (1 - s) P_a \quad \boxed{P_u \approx (1 - s) P_1}$$

$$P_c \approx 0 \Rightarrow P_{red} = P_1 - P_2 + P_c \approx P_1 - P_2 \quad \boxed{P_{red} \approx P_1 - P_2 \approx P_u}$$

(P_{red} es la potencia total que el motor consume de la red)

BALANCE DE POTENCIAS SIMPLIFICADO DE UN MOTOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO (1)

Máquina actuando como **motor**:

- $P_1 > 0$: P_1 se absorbe por el estator.
- $P_a > 0$: P_a va desde el estator hacia el rotor a través del entrehierro.
- $\cos \varphi_2 > 0$; $|\varphi_2| < 90^\circ$
- P_u y $P_{mi} > 0$: La máquina suministra potencia mecánica por su eje.

BALANCE DE POTENCIAS SIMPLIFICADO DE UN MOTOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO (2)

- Máquina actuando como **motor**:
- DESLIZAMIENTO POSITIVO ($1 > s > 0$; $0 < n < n_1$):
 - $P_2 \approx s \cdot P_1 > 0$ La potencia P_2 sale del rotor hacia la red a través del convertidor de frecuencia y $|\varphi_{V2}| < 90^\circ$.
 - $P_{red} \approx P_1 - P_2 \approx P_u > 0$ Se consume potencia activa de la red.
- DESLIZAMIENTO NEGATIVO ($s < 0$; $n > n_1$):
 - $P_2 \approx s \cdot P_1 < 0$ La potencia P_2 entra al rotor desde la red a través del convertidor de frecuencia y $|\varphi_{V2}| > 90^\circ$.
 - $P_{red} \approx P_1 + |P_2| \approx P_u > 0$ Se consume potencia activa de la red.
 - En este caso se consume potencia activa de la red por el estator y por el rotor.

BALANCE DE POTENCIAS SIMPLIFICADO DE UN GENERADOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO (1)

Máquina actuando como **generador**:

- $P_1 < 0$: P_1 se envía a la red desde el estator.
- $P_a < 0$: P_a va desde el rotor hacia el estator a través del entrehierro.
- $\cos \varphi_2 < 0$; $|\varphi_2| > 90^\circ$
- P_u y $P_{mi} < 0$: La máquina absorbe potencia mecánica por su eje.
- Haciendo que la tensión \bar{V}_2 tenga una componente perpendicular a \bar{E}_2 se puede conseguir que un generador asíncrono suministre potencia reactiva a la red (lo que es imposible cuando el rotor está en cortocircuito).

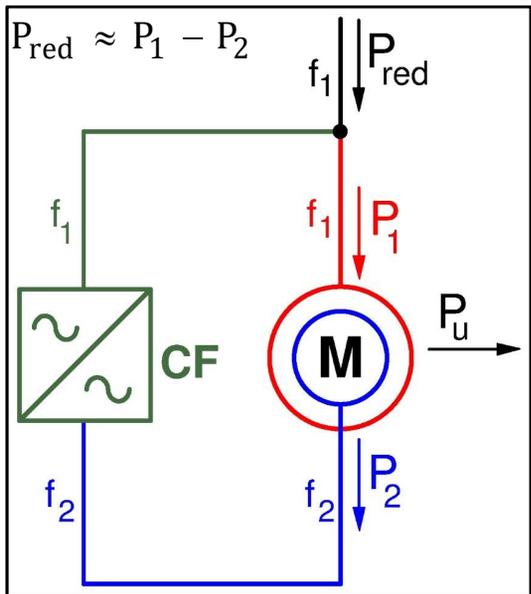
BALANCE DE POTENCIAS SIMPLIFICADO DE UN GENERADOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO (2)

- Máquina actuando como **generador**:
- DESLIZAMIENTO POSITIVO ($1 > s > 0$; $0 < n < n_1$):
 - $P_2 \approx s \cdot P_1 < 0$ La potencia P_2 es absorbida de la red por el rotor a través del convertidor de frecuencia y $|\varphi_{V2}| > 90^\circ$.
 - $P_{red} \approx P_1 - P_2 \approx P_u < 0$ Se envía potencia activa a la red.
 $|P_{red}| \approx |P_1| - |P_2|$
- DESLIZAMIENTO NEGATIVO ($s < 0$; $n > n_1$):
 - $P_2 \approx s \cdot P_1 > 0$ La potencia P_2 sale del rotor hacia la red a través del convertidor de frecuencia y $|\varphi_{V2}| < 90^\circ$
 - $P_{red} \approx P_1 - P_2 \approx P_u < 0$ Se envía potencia activa a la red.
 - $|P_{red}| \approx |P_1| + |P_2|$ En este caso se genera potencia activa tanto en el estator como en el rotor y, por lo tanto, se puede producir más potencia que la asignada.

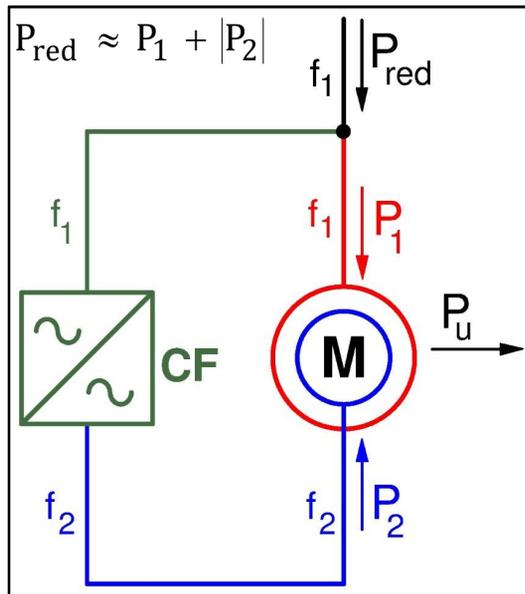
BALANCES DE POTENCIAS SIMPLIFICADOS DE UN MOTOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO

Funcionamiento como motor: $P_{red} > 0$; $P_1 > 0$; $P_{mi} > 0$

$$(P_2 \approx s \cdot P_1 ; P_u \approx (1 - s)P_1)$$



$P_2 > 0$; $1 > s > 0$; $0 < n < n_1$

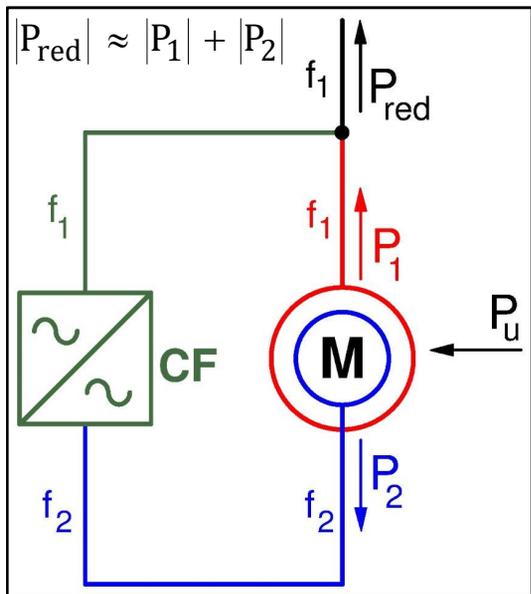


$P_2 < 0$; $s < 0$; $n > n_1$

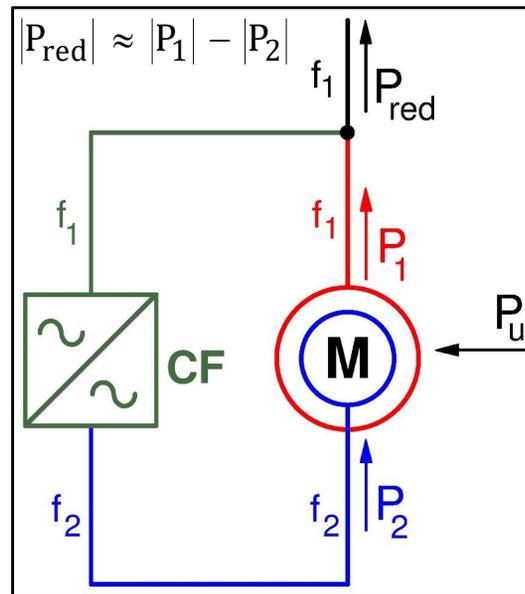
BALANCES DE POTENCIAS SIMPLIFICADOS DE UN GENERADOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO

Funcionamiento como generador: $P_{red} < 0$; $P_1 < 0$; $P_{mi} < 0$

$$(P_2 \approx s \cdot P_1 ; P_u \approx (1 - s)P_1)$$



$P_2 > 0$; $s < 0$; $n > n_1$



$P_2 < 0$; $1 > s > 0$; $0 < n < n_1$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ALGER, P. L. 1970. *Induction machines. Their behavior and uses*. 2ª edición. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
- [2] APARICIO MARZO, J. L. 1987. *Criterios de diseño de convertidores estáticos para accionamientos regulados en corriente alterna con motores de inducción*. Santiago de Compostela. Saber Hoy, S.A. de Ediciones.
- [3] BOLDEA, ION. 2006. *Variable speed generators*. Florida-U.S.A.: CRC Press, Taylor&Francis Group.
- [4] BOSE, B. K. 1986. *Power electronics and AC drives*. New Jersey - U.S.A. Prentice-Hall.
- [5] CHAPALLAZ, J.-M., DOS GHALL, J., EICHENBERGER, P. y FISCHER, F. 1992. *MHPG Series, Harnessing water power on small scale, vol. 10: Manual of induction motors used as generators*. Alemania: GTZ.
- [6] CHAPMAN. 2005. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [7] CORTES CHERTA. 1994. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. 5 tomos*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [8] FITZGERALD, KINGSLEY Y UMANS. 2004. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [9] FAURE BENITO. 2000. *Máquinas y accionamientos eléctricos*. Madrid: Colegio oficial de ingenieros navales y oceánicos.
- [10] FRAILE MORA, J. 2015. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L.
- [11] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas*. Moscú: Editorial Mir.
- [12] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas*. Moscú: Editorial Mir.
- [13] LANGSDORF. 1968. *Teoría de las máquinas de corriente alterna*. Madrid. Editorial Castillo D.L.
- [14] LEONHARD, W. 1985. *Control of electrical drives*. Berlin. Springer-Verlag.
- [15] MURPHY, J. M. D. & TURNBULL, F. G. 1988. *Power electronic control of AC motors*. Oxford - Gran Bretaña. Pergamon Press.
- [16] PICHOR, J. 1969. *Curso de electrotecnia IV. Máquinas eléctricas: máquinas de inducción*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [17] RODRÍGUEZ AMENEDO, J.L.; ARNALTE, S.; BURGOS, J.C. 2003. *Sistemas eólicos de producción de energía eléctrica*. Madrid: Editorial Rueda, S.L.
- [18] SANZ FEITO, JAVIER. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Education.
- [19] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2008. *Máquinas asíncronas*. Santander: Universidad de Cantabria. <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/asincronas%20caminos.pdf>
- [20] SERRANO IRIBARNEGARAY, L. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [21] SUÁREZ CREO, J.M. y MIRANDA BLANCO, B.N. 2006. *Máquinas eléctricas. Funcionamiento en régimen permanente*. Santiago de Compostela: Tórculo Edicións, S.L.
- [22] WILDI, T. 2007. *Máquinas eléctricas y sistemas de potencia*. México: Pearson Educación.

MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA. ANEXOS

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

ANEXO I: POTENCIA REACTIVA

- Recordemos que la potencia reactiva no representa a una potencia realmente consumida. En un circuito de corriente alterna formado por un generador y un receptor con elementos capaces de almacenar energía (inductancias y condensadores), durante medio ciclo la energía fluye del generador hacia el receptor, donde queda almacenada en forma de campo magnético (inductancias) o de campo eléctrico (condensadores). Durante el medio ciclo restante, la energía previamente almacenada es devuelta al generador. Por lo tanto, la potencia reactiva proviene de una energía que va y viene del generador hacia el receptor y viceversa y cuyo valor medio es nulo.

El comportamiento frente a la potencia reactiva de las inductancias y de los condensadores es diferente. En el medio periodo en el que una inductancia está recibiendo energía desde el generador, un condensador está devolviendo al generador la energía que había almacenado previamente y viceversa.

Por convenio establecemos que una autoinducción *consume* energía reactiva y un condensador la *genera*. Realmente ambos consumen por término medio una potencia nula, pero de esta manera distinguimos las dos formas diferentes de actuar de bobinas y de condensadores.

Dado que se está analizando la máquina asíncrona partiendo de que funciona como motor (convenio de signos motor), lo anterior significa que la potencia reactiva para elementos con factor de potencia inductivo es positiva (consumida) y para elementos con factor de potencia capacitivo es negativa (generada):

- Factor de potencia inductivo: $Q > 0$
- Factor de potencia capacitivo: $Q < 0$

- En una máquina asíncrona, tanto con el rotor en cortocircuito como doblemente alimentada, el rotor es un circuito eléctrico a frecuencia f_2 mientras que el estator tiene una frecuencia f_1 . Ambas frecuencias están ligadas así:

$$f_2 = s \cdot f_1 \quad (I.1)$$

Es el hecho de que el rotor gire a una velocidad n el que hace que las frecuencias del estator y del rotor sean diferentes.

Esto provoca que un elemento del rotor que tiene una potencia reactiva Q a frecuencia f_2 repercute sobre el estator con una potencia reactiva Q' a frecuencia f_1 de esta manera:

$$Q = |s| \cdot Q' \quad Q' = \frac{Q}{|s|} \quad (I.2)$$

En las expresiones anteriores se usa el valor absoluto del deslizamiento s porque ambas potencias reactivas, Q y Q' , tienen siempre el mismo signo, independientemente del signo de s .

En resumen, una potencia reactiva Q en el rotor queda modificada por el movimiento de la máquina de forma que da lugar en el estator a una potencia reactiva Q' del mismo signo.

- En una máquina asíncrona doblemente alimentada la potencia reactiva Q_2 , correspondiente a la tensión aplicada al rotor V_2 y que se envía hacia el convertidor de frecuencia a través de los anillos del colector, tiene una frecuencia f_2 y vale:

$$Q_2 = m_2 V_2 I_2 \text{ sen } \varphi_{V_2} = m_1 V'_2 I'_2 \text{ sen } \varphi_{V_2} \quad (\text{I.3})$$

(a frecuencia f_2)

$$I'_2 = I_2/m_i \quad V'_2 = m_v V_2 \quad (\text{I.4})$$

En estas expresiones m_1 y m_2 son, respectivamente, los números de fases del estator y del rotor y, por otra parte, m_i y m_v son, respectivamente, las relaciones de transformación de corrientes y de tensiones. Además, el ángulo φ_{V_2} es el formado entre \bar{V}_2 e \bar{I}_2 .

Como se ha indicado en el párrafo anterior, esta potencia reactiva Q_2 repercute sobre el estator haciendo que aparezca en él una potencia Q'_2 a frecuencia f_1 . Aplicando la relación (I.2) a estas potencias y teniendo en cuenta la relación (I.3) se deduce que:

$$Q_2 = |s| \cdot Q'_2 \quad Q'_2 = \frac{Q_2}{|s|} \quad (\text{I.5})$$

$$Q'_2 = m_1 \frac{V'_2}{|s|} I'_2 \text{ sen } \varphi_{V_2} = m_1 X'_x I'^2_2 \quad (\text{I.6})$$

(a frecuencia f_1)

- La potencia activa P_2 que envía el rotor a través de sus anillos verifica que:

$$P_2 = m_2 V_2 I_2 \text{ cos } \varphi_{V_2} \quad (\text{I.7a})$$

$$P_2 = m_1 V'_2 I'_2 \text{ cos } \varphi_{V_2} = m_1 R'_x I'^2_2 \quad (\text{I.7b})$$

De lo que se deduce que el ángulo φ_{V_2} de desfase entre \bar{V}_2 e \bar{I}_2 y el ángulo φ_x de la impedancia externa equivalente \bar{Z}'_x están relacionados así:

$$\bar{Z}'_x = R'_x + j X'_x = Z'_x \angle \varphi_x$$

$$\frac{Q_2}{P_2} = \frac{\text{sen } \varphi_{V_2}}{\text{cos } \varphi_{V_2}} = \text{tg } \varphi_{V_2} \quad \frac{Q'_2}{P_2} = \frac{X'_x}{R'_x} = \text{tg } \varphi_x \quad \frac{\text{tg } \varphi_{V_2}}{\text{tg } \varphi_x} = \frac{Q_2}{Q'_2} = |s|$$

$$\text{tg } \varphi_{V_2} = |s| \cdot \text{tg } \varphi_x \quad (\text{I.8})$$

- En el rotor hay dos potencias reactivas: Q_2 , debida a V_2 , y $Q_{\sigma 2}$, debida a la inductancia de dispersión L_{d2} (que al reducir al estator da lugar a la reactancia de dispersión X'_2). Ambas potencias reactivas se producen en un circuito de frecuencia f_2 y suman la potencia reactiva Q_a (ver la Fig. I.1):

$$Q_a = Q_{\sigma 2} + Q_2 \quad (I.9)$$

(a frecuencia f_2)

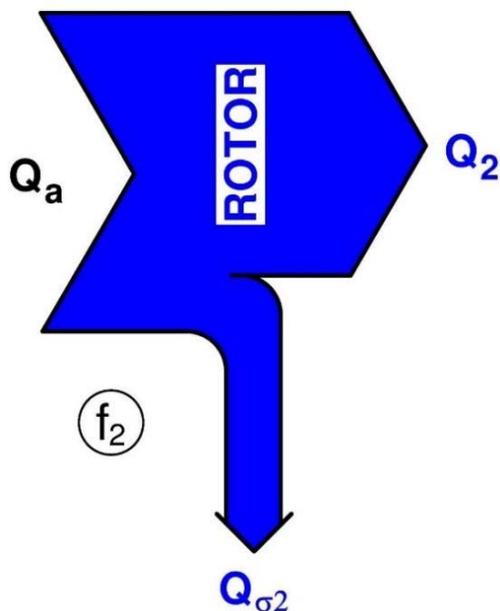


Fig. I.1: Flujo de potencia reactiva en el rotor, a frecuencia f_2 (se supone que $Q_2 > 0$)

- El flujo de potencia reactiva en el estator se muestra en la Fig. I.2.

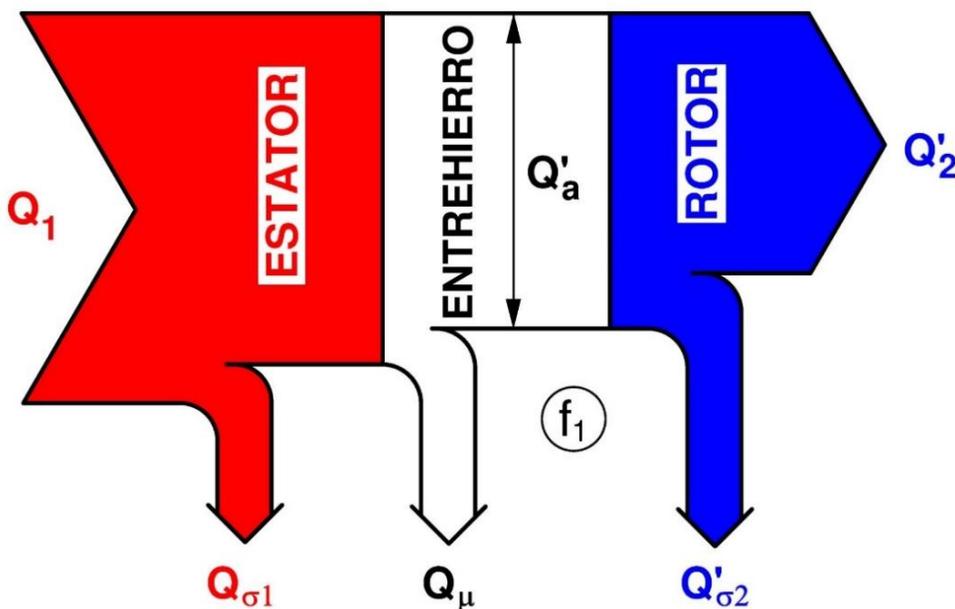


Fig. I.2: Flujo de potencia reactiva en el estator, a frecuencia f_1 (se supone que $Q'_2 > 0$)

Según esta figura, la potencia reactiva total del rotor Q'_a referida al estator verifica lo siguiente:

$$Q'_a = Q'_{\sigma 2} + Q'_2 = \frac{Q_a}{|s|} \quad (I.10)$$

(a frecuencia f_1)

Del circuito equivalente (Fig. II.1) se deduce que Q'_a también cumple que:

$$Q'_a = m_1 E'_2 I'_2 \cos \varphi_2 \quad (I.11)$$

$Q'_{\sigma 2}$ es la potencia reactiva de dispersión del rotor referida al estator:

$$Q'_{\sigma 2} = m_1 X'_2 I'^2_2 \quad (I.12)$$

Q_1 es la potencia reactiva total que la máquina consume por el estator:

$$Q_1 = m_1 V_1 I_1 \cos \varphi_1 \quad (I.13a)$$

$$Q_1 = Q_{\sigma 1} + Q_{\mu} + Q'_{\sigma 2} + Q'_2 = Q_{\sigma 1} + Q_{\mu} + Q'_a \quad (I.13b)$$

$Q_{\sigma 1}$ es la potencia reactiva de dispersión del estator y Q_{μ} es la potencia reactiva magnetizante:

$$Q_{\sigma 1} = m_1 X_1 I^2_1 \quad Q_{\mu} = m_1 X_{\mu} I^2_0 \quad (I.14)$$

- Las potencias reactivas $Q_{\sigma 1}$, Q_{μ} y $Q_{\sigma 2}$ son siempre positivas, mientras que la potencia Q_2 puede tener signo positivo o negativo, dependiendo del ángulo de desfase φ_{v2} .

Cuando la máquina tiene el rotor en cortocircuito no existe la tensión V_2 ni la potencia reactiva Q_2 . Por lo tanto, *una máquina asíncrona con el rotor cortocircuitado nunca podrá generar potencia reactiva* y Q_1 siempre será positiva.

Cuando la máquina asíncrona está doblemente alimentada y el convertidor del rotor permite modificar el ángulo φ_{v2} es posible conseguir que la potencia Q_1 sea negativa (si Q_2 es negativa y lo suficientemente grande en valor absoluto como para superar a la suma de las potencias positivas $Q_{\sigma 1}$, Q_{μ} y $Q_{\sigma 2}$). Es decir, *la máquina asíncrona doblemente alimentada puede funcionar como generador de potencia reactiva*.

Por otra parte, hay que considerar que, si se desea que el convertidor de frecuencia no solamente origine la potencia activa P_2 , sino también la potencia reactiva Q_2 ; el convertidor debe ser capaz de modificar el ángulo φ_{v2} y por él debe circular una corriente mayor, lo que exige que sea de mayor potencia. Todo esto hace que el convertidor sea más caro.

ANEXO II: CONTROL DE LA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA

- En una máquina asíncrona, el par M se puede obtener así:

$$M = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{P_a}{\frac{2\pi}{60} n_1} \tag{II.1}$$

Ω_1 es la velocidad de sincronismo expresada en radianes/segundo y n_1 también es la velocidad de sincronismo, pero expresada en r.p.m. P_a es la potencia del entrehierro, es decir, la potencia que va del estator al rotor atravesando el entrehierro. P_a se calcula así:

$$P_a = m_1 E'_2 I'_2 \cos \varphi_2 = m_1 E'_2 I'_{2a} \tag{II.2}$$

$$I'_{2a} = I'_2 \cos \varphi_2 \tag{II.3}$$

Por otra parte, la potencia reactiva total del rotor referida al estator Q'_a se calcula de esta manera:

$$Q'_a = m_1 E'_2 I'_2 \sin \varphi_2 = m_1 E'_2 I'_{2r} \tag{II.4}$$

$$I'_{2r} = I'_2 \sin \varphi_2 \tag{II.5}$$

En las expresiones anteriores φ_2 es el ángulo entre \bar{E}'_2 e \bar{I}'_2 . En las fórmulas (II.2) y (II.4) se aprecia que mediante la componente I'_{2a} de \bar{I}'_2 paralela a \bar{E}'_2 se puede controlar el par M; lo cual, a su vez, permite ajustar el valor del deslizamiento s (o la velocidad n del rotor) al valor deseado. I'_{2a} también permite regular el valor de la potencia activa del estator P_1 al modificar la potencia P_a . Por otra parte, la componente I'_{2r} de \bar{I}'_2 perpendicular a \bar{E}'_2 permite modificar la potencia reactiva del estator Q_1 al actuar sobre Q'_a .

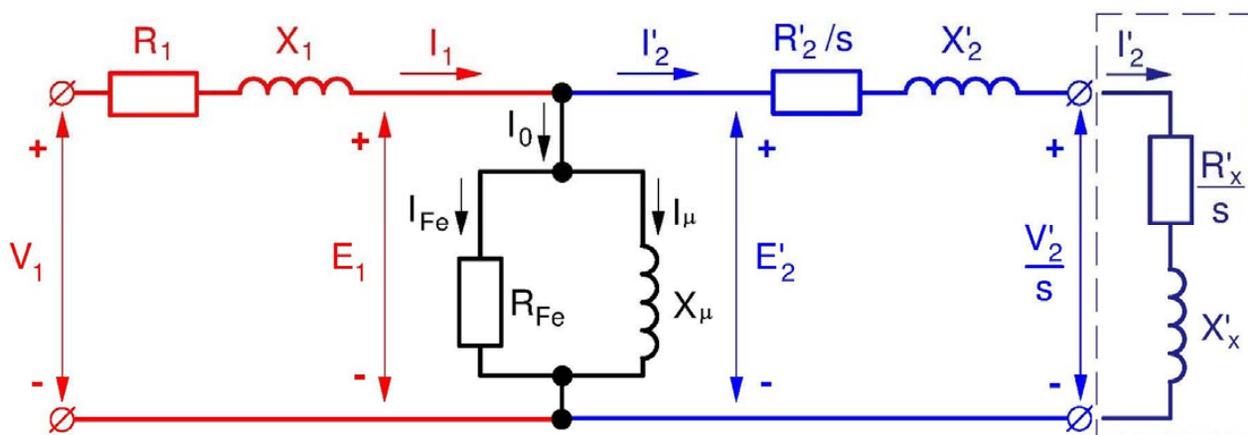


Fig. II.1: Circuito equivalente de una máquina asíncrona doblemente alimentada

Del circuito equivalente del motor asíncrono doblemente alimentado (Fig. II.1) se deduce que:

$$\bar{E}'_2 = \frac{\bar{V}'_2}{s} + \bar{I}'_2 \left(\frac{R'_2}{s} + jX'_2 \right) \quad (II.6)$$

- Si la máquina funciona con un deslizamiento s pequeño sucede que:

$$s \ll \Rightarrow \frac{R'_2}{s} \gg X'_2 \Rightarrow \frac{R'_2}{s} + jX'_2 \approx \frac{R'_2}{s} \quad (II.7)$$

De las relaciones (II.6) y (II.7) se obtiene que:

$$s \ll \Rightarrow \bar{E}'_2 \approx \frac{\bar{V}'_2}{s} + \bar{I}'_2 \frac{R'_2}{s} \Rightarrow \bar{I}'_2 \approx \frac{s \bar{E}'_2 - \bar{V}'_2}{R'_2} \quad (II.8)$$

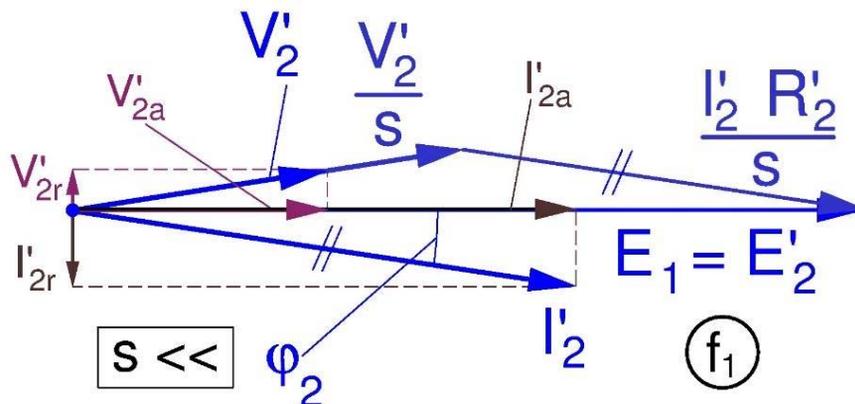


Fig. II.2: Componentes de \bar{V}'_2 e \bar{I}'_2 y diagrama fasorial cuando el deslizamiento s es pequeño.

En esta figura I'_{2a} e I'_{2r} son positivos, pues originan potencias P_2 y Q_2 positivas

La expresión (II.8) da lugar al diagrama de la figura II.2, donde se muestran los sentidos positivos de I'_{2a} e I'_{2r} (que son los que dan lugar a potencias P_2 y Q_2 positivas) y de la cual se deduce que:

$$s \ll \Rightarrow I'_{2a} \approx \frac{s E'_2 - V'_{2a}}{R'_2} ; \quad I'_{2r} \approx -\frac{V'_{2r}}{R'_2} \quad (II.9)$$

De estas relaciones se deduce que, con deslizamientos s pequeños, mediante la componente V'_{2a} de \bar{V}'_2 paralela a \bar{E}'_2 se controla I'_{2a} y mediante la componente V'_{2r} de \bar{V}'_2 perpendicular a \bar{E}'_2 se controla I'_{2r} .

Una máquina asíncrona doblemente alimentada puede alcanzar en régimen permanente deslizamientos s mayores que con el rotor en cortocircuito (típicamente en estas máquinas el convertidor permite que $|s|$ pueda llegar a valer 0,2 o, incluso, 0,25) donde ya no son válidas las aproximaciones (II.7), (II.8) y (II.9). Aun así, se puede afirmar que la componente V'_{2a} de \bar{V}'_2 paralela a \bar{E}'_2 básicamente modifica el par M , el deslizamiento s y la potencia P_1 ; mientras que la componente V'_{2r} de \bar{V}'_2 perpendicular a \bar{E}'_2 fundamentalmente regula la potencia reactiva del estator Q_1 .

ANEXO III:**EJEMPLO DE CÁLCULO DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA**

Una máquina asíncrona trifásica de rotor devanado tiene estas características:

$$\begin{array}{lll}
 V_{1NL} = 400 \text{ V} & \text{Estator conectado en triángulo} & f_1 = 50 \text{ Hz} \\
 R_1 = 0,1 \Omega & R'_2 = 0,2 \Omega & X_{cc} = 1 \Omega \\
 m_i = m_v = \sqrt{2} & n_N = 1470 \text{ r.p.m.} & X'_2 / X_{cc} = 0,5 \\
 & & 2p = 4 \text{ polos}
 \end{array}$$

Responda a las siguientes cuestiones:

- a)** Calcule el par M_N , la corriente que circula por cada fase del rotor I_{2N} , la potencia activa en el entrehierro P_{aN} , las pérdidas en el cobre del rotor P_{Cu2N} y el ángulo φ_{2N} cuando la máquina funciona como motor en las condiciones asignadas.

Ahora la máquina va a funcionar doblemente alimentada, pues en el rotor se va a conectar un convertidor de frecuencia. Este convertidor no va a permitir modificar el ángulo φ_{V2} y la potencia reactiva Q_2 va a ser nula. Este convertidor permite que la potencia activa P_2 que sale a través de los anillos del rotor sea tanto positiva (se envía del rotor a la red) como negativa (se absorbe de la red). Funcionando con este convertidor, calcule la tensión de línea entre los anillos del rotor V_{2L} , la corriente que circula por cada fase del rotor I_2 , la potencia activa en los anillos del rotor P_2 , las pérdidas en el cobre del rotor P_{Cu2} , la potencia activa en el entrehierro P_a y el ángulo φ_2 en los siguientes casos:

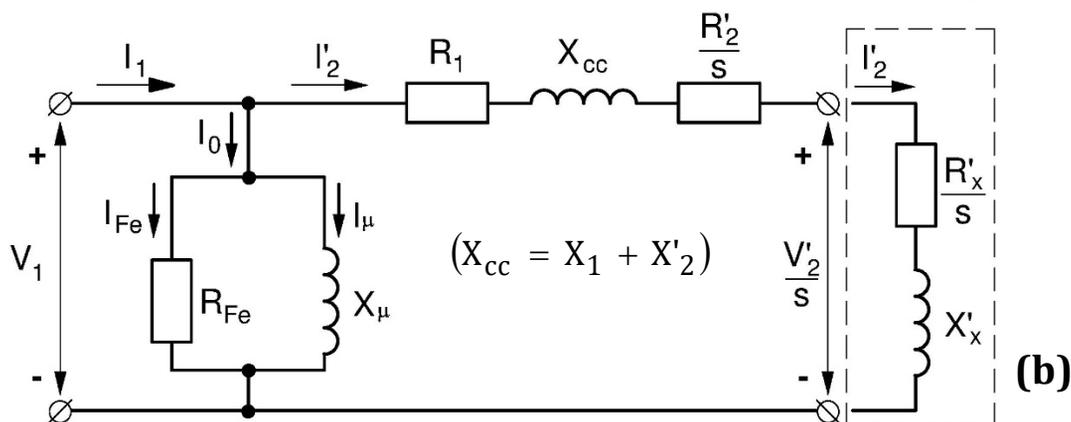
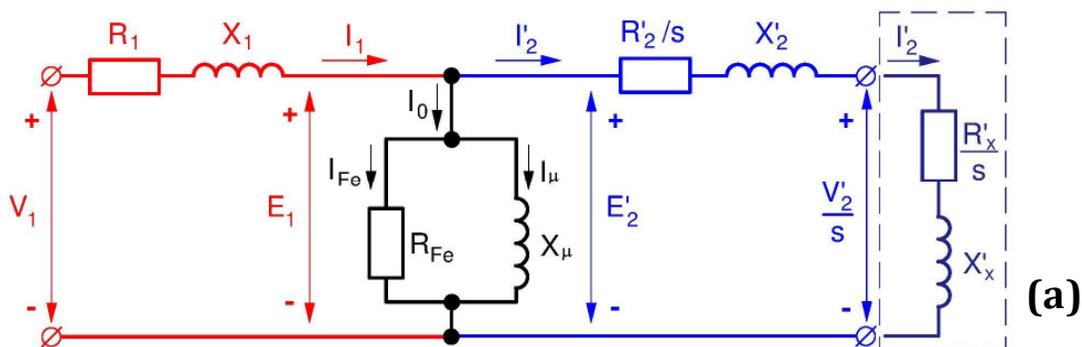
- b)** La máquina funciona como motor proporcionando un par M igual al asignado M_N y girando a una velocidad $n = 1350$ r.p.m.
- c)** La máquina funciona como motor proporcionando un par M igual al asignado M_N y girando a una velocidad $n = 1650$ r.p.m.
- d)** La máquina funciona como generador dando lugar a un par M negativo de valor absoluto igual al asignado M_N y girando a una velocidad $n = 1650$ r.p.m.
- e)** La máquina funciona como generador dando lugar a un par M negativo de valor absoluto igual al asignado M_N y girando a una velocidad $n = 1350$ r.p.m.

Ahora se cambia el convertidor de frecuencia del rotor por otro que sí permite modificar el ángulo φ_{V2} . Así, a través de los anillos del rotor se pueden tener las potencias activa P_2 y reactiva Q_2 del signo que se desee. Funcionando con este convertidor, calcule la tensión de línea entre los anillos del rotor V_{2L} , la corriente que circula por cada fase del rotor I_2 , las potencias activa P_2 y reactiva Q_2 en los anillos del rotor, la potencia reactiva Q'_2 , las pérdidas en el cobre del rotor P_{Cu2} , las potencias activa P_a y reactiva Q'_a en el entrehierro y los ángulos φ_2 y φ_{V2} en los siguientes casos:

- f)** La máquina funciona como generador dando lugar a un par M negativo de valor absoluto igual al asignado M_N y girando a una velocidad $n = 1650$ r.p.m. La potencia reactiva a través de los anillos del rotor Q_2 es negativa (capacitiva) y se cumple que $|Q'_2| = 4|P_2|$.
- g)** La máquina funciona como generador dando lugar a un par M negativo de valor absoluto igual al asignado M_N y girando a una velocidad $n = 1350$ r.p.m. La potencia reactiva a través de los anillos del rotor Q_2 es negativa (capacitiva) y se cumple que $\cos \varphi_2 = -0,8$ capacitivo (es de signo negativo por estar funcionando como generador).

NOTA: Recuerde que φ_{V2} es el ángulo entre \bar{V}_2 e \bar{I}_2 y que φ_2 es el ángulo entre \bar{E}'_2 e \bar{I}'_2 .

SOLUCIÓN:



Circuitos equivalentes exacto (a) y aproximado (b) de una máquina asíncrona doblemente alimentada incluyendo la impedancia externa equivalente

$V_{1N} = 400 \text{ V}; \quad n_1 = 1500 \text{ r.p.m.}; \quad \Omega_1 = 157,1 \text{ rad/s}; \quad X_1 = X'_2 = 0,5 \Omega; \quad m_1 = 3 \text{ fases}$

Casos a calcular:

	a	b	c	d	e	f	g
M (Nm)	296,6	296,6	296,6	-296,6	-296,6	-296,6	-296,6
n (r.p.m.)	1470	1350	1650	1650	1350	1650	1350
s	0,04	0,1	-0,1	-0,1	0,1	-0,1	0,1
R'x (Ω)	0	0,8	-1,2	0,841	-1,241	0,801	-0,918
X'x (Ω)	0	0	0	0	0	-3,204	-5,88
I'2 (A)	39,41	39,41	39,41	38,62	38,62	39,40	46,54
I2 (A)	55,73	55,73	55,73	54,61	54,61	55,72	65,82
V'2 (V)	0	31,53	47,29	32,48	47,93	34,00	50,73
V2L (V)	0	38,62	57,92	39,78	58,70	41,64	62,13
P2 (W)	0	3728	-5591	3763	-5553	3730	-5965
PCu2 (W)	932	932	932	895	895	931	1300
Pa (W)	46596	46596	46596	-46596	-46596	-46596	-46596
Q'2 (var)	0	0	0	0	0	-14921	-38208
Q2 (var)	0	0	0	0	0	-1492	-3821
Q'a (var)	2330	2330	2330	2237	2237	-12592	-34959
φ2 (°)	2,86	2,86	2,86	177,3	177,3	195,1	216,9
φv2 (°)	0	0	180	0	180	-21,80	212,7

SOLUCIÓN DETALLADA

La referencia a ecuaciones se indica entre paréntesis () y actúa como un hiperenlace a la ecuación

Cuestiones preliminares

- Tensión asignada de fase, V_{1N} :

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_{1NL} = V_{1N} \Rightarrow \underline{V_{1NL} = 400 \text{ V}}$$

- Velocidad de sincronismo:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} \Rightarrow \underline{n_1 = 1500 \text{ r.p.m.}}$$

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{2\pi \cdot 50}{2} \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 157,1 \text{ rad / s}}$$

- Deslizamientos, s :

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \tag{1}$$

$$n_N = 1470 \text{ r.p.m.} \Rightarrow s_N = \frac{1500 - 1470}{1500} \Rightarrow \underline{s_N = 0,02}$$

$$n = 1350 \text{ r.p.m.} \Rightarrow s = \frac{1500 - 1350}{1500} \Rightarrow \underline{s = 0,1}$$

$$n = 1650 \text{ r.p.m.} \Rightarrow s = \frac{1500 - 1650}{1500} \Rightarrow \underline{s = -0,1}$$

- Reactancias de dispersión:

$$\begin{aligned} X'_2/X_{cc} = 0,5 & & X_{cc} = X_1 + X'_2 & & X_{cc} = 1 \Omega \\ \underline{X_1 = 0,5 \Omega} & & \underline{X'_2 = 0,5 \Omega} & & \end{aligned}$$

- Ecuaciones:

Usando el circuito equivalente aproximado con la impedancia externa equivalente \bar{Z}'_x se deducen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} I'_2 &= \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2 + R'_x}{s}\right)^2 + (X_1 + X'_2 + X'_x)^2}} \\ M = \frac{P_a}{\Omega_1} &= \frac{m_1 \frac{R'_2 + R'_x}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2 + R'_x}{s}\right)^2 + (X_1 + X'_2 + X'_x)^2} \\ \bar{Z}'_x &= R'_x + jX'_x = Z'_x \Big|_{\phi_x} \end{aligned} \tag{2}$$

En esta máquina el número de fases del estator es tres, es decir: $m_1 = 3$ fases.

Por otra parte, se va a utilizar el siguiente cambio de variable que simplifica los cálculos:

$$x = \frac{R'_2 + R'_x}{s} \quad (3)$$

$$R'_x = s \cdot x - R'_2 \quad (4)$$

Con este cambio de variable las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{(R_1 + x)^2 + (X_1 + X'_2 + X'_x)^2}} \quad (5)$$

$$M = \frac{m_1 x}{\Omega_1} \frac{V_1^2}{(R_1 + x)^2 + (X_1 + X'_2 + X'_x)^2} \quad (6)$$

También se cumple que:

$$X_{cc} = X_1 + X'_2 \quad (7)$$

$$V'_2 = I'_2 \sqrt{R'^2_x + (s \cdot X'_x)^2} = I'_2 \cdot Z \quad \left(Z = \sqrt{R'^2_x + (s \cdot X'_x)^2} \right) \quad (8)$$

Cuando la reactancia X'_x es nula, esta última ecuación se convierte en:

$$X'_x = 0 \Rightarrow V'_2 = I'_2 \cdot R'_x \quad (9)$$

Las potencias activas en el rotor se calculan así:

$$P_2 = m_1 \cdot V'_2 \cdot I'_2 \cdot \cos \varphi_{V2} = m_1 \cdot I'^2_2 \cdot R'_x \quad (10)$$

$$P_{Cu2} = m_1 \cdot I'^2_2 \cdot R'_2 \quad (11)$$

$$P_a = m_1 \cdot E'_2 \cdot I'_2 \cdot \cos \varphi_2 = M \cdot \Omega_1 = \frac{P_2 + P_{Cu2}}{s} \quad (12)$$

Las potencias reactivas en el rotor se obtienen de esta manera:

$$Q_2 = m_1 \cdot V'_2 \cdot I'_2 \cdot \sen \varphi_{V2} \quad (13)$$

$$Q'_2 = \frac{Q_2}{|s|} = m_1 \cdot I'^2_2 \cdot X'_x \quad (14)$$

$$Q'_{\sigma 2} = m_1 \cdot I'^2_2 \cdot X'_2 \quad (15)$$

$$Q'_a = m_1 \cdot E'_2 \cdot I'_2 \cdot \sen \varphi_2 = Q'_2 + Q'_{\sigma 2} \quad (16)$$

Los ángulos del rotor se calculan así:

$$\varphi_x = \text{ángulo de la impedancia } \bar{Z}'_x \text{ (ver (2))}: \quad \text{tg } \varphi_x = \frac{Q'_2}{P_2} = \frac{X'_x}{R'_x} \quad (17)$$

$$\varphi_{V2} = \text{ángulo entre } \bar{V}_2 \text{ e } \bar{I}_2: \quad \text{tg } \varphi_{V2} = \frac{Q_2}{P_2} = |s| \cdot \text{tg } \varphi_x \quad (18)$$

$$\varphi_2 = \text{ángulo entre } \bar{E}'_2 \text{ e } \bar{I}'_2: \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{Q'_a}{P_a} = \frac{X'_2 + X'_x}{R'_2 + R'_x} = \frac{X'_2 + X'_x}{x} \quad (19)$$

s

Además, los valores reales de tensión y de corriente del rotor y sus correspondientes valores reducidos al estator se relacionan así:

$$V_2 = \frac{V'_2}{m_v} \quad I_2 = m_i \cdot I'_2 \quad (20)$$

Un rotor bobinado siempre se conecta estrella. Por consiguiente, la tensión entre anillos V_{2L} vale:

$$\text{Rotor con conexión estrella} \Rightarrow V_{2L} = \sqrt{3} V_2 \quad (21)$$

a) Condiciones asignadas

- En este caso la velocidad vale $n_N = 1470$ r.p.m. y el deslizamiento es $s_N = 0,02$ (ver (1)).
- En condiciones asignadas el rotor está en cortocircuito, luego sucede que (ver las relaciones (10) y (14)):

$$(10) \text{ y } (14): \quad \frac{R'_{xN} = 0 \Omega}{P_{2N} = 0 \text{ W}} \quad \frac{X'_{xN} = 0 \Omega}{Q_{2N} = 0 \text{ var}} \quad \frac{Q'_{2N} = 0 \text{ var}}{P'_{2N} = 0 \text{ W}}$$

Además, en este caso, según (1) y (3), se tiene que:

$$(1) \text{ y } (3): \quad n_N = 1470 \text{ r.p.m.} \Rightarrow s_N = 0,02 \Rightarrow x_N = \frac{0,2 + 0}{0,02} \Rightarrow \underline{x_N = 10 \Omega}$$

- El par M_N y la corriente del rotor reducida al estator I'_{2N} se obtienen mediante las relaciones (7), (6) y (5), respectivamente:

$$(7) \text{ y } (6): \quad M_N = \frac{3 \cdot 10}{157,1} \frac{400^2}{(0,1 + 10)^2 + 1^2} \Rightarrow \boxed{M_N = 296,6 \text{ Nm}}$$

$$(7) \text{ y } (5): \quad I'_{2N} = \frac{400}{\sqrt{(0,1 + 10)^2 + 1^2}} \Rightarrow \underline{I'_{2N} = 39,41 \text{ A}}$$

Usando ahora la segunda de las relaciones (20) se obtiene finalmente la corriente I_{2N} que circula por cada fase del rotor en condiciones asignadas:

$$(20): \quad I_{2N} = \sqrt{2} \cdot 39,41 \Rightarrow \boxed{I_{2N} = 55,73 \text{ A}}$$

- Las potencias activas en el rotor se obtienen mediante las relaciones (11) y (12):

$$(11): \quad P_{Cu2N} = 3 \cdot 39,41^2 \cdot 0,2 \Rightarrow \boxed{P_{Cu2N} = 932 \text{ W}}$$

$$(12): \quad P_{aN} = M_N \cdot \Omega_1 = 296,6 \cdot 157,1 \Rightarrow \boxed{P_{aN} = 46596 \text{ W}}$$

A este último resultado también se podría llegar así:

$$(12): \quad P_{aN} = \frac{P_{2N} + P_{Cu2N}}{s_N} = \frac{0 + 932}{0,02} = 46600 \text{ W}$$

Existe una pequeña diferencia entre ambos resultados debida a errores de redondeo.

- Las potencias reactivas en el rotor se obtienen mediante las relaciones (15) y (16) y teniendo en cuenta que $Q'_2 = 0$:

$$(15) \text{ y } (16): \quad Q'_{aN} = Q'_{\sigma 2N} = 3 \cdot 39,41^2 \cdot 0,5 \Rightarrow \underline{Q'_{aN} = Q'_{\sigma 2N} = 2330 \text{ var}}$$

- Finalmente, el ángulo φ_{2N} entre \bar{E}'_{2N} e \bar{I}'_{2N} se calcula a partir de la relación (19):

$$(19): \quad \text{tg } \varphi_{2N} = \frac{Q'_{aN}}{P_{aN}} = \frac{2330}{46596} = 0,05 \Rightarrow \boxed{\varphi_{2N} = 2,86^\circ}$$

$$(\cos \varphi_{2N} = 0,999; \quad \text{sen } \varphi_{2N} = 0,0499)$$

b) Funcionamiento como motor; $M = M_N$; $s = 0,1 > 0$; $Q_2 = 0$

- En este caso la velocidad vale $n = 1350$ r.p.m. y el deslizamiento es $s = 0,1$ (ver la relación (1)).
- Tanto en este apartado como en los c), d) y e), la potencia reactiva a través de los anillos del rotor Q_2 es nula. Por consiguiente, partiendo de la expresión (14) se deduce lo siguiente:

$$(14): \quad \underline{Q_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{Q'_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{X'_x = 0 \Omega}$$

- En este caso la máquina funciona como motor con un deslizamiento s positivo, lo que exige que la potencia activa a través de los anillos P_2 sea positiva (potencia enviada desde el rotor hacia el convertidor de frecuencia). En consecuencia, de las relaciones (10) y (18) se deduce que:

$$(10) \text{ y } (18): \quad M > 0; \quad s > 0 \Rightarrow P_2 > 0 \Rightarrow \underline{R'_x > 0 \Omega}; \quad \underline{\varphi_{V2} = 0^\circ}$$

- En este tipo de funcionamiento la máquina tiene el mismo par M , la misma tensión en el estator V_1 y la misma reactancia externa equivalente X'_x que en condiciones asignadas. De todo lo anterior y mediante la relación (6) se deduce que la variable x ahora tiene el mismo valor x_N que en condiciones asignadas. Por lo tanto, teniendo en cuenta también la expresión (3) resulta que:

$$(6) \text{ y } (3): \quad x = x_N \Rightarrow 10 = \frac{0,2 + R'_x}{0,1} \Rightarrow \underline{R'_x = 0,8 \Omega}$$

- Como las magnitudes V_1 y x tienen los mismos valores que en condiciones asignadas, la expresión (5) indica que ahora se tendrá la misma corriente en el rotor I_2 que en condiciones asignadas:

$$(5) \text{ y } (20): \quad V_1 = V_{1N}; \quad x = x_N \Rightarrow I'_2 = I'_{2N} \Rightarrow I_2 = I_{2N}$$

$$\underline{I'_2 = 39,41 \text{ A}} \quad \boxed{I_2 = 55,73 \text{ A}}$$

- La tensión entre los anillos del rotor V_{2L} se obtiene aplicando sucesivamente las relaciones (9) (pues ahora $X'_x = 0$), (20) y (21):

$$(9): \quad V'_2 = 39,41 \cdot 0,8 = 31,53 \text{ V}$$

$$(20): \quad V_2 = \frac{31,53}{\sqrt{2}} = 22,30 \text{ V}$$

$$(21): \quad V_{2L} = \sqrt{3} \cdot 22,30 \Rightarrow \boxed{V_{2L} = 38,62 \text{ V}}$$

- La potencia activa que pasa a través de los anillos del rotor P_2 se calcula mediante (10):

$$(10): \quad P_2 = 3 \cdot 39,41^2 \cdot 0,8 \Rightarrow \boxed{P_2 = 3728 \text{ W}}$$

- La corriente I_2 es igual a la asignada I_{2N} , luego sucede que se tienen los mismos valores de P_{Cu2} , Q'_a y $Q'_{\sigma 2}$ que en condiciones asignadas (ver (11), (15) y (16)):

$$(11), (15) \text{ y } (16): \quad I'_2 = I'_{2N} \Rightarrow P_{Cu2} = P_{Cu2N}; \quad Q'_a = Q'_{\sigma 2} = Q'_{\sigma 2N}$$

$$\boxed{P_{Cu2} = 932 \text{ W}} \quad \underline{Q'_a = Q'_{\sigma 2} = 2330 \text{ var}}$$

- Al tener en este caso un par igual al asignado, la potencia activa en el entrehierro P_a será igual a la asignada P_{aN} (ver la relación (12)):

$$(12): \quad M = M_N \Rightarrow P_a = P_{aN} \Rightarrow \boxed{P_a = 46596 \text{ W}}$$

Como comprobación se va a calcular P_a de otra manera:

$$(12): \quad P_a = \frac{P_2 + P_{Cu2}}{s} = \frac{3728 + 932}{0,1} = 46600 \text{ W}$$

Existe una pequeña diferencia entre ambos resultados debida a errores de redondeo.

- Ahora se tienen los mismos valores de P_a y de Q'_a que en condiciones asignadas. Por consiguiente la relación (19) indica que el ángulo φ_2 es el mismo que en régimen asignado:

$$(19): \quad P_a = P_{aN}; \quad Q'_a = Q'_{aN} \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_{2N} \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = 2,86^\circ}$$

$$(\cos \varphi_2 = 0,999; \quad \text{sen } \varphi_2 = 0,0499)$$

c) Funcionamiento como motor; $M = M_N$; $s = -0,1 < 0$; $Q_2 = 0$

Este apartado se resuelve siguiendo el mismo procedimiento que en el anterior.

- La velocidad vale $n = 1650$ r.p.m. y el deslizamiento es $s = -0,1$ (ver la relación (1)).
- Ya se dedujo en el apartado b) que sucede lo siguiente:

$$(14): \quad \underline{Q_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{Q'_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{X'_x = 0 \Omega}$$

- En este caso la máquina funciona como motor con un deslizamiento s negativo, lo que exige que la potencia activa a través de los anillos P_2 sea negativa (potencia enviada desde el convertidor de frecuencia hacia el rotor). En consecuencia, de las relaciones (10) y (18) se deduce que:

$$(10) \text{ y } (18): \quad M > 0; \quad s < 0 \Rightarrow P_2 < 0 \Rightarrow \underline{R'_x < 0 \Omega}; \quad \underline{\varphi_{V2} = 180^\circ}$$

- Al igual que en el apartado anterior la máquina tiene el mismo par M , la misma tensión en el estator V_1 y la misma reactancia externa equivalente X'_x que en condiciones asignadas. Luego, de (6) se deduce que la variable x ahora tiene el mismo valor x_N que en condiciones asignadas. Por lo tanto, teniendo en cuenta también la expresión (3) resulta que:

$$(6) \text{ y } (3): \quad x = x_N \Rightarrow 10 = \frac{0,2 + R'_x}{-0,1} \Rightarrow \underline{R'_x = -1,2 \Omega}$$

- Como las magnitudes V_1 y x tienen los mismos valores que en condiciones asignadas, la expresión (5) indica que ahora se tendrá la misma corriente en el rotor que en condiciones asignadas:

$$(5) \text{ y } (20): \quad V_1 = V_{1N}; \quad x = x_N \Rightarrow I'_2 = I'_{2N} \Rightarrow I_2 = I_{2N}$$

$$\underline{I'_2 = 39,41 \text{ A}} \quad \boxed{I_2 = 55,73 \text{ A}}$$

- La tensión entre los anillos del rotor V_{2L} se obtiene aplicando sucesivamente las relaciones (9) (pues ahora $X'_x = 0$), (20) y (21):

(9): $V'_2 = 39,41 \cdot 1,2 = 47,29 \text{ V}$

(20): $V_2 = \frac{47,29}{\sqrt{2}} = 33,44 \text{ V}$

(21): $V_{2L} = \sqrt{3} \cdot 33,44 \Rightarrow \boxed{V_{2L} = 57,92 \text{ V}}$

Como lo que se está calculando son los valores eficaces de tensiones se ha usado el valor absoluto de R'_x en las expresiones anteriores.

- La potencia activa que pasa a través de los anillos del rotor P_2 se calcula mediante (10):

(10): $P_2 = 3 \cdot 39,41^2 \cdot (-1,2) \Rightarrow \boxed{P_2 = -5591 \text{ W}}$

- La corriente I_2 es igual a la asignada I_{2N} , luego sucede que se tienen los mismos valores de P_{Cu2} , Q'_a y $Q'_{\sigma 2}$ que en condiciones asignadas (ver (11), (15) y (16)):

(11), (15) y (16): $I'_2 = I'_{2N} \Rightarrow P_{Cu2} = P_{Cu2N}; Q'_a = Q'_{\sigma 2} = Q'_{\sigma 2N}$

$\boxed{P_{Cu2} = 932 \text{ W}}$

$\underline{Q'_a = Q'_{\sigma 2} = 2330 \text{ var}}$

- Al tener en este caso un par igual al asignado, la potencia activa en el entrehierro P_a será igual a la asignada P_{aN} (ver la relación (12)):

(12): $M = M_N \Rightarrow P_a = P_{aN} \Rightarrow \boxed{P_a = 46596 \text{ W}}$

Como comprobación se va a calcular P_a de otra manera:

(12): $P_a = \frac{P_2 + P_{Cu2}}{s} = \frac{-5591 + 932}{-0,1} = 46590 \text{ W}$

Existe una pequeña diferencia entre ambos resultados debida a errores de redondeo.

- Ahora se tienen los mismos valores de P_a y de Q'_a que en condiciones asignadas. Por consiguiente la relación (19) indica que el ángulo φ_2 es el mismo que en régimen asignado:

(19): $P_a = P_{aN}; Q'_a = Q'_{aN} \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_{2N} \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = 2,86^\circ}$
 $(\cos \varphi_2 = 0,999; \sin \varphi_2 = 0,0499)$

d) Funcionamiento como generador; $M = -M_N$; $s = -0,1 < 0$; $Q_2 = 0$

- La velocidad vale $n = 1650 \text{ r.p.m.}$ y el deslizamiento es $s = -0,1$ (ver la relación (1)).
- Ya se dedujo en el apartado b) que sucede lo siguiente:

$$(14): \quad \underline{Q_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{Q'_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{X'_x = 0 \Omega}$$

- En este caso la máquina funciona como generador con un deslizamiento s negativo, lo que exige que la potencia activa a través de los anillos P_2 sea positiva (potencia enviada desde el rotor hacia el convertidor de frecuencia). En consecuencia, de las relaciones (10) y (18) se deduce que:

$$(10) \text{ y } (18): \quad M < 0; \quad s < 0 \Rightarrow P_2 > 0 \Rightarrow \underline{R'_x > 0 \Omega}; \quad \underline{\phi_{V2} = 0^\circ}$$

- En estas condiciones la máquina tiene un par negativo por actuar como generador. El valor absoluto de este par es igual al nominal, luego aplicando la relación (6) se obtiene que:

$$(7) \text{ y } (6): \quad -296,6 = \frac{3 \cdot x}{157,1} \frac{400^2}{(0,1 + x)^2 + 1^2}$$

Operando y simplificando se llega a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$x^2 + 10,5x + 1 = 0$$

Al resolver esta ecuación se obtienen dos valores de x que, a su vez, se corresponden con dos valores de R'_x (ver la relación (4)):

$$(4): \quad x = \begin{cases} -0,0961 \Omega \rightarrow R'_x = -0,190 \Omega \\ -10,41 \Omega \rightarrow R'_x = +0,841 \Omega \end{cases}$$

Ya se dedujo antes que la resistencia R'_x debe ser positiva, luego la solución es:

$$\underline{x = -10,41 \Omega}; \quad \underline{R'_x = 0,841 \Omega}$$

- La corriente del rotor I_2 se obtiene mediante las relaciones (7), (5) y (20):

$$(7) \text{ y } (5): \quad I'_2 = \frac{400}{\sqrt{(0,1 + (-10,41))^2 + 1^2}} \Rightarrow \underline{I'_{2N} = 38,62 \text{ A}}$$

$$(20): \quad I_{2N} = \sqrt{2} \cdot 38,62 \Rightarrow \boxed{I_2 = 54,61 \text{ A}}$$

- La tensión entre los anillos del rotor V_{2L} se obtiene aplicando sucesivamente las relaciones (9) (pues ahora $X'_x = 0$), (20) y (21):

$$(9): \quad V'_2 = 38,62 \cdot 0,841 = 32,48 \text{ V}$$

$$(20): \quad V_2 = \frac{32,48}{\sqrt{2}} = 22,97 \text{ V}$$

$$(21): \quad V_{2L} = \sqrt{3} \cdot 22,97 \Rightarrow \boxed{V_{2L} = 39,78 \text{ V}}$$

- Las potencias activas en el rotor se obtienen mediante las relaciones (10), (11) y (12):

$$(10): \quad P_2 = 3 \cdot 38,62^2 \cdot 0,841 \Rightarrow \boxed{P_2 = 3763 \text{ W}}$$

$$(11): \quad P_{Cu2} = 3 \cdot 38,62^2 \cdot 0,2 \Rightarrow \boxed{P_{Cu2} = 895 \text{ W}}$$

$$(12): \quad P_a = (-M_N) \cdot \Omega_1 = -P_{aN} \Rightarrow \boxed{P_a = -46596 \text{ W}}$$

Nótese que, como el par es igual a $-M_N$, la potencia en el entrehierro vale $-P_{aN}$. Esta magnitud también se puede obtener así:

$$(12): \quad P_a = \frac{P_2 + P_{Cu2}}{s} = \frac{3763 + 895}{-0,1} = -46580 \text{ W}$$

Existe una pequeña diferencia entre ambos resultados debida a errores de redondeo.

- Las potencias reactivas en el rotor se obtienen mediante las relaciones (15) y (16) y teniendo en cuenta que $Q'_2 = 0$:

$$(15) \text{ y } (16): \quad Q'_a = Q'_{\sigma 2} = 3 \cdot 38,62^2 \cdot 0,5 \Rightarrow \underline{Q'_a = Q'_{\sigma 2} = 2237 \text{ var}}$$

- Finalmente, el ángulo φ_2 entre \bar{E}'_2 e \bar{I}'_2 se calcula a partir de (19), (12) y (16):

$$(19): \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{Q'_a}{P_a} = \frac{2237}{-46596} = -0,048$$

$$(12): \quad P_a < 0 \Rightarrow \cos \varphi_2 < 0$$

$$(16): \quad Q'_a > 0 \Rightarrow \text{sen } \varphi_2 > 0$$

$$\varphi_2 = 180^\circ - 2,7^\circ \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = 177,3^\circ}$$

$$(\cos \varphi_2 = -0,999; \text{ sen } \varphi_2 = 0,0471)$$

e) Funcionamiento como generador; $M = -M_N$; $s = 0,1 > 0$; $Q_2 = 0$

- En este caso la velocidad vale $n = 1350$ r.p.m. y el deslizamiento es $s = 0,1$ (ver la relación (1)).
- Ya se dedujo en el apartado b) que sucede lo siguiente:

$$(14): \quad \underline{Q_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{Q'_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{X'_x = 0 \Omega}$$

- En este caso la máquina funciona como generador con un deslizamiento s positivo, lo que exige que la potencia activa a través de los anillos P_2 sea negativa (potencia enviada desde el convertidor de frecuencia hacia el rotor). En consecuencia, de las relaciones (10) y (18) se deduce que:

$$(10) \text{ y } (18): \quad M > 0; s < 0 \Rightarrow P_2 < 0 \Rightarrow \underline{R'_x < 0 \Omega}; \quad \underline{\varphi_{V2} = 180^\circ}$$

- La máquina tiene el mismo par M , la misma tensión en el estator V_1 y la misma reactancia externa equivalente X'_x que en el apartado anterior. Luego, de (6) se deduce que la variable x ahora tiene el mismo valor que en el apartado d). Por lo tanto, teniendo en cuenta también la expresión (4), resulta que:

$$(6) \text{ y } (4): \quad x = -10,41 \Rightarrow R'_x = (-10,41) \cdot 0,1 - 0,2 \Rightarrow \underline{R'_x = -1,241 \Omega}$$

- Como las magnitudes V_1 y x tienen los mismos valores que en el caso d), la expresión (5) indica que ahora se tendrá la misma corriente en el rotor que antes:

$$(5) \text{ y } (20): \quad \underline{I'_2 = 38,62 \text{ A}} \quad \boxed{I_2 = 54,61 \text{ A}}$$

- La tensión entre los anillos del rotor V_{2L} se obtiene aplicando sucesivamente las relaciones (9) (pues ahora $X'_x = 0$), (20) y (21):

$$(9): \quad V'_2 = 38,62 \cdot 1,241 = 47,93 \text{ V}$$

$$(20): \quad V_2 = \frac{47,93}{\sqrt{2}} = 33,89 \text{ V}$$

$$(21): \quad V_{2L} = \sqrt{3} \cdot 33,89 \Rightarrow \boxed{V_{2L} = 58,70 \text{ V}}$$

Como lo que se está calculando son los valores eficaces de tensiones se ha usado el valor absoluto de R'_x en las expresiones anteriores.

- La potencia activa que pasa a través de los anillos del rotor P_2 se calcula mediante (10):

$$(10): \quad P_2 = 3 \cdot 38,62^2 \cdot (-1,241) \Rightarrow \boxed{P_2 = -5553 \text{ W}}$$

- La corriente I_2 es igual a la del caso anterior, luego sucede que se tienen los mismos valores de P_{Cu2} , Q'_a y $Q'_{\sigma 2}$ que en el apartado d) (ver (11), (15) y (16)):

$$(11), (15) \text{ y } (16): \quad \boxed{P_{Cu2} = 895 \text{ W}} \quad \underline{Q'_a = Q'_{\sigma 2} = 2237 \text{ var}}$$

- Al tener en este caso un par igual a $-M_N$, la potencia activa en el entrehierro será igual a $-P_{aN}$ (ver la relación (12)):

$$(12): \quad M = -M_N \Rightarrow P_a = -P_{aN} \Rightarrow \boxed{P_a = -46596 \text{ W}}$$

Como comprobación se va a calcular P_a de otra manera:

$$(12): \quad P_a = \frac{P_2 + P_{Cu2}}{s} = \frac{-5593 + 895}{0,1} = -46580 \text{ W}$$

Existe una pequeña diferencia entre ambos resultados debida a errores de redondeo.

- Ahora se tienen los mismos valores de P_a y de Q'_a que en el apartado anterior, por lo tanto, la relación (19) indica que el ángulo φ_2 es el mismo que en el apartado d):

$$(19): \quad \boxed{\varphi_2 = 177,3^\circ}$$

$$(\cos \varphi_2 = -0,999; \quad \text{sen } \varphi_2 = 0,0471)$$

f) Funcionamiento como generador; $M = -M_N$; $s = -0,1 < 0$; $Q_2 < 0$; $|Q'_2| = 4 |P_2|$

- Este apartado estudia un estado de funcionamiento de la máquina similar al del apartado d), pero con la diferencia de que ahora la potencia reactiva a través de los anillos del rotor Q_2 no va a ser nula y, además, va a tener signo negativo (capacitiva). Teniendo en cuenta también lo que se dedujo en el apartado d), ahora sucede que:

$$(14): \quad Q_2 < 0 \Rightarrow Q'_2 < 0 \Rightarrow \underline{X'_x < 0}$$

$$(10): \quad M < 0; \quad s < 0 \Rightarrow P_2 > 0 \Rightarrow \underline{R'_x > 0 \Omega}$$

- Partiendo de las relaciones (10) y (14) y teniendo en cuenta los signos de X'_x y de R'_x se deduce que:

$$(10) \text{ y } (14): \quad |Q'_2| = 4 |P_2|; \quad R'_x > 0; \quad X'_x < 0 \Rightarrow \underline{X'_x = -4 R'_x}$$

- De lo anterior y usando las relaciones (17) y (18) se obtiene que:

$$(17): \quad \text{tg } \varphi_x = \frac{Q'_2}{P_2} = \frac{X'_x}{R'_x} = -4 \Rightarrow \underline{\varphi_x = -75,96^\circ}$$

$$(\cos \varphi_x = 0,243; \quad \text{sen } \varphi_x = -0,970)$$

$$(18): \quad \text{tg } \varphi_{V2} = |s| \cdot \text{tg } \varphi_x = 0,1 \cdot (-4) = -0,4 \Rightarrow \boxed{\varphi_{V2} = -21,80^\circ}$$

$$(\cos \varphi_{V2} = 0,928; \quad \text{sen } \varphi_x = -0,371)$$

- Poniendo las magnitudes R'_x y X'_x en función de la variable x quedan así:

$$(4): \quad R'_x = s \cdot x - R'_2 \Rightarrow \underline{R'_x = -0,1 x - 0,2}$$

$$X'_x = -4 R'_x \Rightarrow \underline{X'_x = 0,4 x + 0,8}$$

Sustituyendo estos resultados en la fórmula del par (6) se llega a:

$$(7) \text{ y } (6): \quad -296,6 = \frac{3 x}{157,1} \frac{400^2}{(0,1 + x)^2 + (1 + (0,4 x + 0,8))^2}$$

Operando y simplificando se obtiene esta ecuación de segundo grado:

$$1,16 x^2 + 11,94 x + 3,25 = 0$$

Al resolver esta ecuación se obtienen dos valores de x que, a su vez, se corresponden con dos valores de R'_x (ver la relación (4)):

$$(4): \quad x = \begin{cases} -0,280 \Omega & \rightarrow R'_x = -0,172 \Omega \\ -10,01 \Omega & \rightarrow R'_x = +0,801 \Omega \end{cases}$$

Ya se dedujo antes que la resistencia R'_x debe ser positiva, luego la solución es:

$$\underline{x = -10,01 \Omega} ; \quad \underline{R'_x = 0,801 \Omega} ; \quad \underline{X'_x = -3,204 \Omega}$$

- La corriente del rotor I_2 se obtiene mediante las relaciones (7), (5) y (20):

$$(7) \text{ y } (5): \quad I'_2 = \frac{400}{\sqrt{(0,1 + 10,01)^2 + (1 + (-3,204))^2}} \Rightarrow \underline{I'_{2N} = 39,40 \text{ A}}$$

$$(20): \quad I_{2N} = \sqrt{2} \cdot 39,40 \Rightarrow \boxed{I_2 = 55,72 \text{ A}}$$

- La tensión entre los anillos del rotor V_{2L} se obtiene aplicando sucesivamente las relaciones(8), (20) y (21):

$$(8): \quad Z = \sqrt{0,801^2 + (0,1 \cdot 3,204)^2} = 0,863 \Omega$$

$$(8): \quad V'_2 = 39,40 \cdot 0,863 = 34,00 \text{ V}$$

$$(20): \quad V_2 = \frac{34,00}{\sqrt{2}} = 24,04 \text{ V}$$

$$(21): \quad V_{2L} = \sqrt{3} \cdot 24,04 \Rightarrow \boxed{V_{2L} = 41,64 \text{ V}}$$

- Las potencias activas en el rotor se obtienen mediante las relaciones (10), (11) y (12):

$$(10): \quad P_2 = 3 \cdot 39,40^2 \cdot 0,801 \Rightarrow \boxed{P_2 = 3730 \text{ W}}$$

$$(11): \quad P_{Cu2} = 3 \cdot 39,40^2 \cdot 0,2 \Rightarrow \boxed{P_{Cu2} = 931 \text{ W}}$$

$$(12): \quad P_a = (-M_N) \cdot \Omega_1 = -P_{aN} \Rightarrow \boxed{P_a = -46596 \text{ W}}$$

Nótese que, como el par es igual a $-M_N$, la potencia en el entrehierro vale $-P_{aN}$. Esta magnitud también se puede obtener así:

$$(12): \quad P_a = \frac{P_2 + P_{Cu2}}{s} = \frac{3730 + 931}{-0,1} = -46610 \text{ W}$$

Existe una pequeña diferencia entre ambos resultados debida a errores de redondeo.

- Las potencias reactivas en el rotor se obtienen mediante (14), (15) y (16):

$$(14): \quad Q'_2 = 3 \cdot 39,40^2 \cdot (-3,204) \Rightarrow \boxed{Q'_2 = -14\,921 \text{ var}}$$

$$(14): \quad Q_2 = 0,1 \cdot (-14\,921) \Rightarrow \boxed{Q_2 = -1\,492 \text{ var}}$$

$$(15): \quad Q'_{\sigma 2} = 3 \cdot 39,40^2 \cdot 0,5 \Rightarrow \underline{Q'_{\sigma 2} = 2\,329 \text{ var}}$$

$$(16): \quad Q'_a = (-14\,921) + 2\,329 \Rightarrow \boxed{Q'_a = -12\,592 \text{ var}}$$

- El ángulo φ_2 entre \bar{E}'_2 e \bar{I}'_2 se calcula a partir de (19), (12) y (16):

$$(19): \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{Q'_a}{P_a} = \frac{-12\,592}{-46\,596} = 0,270$$

$$(12): \quad P_a < 0 \Rightarrow \cos \varphi_2 < 0$$

$$(16): \quad Q'_a < 0 \Rightarrow \text{sen } \varphi_2 < 0$$

$$\varphi_2 = 180^\circ + 15,1^\circ \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = 195,1^\circ}$$

$$(\cos \varphi_2 = -0,965; \text{ sen } \varphi_2 = 0,261)$$

Seguidamente, a modo de comprobación, se va a volver a calcular el ángulo φ_{V2} a partir de las potencias activa y reactiva:

$$(18): \quad \text{tg } \varphi_{V2} = \frac{Q_2}{P_2} = \frac{-1\,492}{3\,730} = -0,4 \Rightarrow \varphi_{V2} = -21,80^\circ$$

Este resultado coincide con el calculado anteriormente.

- La potencia aparente S_2 que circula a través de los anillos del rotor y que debe soportar el convertidor de frecuencias vale:

$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = \sqrt{3\,730^2 + 1\,492^2} \Rightarrow \underline{S_2 = 4\,017 \text{ VA}}$$

g) Funcionamiento como generador; $M = -M_N$; $s = 0,1 > 0$; $Q_2 < 0$; $\cos \varphi_2 = -0,8$

- Este apartado estudia un estado de funcionamiento de la máquina similar al del apartado e), pero con la diferencia de que ahora la potencia reactiva a través de los anillos del rotor Q_2 no va a ser nula y, además, va a tener signo negativo (capacitiva). Teniendo en cuenta también lo que se dedujo en el apartado e), ahora sucede que:

$$(14): \quad Q_2 < 0 \Rightarrow Q'_2 < 0 \Rightarrow \underline{X'_x < 0}$$

$$(10): \quad M < 0; s > 0 \Rightarrow P_2 < 0 \Rightarrow \underline{R'_x < 0 \Omega}$$

- El ángulo φ_2 entre \bar{E}'_2 e \bar{I}'_2 vale:

$$(12): \quad P_a < 0 \Rightarrow \cos \varphi_2 < 0$$

$$(16): \quad Q'_a < 0 \Rightarrow \text{sen } \varphi_2 < 0$$

$$\cos \varphi_2 = -0,8 \Rightarrow \varphi_2 = 180^\circ + 36,9^\circ \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = 216,9^\circ}$$

$$(\cos \varphi_2 = -0,8; \text{ sen } \varphi_2 = -0,6; \text{ tg } \varphi_2 = 0,75)$$

- La relación (19) permite poner la suma de las reactancias del rotor reducido al estator en función de la variable x:

$$(19): \quad \text{tg } \varphi_2 = 0,75; \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{X'_2 + X'_x}{x} \Rightarrow \underline{X'_2 + X'_x = 0,75 x}$$

Sustituyendo estos resultados en la fórmula del par (6) se llega a:

$$(6): \quad -296,6 = \frac{3 x}{157,1} \frac{400^2}{(0,1 + x)^2 + (0,5 + 0,75 x)^2}$$

Operando y simplificando se obtiene esta ecuación de segundo grado:

$$1,563 x^2 + 11,25 x + 0,26 = 0$$

Al resolver esta ecuación se obtienen dos valores de x:

$$(4): \quad x = \begin{cases} -0,0232 \Omega \rightarrow R'_x = -0,20232 \Omega; X'_x = -0,5174 \Omega \\ -7,174 \Omega \rightarrow R'_x = -0,918 \Omega; X'_x = -5,88 \Omega \end{cases}$$

Ambas soluciones tienen los signos correctos, aunque los valores obtenidos en el apartado e) hacen sospechar que la segunda solución es la adecuada. Para comprobarlo se va a calcular la corriente del rotor reducida al estator I'_2 que sale con ambas soluciones: Para ello se emplea la relación (5):

$$(7) \text{ y } (5): \quad I'_2 = \frac{400}{\sqrt{(0,1 + (-0,0232))^2 + (1 + (-0,5174))^2}} = 818,5 \text{ A} \quad \text{a)}$$

$$(7) \text{ y } (5): \quad I'_2 = \frac{400}{\sqrt{(0,1 + (-7,174))^2 + (1 + (-5,88))^2}} = 46,54 \text{ A} \quad \text{b)}$$

La primera solución da lugar a unas corrientes en el rotor inaceptablemente elevadas. Por consiguiente, la solución correcta es la segunda y:

$$\underline{x = -7,174 \Omega}; \quad \underline{R'_x = -0,918 \Omega}; \quad \underline{X'_x = -5,88 \Omega}$$

$$(20): \quad \underline{I'_2 = 46,54 \text{ A}} \Rightarrow I_2 = \sqrt{2} \cdot 46,54 \text{ A} \Rightarrow \boxed{I_2 = 65,82 \text{ A}}$$

- De lo anterior y usando las relaciones (17) y (18) se obtiene que:

$$(17): \quad \operatorname{tg} \varphi_x = \frac{X'_x}{R'_x} = \frac{-5,88}{-0,918} = 6,41 \Rightarrow \varphi_x = 180^\circ + 81,1^\circ$$

$$\varphi_x = 261,4^\circ \quad (\cos \varphi_x = -0,150; \operatorname{sen} \varphi_x = -0,989)$$

$$(18): \quad \operatorname{tg} \varphi_{V_2} = |s| \cdot \operatorname{tg} \varphi_x = 0,1 \cdot 6,41 = 0,641 \Rightarrow \varphi_{V_2} = 180^\circ + 32,7^\circ$$

$$\varphi_{V_2} = 212,7^\circ \quad (\cos \varphi_{V_2} = -0,842; \operatorname{sen} \varphi_{V_2} = -0,540)$$

- La tensión entre los anillos del rotor V_{2L} se obtiene aplicando sucesivamente las relaciones (8), (20) y (21):

$$(8): \quad Z = \sqrt{0,918^2 + (0,1 \cdot 5,88)^2} = 1,09 \Omega$$

$$(8): \quad V'_2 = 46,54 \cdot 1,09 = 50,73 \text{ V}$$

$$(20): \quad V_2 = \frac{50,73}{\sqrt{2}} = 35,87 \text{ V}$$

$$(21): \quad V_{2L} = \sqrt{3} \cdot 35,87 \Rightarrow V_{2L} = 62,13 \text{ V}$$

- Las potencias activas en el rotor se obtienen mediante las relaciones (10), (11) y (12):

$$(10): \quad P_2 = 3 \cdot 46,54^2 \cdot (-0,918) \Rightarrow P_2 = -5965 \text{ W}$$

$$(11): \quad P_{Cu2} = 3 \cdot 46,54^2 \cdot 0,2 \Rightarrow P_{Cu2} = 1300 \text{ W}$$

$$(12): \quad P_a = (-M_N) \cdot \Omega_1 = -P_{aN} \Rightarrow P_a = -46596 \text{ W}$$

Nótese que, como el par es igual a $-M_N$, la potencia en el entrehierro vale $-P_{aN}$. Esta magnitud también se puede obtener así:

$$(12): \quad P_a = \frac{P_2 + P_{Cu2}}{s} = \frac{-5965 + 1300}{0,1} = -46650 \text{ W}$$

Existe una pequeña diferencia entre ambos resultados debida a errores de redondeo.

- Las potencias reactivas en el rotor se obtienen mediante (14), (15) y (16):

$$(14): \quad Q'_2 = 3 \cdot 46,54^2 \cdot (-5,88) \Rightarrow Q'_2 = -38208 \text{ var}$$

$$(14): \quad Q_2 = 0,1 \cdot (-38208) \Rightarrow Q_2 = -3821 \text{ var}$$

$$(15): \quad Q'_{\sigma 2} = 3 \cdot 46,54^2 \cdot 0,5 \Rightarrow Q'_{\sigma 2} = 3249 \text{ var}$$

$$(16): \quad Q'_a = (-38208) + 3249 \Rightarrow Q'_a = -34959 \text{ var}$$

- Seguidamente, a modo de comprobación, se van a volver a calcular los ángulos φ_2 y φ_{V2} a partir de las potencias activas y reactivas:

$$(19): \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{Q'_a}{P_a} = \frac{-349592}{-46596} = 0,75$$

$$\varphi_2 = 180^\circ + 36,9^\circ \Rightarrow \varphi_2 = 216,9^\circ$$

$$(18): \quad \operatorname{tg} \varphi_{V2} = \frac{Q_2}{P_2} = \frac{-3821}{-5965} = -0,641 \Rightarrow \varphi_{V2} = 212,7^\circ$$

Estos resultados coinciden con los calculados anteriormente.

- La potencia aparente S_2 que circula a través de los anillos del rotor y que debe soportar el convertidor de frecuencias vale:

$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = \sqrt{5965^2 + 3821^2} \Rightarrow \underline{S_2 = 7083 \text{ VA}}$$

BIBLIOGRAFÍA GLOBAL PARA MÁQUINAS ASÍNCRONAS

- [1] AENOR. 2000 UNE 203001-17. *Máquinas eléctricas rotativas. Parte 17: Guía de aplicación a los motores de inducción de jaula alimentados con convertidores*. Madrid: AENOR. (Se corresponde con la norma CEI 60034-17 de 1998).
- [2] AENOR. 2003. UNE-EN 60034-12: *Máquinas eléctricas rotativas. Parte 12: Características de arranque de los motores trifásicos de inducción de jaula con una sola velocidad*. Madrid: AENOR.
- [3] AENOR. 2008. UNE-EN 60034-8. *Máquinas eléctricas rotativas. Parte 8: Marcas en los bornes y sentido de giro*. Madrid: AENOR. (Se corresponde con la norma CEI 60034-8 de 2007).
- [4] ALGER, P. L. 1970. *Induction machines. Their behavior and uses*. 2ª edición. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
- [5] APARICIO MARZO, J. L. 1987. *Criterios de diseño de convertidores estáticos para accionamientos regulados en corriente alterna con motores de inducción*. Santiago de Compostela. Saber Hoy, S.A. de Ediciones.
- [6] BOLDEA y NASAR. 2010. *The Induction Machine Design Handbook*. New York: CRC Press.
- [7] BOSE, B. K. 1986. *Power electronics and AC drives*. New Jersey - U.S.A. Prentice-Hall.
- [8] CHALMERS, B. J.; MULKI, A. S. 1970. Design synthesis of double-cage induction motors. *Proc. IEE*, vol. 117, nº 7, pp. 1257-1263.
- [9] CHANDRASEKAR, L.; ANBUCHANDRAN, S.; SANKAR; R. 2015. Performance analysis of pole amplitude modulated three-phase squirrel-cage induction motor. *International Journal of Emerging Technology in Computer Science & Electronics (IJETCSE)*, vol. 13, issue 1, pp. 611-621.
- [10] CHAPALLAZ, J.-M., DOS GHALL, J., EICHENBERGER, P. y FISCHER, F. 1992. *MHPG Series, Harnessing water power on small scale, vol. 10: Manual of induction motors used as generators*. Alemania: GTZ.
- [11] CHAPMAN. 2005. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [12] CIRCUIT GLOBE. *Induction motor*. Está disponible en esta dirección web: <http://circuitglobe.com/category/electrical-terms/electrical-machines/induction-motor>
- [13] CORRALES MARTÍN, J. 1982. *Cálculo industrial de máquinas eléctricas. Tomo II: Método de cálculo*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [14] CORTES. 1977. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. Tomo 3: Máquinas de corriente alterna asíncronas*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [15] DESHPANDE, M.V. *Design and testing of electrical machines*. New Delhi (India). PHI Learning Private Limited. 2010.
- [16] FAURE BENITO. 2000. *Máquinas y accionamientos eléctricos*. Madrid: Colegio oficial de ingenieros navales y oceánicos.
- [17] FERNÁNDEZ FLÓREZ, FRAILE MORA y MOLINA MARTÍN URDA. 1977. *Prácticas de Laboratorio I*. Madrid: Sección de Publicaciones de la E.T.S.I.I. de Madrid.
- [18] FITZGERALD, KINGSLEY Y UMANS. 2004. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [19] FRAILE MORA y GARCÍA GUTIÉRREZ. *Prácticas de Electrotecnia*. Madrid: Servicio de Publicaciones de la E.T.S.I.C.C.P. de Madrid.
- [20] FRAILE MORA, J. 2015. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L.
- [21] GURRUTXAGA, J. A. 1985. *El fenómeno electromagnético. Tomo IV. Las máquinas eléctricas II*. Santander: Dpto. de publicaciones de la E.T.S.I.C.C.P. de Santander.

- [22] HAQUE, M. H. 2008. Determination of NEMA design induction motor parameters from manufacturer data". *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. 23, nº 4, pp. 997-1004.
- [23] HAMDI, E.S. *Design of small electrical machines*. New York. John Wiley & Sons.
- [24] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas. Tomo 2*. Moscú: Editorial Mir.
- [25] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas. Tomo II*. Moscú: Editorial Mir.
- [26] LANGSDORF. 1977. *Teoría de las máquinas de corriente alterna*. Méjico: McGraw-Hill.
- [27] LEONHARD, W. 1985. *Control of electrical drives*. Berlin. Springer-Verlag.
- [28] MERINO AZCÁRRAGA. 1995. *Arranque industrial de motores asíncronos: teoría, cálculo y aplicaciones*. Madrid: McGraw-Hill de Electrotecnologías.
- [29] MURPHY, J. M. D. & TURNBULL, F. G. 1988. *Power electronic control of AC motors*. Oxford - Gran Bretaña. Pergamon Press.
- [30] NEMA. 2001. NEMA Standards Publication MG 10-2001 (R2007): *Energy Management Guide For Selection and Use of Fixed Frequency Medium AC Squirrel-Cage Polyphase Induction Motors*. Rosslyn, Virginia. USA.
- [31] PICHOIR, J. 1969. *Curso de electrotecnia IV. Máquinas eléctricas: máquinas de inducción*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [32] PYRHÖNEN, JUHA y otros. 2010. *Design of rotating electrical machines*. West Sussex (Inglaterra): John Wiley & Sons Ltd.
- [33] RAMÍREZ VAZQUEZ, J. 1985. *101 esquemas de maniobra, mando y control*. Barcelona: Ediciones CEAC, S.A.
- [34] RAWCLIFFE, G. H.; BURBIDGE, B.; FONG, W. Induction-motor speed-changing by pole-amplitude modulation. *Proceedings of the IEE-Part A: Power Engineering*. August 1958, vol. 105, issue 22, p. 411-419.
- [35] REVISTA TÉCNICA INDUSTRIAL. Nº 215. *Arranadores electrónicos para motores asíncronos trifásicos*.
- [36] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2015. *Teoría de las máquinas asíncronas o de inducción*. Web del autor en la Universidad de Cantabria: <http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm#Asincronas>
- [37] ROGERS y SHIRMOHAMMADI. 1987. Induction machine modelling for electromagnetic transient program. *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. EC-2; nº 4, pp. 622-627.
- [38] SANZ FEITO. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Educación.
- [39] SERRANO IRIBARNEGARAY. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [40] SUÁREZ CREO, J.M. y MIRANDA BLANCO, B.N. 2006. *Máquinas eléctricas. Funcionamiento en régimen permanente*. Santiago de Compostela: Tórculo Edicions, S.L.
- [41] VOLDEK, A. I. 1990. *Máquinas eléctricas. Tomo II*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana (Cuba).
- [42] WATERS, S. S; WILLOUGHBY, R. D. 1983. Modeling induction motor for system studies. *IEEE Trans. on industry applications*, vol. 1a-19, nº 5, pp. 875-878.
- [43] WILDI, T. 2007. *Máquinas eléctricas y sistemas de potencia*. México: Pearson Educación.
- [44] UPADHYAY, K. G. 2008. *Design of electrical machines*. New Delhi (India): New Age International Publishers.
- [45] WEG. *Motors: Specification of Electric Motors*. Está disponible en esta dirección web: <http://ecatalog.weg.net/files/wegnet/WEG-specification-of-electric-motors-50039409-manual-english.pdf>