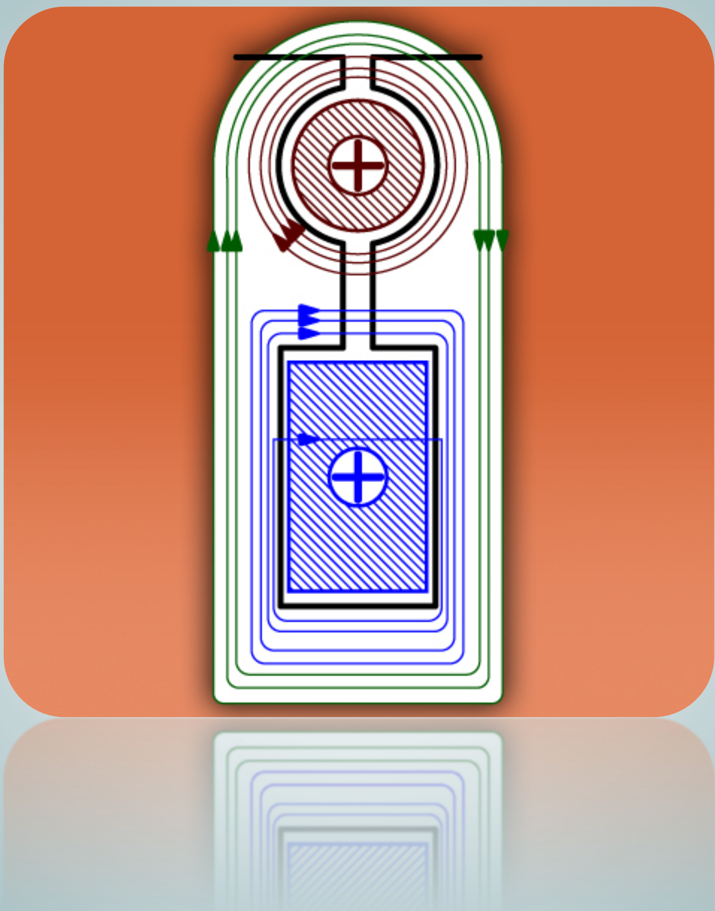
Máquinas Eléctricas II

Tema 4. Máquinas asíncronas o de inducción. Problemas resueltos



Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

PRESENTACIÓN

Esta colección de problemas resueltos está estructurada de forma que ayude al alumno a resolver por sí mismo los problemas propuestos. Por esta causa este texto comienza con los enunciados de todos los problemas, seguidos de sus resultados, y finaliza con la resolución de cada problema según el siguiente esquema:

1) Se da el enunciado del problema.
2) Se muestran los resultados del problema.
3) Se proporcionan unas sugerencias para la resolución del problema.
4) Se expone la resolución detallada del problema.

Se sugiere al alumno que sólo lea el enunciado del problema y que trate de resolverlo por su cuenta. Si lo necesita, puede utilizar las sugerencias que se incluyen en cada problema.

El alumno sólo debería leer la resolución detallada de cada problema después de haber intentado resolverlo por sí mismo.

Por otra parte, este documento está diseñado para que se obtenga un texto impreso bien organizado si decide ahorrar papel imprimiéndolo a tamaño reducido, de forma que se incluyan dos páginas por cada hoja de papel A4 apaisado.

Puede encontrar más documentación gratuita en la página web del autor: http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm

MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS DE MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

(Los problemas marcados con (*) sirven para repasar conceptos estudiados anteriormente en la asignatura "Máquinas Eléctricas I")

A.1 CIRCUITO EQUIVALENTE. CURVA DE PAR. RENDIMIENTO

A.1.1(*) Se tiene un motor asíncrono trifásico de rotor bobinado y 6 polos conectado a una red de 220 V y **50,5 Hz**. Cuando gira a una velocidad de 970 r.p.m. este motor absorbe de la red una potencia de 15 kW y una corriente de 47 A.

Se sabe que cuando funciona en vacío este motor absorbe de la red una potencia de 760 W y una corriente de 20,5 A.

Este motor tiene su devanado del estator conectado en estrella y la resistencia medida entre dos de sus bornes vale 0,38 Ω. Las pérdidas mecánicas de esta máquina son 220 W.

Para el estado de funcionamiento indicado inicialmente (15 kW y 970 r.p.m.):

a) Calcular el factor de potencia del motor.
b) Determinar el par interno, tanto en Nm como en vatios-síncronos.
c) Obtener la potencia de pérdidas en el cobre del rotor.
d) Calcular la potencia útil y el rendimiento.

A.1.2(*) Se dispone de un motor de inducción trifásico de rotor devanado y se ha ensayado obteniendo los siguientes resultados:

CORTOCIRCUITO:	120 V	80 A	6,6 kW
ROTOR ABIERTO:	Tensión aplicada al estator: 380 V		
	Tensión obtenida entre anillos: 190 V		
RESISTENCIA DEL ESTATOR:		$R_1 = 0,2\ \Omega$	

Este motor tiene los devanados tanto del estator como del rotor conectados en estrella y es de 4 polos, 50 C.V., 380 V y 50 Hz.

Si se desprecian las pérdidas en el hierro y mecánicas. Determinar:

a) La velocidad del motor con la carga asignada.
b) Rendimiento a plena carga.

Máquinas asíncronas o de inducción

A.1.3(*) Un motor de inducción trifásico está conectado en triángulo, tiene una potencia y una frecuencia asignadas de 5,6 C.V. y 50 Hz, respectivamente, y consume una corriente de línea de 32 A cuando proporciona su par máximo. Dicho par máximo vale 126,7 Nm y se produce cuando la velocidad de la máquina es 619,5 r.p.m. La resistencia de cada fase del estator es de 1 Ω.

Se acepta que la corriente de vacío es despreciable frente a la corriente del estator cuando el par es máximo. Si, además, se desprecian las pérdidas mecánicas y magnéticas,

a) Indicar el número de polos de la máquina y su velocidad de sincronismo.

b) Obtener los parámetros R'_2 y X_{cc} del motor, así como la tensión de línea de la red a la que está conectado.

c) Calcular la velocidad asignada (dibujarla sobre la curva del par).

d) ¿A qué velocidad girará este motor si debe mover un par igual a la mitad del par asignado y funciona conectado a su tensión asignada? (dibujar el resultado sobre la curva del par).

A.1.4(*) Un motor asíncrono trifásico de 380/220 V, 50 Hz, 30 C.V. y 970 r.p.m. tiene su par máximo a 850 r.p.m. y se sabe que se cumple que $R_1 = R'_2$. Si se desprecian las pérdidas magnéticas y mecánicas, calcular:

a) La tensión de la red si el motor está a su tensión asignada conectado en triángulo.

b) La velocidad de sincronismo y el número de polos del motor.

c) Los parámetros R_1, R'_2 y X_{cc} del circuito equivalente.

d) Los pares asignado, de arranque directo y máximo, así como, la capacidad de sobrecarga.

A.1.5 Un motor asíncrono trifásico de 100 CV, 1440 r.p.m. y 50 Hz tiene una resistencia del estator muy inferior a su resistencia del rotor reducida al estator ($R_1 \lll R'_2$) y presenta una capacidad de sobrecarga de 2,5.

Calcular:

a) El valor del par máximo y la velocidad a la que se produce dicho par máximo.

b) La velocidad a la que girará cuando debe vencer un par resistente constante de 366 Nm.

NOTAS:
- Resuelva utilizando la fórmula de Kloss.
- Despréciense las pérdidas mecánicas.

A.2 MANIOBRAS

A.2.1 En el motor del problema A.1.2 calcular la resistencia que debe añadirse en serie por fase en el rotor para obtener el par máximo en el arranque.

A.2.2 En el motor del problema A.1.4 calcular:

a) La mínima tensión de la red a la cual este motor puede arrancar si debe mover una carga que demanda un par independiente de la velocidad de 100 Nm.

b) Corrientes de arranque directo a la tensión asignada y mediante el método estrella-triángulo.

A.2.3 Una máquina de inducción trifásica de rotor de jaula de ardilla está conectada a una red de 380 V y tiene las siguientes características:

V_{1NL} = 380/660 V f_1 = 50 Hz n_N = 585 r.p.m.

R_1 = 0,5 Ω R'_2 = 0,7 Ω $X_1 = X'_2$ = 3 Ω

En esta máquina se pueden despreciar las pérdidas mecánicas y en el hierro, así como la corriente de vacío.

Determinar:

a) La forma de conexión (estrella o triángulo) del estator y el número de polos de la máquina.

b) La corriente de línea, el factor de potencia y la potencia absorbida de la red cuando el motor funciona en condiciones asignadas.

c) La potencia desarrollada, el par mecánico en el eje y el rendimiento del motor en las condiciones del apartado anterior.

d) El par de frenado si la máquina se la hace funcionar como freno a contracorriente, para lo cual se permutan rápidamente dos fases de la red de alimentación cuando la máquina estaba funcionando como motor a 585 r.p.m.

e) La potencia mecánica absorbida y la potencia eléctrica que la máquina entrega a la red si se la hace funcionar como generador asíncrono girando con una velocidad de 615 r.p.m., para lo cual se acopla una turbina de gas a su eje.

A.2.4 Un motor de inducción trifásico de 380/660 V, 1764 r.p.m. y **60 Hz** tiene estos parámetros:

$$R_1 = R'_2 = 0{,}5\ \Omega \qquad X_{cc} = 5\ \Omega$$

Si se desprecian las pérdidas magnéticas y mecánicas, calcular:

a) La velocidad de sincronismo, número de polos y tensión de la red si se desea conectarlo en triángulo.
b) Par y corriente de arranque directo.
c) Ídem si se emplea el método estrella-triángulo.
d) Par asignado.
e) La velocidad a que girará si debe vencer un par de 70 Nm y la tensión se ha reducido a un 90% de la asignada.
f) La velocidad de giro si el par resistente se mantiene constante e igual a 70 Nm y la tensión se sigue reduciendo hasta el mínimo valor en que el motor aún puede seguir girando.

NOTA: Representar los resultados de los apartados e) y f) sobre la curva par-velocidad.

A.2.5 Un motor trifásico de jaula de ardilla tiene estas características cuando funciona en condiciones asignadas:

$$V_{1NL} = 660/380\ \text{V} \qquad f_{1N} = 50\ \text{Hz} \qquad n_N = 1425\ \text{r.p.m.,}$$

$$R_1 = 0{,}7\ \Omega \qquad R'_2 = 0{,}9\ \Omega \qquad X_{1N} = 0{,}8\ \Omega \qquad X'_{2N} = 1{,}2\ \Omega$$

En esta máquina se puede despreciar las pérdidas mecánicas y magnéticas, así como la corriente de vacío.

El motor está alimentado por un convertidor de frecuencias que funciona en lazo abierto. Entre 0 y 50 Hz la tensión de línea que proporciona dicho convertidor varía linealmente entre 80 y 660 V. Para frecuencias por encima de 50 Hz la tensión de línea permanece constante e igual a 660 V.

a) Indicar el número de polos y la forma de conexión del motor si funciona a marcha industrial cuando el convertidor proporciona 50 Hz.
b) Calcular el par de arranque cuando el convertidor suministra las siguientes frecuencias: 10, 50 y 70 Hz.

A.2.6 Se tiene un motor trifásico de jaula de ardilla de 6 polos que está conectado en estrella a una red de 700 V y 50Hz y cuyos parámetros son:

$$R_1 \approx 0\ \Omega \qquad R'_2 = 0{,}1\ \Omega \qquad X_{cc} = 1{,}25\ \Omega \qquad J = 20\ \text{kgm}$$

Calcular el tiempo de arranque de este motor en vacío hasta que su deslizamiento sea igual a 0,05.

A.2.7 Un *motor asíncrono trifásico de rotor bobinado* está conectado en triángulo y tiene estas características:

690/400 V	50 Hz	960 r.p.m.	
R_1 = 0,114 Ω	R'_2 = 0,4 Ω	X_{cc} = 2 Ω	m_i = 2

Si se desprecian la corriente de vacío y las pérdidas mecánicas, calcule:

a) La tensión de línea (es decir, la tensión entre fases) para que el motor esté a su tensión asignada, la velocidad de sincronismo, el número de polos y los deslizamientos asignado y de par máximo.

b) El par y la corriente de línea en el arranque directo y en el arranque estrella-triángulo.

c) El par y la corriente de línea en el arranque mediante un autotransformador que en el momento de arrancar suministra al estator una tensión de línea de 248 V. Repetir el cálculo del par y de la corriente de línea si ahora se utiliza un arrancador electrónico que en el instante de arrancar proporciona al estator una tensión de línea de 200 V.

d) El par asignado.

Este motor mueve una carga mecánica que demanda un par constante e igual al par asignado y se desea reducir su velocidad a 920 r.p.m.

e) Si esta variación de la velocidad se realiza modificando la tensión con que se alimenta el motor ¿Cuál es la tensión de línea que es preciso suministrar al estator?

f) Si esta variación de la velocidad se realiza introduciendo resistencias en serie con las fases del rotor y alimentando el estator con su tensión asignada ¿Cuál es valor de la resistencia que hay que conectar en serie con cada fase del rotor? ¿Cuál es la tensión entre dos anillos del colector de la máquina en este caso? Calcule también la frecuencia de las corrientes del rotor y la potencia activa consumida en estas resistencias conectadas a través del colector de anillos.

Se sabe que en esta máquina la reactancia del estator y la reactancia del rotor reducida al estator son iguales ($X_1 = X'_2$) y que la reactancia magnetizante vale X_μ = 100 Ω.

g) Vuelva a calcular el par asignado de este motor utilizando ahora los parámetros del circuito simplificado serie (el cual se obtiene aplicando el Teorema de Thévenin al circuito equivalente exacto).

NOTA: Salvo en la pregunta f), el motor tiene siempre su rotor en cortocircuito.

A.3 MOTORES MONOFÁSICOS DE INDUCCIÓN. MOTORES ASÍNCRONOS TRIFÁSICOS DE DOBLE JAULA

A.3.1(*) Un motor de inducción monofásico de 4 polos, **60 Hz** y 110 V tiene estos parámetros:

$R_1 = 1{,}86\ \Omega$	$X_1 = 2{,}56\ \Omega$
$R'_2 = 3{,}56\ \Omega$	$X'_2 = 2{,}56\ \Omega$
$X_\mu = 53{,}4\ \Omega$	Pérdidas mecánicas: $P_m = 13{,}5$ W

Si este motor está funcionando con un deslizamiento del 5% y se desprecian las pérdidas en el hierro P_{Fe}, calcular:

a) Corriente del estator.
b) Par útil.

A.3.2 Un motor asíncrono trifásico de doble jaula y 4 polos tiene su estator conectado en triángulo, se alimenta con una tensión de línea de 400 V y 50 Hz y su velocidad asignada es 1440 r.p.m.

En esta máquina se pueden despreciar la corriente de vacío y las pérdidas en el hierro y los parámetros de su circuito equivalente son:

Estator:	$R_1 = 1\ \Omega$	$X_1 = 3\ \Omega$
Jaula exterior:	$R'_{2e} = 3\ \Omega$	$X'_{2e} = 1\ \Omega$
Jaula interior:	$R'_{2i} = 0{,}6\ \Omega$	$X'_{2i} = 5\ \Omega$

Calcular:

a) Los pares de arranque y asignado.
b) El factor de jaula.

A.4 PROBLEMAS NO RESUELTOS

A.4.1(*) Un motor asíncrono trifásico de 400/230 V y 50 Hz desarrolla su potencia asignada a 1455 r.p.m. y tiene estos parámetros:

$$R_1 = 0{,}05\ \Omega; \qquad R'_2 = 0{,}113\ \Omega; \qquad X_{cc} = 1\ \Omega$$

Este motor está conectado en estrella y sus pérdidas mecánicas son despreciables.

a) Indicar la tensión de línea a que se debe conectar este motor para que funcione con su tensión asignada. ¿Cuáles son su número de polos y su velocidad de sincronismo?

b) Calcular su potencia asignada.

c) Determinar su par máximo y la velocidad a la que se produce.

d) Calcular la corriente de línea en el arranque directo.

e) Calcular el valor de la resistencia a conectar en serie con cada fase del rotor para conseguir el par máximo en el arranque si se cumple que $m_i = m_v = 0{,}666$.

A.4.2(*) Un motor asíncrono de rotor bobinado posee estas características:

Trifásico		$V_{1NL} = 690/400$ V
$f_1 = 50$ Hz	$n_N = 1440$ r.p.m.	$m_v = 1{,}2$
$R_1 = 1{,}7\ \Omega$	$R'_2 = 2{,}41\ \Omega$	$X_{cc} = 8\ \Omega$

Si <u>se desprecian las pérdidas mecánicas</u> y el motor se conecta a una red cuya tensión de línea es 400 V, calcular:

a) El número de polos, la velocidad síncrona y la forma de conexión del motor.

b) El par y la potencia asignados.

c) La velocidad a la cual este motor proporciona su par máximo.

d) La velocidad a la que girará este motor si debe vencer un par resistente constante de 36,1 Nm.

e) El valor de la resistencia R_{adic} a conectar en serie con cada fase del rotor para conseguir el máximo par de arranque.

A.4.3(*) Un motor asíncrono de rotor bobinado posee estas características:

Trifásico		$V_{1NL} = 693/400$ V
$f_1 = 50$ Hz	$n_N = 960$ r.p.m.	$m_v = 1{,}5$
$R_1 = 3{,}4\ \Omega$	$R'_2 = 4{,}82\ \Omega$	$X_{cc} = 19\ \Omega$

Si <u>se desprecian las pérdidas mecánicas</u> y el motor se conecta a una red cuya tensión de línea es 693 V, calcular:

a) El número de polos, la velocidad de sincronismo, la forma de conexión del motor y la relación de transformación de intensidades m_i.

b) El par asignado.

c) La capacidad de sobrecarga.

d) La velocidad a la que girará este motor si debe vencer un par resistente constante de 21 Nm.

e) El valor de la mínima tensión de línea a la cual este motor puede arrancar si tiene acoplada en el eje la carga constante de 21 Nm del apartado anterior.

A.4.4(*) Un motor de inducción trifásico de rotor bobinado posee estas características:

V_{1NL} = 400/230 V	f_1 = 50 Hz	n_N = 955 r.p.m.	
R_1 = 1,2 Ω	R'_2 = 1,2 Ω	X_{cc} = 5,5 Ω	$m_i = m_v$ =0,7

Si se desprecian las pérdidas mecánicas, calcular:

a) El número de polos, la velocidad de sincronismo y la tensión de línea de la red si el estator está conectado en triángulo.
b) La potencia y el par asignados.
c) Su capacidad de sobrecarga.
d) La resistencia a conectar en serie con cada fase del rotor para obtener el par máximo en el arranque.

A.4.5(*) Un motor de inducción posee estas características:

Trifásico		V_{1NL} = 400/230 V
f_1 = 50 Hz		n_1 = 1000 r.p.m.
R_1 = 1 Ω	R'_2 = 1,5 Ω	X_{cc} = 7 Ω

Si se desprecian las pérdidas mecánicas y el motor se conecta a una red cuya tensión de línea es 230 V, calcular:

a) El número de polos y la forma de conexión del motor.
b) La velocidad cuando el par alcanza su valor máximo y el valor máximo del par.
c) La potencia en el entrehierro P_a cuando el motor da su par máximo.
d) El par y la velocidad asignados si la capacidad de sobrecarga de este motor vale 2,531.
e) Las intensidades de línea en el arranque directo y en el arranque estrella-triángulo.

A.4.6(*) Un motor de inducción posee estas características:

Trifásico de rotor bobinado		V_{1NL} = 690/400 V
f_1 = 50 Hz	n_N = 2916 r.p.m.	s_m = 0,1712
R_1 = 0,1 Ω	R'_2 = 0,35 Ω	$m_i = m_v$ = 1,1

(s_m = deslizamiento cuando el par es máximo)

Si se desprecian las pérdidas mecánicas y el motor se conecta en estrella, calcular:

a) El número de polos (2p), la tensión de línea (V_{1NL}) de la red y el valor del parámetro X_{cc}.
b) El par M_N y la potencia en el entrehierro P_{aN} en condiciones asignadas.
c) El par M_a y la intensidad de línea I_{aL} en el arranque directo.
d) La resistencia R_{adic} a conectar en serie con cada fase del rotor para conseguir el máximo par en el arranque.

A.4.7 Un motor asíncrono trifásico de anillos tiene estas características:

400/231 V	50 Hz	960 r.p.m.
$R_1 = 0{,}1\ \Omega$	$R'_2 = 0{,}4\ \Omega$	$X_{cc} = 2{,}0\ \Omega$
$m_i = 1{,}15$		

Calcule:

a) La tensión de red para que el motor esté a su tensión asignada cuando está conectado en <u>triángulo</u>, la velocidad de sincronismo en r.p.m., el número de polos y el deslizamiento asignado.

b) El par máximo.

c) El par y la corriente de línea en el arranque directo.

d) El par y la corriente de línea en el arranque mediante el método estrella-triángulo.

e) El par y la corriente de línea en el arranque mediante un autotransformador que suministra al motor una tensión de línea en el arranque de 139 V.

f) El par y la corriente de línea en el arranque mediante un arrancador electrónico que suministra a la máquina una tensión de línea en el arranque de 115 V.

g) La resistencia que hay conectar en serie con el rotor para que cuando el estator está conectado a su tensión asignada se consiga el par máximo en el arranque. Calcule también la corriente de línea en el arranque en estas condiciones.

h) La reactancia X_e que es preciso conectar en serie con cada fase del estator para que la corriente de arranque sea igual al 60% de la de arranque directo, si el conjunto motor más reactancias X_e se conectan a una red cuya tensión es la obtenida en la pregunta a). ¿Cuánto vale ahora el par de arranque?

<u>NOTAS</u>:

- Salvo en la pregunta g) suponer que el rotor de la máquina siempre está en cortocircuito.
- Salvo en el arranque estrella-triángulo (pregunta d)) el motor tiene su estator siempre conectado en <u>triángulo</u>.
- Despreciar la corriente de vacío en el cálculo de las corrientes de arranque.
- Despreciar las pérdidas mecánicas.

A.4.8(*) Un motor asíncrono trifásico de jaula de ardilla, 400/693 V, 50 Hz y 966 r.p.m. tiene estos parámetros:

$$R_1 = 0{,}5\ \Omega; \qquad R'_2 = 0{,}63\ \Omega; \qquad X_{cc} = 3{,}11\ \Omega$$

Este motor está conectado a una red cuya tensión de línea vale 400 V. Las pérdidas mecánicas de este motor son despreciables.

a) Indicar la forma de conexión de este motor. ¿Cuáles son su número de polos y su velocidad de sincronismo?

b) Calcular su potencia asignada.

c) Determinar la velocidad de este motor cuando su par es máximo.

d) Calcular la corriente de línea y el par en el arranque directo.

e) ¿Cuál será la mínima tensión de línea con que este motor puede arrancar si debe vencer un par resistente constante e igual a 103 Nm?

A.4.9 Un motor asíncrono trifásico de doble jaula tiene estos parámetros:

$R_1 = 0{,}5\ \Omega$	$X_1 = 9\ \Omega$
$R'_{20} = 4\ \Omega$	$X'_{20} = 21\ \Omega$
$R'_{2a} = 12\ \Omega$	$X'_{2a} = 15\ \Omega$

Su estator se conecta en estrella a una red de 693 V y 50 Hz y su velocidad asignada es 1452 r.p.m.

Calcular:

a) El factor de jaula de esta máquina.
b) La velocidad y el valor del par cuando éste es máximo.
c) El par asignado y la capacidad de sobrecarga.
d) El par y la corriente de arranque directo.

NOTA: Despreciar la corriente de vacío.

A.4.10 Una máquina asíncrona trifásica de anillos está conectada en triángulo a una red de 260 V y 50 Hz. Su velocidad asignada es 1446 r.p.m. y sus parámetros son:

$R_1 = R'_2 = 1\ \Omega$ $\quad X_{cc} = 5{,}17\ \Omega$ $\quad m_i = 1{,}19$

Se acepta que las pérdidas mecánicas de esta máquina son despreciables.

a) Calcular la tensión asignada de fase (V_{1N}), la velocidad de sincronismo (n_1) y el número de polos (2p) de esta máquina.
b) Calcular el par asignado (M_N) y la velocidad a la cual el par es máximo.
c) Estando la máquina actuando como motor en condiciones asignadas se permutan de manera brusca dos de las fases de la red de alimentación, por lo cual empieza a funcionar como freno a contracorriente. Calcular el par de frenado inmediatamente después de realizar esta permutación de las fases.
d) Calcular la resistencia R_{adic} que se debe conectar en serie con cada fase del rotor para conseguir que el par máximo se produzca en el arranque.
e) Determinar la velocidad a la que girará este motor si debe vencer un par resistente igual al asignado (M_N) y cada fase del rotor tiene conectada en serie la resistencia R_{adic} calculada en el apartado anterior.
f) Se vuelve a dejar el rotor en cortocircuito y se alimenta al motor con una tensión de línea de 225 V y **40 Hz**. Calcular la velocidad a la que girará ahora si el par que debe vencer es igual al asignado (M_N).
g) Con el rotor en cortocircuito y el estator alimentado a su tensión y frecuencia asignados (260 V y 50 Hz), esta máquina asíncrona es movida mediante un motor Diésel a una velocidad superior a la de sincronismo, por lo que pasa a funcionar como generador. Si el deslizamiento ahora es igual al asignado cambiado de signo ($-s_N$) ¿cuáles son la velocidad y el par de la máquina en estas condiciones?

NOTA: Se acepta que los parámetros R_1, R'_2 y L_{cc} ($X_{cc} = 2\pi\ f_1\ L_{cc}$) permanecen constantes.

A.4.11 Un motor asíncrono trifásico de anillos tiene estos parámetros:

$R_1 = R'_2 = 0,6\ \Omega$ $\qquad X_{cc} = 5\ \Omega$ $\qquad m_v = 1,4$

Este motor se encuentra a la tensión asignada cuando se conecta en triángulo a una red de 500 V y 50 Hz. Su velocidad asignada es de 980 r.p.m.

Calcular:

a) El par asignado.

b) Resistencia R_x a conectar en serie con cada fase del rotor para conseguir que este motor gire a 900 r.p.m. cuando proporciona el par asignado.

c) Corriente I_2 que circula por cada fase del rotor cuando la máquina está en el estado descrito en el apartado anterior.

d) Ahora la máquina sigue girando a 900 r.p.m. suministrando el par asignado, pero no se conecta una resistencia R_x en serie con cada fase del rotor, sino que, para conseguirlo, su rotor se alimenta con una tensión V_2 en fase con la corriente I_2. Calcule el valor eficaz V_2 y la frecuencia f_2 de esta tensión (tensión de fase).

e) Repita los apartados b), c) y d) si ahora se desea que la velocidad de giro de este motor con el par asignado sea de 850 r.p.m.

A.4.12 Un motor trifásico de jaula de ardilla está conectado en estrella y tiene estas características:

$V_{1NL} = 693$ V $\qquad$ 50 Hz $\qquad$ 2 polos

$R_1 = 0\ \Omega$ $\qquad R'_2 = 0,26\ \Omega$ $\qquad X_{cc} = 1\ \Omega$

Este motor mueve una carga que presenta un par resistente constante de 135 Nm y se alimenta con un variador de frecuencias que actúa como una fuente de tensión cuyo valor eficaz varía con la frecuencia f_1 de esta manera:

- Si $f_1 \geq 50$ Hz $\Rightarrow$ $V_{1L} = 693$ V
- Si $f_1 = 0$ Hz $\Rightarrow$ $V_{1L} = 208$ V
- Si $0 < f_1 < 50$ Hz $\Rightarrow$ V_{1L} varía linealmente entre 208 y 693 V

Suponiendo que las resistencias y los coeficientes de autoinducción del motor no varían con la frecuencia, calcule la velocidad a la que girará cuando se lo alimente con tensiones de frecuencia:

a) $f_1 = 40$ Hz

b) $f_1 = 60$ Hz

NOTA: Redondear todas las tensiones a tres cifras significativas (sin decimales).

A.4.13(*) Un motor de jaula de ardilla posee estas características:

Trifásico		V_{1NL} = 690/400 V
f_1 = 50 Hz		n_N = 1470 r.p.m.
R_1 = 0,1 Ω	R'_2 = 0,2 Ω	X_{cc} = 0,99 Ω

Si se desprecian las pérdidas mecánicas y el motor se conecta a una red cuya tensión de línea es 400 V, calcular:

a) El número de polos, la velocidad de sincronismo y la forma de conexión del motor.
b) El par y la potencia asignadas.
c) Las intensidades de línea en el arranque directo y en el arranque estrella-triángulo.
d) Este motor mueve una carga que demanda un par constante de 280 Nm y se reduce su tensión de alimentación. ¿Cuál será la mínima tensión de línea a la que el motor aún puede mover esta carga? ¿A qué velocidad girará en esta situación?

AVISO PARA LOS ALUMNOS DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS II

Los problemas A.1.1, A.1.2, A1.3, A.1.4 y A.3.1, así como los problemas A4.1, A4.2, A4.3, A4.4, A4.5, A4.6, A4.8 y A4.13, sirven para repasar conceptos estudiados anteriormente en la asignatura “Máquinas Eléctricas I”.

RESULTADOS DE LOS PROBLEMAS DE MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

A.1 CIRCUITO EQUIVALENTE. CURVA DE PAR. RENDIMIENTO

Problema A.1.1:

a) Cos $\varphi_1 = 0{,}84$

b) M = 127 Nm (= 13440 vatios-síncronos)

c) $P_{Cu2} = 532{,}3$ W

d) $P_u = 12688$ W; $\eta = 84{,}58\%$

Problema A.1.2:

a) $n_N = 1431$ r.p.m.

b) $\eta_N = 89{,}7\%$

Problema A.1.3:

a) 2p = 8 polos; $n_1 = 750$ r.pm.

b) $R'_2 = 1{,}69\ \Omega$; $X_{cc} = 9{,}66\ \Omega$; $V_{1NL} = 266{,}9$ V

c) $n_N = 722$ r.p.m.

d) n = 736,9 r.p.m.

Problema A.1.4:

a) $V_{1NL} = 220$ V

b) $n_1 = 1000$ r.p.m.; 2p = 6 polos

c) $R_1 = R'_2 = 0{,}174\ \Omega$; $X_{cc} = 1{,}15\ \Omega$

d) $M_N = 217{,}4$ Nm; $M_a = 167{,}1$ Nm; $M_{máx} = 518{,}5$ Nm;
Capacidad de sobrecarga = 2,39

Problema A.1.5:

a) $M_{máx} = 1220$ Nm; $n_m = 1212$ r.p.m.

b) n = 1456 r.p.m.

A.2 MANIOBRAS. CONTROL DE VELOCIDAD

Problema A.2.1:

$R_{adic} = 0{,}169\ \Omega$

Problema A.2.2:

a) $V_1 = 170$ V

b) $I_{aL} = 317{,}1$ A; $I_{a\lambda} = 105{,}7$ A

Problema A.2.3:

a) Conexión triángulo; $2p = 10$ polos

b) $I_{1NL} = 22{,}6$ A; $\cos \varphi_{1N} = 0{,}979$; $P_{1N} = 14554$ W

c) $P_{uN} = 13941$ W; $M_N = 227{,}6$ Nm; $\eta_N = 95{,}79\%$

d) $M = -66{,}53$ Nm

e) $P_m = -15692$ W; $P_1 = -15036$ W

Problema A.2.4:

a) $n_1 = 1800$ r.p.m.; $2p = 4$ polos; $V_{1L} = 380$ V

b) $M_a = 44{,}2$ Nm; $I_{aL} = 129$ A

c) $M_{a\lambda} = 14{,}7$ Nm; $I_{a\lambda} = 43$ A

d) $M_N = 85$ Nm

e) $n = 1764$ r.p.m.

f) $n = 1621$ r.p.m.

Problema A.2.5:

a) $2p = 4$ polos; Conexión estrella

b) $M_a = 378{,}4$ Nm a 50 Hz; $M_a = 404{,}8$ Nm a 10 Hz; $M_a = 170{,}5$ Nm a 70 Hz

Problema A.2.6:

$t_a = 3{,}63$ s

Problema A.2.7:

a) $V_{1NL} = 400$ V; $n_1 = 1000$ r.p.m.; $2p = 6$ polos; $s_N = 0{,}04$; $s_m = 0{,}2$

b) $I_{aL} = 335{,}5$ A; $M_a = 430$ Nm; $I_{a\lambda} = 111{,}8$ A; $M_{a\lambda} = 143{,}3$ Nm

c) $I_{a,autL} = 129$ A; $M_{a,aut} = 165{,}3$ Nm; $I_{a,electL} = 167{,}8$ A; $M_{a,elec} = 107{,}5$ Nm

d) $M_N = 431{,}2$ Nm

e) $V_{1L} = 301{,}3$ V

f) $R_x = 0{,}1\ \Omega$; $V_{2L} = 13{,}4$ V; $f_2 = 4$ Hz: $P_2 = 1807$ W

g) $M_N = 422{,}9$ Nm

A.3 MOTORES MONOFÁSICOS DE INDUCCIÓN. MOTORES ASÍNCRONOS TRIFÁSICOS DE DOBLE JAULA

Problema A.3.1:

a) $I_1 = 4{,}28$ A

b) $M = 1{,}045$ Nm

Problema A.3.2:

a) $M_a = 185$ Nm; $M_N = 169$ Nm

b) $m = 0{,}6$

A.4 PROBLEMAS NO RESUELTOS

Problema A.4.1:

a) V_{1NL} = 400 V; 2p = 4 polos; n_1 = 1500 r.p.m.

b) (s_N = 0,03); P_N = 37248 W

c) (s_m = 0,113); n_m = 1331 r.p.m.; $M_{máx}$ = 480,5 Nm

d) I_{aL} = 227 A

e) (R'_{adic} = 0,888 Ω); R_{adic} = 2 Ω

Problema A.4.2:

a) 2p = 4 polos; n_1 = 1500 r.p.m.; conexión triángulo (V_{1N} = 400 V)

b) (s_N = 0,04); M_N = 47,2 Nm; P_N = 7118 W

c) (s_m = 0,2947); n_m = 1058 r.p.m.

d) (s = 0,03); n = 1455 r.p.m.

e) (R'_{adic} = 5,769 Ω); R_{adic} = 4 Ω

Problema A4.3:

a) 2p = 6 polos; n_1 = 1000 r.p.m.; conexión estrella (V_{1N} = 400 V); m_i = 1,5

b) (s_N = 0,04); M_N = 35,2 Nm

c) (s_m = 0,25; $M_{máx}$ = 101 Nm); Capacidad de sobrecarga = 2,87

d) (s = 0,023 y s = 2,67; la solución correcta es s = 0,023); n = 977 r.p.m.

e) (V_1 = 255 V); V_{1L} = 442 V

Problema A.4.4:

a) (n_1 = 1000 r.p.m.) 2p = 6 polos; Al ser triángulo: V_{1N} = V_{1NL} = 400 V

b) (s_N = 0,045; I'_{2N} = 8,1 A) P_N = 5010 W; M_N = 50,1 Nm

c) (s_m = 0,213; $M_{máx}$ = 111 Nm) Capacidad de sobrecarga = 2,22

d) (R'_{adic} = 4,43 Ω) R_{adic} = 9,04 Ω

Problema A.4.5:

a) (V_{1N} = 230 V) 2p = 6 polos; triángulo

b) (s_m = 0,212) n_m = 788 r.p.m.; $M_{máx}$ = 93,9 Nm

c) P_{am} = 9833 W

d) (s_N = 0,04) n_N = 960 r.p.m.; M_N = 37,1 Nm

e) (I_a = 30,9 A) I_{aL} = 53,6 A; $I_{a\lambda}$ = 17,9 A

Problema A.4.6:

a) (V_{1N} = 400 V) 2p = 2 polos; V_{1NL} = 690 V; X_{cc} = 2,1 Ω

b) (s_N = 0,028) M_N = 114 Nm; P_{aN} = 35816 W

c) M_a = 119 Nm; I_{aL} = 186 A

d) (R'_{adic} = 1,742 Ω) R_{adic} = 1,44 Ω

Máquinas asíncronas o de inducción

Problema A.4.7:

a) (V_{1N} = 231 V) V_{1NL} = 231 V; n_1 = 1000 r.p.m.; 2p = 6 polos; s_N = 0,04

b) (s_m = 0,2) $M_{máx}$ = 363,5 Nm

c) M_a = 143,9 Nm; I_{aL} = 194 A

d) $M_{a\lambda}$ = 48 Nm; $I_{a\lambda}$ = 64,7 A

e) $M_{a,aut}$ = 51,8 Nm; $I_{a,autL}$ = 69,8 A

f) $M_{a,elect}$ = 36 Nm; $I_{a,electL}$ = 97 A

g) R_{adic} = 1,21 Ω; I_{aRL} = 140 A

h) X_e = 1,4 Ω; M_{az} = 51,8 Nm

Problema A.4.8:

a) (V_{1N} = 400 V) triángulo; 2p = 6 polos; n_1 = 1000 r.p.m.

b) (s_N = 0,034) P_N = 23110 W

c) (s_m = 0,2) n_m = 800 r.p.m.

d) (I_a = 120,9 A) I_{aL} = 209,4 A; M_a = 263,8 Nm

e) $V_1 = V_{1L}$ = 250 V

Problema A.4.9:

a) (V_{1N} = 400 V; n_1 = 1500 r.p.m.) Factor de jaula: m = 1,33

b) n_{m0} = 1300 r.p.m., $M_{máx0}$ = 50 Nm

c) M_N = 22,9 Nm; Capacidad de sobrecarga = 2,18

d) M_a = 45,9 Nm; I_{aL} = 14,8 A

Problema A.4.10:

a) V_{1N} = 260 V; n_1 = 1500 r.p.m.; 2p = 4 polos

b) (s_N = 0,036; s_m = 0,19) M_N = 42 Nm; n_m = 1215 r.p.m.

c) (s = 1,964) M = -22,7 Nm

d) (R'_{adic} = 4,266 Ω) R_{adic} = 3 Ω

e) (s = 0,19) n = 1215 r.p.m.

f) (n_1 = 1200 r.p.m.; X_{cc} = 4,136 Ω; s = 0,0383) n = 1154 r.p.m.

g) n = 1554 r.p.m.; M = -48,2 Nm

Problema A.4.11:

a) (V_{1N} = 500 V; n_1 = 1000 r.p.m.; s_N = 0,02) M_N = 223,5 Nm

b) (s = 0,1; R'_x = 2,4 Ω) R_x = 1,22 Ω

c) (I'_2 = 16,1 A) I_2 = 22,5 A

d) (V'_2 = 38,6 V) V_2 = 27,5 V; f_2 = 5 Hz; (V_{2L} = 47,6 V)

e) (s = 0,15; R'_x = 3,9 Ω) R_x = 1,99 Ω; (I'_2 = 16,1 A) I_2 = 22,5 A
(V'_2 = 62,8 V) V_2 = 44,8 V; f_2 = 7,5 Hz; (V_{2L} = 77,6 V)

Máquinas asíncronas o de inducción

Problema A.4.12:

a) (V_{1L} = 596 V; V_1 = 344 V; X_{cc} = 0,8 Ω; n_1 = 2400 r.p.m.; s = 0,025) n = 2340 r.p.m.

b) (V_{1L} = 693 V; V_1 = 400 V; X_{cc} = 1,2 Ω; n_1 = 3600 r.p.m.; s = 0,028) n = 3499 r.p.m.

Problema A.4.13:

a) (V_{1N} = 400 V) 2p = 4 polos; n_1 = 1500 r.p.m.; conexión triángulo

b) (s_N = 0,02) M_N = 296,7 Nm; P_N = 45673 W

c) (I_a = 386,7 A) I_{aL} = 669,7 A; $I_{a\lambda}$ = 223,2 A

d) La tensión podrá disminuir hasta que el par máximo sea igual a 280 Nm:
(s_m = 0,2) n_m = 1200 r.p.m.; V_1 = V_{1L} = 179,2 V

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

PROBLEMA A.1.1

ENUNCIADO

Se tiene un motor asíncrono trifásico de rotor bobinado y 6 polos conectado a una red de 220 V y **50,5 Hz**. Cuando gira a una velocidad de 970 r.p.m. este motor absorbe de la red una potencia de 15 kW y una corriente de 47 A.

Se sabe que cuando funciona en vacío este motor absorbe de la red una potencia de 760 W y una corriente de 20,5 A.

Este motor tiene su devanado del estator conectado en estrella y la resistencia medida entre dos de sus bornes vale 0,38 Ω. Las pérdidas mecánicas de esta máquina son 220 W.

Para el estado de funcionamiento indicado inicialmente (15 kW y 970 r.p.m.):

- **a)** calcular el factor de potencia del motor.
- **b)** determinar el par interno desarrollado por el motor, tanto en Nm como en vatios-síncronos.
- **c)** obtener la potencia de pérdidas en el cobre del rotor.
- **d)** calcular la potencia útil y el rendimiento.

RESULTADOS

a) $\cos \varphi_1 = 0{,}84$

b) $M = 127$ Nm (= 13440 vatios-síncronos)

c) $P_{Cu2} = 532{,}3$ W

d) $P_u = 12688$ W; $\eta = 84{,}58\%$

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

* El factor de potencia del motor se calcula despejándolo de la fórmula de la potencia activa de un circuito trifásico (el estator), ya que la potencia absorbida $P_1 = 15$ kW es una potencia (activa) eléctrica. Téngase en cuenta que los datos de tensión y de corriente del enunciado son de línea.

* En el enunciado se indica la resistencia que se mide entre dos fases del estator, por ejemplo R_{AB} entre las fases A y B; sin haber quitado la conexión estrella. Es fácil, comprobar que en este caso la resistencia de una fase R_1 es igual a la mitad de R_{AB}.

* Las pérdidas en el cobre en el estator se obtienen por la ley de Joule en circuitos <u>trifásicos</u> equilibrados (no olvidar el factor 3 de la trifásica): $P_{Cu1} = 3\, R_1\, I_1^2$.

Máquinas asíncronas o de inducción

A.1: Circuito equivalente. Curva de par. Rendimiento

* Los datos del ensayo de vacío permiten calcular las pérdidas en el hierro del motor P_{Fe} (que junto con las pérdidas mecánicas P_m son pérdidas fijas, no varían con la carga). Para ello se tiene en cuenta que en vacío la potencia útil es nula y las pérdidas en el cobre del rotor son despreciables. Las pérdidas en el cobre del estator en vacío se calcularán según se indica en el apartado anterior utilizando la corriente de fase del estator en vacío (que, al ser conexión estrella es igual a la corriente de línea).

* La potencia electromagnética que atraviesa el entrehierro P_a se calcula restando a la potencia absorbida por el motor P_1 las pérdidas que se producen en el estator (las pérdidas en el hierro P_{Fe} y las pérdidas en el cobre del estator P_{Cu1}).

* El par interno medido en vatios-síncronos tiene el mismo valor que la potencia electromagnética P_a.

* La velocidad de sincronismo del motor n_1 se calcula a partir de la frecuencia $f_1 = 50{,}5$ Hz y el número de pares de polos $p = 3$.

* El par interno de la máquina M, medido en Nm, se obtiene dividiendo la potencia electromagnética P_a (en vatios) entre la velocidad de sincronismo Ω_1 (en radianes geométricos/segundo).

* El deslizamiento s del motor cuando consume 15 kW se obtiene por aplicación directa de la expresión que define el deslizamiento sabiendo que la velocidad en esta situación es n = 970 r.p.m.

* A partir del circuito equivalente de un motor asíncrono se sabe que la relación entre las pérdidas en el cobre del rotor P_{Cu2} y la potencia electromagnética P_a es el deslizamiento s. Esto permite calcular las pérdidas P_{Cu2}.

* La potencia útil P_u se calcula restando a la potencia electromagnética P_a las pérdidas en el cobre del rotor P_{Cu2} y las pérdidas mecánicas P_m.

* El rendimiento η es igual al cociente entre la potencia útil P_u y la potencia absorbida por el estator P_1.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA A.1.1

Datos:

m_1 = 3 fases   2p = 6 polos   <u>f_1 = 50,5 Hz</u> V_{1NL} = 220 V

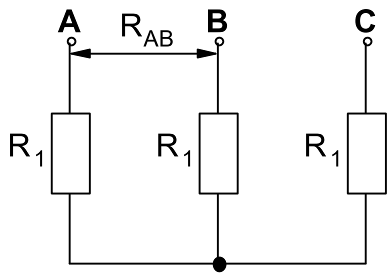
Si $V_{1L} = V_{1NL}$ y P_1 = 15 kW, I_{1L} = 47 A y n = 970 r.p.m.

Si $V_{1L} = V_{1NL}$ y vacío, P_0 = 760 W e I_{0L} = 20,5 A

Conexión estrella en el estator P_m = 220 W

La resistencia medida entre dos fases del estator es R_{AB} = 0,38 Ω

Resolución:



La resistencia medida entre dos de las fases de un devanado trifásico conectado en estrella (por ejemplo, la resistencia R_{AB} entre las fases A y B) es igual dos veces la resistencia R_1 de una fase (ver la figura adjunta). En consecuencia, se obtiene que:

$$R_{AB} = 2\ R_1 \ \rightarrow\ R_1 = \frac{R_{AB}}{2} \tag{1}$$

que, sustituyendo valores, sale

$$R_1 = \frac{0{,}38}{2} = 0{,}19\ \Omega$$

a) La potencia absorbida P_1 es una potencia (activa) eléctrica. Dado que se trata de un circuito trifásico, se tiene que:

$$P_1 = \sqrt{3}\, V_{1L}\, I_{1L} \cos\varphi_1 \tag{2}$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{P_1}{\sqrt{3}\, V_{1L}\, I_{1L}} \tag{3}$$

Sustituyendo valores se llega a

$$\cos\varphi_1 = \frac{15000}{\sqrt{3}\cdot 220\cdot 47} = 0{,}84$$

<u>El factor de potencia del motor vale 0,84.</u>

b) Para calcular este par interno se necesitan conocer las pérdidas en el hierro P_{Fe} del motor. Para obtener estas pérdidas se parte del comportamiento de la máquina en vacío:

En vacío se obtiene que:

Por ser conexión estrella $\rightarrow\ I_{0L} = I_0 = 20{,}5\ \text{A}$

Pérdidas en el cobre en el estator en vacío:

$$P_{Cu10} = 3\ R_1\ I_0^2 = 3 \cdot 0{,}19 \cdot 20{,}5^2 = 239{,}5\ \text{W}$$

En vacío prácticamente no circula corriente por el rotor $\rightarrow\ P_{Cu20} \approx 0$

En vacío no se produce potencia útil $\rightarrow\ P_u = 0$

Para cualquier carga a tensión y frecuencia asignadas las pérdidas en el hierro y mecánicas son fijas.

Luego, en vacío se tiene este balance de potencias:

$$P_0 = P_{Cu10} + P_{Fe} + P_m \tag{4}$$

En consecuencia,

$$P_{Fe} = P_0 - P_{Cu10} - P_m \tag{5}$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$P_{Fe} = 760 - 239{,}5 - 220 = 300\ \text{W}$$

Una vez conocidas las pérdidas en el hierro, se puede calcular la potencia electromagnética P_a que atraviesa el entrehierro cuando el motor absorbe una potencia de 50 kW:

$$P_a = P_1 - P_{Fe} - P_{Cu1} \tag{6}$$

Teniendo en cuenta que en un devanado en estrella se verifica que $I_1 = I_{1L}$, se deduce que las pérdidas en el cobre del estator P_{Cu1} valen:

$$P_{Cu1} = 3\ R_1\ I_1^2 = 3 \cdot 0{,}19 \cdot 47^2 = 1260\ \text{W}$$

Luego, sustituyendo valores en la ecuación (6), se llega a:

$$P_a = 15000 - 1260 - 300 = 13440\ \text{W}$$

El par interno, medido en vatios-síncronos, es igual a la potencia P_a. Luego, el par interno vale 13440 vatios-síncronos.

La velocidad de sincronismo n_1 vale

$$n_1 = \frac{60\ f_1}{p} \tag{7}$$

Es decir, sustituyendo valores,

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50{,}5}{3} = 1010 \ \text{r.p.m.}$$

Como

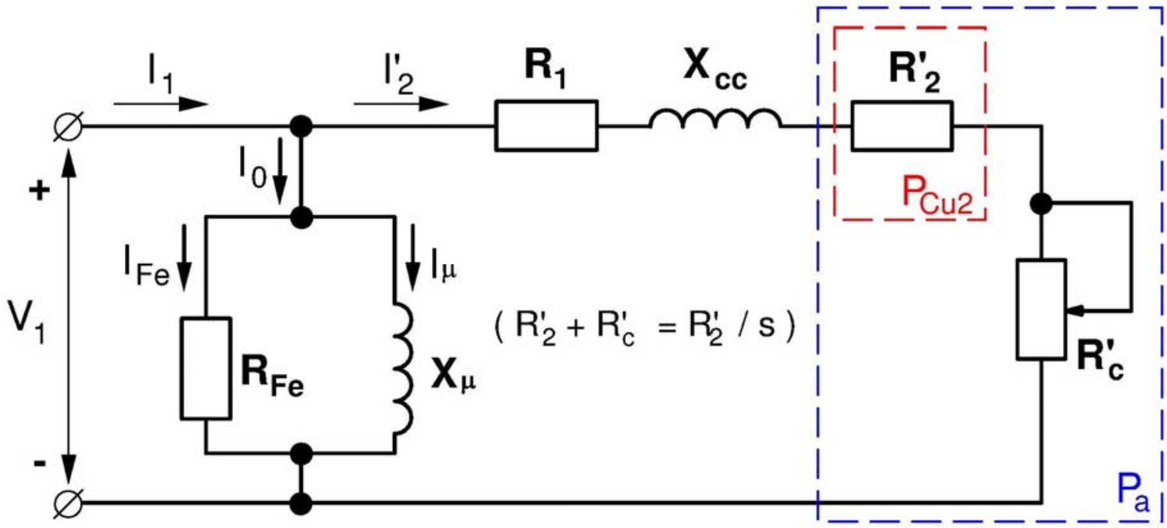
$$M = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{P_a}{\frac{2\pi}{60} n_1} \qquad (8)$$

se obtiene que

$$M = \frac{13440}{\frac{2\pi}{60} \cdot 1010} = 127 \ \text{Nm}$$

<u>El par interno es de 127 Nm.</u>

c)



Recuerde que, según el circuito equivalente de un motor (ver la figura adjunta), se cumple que

$$P_{Cu2} = 3\, R'_2\, I'^2_2$$
$$P_a = 3\,\frac{R'_2}{s}\, I'^2_2 \qquad (9)$$

y queda que

$$P_{Cu2} = s\, P_a \qquad (10)$$

Además, por definición, el deslizamiento s se calcula así:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \tag{11}$$

Sustituyendo valores en las expresiones anteriores, se obtiene lo siguiente:

$$s = \frac{1010 - 970}{1010} = 0{,}0396$$

$$P_{Cu2} = 0{,}0396 \cdot 13440 = 532{,}3 \text{ W}$$

<u>Las pérdidas en el cobre del rotor valen P_{Cu2} = 532,3 W.</u>

d) En el rotor se tiene este balance de potencias:

$$P_a = P_u + P_{Cu2} + P_m \rightarrow P_u = P_a - P_{Cu2} - P_m \tag{12}$$

Luego,

$$P_u = 13440 - 532{,}3 - 220 = 12688 \text{ W}$$

y el rendimiento es

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{12688}{15000} = 0{,}8458 = 84{,}58\%$$

<u>La potencia útil vale 12,7 kW y el rendimiento es 84,58%.</u>

PROBLEMA A.1.2

ENUNCIADO

Se ha ensayado un motor de inducción trifásico de rotor devanado y se han obtenido los siguientes resultados:

CORTOCIRCUITO: 120 V 80 A 6,6 kW
ROTOR ABIERTO: Tensión aplicada al estator: 380 V
Tensión obtenida entre anillos: 190 V
RESISTENCIA DEL ESTATOR: $R_1 = 0{,}2\ \Omega$

Este motor tiene los devanados tanto del estator como del rotor conectados en estrella y es de 4 polos, 50 C.V., 380 V y 50 Hz.

Si se desprecian las pérdidas en el hierro y mecánicas. Determinar:

a) La velocidad del motor con la carga asignada.

b) Rendimiento a plena carga.

RESULTADOS

a) $n_N = 1431$ r.p.m.

b) $\eta_N = 89{,}7\%$

Máquinas asíncronas o de inducción

A.1: Circuito equivalente. Curva de par. Rendimiento

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

* Lo primero es calcular los parámetros R_{cc}, X_{cc} y R'_2 del motor a partir del ensayo de cortocircuito. Para ello no hay que olvidar el calcular primero los valores de fase de la tensión y de la intensidad durante el ensayo.

* Durante el ensayo de rotor bobinado no circula corriente por el rotor y apenas pasa por el estator. Luego, en este ensayo las tensiones del estator y del rotor son iguales a las respectivas f.e.m.s y se puede calcular la relación de transformación de tensiones m_v como cociente de las tensiones (de fase) del estator y del rotor.

* En una máquina de rotor bobinado, tanto el estator como el rotor tienen el mismo número de fases y, en consecuencia, las relaciones de transformación de tensiones m_v y de corrientes m_i son iguales ($m_v = m_i$).

* En un motor de inducción el deslizamiento s es una manera práctica de indicar la velocidad de giro. Por lo tanto, si se desconoce una velocidad inmediatamente se debe pensar en obtener primero el deslizamiento para, a partir de él, calcular la velocidad.

* Recuérdese que "plena carga" es sinónimo de "carga asignada".

* Para operar se debe trabajar con la potencia útil P_u expresada en vatios y no en caballos de vapor.

* La velocidad de sincronismo del motor n_1 se calcula a partir de la frecuencia $f_1 = 50$ Hz y el número de pares de polos $p = 2$.

* Como el estator está en estrella, la tensión asignada de fase V_{1N} es igual a la de línea V_{1NL} dividida por raíz de 3.

* Si se desprecian las pérdidas mecánicas P_m, la potencia útil P_u es igual al potencia mecánica interna P_{mi}. Planteando la ecuación de la potencia interna cuando el motor está en condiciones asignadas e igualándola a la potencia asignada o se obtiene una ecuación de segundo grado donde la incógnita es el deslizamiento asignado s_N. De las dos soluciones que se obtienen, la correcta es aquella en la que la máquina actúa como motor con deslizamiento pequeño.

* Para resolver de manera más sencilla la ecuación de segundo grado que se menciona en la sugerencia anterior se puede utilizar una variable auxiliar igual a la inversa del deslizamiento asignado.

* Conocidos el deslizamiento asignado s_N y la velocidad de sincronismo n_1 se puede despejar la velocidad asignada n_N de la expresión que define el deslizamiento.

Máquinas asíncronas o de inducción

A.1: Circuito equivalente. Curva de par. Rendimiento

* Del circuito equivalente se puede obtener la expresión que permite calcular la corriente del rotor I'_2 en función del deslizamiento. Esta expresión permite calcular esta corriente en la marcha asignada I'_{2N} si se utiliza el deslizamiento asignado s_N.

* Las pérdidas en el cobre a plena carga se obtienen mediante la relación

$$P_{CuN} = P_{Cu1N} + P_{Cu2N} = 3\ R_{cc}\ (I'_{2N})^2$$

* En condiciones asignadas ya se han obtenido la potencia útil P_u, las pérdidas en el cobre P_{Cu}, las pérdidas mecánicas P_m y las pérdidas en el hierro P_{Fe} (estas dos últimas son nulas según el enunciado). Por lo tanto, se puede aplicar la fórmula que define el rendimiento.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA A.1.2

Datos:

$m_1 = 3$ fases	$P_{uN} = 50$ C.V.	$V_{1NL} = 380$ V	$2p = 4$ polos
$f_1 = 50$ Hz	Conexión estrella en el estator	$P_m \approx 0$ W	$P_{Fe} \approx 0$ W
Ensayo c.c.:	$V_{1ccL} = 120$ V	$I_{1ccL} = 80$ A	$P_{cc} = 6600$ W
Ensayo rotor abierto:		$V_{1L} = 380$ V	$V_{2L} = 190$ V
$R_1 = 0{,}2\ \Omega$			

Resolución:

Antes de nada se va a proceder a calcular los parámetros del motor a partir de los ensayos.

En el ensayo de cortocircuito, los datos en valores de fase se calculan teniendo en cuenta que el estator está conectado en estrella:

$$V_{1cc} = \frac{V_{1ccL}}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 69{,}28\ \text{V}$$

$$I_{1cc} = I_{1ccL} = 80\ \text{A}$$

$$P_{cc} = 6600\ \text{W}$$

Luego, se obtiene que:

$$Z_{cc} = \frac{V_{1cc}}{I_{1cc}} = \frac{69{,}28}{80} = 0{,}866\ \Omega$$

$$R_{cc} = \frac{P_{cc}}{3\ I_{1cc}^2} = \frac{6600}{3 \cdot 80^2} = 0{,}3438\ \Omega$$

$$X_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - R_{cc}^2} = \sqrt{0{,}866^2 - 0{,}3438^2} = 0{,}7949\ \Omega$$

$$R'_2 = R_{cc} - R_1 = 0{,}3438 - 0{,}2 = 0{,}1438\ \Omega$$

En el ensayo de rotor abierto se tiene que:

$$I_1 \approx 0\ ;\ I_2 = 0 \quad \rightarrow \quad E_1 = V_1\ ;\ E_2 = V_2$$

$$m_v = \frac{E_1}{E_2} = \frac{V_1}{V_2} \tag{1}$$

Luego, dado que el estator está conectado en estrella y que la conexión de un rotor bobinado es siempre estrella, se tiene que:

$$V_1 = \frac{V_{1L}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V} \qquad V_2 = \frac{V_{2L}}{\sqrt{3}} = \frac{190}{\sqrt{3}} = 110 \text{ V}$$

$$m_v = \frac{E_1}{E_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{220}{110} = 2$$

En un motor de rotor bobinado, tanto el estator como el rotor son trifásicos y, en consecuencia, sucede que:

$$m_1 = m_2 \; ; \; m_i = \frac{m_1}{m_2} m_v \quad \rightarrow \quad m_i = m_v \tag{2}$$

Luego, en este motor se tiene que $m_v = m_i = 2$

a) En un motor de inducción el deslizamiento s es una manera práctica de indicar la velocidad de giro. Por lo tanto, si se desconoce una velocidad inmediatamente se debe pensar en obtener primero el deslizamiento para, a partir de él, calcular la velocidad.

Recuérdese que “plena carga” es sinónimo de “carga asignada”.

La potencia (útil) asignada medida en vatios vale:

$$P_{uN} = 736 \cdot 50 = 36800 \text{ W}$$

La velocidad de sincronismo n_1 vale:

$$n_1 = \frac{60 \ f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

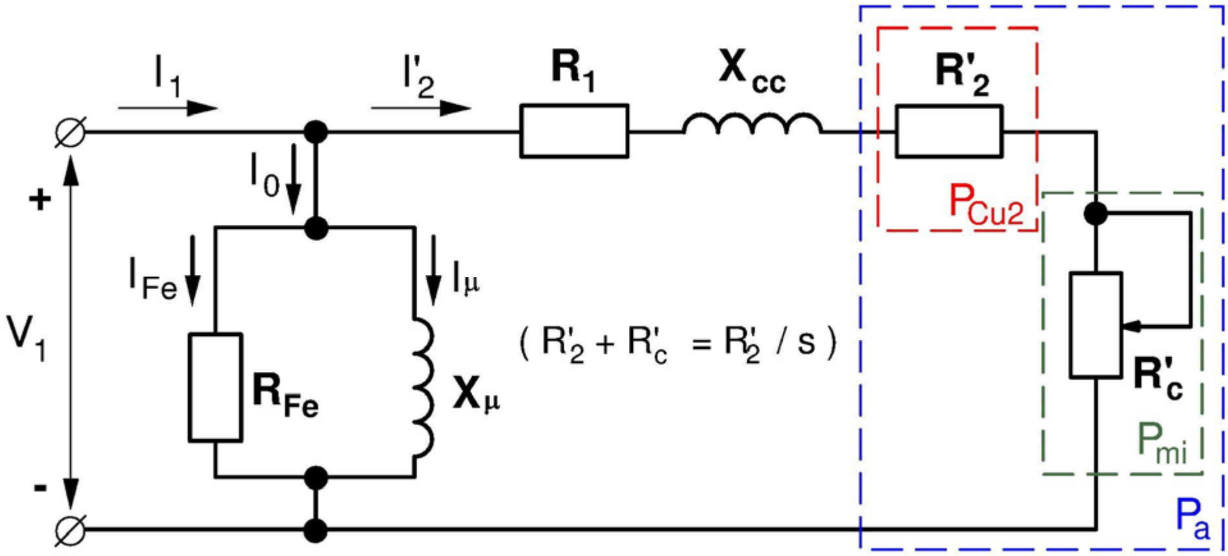
La tensión asignada de fase del estator, dada la conexión estrella de este devanado, vale:

$$V_{1N} = \frac{V_{1NL}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}$$

Si se desprecian las pérdidas mecánicas, la potencia útil P_u es igual a la potencia mecánica interna P_{mi}. Esta es la potencia que en el circuito equivalente (ver la figura adjunta) se consume en la resistencia de carga R'_c. Luego:

$$P_u \approx P_{mi} = m_1 \ I'^2_2 \ R'_c = m_1 \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1\right) \tag{3}$$

A.1: Circuito equivalente. Curva de par. Rendimiento



Utilizando la expresión anterior con los valores asignados de tensión (de fase), frecuencia y potencia útil se obtiene:

$$36800 = 3 \cdot \frac{220^2}{\left(0{,}2 + \frac{0{,}1438}{s_N}\right)^2 + 0{,}7949^2} \cdot 0{,}1438 \cdot \left(\frac{1}{s_N} - 1\right)$$

Esto es una ecuación de segundo grado que permite despejar el deslizamiento en condiciones asignadas s_N. Para resolver más fácilmente esta ecuación se puede operar utilizando una variable auxiliar u igual a la inversa de s, de tal manera que u_N es, entonces, la inversa de s_N:

$$u_N = \frac{1}{s_N} \quad \Rightarrow \quad s_N = \frac{1}{u_N}$$

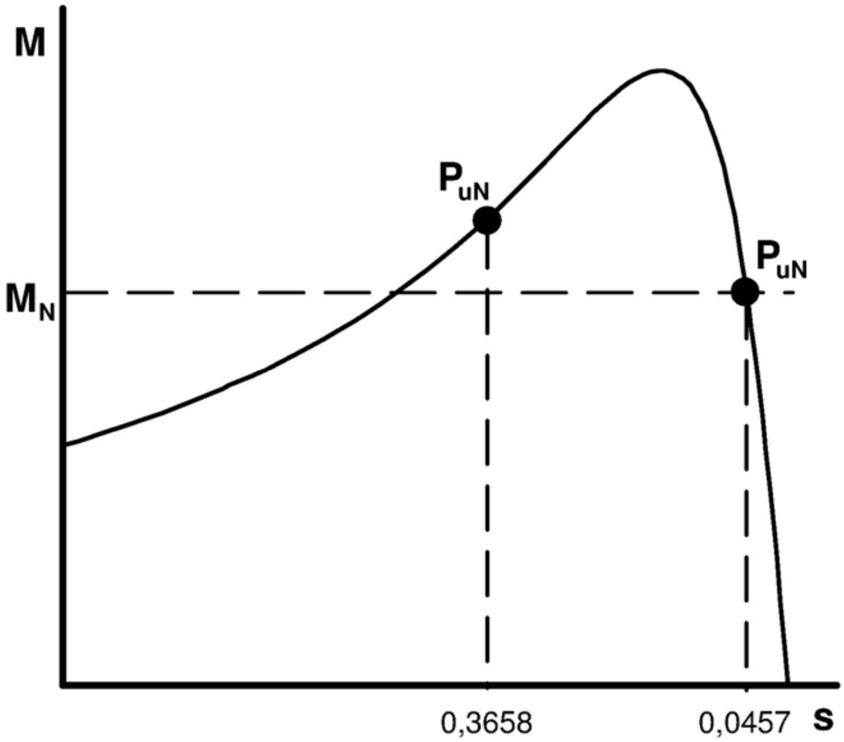
Con esta variable auxiliar la ecuación anterior se convierte en:

$$36800 = 3 \cdot \frac{220^2}{(0{,}2 + 0{,}1438\, u_N)^2 + 0{,}7949^2} \cdot 0{,}1438 \cdot (u_N - 1)$$

Al resolverla se obtienen estos resultados:

$$u_N = \begin{cases} 21{,}90 \\ 2{,}733 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s_N = \begin{cases} \mathbf{0{,}0457} \\ 0{,}3658 \end{cases}$$

A.1: Circuito equivalente. Curva de par. Rendimiento



Si se representan sobre la curva del par estos los dos puntos de funcionamiento correspondientes a los dos valores de s_N obtenidos (ver la figura adjunta) se observa que el primero corresponde a un funcionamiento como motor en la zona de bajos deslizamientos (zona usual de trabajo para este tipo de máquinas) y el otro corresponde a funcionamiento como motor con gran deslizamiento. Por lo tanto, la solución buscada es la primera.

En la figura se puede observar que los dos puntos de la curva del par correspondientes a la misma potencia útil (la potencia asignada P_{uN} en este caso) no tienen el mismo par. Como la potencia mecánica (la potencia útil de un motor es una potencia mecánica) es igual al producto del par por la velocidad, el punto con mayor velocidad (menor deslizamiento) tiene menos par que el punto de igual potencia y menor velocidad (mayor deslizamiento).

La velocidad de giro y el deslizamiento están relacionados así:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad \rightarrow \quad n = n_1(1 - s) \qquad (4)$$

Lo que en condiciones asignadas lleva a:

$$n_N = n_1(1 - s_N) = 1500\,(1 - 0{,}0457) = 1431 \text{ r.p.m.}$$

<u>La velocidad asignada vale 1431 r.p.m.</u>

b) Del circuito equivalente aproximado de una máquina asíncrona se obtiene que:

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} \tag{5}$$

Luego, en condiciones asignadas I'_{2N} vale:

$$I'_{2N} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s_N}\right)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{220}{\sqrt{\left(0{,}2 + \frac{0{,}1438}{0{,}0457}\right)^2 + 0{,}7949^2}} = 64 \text{ A}$$

Por otra parte las pérdidas en el cobre valen:

$$\begin{aligned} P_{Cu} &= P_{Cu1} + P_{Cu2} = 3\,R_1\,I_1^2 + 3\,R'_2\,I'^2_2 \approx 3\left(R_1 + R'_2\right) I'^2_2 \\ P_{Cu} &\approx 3\,R_{cc}\,I'^2_2 \end{aligned} \tag{6}$$

En consecuencia, en esta máquina en condiciones asignadas se tiene que:

$$P_{CuN} \approx 3\,R_{cc}\,I'^2_{2N} = 3 \cdot 0{,}3438 \cdot 64^2 = 4224 \text{ W}$$

El enunciado indica que:

$$P_{Fe} \approx 0 \qquad\qquad P_m \approx 0$$

El rendimiento de un motor asíncrono se obtiene mediante esta relación:

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{P_u}{P_u + P_{Cu} + P_{Fe} + P_m} \tag{7}$$

Luego, en condiciones asignadas el rendimiento vale:

$$\begin{aligned} \eta_N &= \frac{P_{uN}}{P_{1N}} = \frac{P_{uN}}{P_{uN} + P_{CuN} + P_{Fe} + P_m} = \\ &= \frac{36800}{36800 + 4224 + 0 + 0} = 0{,}8970 = 89{,}70\% \end{aligned}$$

<u>El rendimiento asignado vale 89,70%.</u>

PROBLEMA A.1.3

ENUNCIADO

Un motor de inducción trifásico está conectado en triángulo, tiene una potencia y una frecuencia asignadas de 5,6 C.V. y 50 Hz, respectivamente, y consume una corriente de línea de 32 A cuando proporciona su par máximo. Dicho par máximo vale 126,7 Nm y se produce cuando la velocidad de la máquina es 619,5 r.p.m. La resistencia de cada fase del estator es de 1 Ω.

Se acepta que la corriente de vacío es despreciable frente a la corriente del estator cuando el par es máximo. Si, además, se desprecian las pérdidas mecánicas y magnéticas,

a) Indicar el número de polos de la máquina y su velocidad de sincronismo.

b) Obtener los parámetros R'_2 y X_{cc} del motor, así como la tensión de línea de la red a la que está conectado.

c) Calcular la velocidad asignada (dibujar los resultados sobre la curva del par).

d) ¿A qué velocidad girará este motor si debe mover un par igual a la mitad del par asignado y funciona conectado a su tensión asignada? (dibujar el resultado sobre la curva del par).

RESULTADOS

a) $2p = 8$ polos; $n_1 = 750$ r.pm.

b) $R'_2 = 1{,}69\ \Omega$; $X_{cc} = 9{,}66\ \Omega$; $V_{1NL} = 266{,}9$ V

c) $n_N = 722$ r.p.m.

d) $n = 736{,}9$ r.p.m.

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

* Para una frecuencia f_1 dada, la velocidad de sincronismo n_1 del motor sólo puede tomar un número limitado de valores en función del número de pares de polos p. Por otra parte, la velocidad n de funcionamiento del motor es ligeramente inferior a la de sincronismo.

  Por lo tanto, la velocidad de sincronismo del motor será aquella de las correspondientes a la frecuencia f_1 que es inmediatamente mayor que la velocidad n a la que gira el motor para una carga dada.

  Conocidas la velocidad de sincronismo n_1 y la frecuencia f_1 se obtienen fácilmente el número de pares de polos p y el número de polos 2p.

* La velocidad de par máximo es dato. A partir de ella se puede calcular el deslizamiento de par máximo s_m.

* Para par máximo el enunciado proporciona el valor de la corriente de línea consumida por el estator I_{1mL}. La corriente de fase I_{1m} se obtiene teniendo en cuenta la conexión triángulo del estator y la corriente del rotor reducida al estator I'_{2m} es igual a I_{1m} si se desprecia la corriente de vacío I_0.

* Expresando el par máximo $M_{máx}$ en función de s_m y de I'_{2m} se obtiene una expresión de la que se puede despejar la resistencia del rotor reducida al estator R'_2.

* De la expresión que liga el deslizamiento de par máximo s_m con los parámetros del circuito equivalente del motor se obtiene una ecuación de la que se puede despejar la reactancia de cortocircuito X_{cc}.

* Expresando la corriente I'_{2m} en función de la tensión de fase V_{1N}, del deslizamiento s_m y de los parámetros del motor se obtiene una ecuación de la que se puede despejar V_{1N}.

* Sabiendo que el estator está en triángulo se calcula la tensión de línea V_{1NL} en función de la de fase V_{1N}.

* Para operar se debe trabajar con la potencia útil P_u expresada en vatios y no en caballos de vapor.

* Si se desprecian las pérdidas mecánicas P_m, la potencia útil P_u es igual a la potencia mecánica interna P_{mi}. Planteando la ecuación de la potencia interna cuando el motor está en condiciones asignadas e igualándola a la potencia asignada se obtiene una ecuación de segundo grado donde la incógnita es el deslizamiento asignado s_N. De las dos soluciones que se obtienen, la correcta es aquella en la que la máquina actúa como motor con deslizamiento pequeño.

Máquinas asíncronas o de inducción

A.1: Circuito equivalente. Curva de par. Rendimiento

* Para resolver de manera más sencilla la ecuación de segundo grado que se menciona en la sugerencia anterior se puede utilizar una variable auxiliar igual a la inversa del deslizamiento asignado.

* Conocidos el deslizamiento asignado s_N y la velocidad de sincronismo n_1 se puede despejar la velocidad asignada nN de la expresión que define el deslizamiento.

* El par asignado M_N se puede obtener dividiendo la potencia útil asignada P_{uN} (en vatios) entre la velocidad asignada Ω_N (en radianes geométricos por segundo), ya que la potencia útil es una potencia mecánica.

* Para calcular la velocidad del motor para un par igual a la mitad del asignado se plantea la ecuación del par a la tensión asignada y para un deslizamiento s desconocido y se iguala a la mitad del valor del par asignado. Esta ecuación permite despejar el deslizamiento s.

  Se obtienen dos soluciones para s. La solución correcta es aquella en la que la máquina actúa como motor con deslizamiento pequeño.

* Para resolver de manera más sencilla la ecuación de segundo grado que se menciona en la sugerencia anterior se puede utilizar una variable auxiliar igual al cociente R'_2/s.

* Conocidos el deslizamiento s para un par igual a la mitad que el asignado y la velocidad de sincronismo n_1 se puede calcular la velocidad n para esta carga.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA A.1.3

Datos:

$m_1 = 3$ fases	Conexión triángulo	$P_{uN} = 5{,}6$ C.V.	$f_1 = 50$ Hz
Cuando el par es máximo:	$M_{máx} = 126{,}7$ Nm	$n_m = 619{,}5$ r.p.m.	$I_{1mL} = 32$ A
$R_1 = 1\ \Omega$	$P_m \approx 0$ W	$P_{Fe} \approx 0$ W	$I_0 \approx 0$ A

Resolución:

a) Es sabido que la velocidad de sincronismo, expresada en r.p.m., se calcula mediante la expresión:

$$n_1 = \frac{60\ f_1}{p} \qquad (1)$$

Por lo que, para una frecuencia f_1 de 50 Hz se pueden obtener las siguientes velocidades de sincronismo en función del número de pares de polos p del motor:

$$p = 1 \rightarrow n_1 = 3000 \text{ r. p. m.} \qquad p = 4 \rightarrow n_1 = 750 \text{ r. p. m.}$$
$$p = 2 \rightarrow n_1 = 1500 \text{ r. p. m.} \qquad p = 5 \rightarrow n_1 = 600 \text{ r. p. m.}$$
$$p = 3 \rightarrow n_1 = 1000 \text{ r. p. m.} \qquad p = 6 \rightarrow n_1 = 500 \text{ r. p. m.}$$

y así sucesivamente.

Por otra parte, la velocidad de giro n del rotor guarda la siguiente relación con la velocidad de sincronismo n_1 y el deslizamiento s:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \rightarrow n = n_1(1 - s) \qquad (2)$$

En funcionamiento normal el deslizamiento s es pequeño y la velocidad de giro n es ligeramente inferior a la de sincronismo n_1.

Por lo tanto, si en este caso se sabe que la frecuencia del estator f_1 vale 50 Hz y la velocidad de par máximo es de 619,5 r.pm. se puede deducir que la velocidad de sincronismo será de 750 r.p.m... En efecto, de los posibles valores de velocidad de sincronismo para 50 Hz el más cercano por exceso a 619,5 r.p.m. es 750 r.p.m.

Para n_1 = 750 r.p.m. y f_1 = 50 Hz el número de pares de polos p vale 4. Luego, el número de polos es el doble, 2p = 8 polos.

<u>La velocidad de sincronismo es n_1 = 750 r.p.m. y el número de polos es 2p = 8 polos</u>.

b) Cuando se conoce una velocidad, ésta no se utiliza directamente para calcular el comportamiento de un motor asíncrono, sino que se emplea el deslizamiento correspondiente. Por esto, lo primero que hay que hacer cuando hay un dato de velocidad es calcular su deslizamiento. En este caso, para la situación de par máximo se tiene un deslizamiento:

$$s_m = \frac{n_1 - n_m}{n_1} = \frac{750 - 619{,}5}{750} = 0{,}174$$

Como el estator está conectado en triángulo, la corriente de fase cuando se tiene el par máximo I_{1m} vale:

$$I_{1m} = \frac{I_{1mL}}{\sqrt{3}} = \frac{32}{\sqrt{3}} = 18{,}5 \text{ A}$$

y, dado que se desprecia la corriente de vacío I_0, esta corriente también es igual a la del rotor reducida al estator I'_{2m} cuando el par es máximo:

$$I_0 \approx 0 \quad \rightarrow \quad I'_2 \approx I_1 \quad \rightarrow \quad I'_{2m} \approx I_{1m} = 18{,}5 \text{ A}$$

El par máximo se obtiene empleando una de las fórmulas del par en la que se utilizará la corriente I'_{2m} y el deslizamiento s_m de par máximo:

$$M_{max} = M\big|_{s = s_m;\ I'_2 = I'_{2m}} = \frac{m_1 \dfrac{R'_2}{s_m} I'^2_{2m}}{\dfrac{2\pi}{60} n_1} \tag{3}$$

Lo que en este caso da lugar a la siguiente relación:

$$126{,}7 = \frac{3 \cdot \dfrac{R'_2}{0{,}174} \cdot 18{,}5^2}{\dfrac{2\pi}{60} 750}$$

de la que se puede despejar la resistencia del rotor reducida al estator R'_2:

$$R'_2 = 1{,}69\ \Omega$$

La expresión que permite calcular el deslizamiento de par máximo s_m es:

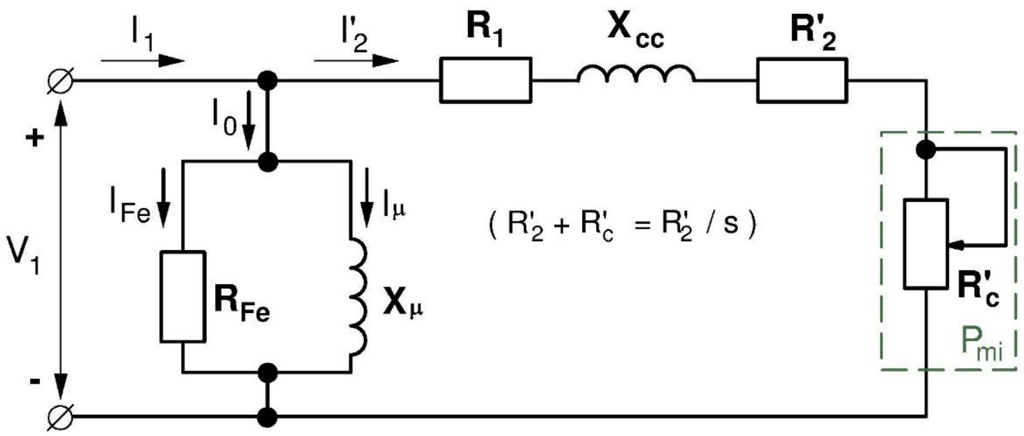
$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \tag{4}$$

que, en este caso, sustituyendo valores, da lugar a la siguiente ecuación:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \quad \rightarrow \quad 0{,}174 = \frac{1{,}69}{\sqrt{1^2 + X_{cc}^2}}$$

de la que se puede despejar la reactancia de cortocircuito X_{cc}:

$$X_{cc} = 9{,}66\ \Omega$$



Del circuito equivalente del motor (ver la figura adjunta) se deduce que:

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} \qquad (5)$$

que en el caso de par máximo y tensión asignada da lugar a:

$$I'_{2m} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s_m}\right)^2 + X_{cc}^2}} \quad \rightarrow \quad 18{,}5 = \frac{V_{1N}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1{,}69}{0{,}174}\right)^2 + 9{,}66^2}}$$

de la que se puede despejar la tensión asignada de fase V_{1N}:

$$V_{1N} = 266{,}9\ \text{V}$$

Dada la conexión triángulo del estator, esta tensión es igual a la de línea:

$$\text{Conexión triángulo} \quad \rightarrow \quad V_{1NL} = V_{1N} = 266{,}9\ \text{V}$$

<u>La resistencia del rotor reducida al estator vale $R'_2 = 1{,}69\ \Omega$, la reactancia de cortocircuito es $X_{cc} = 9{,}66\ \Omega$ y la tensión asignada de línea vale $V_{1NL} = 266{,}9$ V</u>.

c) En un motor de inducción el deslizamiento s es una manera práctica de indicar la velocidad de giro. Por lo tanto, si se desconoce una velocidad inmediatamente se debe pensar en obtener primero el deslizamiento para, a partir de él, calcular la velocidad.

La potencia (útil) asignada expresada en vatios vale:

$$P_{uN} = 5{,}6 \cdot 736 = 4121{,}6 \text{ W}$$

Si se desprecian las pérdidas mecánicas, la potencia útil P_u es igual a la potencia mecánica interna P_{mi}. Esta es la potencia que en el circuito equivalente se consume en la resistencia de carga R'_c. Luego:

$$P_u \approx P_{mi} = m_1 I'^2_2 R'_c = m_1 \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1\right) \tag{6}$$

Utilizando la expresión anterior con los valores asignados de tensión (de fase), frecuencia y potencia útil se obtiene:

$$4121{,}6 = 3 \cdot \frac{266{,}9^2}{\left(1 + \frac{1{,}69}{s_N}\right)^2 + 9{,}66^2} \cdot 1{,}69 \cdot \left(\frac{1}{s_N} - 1\right)$$

Esto es una ecuación de segundo grado que permite despejar el deslizamiento en condiciones asignadas s_N. Para resolver más fácilmente esta ecuación se puede operar utilizando una variable auxiliar u igual a la inversa de s, de tal manera que u_N es, entonces, la inversa de s_N:

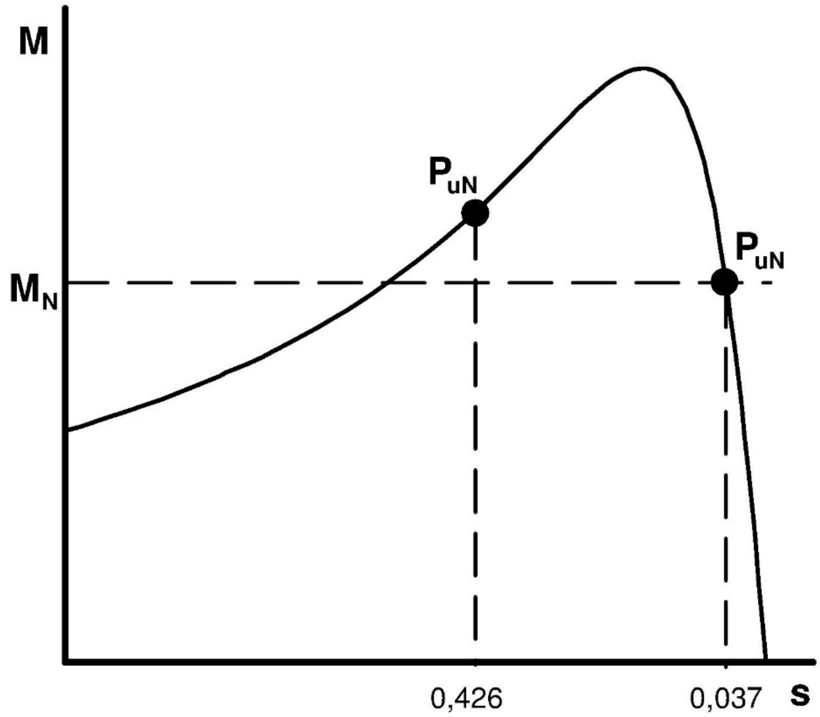
$$u_N = \frac{1}{s_N} \quad \Rightarrow \quad s_N = \frac{1}{u_N}$$

Con esta variable auxiliar la ecuación anterior se convierte en:

$$4121{,}6 = 3 \cdot \frac{266{,}9^2}{(1 + 1{,}69\, u_N)^2 + 9{,}66^2} \cdot 1{,}69 \cdot (u_N - 1)$$

Al resolverla se obtienen estos resultados:

$$u_N = \begin{cases} 27{,}11 \\ 2{,}35 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s_N = \begin{cases} \mathbf{0{,}037} \\ 0{,}426 \end{cases}$$



Si se representan estos dos puntos de funcionamiento sobre la curva del par (ver la figura adjunta) se observa que el primero corresponde a un funcionamiento como motor en la zona de bajos deslizamientos (zona usual de trabajo para este tipo de máquinas) y el otro corresponde a funcionamiento como motor con gran deslizamiento. Por lo tanto, la solución buscada es la primera.

En la figura se puede observar que los dos puntos de la curva del par correspondientes a la misma potencia útil (la potencia asignada P_{uN} en este caso) no tienen el mismo par. Como la potencia mecánica (la potencia útil de un motor es una potencia mecánica) es igual al producto del par por la velocidad, el punto con mayor velocidad (menor deslizamiento) tiene menos par que el punto de igual potencia y menor velocidad (mayor deslizamiento).

La velocidad de giro y el deslizamiento están relacionados mediante la relación (2). Lo que en condiciones asignadas lleva a:

$$n_N = n_1 (1 - s_N) = 750\,(1 - 0{,}037) = 722 \text{ r.p.m.}$$

La velocidad asignada vale 722 r.p.m.

d) El par asignado M_N se puede obtener a partir del hecho que una potencia mecánica es igual al producto del par por la velocidad:

$$M_N = \frac{P_{uN}}{\Omega_N} = \frac{P_{uN}}{\frac{2\pi}{60}\, n_N} = \frac{4121{,}6}{\frac{2\pi}{60}\, 722} = 54{,}51 \text{ Nm}$$

El par a vencer es igual a la mitad del asignado:

$$M = \frac{M_N}{2} = 27{,}26 \ \text{Nm}$$

La expresión del par es:

$$M = \frac{m_1 \dfrac{R'_2}{s}}{\dfrac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \dfrac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} \tag{7}$$

En este caso, sustituyendo valores en (7) se obtiene esta ecuación:

$$27{,}26 = \frac{3 \dfrac{1{,}69}{s}}{\dfrac{2\pi}{60} 750} \frac{266{,}9^2}{\left(1 + \dfrac{1{,}69}{s}\right)^2 + 9{,}66^2}$$

Esto es una ecuación de segundo grado que permite despejar el deslizamiento s. Para resolver más fácilmente esta ecuación se puede operar utilizando una variable auxiliar x así:

$$x = \frac{R'_2}{s} = \frac{1{,}69}{s} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1{,}69}{x}$$

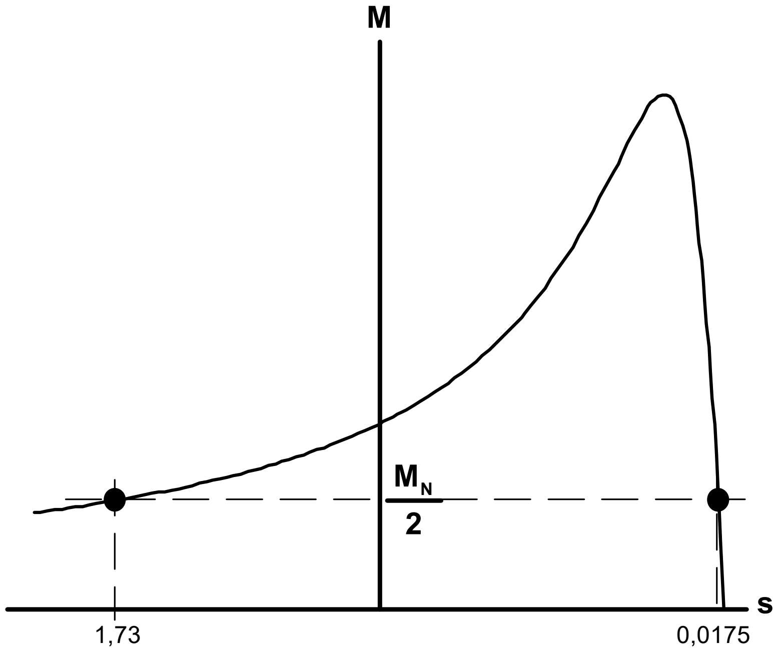
Con esta variable auxiliar la ecuación anterior se convierte en:

$$27{,}26 = \frac{3\ x}{\dfrac{2\pi}{60} 750} \frac{266{,}9^2}{(1 + x)^2 + 9{,}66^2}$$

Al resolverla se obtienen estos resultados:

$$x = \begin{cases} 96{,}47 \\ 0{,}978 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s = \begin{cases} \mathbf{0{,}0175} \\ 1{,}73 \end{cases}$$

Si se representan estos dos puntos de funcionamiento sobre la curva del par (ver la figura adjunta) se observa que el primero corresponde a un funcionamiento como motor en la zona de bajos deslizamientos (zona usual de trabajo para este tipo de máquinas) y el otro corresponde a funcionamiento como freno a contracorriente (con deslizamiento superior a la unidad). Por lo tanto, la solución buscada es la primera.



La velocidad de giro y el deslizamiento están relacionados mediante la relación (2). Lo que en estas condiciones lleva a:

$$n = n_1(1 - s) = 750\,(1 - 0{,}0175) = 736{,}9 \text{ r.p.m.}$$

<u>La velocidad para un par igual a la mitad del asignado vale 736,9 r.p.m.</u>

PROBLEMA A.1.4

ENUNCIADO

Un motor asíncrono trifásico de 380/220 V, 50 Hz, 30 C.V. y 970 r.p.m. tiene su par máximo a 850 r.p.m. y se sabe que se cumple que $R_1 = R'_2$. Si se desprecian las pérdidas magnéticas y mecánicas, calcular:

- **a)** La tensión de la red si el motor está a su tensión asignada y está conectado en triángulo.
- **b)** La velocidad de sincronismo y el número de polos del motor.
- **c)** Los parámetros R_1, R'_2 y X_{cc} del circuito equivalente.
- **d)** Los pares asignado, de arranque directo y máximo, así como, la capacidad de sobrecarga.

RESULTADOS

a) $V_{1NL} = 220$ V

b) $n_1 = 1000$ r.p.m.; $2p = 6$ polos

c) $R_1 = R'_2 = 0{,}174\ \Omega$; $X_{cc} = 1{,}15\ \Omega$

d) $M_N = 217{,}4$ Nm; $M_a = 167{,}1$ Nm; $M_{máx} = 518{,}5$ Nm;
Capacidad de sobrecarga = 2,39

Máquinas asíncronas o de inducción

A.1: Circuito equivalente. Curva de par. Rendimiento

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

* El enunciado dice que el motor es de 380/220 V. Esto significa que para que el motor tenga su tensión de fase asignada en el estator (V_{1N} = 220 V), la tensión de línea debe ser V_{1NL} = 380 V si la conexión del estator es estrella y V_{1NL} = 220 V si la conexión es triángulo.

* Para una frecuencia f_1 dada, la velocidad de sincronismo n_1 del motor sólo puede tomar un número limitado de valores en función del número de pares de polos p. Por otra parte, la velocidad n de funcionamiento del motor es ligeramente inferior a la de sincronismo n_1.

  Por lo tanto, la velocidad de sincronismo del motor será aquella de las correspondientes a la frecuencia f_1 que es inmediatamente mayor que la velocidad n a la que gira el motor para una carga dada. Conocidas la velocidad de sincronismo n_1 y la frecuencia f_1 se obtienen fácilmente el número de pares de polos p y el número de polos 2p.

* Conocidas las velocidades asignada y de par máximo se pueden calcular los deslizamientos asignado s_N y de par máximo s_m.

* Para operar se debe trabajar con la potencia útil P_u expresada en vatios y no en C.V. (caballos de vapor).

* Si se desprecian las pérdidas mecánicas P_m, la potencia útil P_u es igual a la potencia mecánica interna P_{mi}. Planteando la ecuación de la potencia interna cuando el motor está en condiciones asignadas, teniendo en cuenta que $R_1 = R'_2$, e igualándola a la potencia asignada se obtiene una ecuación que liga entre sí los parámetros R_1 y X_{cc}.

* De la expresión que permite calcular el deslizamiento de par máximo s_m en función de los parámetros del motor, teniendo en cuenta que $R_1 = R'_2$, se obtiene otra ecuación que relaciona entre sí los parámetros R_1 y X_{cc}. Esta ecuación junto con la obtenida en la sugerencia anterior constituyen un sistema de ecuaciones del que se puede despejar los valores de $R_1 = R'_2$ y de X_{cc}.

* Los pares asignado M_N, de arranque directo M_a y máximo $M_{máx}$ se obtiene a partir de la ecuación del par en la que se utilizará la tensión asignada de fase V_{1N} = 220 V y los deslizamientos asignado s_N, de arranque s = 1 y de par máximo s_m, respectivamente.

* Alternativamente, el par asignado M_N también se puede obtener dividiendo la potencia útil asignada P_{uN} (en vatios) entre la velocidad asignada Ω_N (en radianes geométricos por segundo), ya que la potencia útil es una potencia mecánica.

* La capacidad de sobrecarga, por definición, es el cociente del par máximo entre el par asignado.

Máquinas asíncronas o de inducción

A.1: Circuito equivalente. Curva de par. Rendimiento

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA A.1.4

Datos:

$m_1 = 3$ fases	$V_{1NL} = 380/220$ V	$f_1 = 50$ Hz
$P_{uN} = 30$ C.V.	$n_N = 970$ r.p.m.	$n_m = 850$ r.p.m.
$R_1 = R'_2$	$P_m \approx 0$ W	$P_{Fe} \approx 0$ W

Resolución:

a) En un motor trifásico el estator puede conectarse en estrella o en triángulo. Si se desea que la máquina funcione a su tensión asignada V_{1N}, las tensiones de línea deberán ser:

Conexión estrella: $V_{1NL} = \sqrt{3}\ V_{1N}$

Conexión triángulo: $V_{1NL} = V_{1N}$

En este caso el enunciado indica que el motor es de 380/220 V. Esto quiere decir que para que el motor reciba su tensión asignada de fase ($V_{1N} = 220$ V), la tensión de línea deberá ser $V_{1NL} = 380$ V si el estator está conectado en estrella y deberá ser $V_{1NL} = 220$ V si está conectado en triángulo.

La tensión de red debe ser $V_{1NL} = 220$ V para el motor conectado en triángulo.

b) Es sabido que la velocidad de sincronismo, expresada en r.p.m., se calcula mediante la expresión:

$$n_1 = \frac{60\ f_1}{p} \tag{1}$$

Por lo que, para una frecuencia f_1 de 50 Hz se pueden obtener las siguientes velocidades de sincronismo en función del número de pares de polos p del motor:

$p = 1 \rightarrow n_1 = 3000$ r. p. m. $\qquad p = 4 \rightarrow n_1 = 750$ r. p. m.

$p = 2 \rightarrow n_1 = 1500$ r. p. m. $\qquad p = 5 \rightarrow n_1 = 600$ r. p. m.

$p = 3 \rightarrow n_1 = 1000$ r. p. m. $\qquad p = 6 \rightarrow n_1 = 500$ r. p. m.

y así sucesivamente.

Por otra parte, la velocidad de giro n del rotor guarda la siguiente relación con la velocidad de sincronismo n_1 y el deslizamiento s:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad \rightarrow \quad n = n_1(1 - s) \tag{2}$$

En funcionamiento normal el deslizamiento s es pequeño y la velocidad de giro n es ligeramente inferior a la de sincronismo n_1.

Por lo tanto, si en este caso se sabe que la frecuencia del estator f_1 vale 50 Hz y la velocidad asignada es de 970 r.pm. se puede deducir que la velocidad de sincronismo será de 1000 r.p.m. En efecto, de los posibles valores de velocidad de sincronismo para 50 Hz el más cercano por exceso a 970 r.p.m. es 1000 r.p.m.

Para n_1 = 1000 r.p.m. y f_1 = 50 Hz el número de pares de polos p vale 3. Luego, el número de polos es el doble, 2p = 6 polos.

La velocidad de sincronismo tiene un valor de n_1 = 1000 r.p.m. y el número de polos es 2p = 6 polos.

c) Cuando se conoce una velocidad, ésta no se utiliza directamente para calcular el comportamiento de un motor asíncrono sino que se emplea el deslizamiento correspondiente. Por esto, lo primero que hay que hacer cuando hay un dato de velocidad es calcular su deslizamiento.

En este caso, en condiciones asignadas se tiene un deslizamiento:

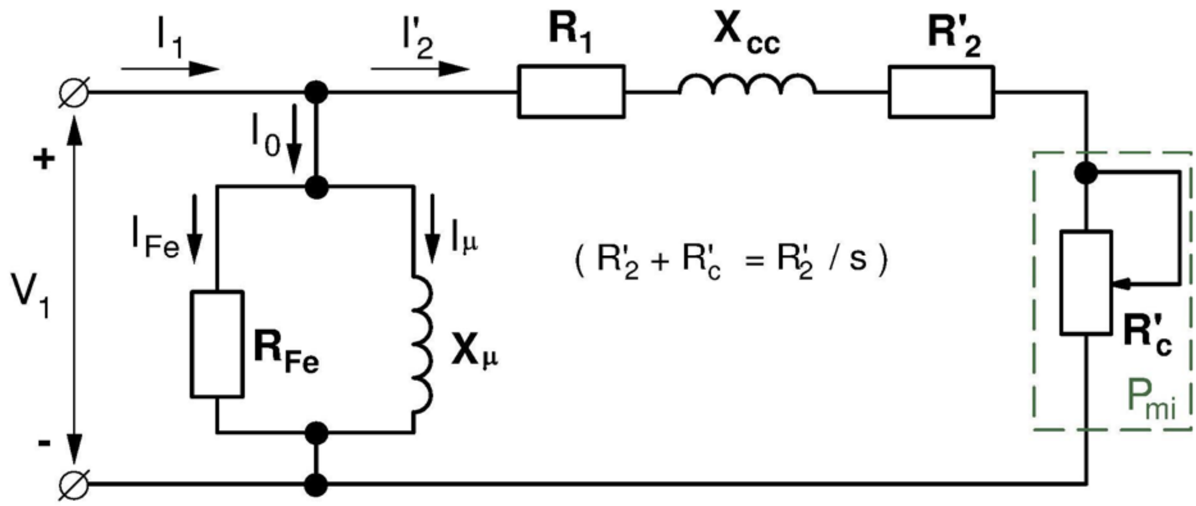
$$s_N = \frac{n_1 - n_N}{n_1} = \frac{1000 - 970}{1000} = 0{,}03$$

y para la situación de par máximo se tiene un deslizamiento:

$$s_m = \frac{n_1 - n_m}{n_1} = \frac{1000 - 850}{1000} = 0{,}15$$

La potencia (útil) asignada expresada en vatios vale:

$$P_{uN} = 30 \cdot 736 = 22080 \text{ W}$$



A.1: Circuito equivalente. Curva de par. Rendimiento

Si se desprecian las pérdidas mecánicas, la potencia útil P_u es igual a la potencia mecánica interna P_{mi}. Esta es la potencia que en el circuito equivalente (ver la figura) se consume en la resistencia de carga R'_c. Luego:

$$P_u \approx P_{mi} = m_1\, I'^2_2\, R'_c = m_1 \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1\right) \tag{3}$$

Lo que en este caso, en condiciones asignadas y teniendo en cuenta que $R_1 = R'_2$, da lugar a:

$$22080 = 3 \cdot \frac{220^2}{\left(1 + \frac{R_1}{0{,}03}\right)^2 + X_{cc}^2} \cdot R_1 \cdot \left(\frac{1}{0{,}03} - 1\right)$$

que operando queda así:

$$\boxed{1178{,}8\, R_1^2 + X_{cc}^2 = 212{,}6\, R_1} \tag{4}$$

La expresión que permite calcular el deslizamiento de par máximo s_m es:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \tag{5}$$

En este caso, sustituyendo valores, se llega a la siguiente ecuación:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \quad \rightarrow \quad 0{,}15 = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}}$$

que, operando, queda así:

$$\boxed{X_{cc} = 6{,}59\, R_1} \tag{6}$$

Del sistema de ecuaciones (4) y (6) se obtiene que:

$R_1 = R'_2 = 0{,}174\ \Omega$ $\qquad\qquad$ $X_{cc} = 1{,}15\ \Omega$

<u>Los parámetros del circuito equivalente de este motor son $R_1 = R'_2 = 0{,}174\ \Omega$ y $X_{cc} = 1{,}15\ \Omega$</u>.

d) Los pares asignado M_N, de arranque directo M_a y máximo $M_{máx}$ se calculan mediante la ecuación del par:

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} \tag{7}$$

en la que se utilizará la tensión asignada de fase V_{1N} = 220 V y los deslizamientos asignado s_N, de arranque s = 1 y de par máximo s_m, respectivamente.

Así, el par asignado M_N vale

$$M_N = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s_N}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_{1N}^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s_N}\right)^2 + X_{cc}^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{0{,}174}{0{,}03}}{\frac{2\pi}{60} 1000} \frac{220^2}{\left(0{,}174 + \frac{0{,}174}{0{,}03}\right)^2 + 1{,}15^2} = 217{,}4 \text{ Nm}$$

el par de arranque directo es

$$M_a = \frac{m_1 R'_2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_{1N}^2}{\left(R_1 + R'_2\right)^2 + X_{cc}^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot 0{,}174}{\frac{2\pi}{60} 1000} \frac{220^2}{\left(0{,}174 + 0{,}174\right)^2 + 1{,}15^2} = 167{,}1 \text{ Nm}$$

y el par máximo $M_{máx}$ se calcula así:

$$M_{max} = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s_m}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_{1N}^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s_m}\right)^2 + X_{cc}^2}$$

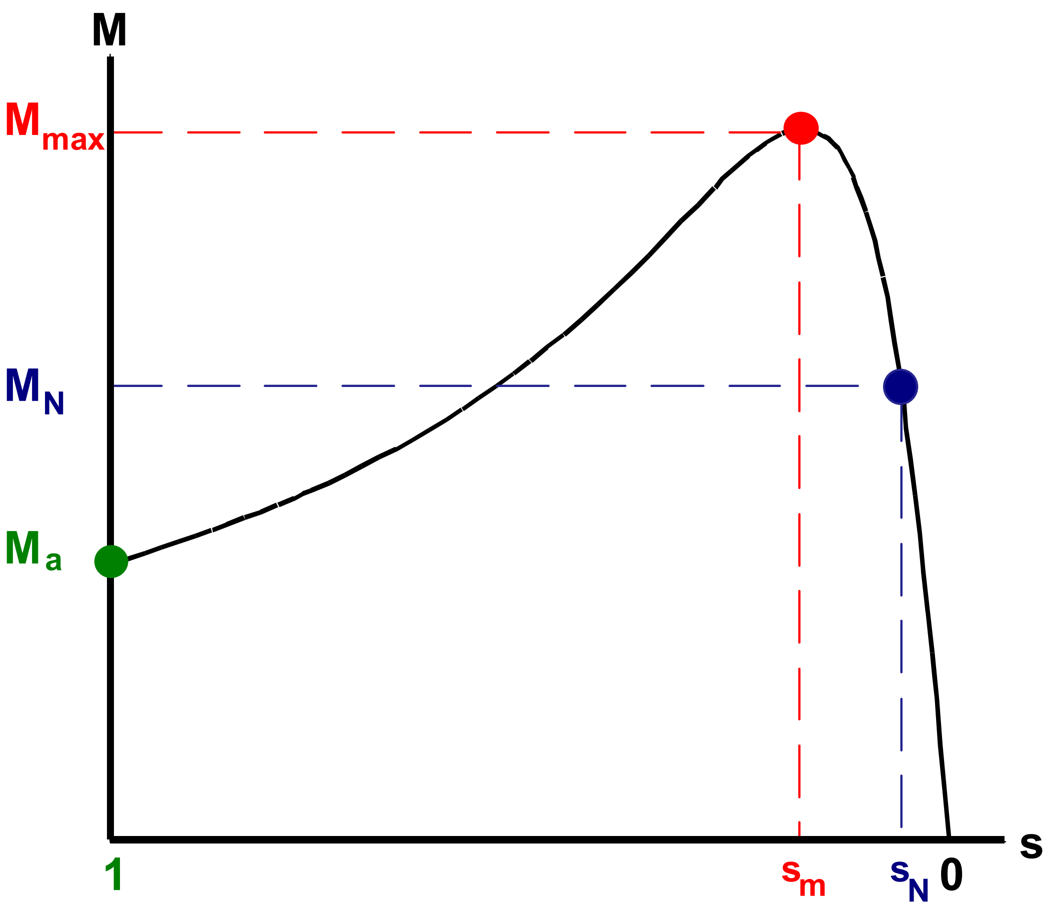
A.1: Circuito equivalente. Curva de par. Rendimiento

$$M_{max} = \frac{m_1 \dfrac{R'_2}{s_m}}{\dfrac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_{1N}^2}{\left(R_1 + \dfrac{R'_2}{s_m}\right)^2 + X_{cc}^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot \dfrac{0{,}174}{0{,}15}}{\dfrac{2\pi}{60} 1000} \frac{220^2}{\left(0{,}174 + \dfrac{0{,}174}{0{,}15}\right)^2 + 1{,}15^2} = 518{,}5 \text{ Nm}$$

Alternativamente, también se puede calcular el par asignado M_N a partir del hecho que una potencia mecánica es igual al producto del par por la velocidad:

$$M_N = \frac{P_{uN}}{\Omega_N} = \frac{P_{uN}}{\dfrac{2\pi}{60} n_N} = \frac{22080}{\dfrac{2\pi}{60} 970} = 217{,}4 \text{ Nm}$$



Por definición, la capacidad de sobrecarga es el cociente entre el par máximo y el asignado:

$$\text{Capacidad de sobrecarga} = \frac{M_{max}}{M_N} = \frac{518{,}5}{217{,}4} = 2{,}39$$

El par asignado vale M_N = 217,4 Nm, el par de arranque directo vale M_a = 167,1 Nm, el par máximo vale $M_{máx}$ = 518,5 Nm y la capacidad de sobrecarga es de 2,39.

PROBLEMA A.1.5

ENUNCIADO

Un motor asíncrono trifásico de 100 CV, 1440 r.p.m. y 50 Hz tiene una resistencia del estator muy inferior a su resistencia del rotor reducida al estator ($R_1 <<< R'_2$) y presenta una capacidad de sobrecarga de 2,5.

Calcular:

a) El valor del par máximo y la velocidad a la que se produce dicho par máximo.

b) La velocidad a la que girará cuando debe vencer un par resistente de 366 Nm.

NOTAS:

- Resuelva utilizando la fórmula de Kloss.
- Despréciense las pérdidas mecánicas.

RESULTADOS

a) $M_{máx} = 1220$ Nm; $n_m = 1212$ r.p.m.

b) $n = 1456$ r.p.m.

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

* Para operar se debe trabajar con la potencia útil P_u expresada en vatios y no en C.V. (caballos de vapor).

* El par asignado se puede obtener por cociente de la potencia útil asignada (medida en vatios) entre la velocidad asignada (medida en rad/s), ya que la potencia útil es una potencia mecánica.

* La capacidad de sobrecarga, por definición, es el cociente del par máximo entre el par asignado. Por lo tanto, conocidos el par asignado y la capacidad de sobrecarga se puede calcular el par máximo.

* Para una frecuencia f_1 dada, la velocidad de sincronismo n_1 del motor sólo puede tomar un número limitado de valores en función del número de pares de polos p. Por otra parte, la velocidad n del motor es ligeramente inferior a la de sincronismo n_1.

  Por lo tanto, la velocidad de sincronismo del motor será aquella de las correspondientes a la frecuencia f_1 que es inmediatamente mayor que la velocidad n a la que gira el motor para una carga dada.

* Conocidas la velocidad asignada y de sincronismo se puede calcular el deslizamiento asignado s_N.

Máquinas asíncronas o de inducción

A.1: Circuito equivalente. Curva de par. Rendimiento

* En este caso el parámetro a ($a = R_1/R'_2$) es prácticamente igual a cero y se puede utilizar la versión simplificada de la fórmula de Kloss. Esta fórmula relaciona el par M de la máquina para un deslizamiento s con los valores de estas magnitudes ($M_{máx}$ y s_m) cuando el par es máximo.

* Empleando esta fórmula de Kloss simplificada para comparar el par y deslizamiento asignados (M_N y s_N) con los valores de estas magnitudes cuando el par es máximo ($M_{máx}$ y s_m), se obtiene una ecuación de segundo grado que permite determinar el deslizamiento de par máximo s_m. Esta ecuación proporciona dos valores de s_m y el correcto es aquel que es superior al deslizamiento asignado s_N.

* Conocidos la velocidad de sincronismo y el deslizamiento de par máximo se puede obtener la velocidad de par máximo despejándola de la fórmula que define el deslizamiento.

* Volviendo a emplear esta fórmula de Kloss simplificada, ahora para comparar los estados donde el par es igual al del enunciado y donde el par es máximo, se obtiene otra ecuación de segundo grado que permite calcular el deslizamiento para dicho par. De las dos soluciones de esta ecuación, la correcta es la correspondiente a un deslizamiento pequeño.

* Conocidos la velocidad de sincronismo y el deslizamiento para el par del enunciado se puede obtener la velocidad para dicho par despejándola de la fórmula que define el deslizamiento.

* Las ecuaciones de segundo grado que aparecen en las sugerencias anteriores se resuelven más fácilmente si se introduce la variable auxiliar w ($w = s_m/s$).

* Para pequeños deslizamientos (suficientemente inferiores al deslizamiento de par máximo s_m) la fórmula de Kloss se puede simplificar aún más (aceptando un margen de error ligeramente mayor) si se deprecia el cociente s/s_m frente al cociente s_m/s. Con esta simplificación se obtiene que, para deslizamientos pequeños, el par M varía linealmente con el deslizamiento s.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA A.1.5

Datos:

$m_1 = 3$ fases	$f_1 = 50$ Hz	$P_N = P_{uN} = 100$ C.V.
$R_1 \lll R'_2$	$M_r = 366$ Nm	$n_N = 1440$ r.p.m.

Capacidad de sobrecarga = 2,5

Resolución:

a) La potencia asignada vale 100 C.V., lo que significa que medida en vatios su valor es:

$$P_{uN} = 100 \text{ C.V.} \times \frac{736 \text{ W}}{1 \text{ C.V.}} = 73600 \text{ W}$$

El par asignado M_N se puede calcular a partir del hecho que una potencia mecánica es igual al producto del par por la velocidad:

$$M_N = \frac{P_{uN}}{\Omega_N} = \frac{P_{uN}}{\frac{2\pi}{60} n_N} = \frac{73600}{\frac{2\pi}{60} 1440} = 488 \text{ Nm}$$

El par máximo $M_{máx}$ se puede determinar a partir de la definición de la capacidad de sobrecarga:

$$\text{Capacidad de sobrecarga} = \frac{M_{max}}{M_N} = \frac{M_{máx}}{488} = 2,5$$

$$M_{max} = 2,5 \times 488 \quad \Rightarrow \quad \underline{M_{máx} = 1220 \text{ Nm}}$$

Es sabido que la velocidad de sincronismo, expresada en r.p.m., se calcula mediante la expresión:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} \qquad (1)$$

Por lo que, para una frecuencia f_1 de 50 Hz se pueden obtener las siguientes velocidades de sincronismo en función del número de pares de polos p del motor:

$$p = 1 \rightarrow n_1 = 3000 \text{ r. p. m.} \qquad p = 4 \rightarrow n_1 = 750 \text{ r. p. m.}$$
$$p = 2 \rightarrow n_1 = 1500 \text{ r. p. m.} \qquad p = 5 \rightarrow n_1 = 600 \text{ r. p. m.}$$
$$p = 3 \rightarrow n_1 = 1000 \text{ r. p. m.} \qquad p = 6 \rightarrow n_1 = 500 \text{ r. p. m.}$$

y así sucesivamente.

Por otra parte, la velocidad de giro n del rotor guarda la siguiente relación con la velocidad de sincronismo n_1 y el deslizamiento s:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad \rightarrow \quad n = n_1 (1 - s) \tag{2}$$

En funcionamiento normal el deslizamiento s es pequeño y la velocidad de giro n es ligeramente inferior a la de sincronismo n_1. Por lo tanto, si en este caso se sabe que la frecuencia del estator f_1 vale 50 Hz y la velocidad asignada es de 1440 r.pm. se puede deducir que la velocidad de sincronismo será de 1500 r.p.m. En efecto, de los posibles valores de velocidad de sincronismo para una frecuencia de 50 Hz el más cercano por exceso a 1440 r.p.m. es 1500 r.p.m.

En consecuencia, en condiciones asignadas, donde la velocidad vale n_N = 1440 r.p.m., la relación (2) indica que el deslizamiento s_N vale:

$$s_N = \frac{n_1 - n_N}{n_1} = \frac{1500 - 1440}{1500} \quad \Rightarrow \quad s_N = 0{,}04$$

La <u>fórmula de Kloss</u> relaciona el par de la máquina M, cuando el deslizamiento es s, con el par máximo $M_{máx}$, cuyo deslizamiento es s_m:

$$\frac{M}{M_{máx}} = \frac{2 (1 + a\, s_m)}{\frac{s}{s_m} + 2\, a\, s_m + \frac{s_m}{s}} \qquad \left(a = \frac{R_1}{R'_2} \right) \tag{3}$$

En el caso de que la resistencia del estator sea apreciablemente inferior a la del rotor reducida al estator (que es lo que sucede en este motor), la relación (3) se simplifica:

$$R_1 \lll R'_2 \quad \Rightarrow \quad a \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{M_{máx}} = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}} \tag{4}$$

Si se utiliza la fórmula de Kloss en su versión simplificada (4) para relacionar los pares asignado y máximo se deduce que:

$$R_1 \lll R'_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{M_N}{M_{máx}} = \frac{2}{\frac{s_N}{s_m} + \frac{s_m}{s_N}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2{,}5} = \frac{2}{\frac{0{,}04}{s_m} + \frac{s_m}{0{,}04}}$$

La ecuación anterior es de segundo grado y tiene dos soluciones. Esta ecuación se puede resolver más fácilmente si se introduce una variable auxiliar w_N así:

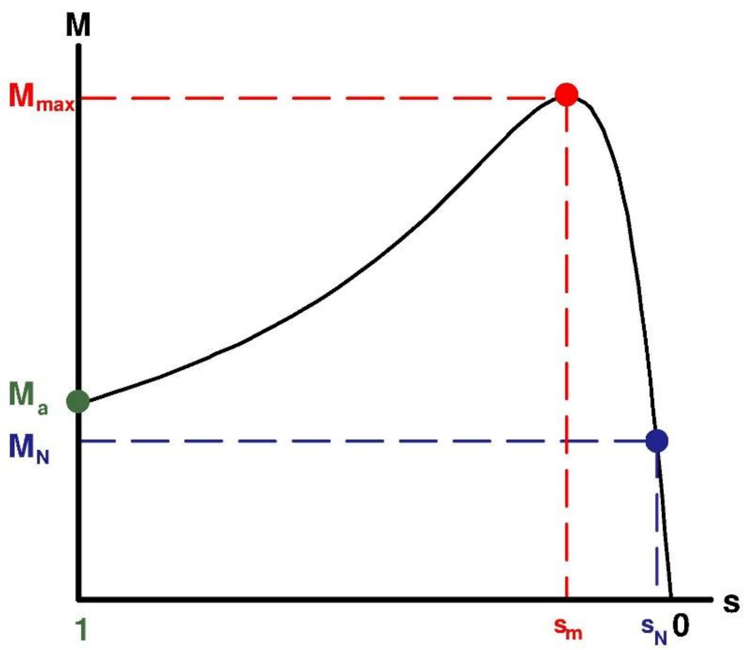
$$w = \frac{s_m}{s} \quad \Rightarrow \quad w_N = \frac{s_m}{s_N} = \frac{s_m}{0{,}04} \quad \Rightarrow \quad s_m = 0{,}04\, w_N \tag{5}$$

Con dicha variable auxiliar w_N la ecuación de segundo grado anterior se convierte en esta otra:

$$\frac{1}{2{,}5} = \frac{2}{w_N + \frac{1}{w_N}} \quad \Rightarrow \quad w_N^2 - 5\,w_N + 1 = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones que, mediante la relación (5), permiten obtener los dos posibles valores del deslizamiento de par máximo s_m:

$$w_N = \begin{cases} \mathbf{4{,}791} \\ 0{,}2087 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s_m = 0{,}04\,w_N = \begin{cases} \mathbf{0{,}192} \\ 0{,}00835 \end{cases}$$



En la figura anterior se muestra la curva de par de un motor asíncrono trifásico. En ella se observa que el par máximo se produce para un deslizamiento s_m superior al deslizamiento asignado s_N; luego la segunda las dos soluciones obtenidas no es válida y el deslizamiento de par máximo vale $s_m = 0{,}192$.

La relación (2) permite obtener la velocidad de par máximo n_m a partir del deslizamiento s_m:

$$n_m = n_1\,(1 - s_m) = 1500\,(1 - 0{,}192) \quad \Rightarrow \quad \underline{n_m = 1212 \text{ r.p.m.}}$$

<u>El par máximo de este motor vale $M_{máx} = 1220$ Nm y se produce cuando la velocidad vale $n_m = 1212$ r.p.m.</u>

Se puede simplificar el cálculo del deslizamiento s_m, cometiendo un pequeño error, si se acepta que el deslizamiento asignado s_N es lo suficientemente pequeño frente al deslizamiento de par máximo s_m.

En efecto, para deslizamientos s pequeños en comparación con s_m se puede simplificar aún más la fórmula de Kloss (4) de esta manera:

$$s \lll s_m \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{s_m} \lll \frac{s_m}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s} \approx \frac{s_m}{s}$$

$$\left.\begin{array}{l} R_1 \lll R'_2 \\ s \lll s_m \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{M_{máx}} = \frac{2}{\frac{s_m}{s}} = \frac{2}{s_m}\,s \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2\,M_{máx}}{s_m}\,s \qquad (6)$$

La relación (6) permite afirmar que *para deslizamientos s pequeños el par M de una máquina asíncrona varía linealmente con el deslizamiento*.

Aplicando la expresión (6) para relacionar el par asignado M_N con el par máximo $M_{máx}$ se llega a la siguiente relación.

$$\frac{M_N}{M_{máx}} = \frac{2}{s_m}\,s_N \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2{,}5} = \frac{2}{s_m}\,0{,}04 \quad \Rightarrow \quad s_m = 0{,}20$$

Se puede apreciar que este resultado se acerca bastante a la solución calculada anteriormente ($s_m = 0{,}192$). Mediante este método aproximado se puede comprobar que el cálculo anterior, utilizando la fórmula de Kloss (4), se ha realizado correctamente y no se han cometido errores.

b) Aplicando la versión simplificada de la fórmula de Kloss (4) se deduce que cuando el par es M = 366 Nm se cumple lo siguiente:

$$R_1 \lll R'_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{M_{máx}} = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}} \quad \Rightarrow \quad \frac{366}{1220} = 0{,}3 = \frac{2}{\frac{s}{0{,}192} + \frac{0{,}192}{s}}$$

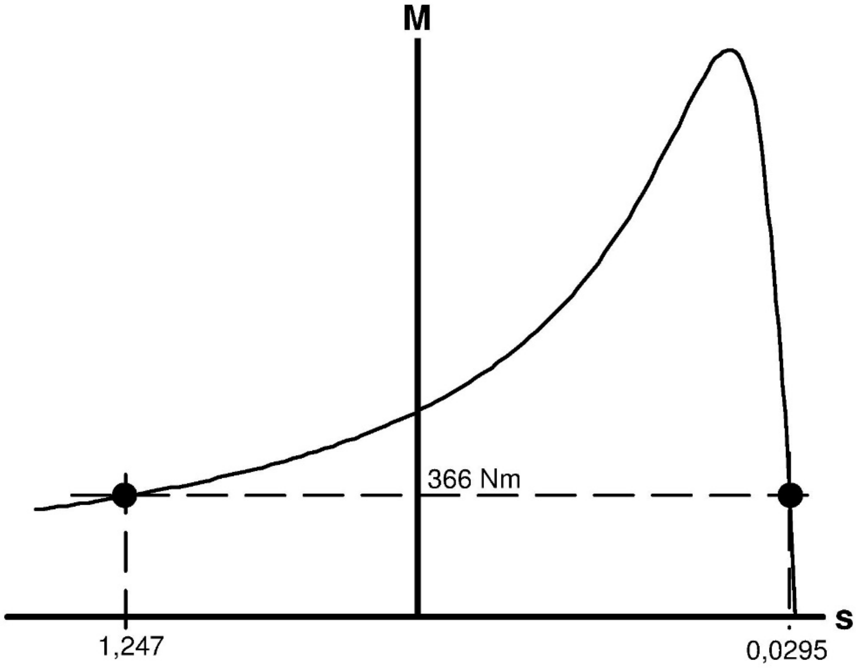
La ecuación anterior es de segundo grado y se resuelve más fácilmente introduciendo la variable auxiliar w que se definió mediante la expresión (5):

$$w = \frac{s_m}{s} = \frac{0{,}192}{s} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{0{,}192}{w}$$

$$0{,}3 = \frac{2}{w + \frac{1}{w}} \quad \Rightarrow \quad 0{,}3\,w^2 - 2\,w + 0{,}3 = 0$$

Máquinas asíncronas o de inducción

A.1: Circuito equivalente. Curva de par. Rendimiento



Se obtienen estas dos soluciones:

$$w = \begin{cases} \mathbf{6{,}513} \\ 0{,}154 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{0{,}192}{w} = \begin{cases} \mathbf{0{,}0295} \\ 1{,}247 \end{cases}$$

En la figura adjunta se muestran estas dos soluciones sobre la curva par-deslizamiento de la máquina. Se observa que un deslizamiento mayor que 1 corresponde a un funcionamiento como freno a contracorriente, por lo que esta solución no es válida. Luego, con este par de 366 Nm el deslizamiento vale s = 0,0295.

La relación (2) permite obtener la velocidad correspondiente a este deslizamiento s:

$$n = n_1 (1 - s) = 1500 (1 - 0{,}0295) \quad \Rightarrow \quad \underline{n = 1456 \text{ r.p.m.}}$$

<u>La máquina gira a 1456 r.p.m. cuando está proporcionando un par de 366 Nm</u>.

Este cálculo se puede realizar de forma aproximada utilizando la versión más simplificada de la curva de Kloss (6), válida solamente para deslizamientos s pequeños comparados con el del par máximo s_m:

$$M = \frac{2\, M_{máx}}{s_m} s \quad \Rightarrow \quad 366 = \frac{2 \cdot 1220}{0{,}192} s \quad \Rightarrow \quad s = 0{,}029$$

La expresión (6) indicó que para deslizamientos pequeños el par M varía linealmente con el deslizamiento s. Dado que tanto el deslizamiento s a calcular como el deslizamiento asignado s_N son pequeños, se puede establecer la siguiente relación:

$$\frac{M}{M_N} = \frac{s}{s_N} \quad \Rightarrow \quad \frac{366}{488} = 0{,}75 = \frac{s}{0{,}04} \quad \Rightarrow \quad s = 0{,}03$$

Estos dos resultados son próximos a la solución obtenida anteriormente (s = 0,0295) y permiten comprobar que el cálculo anterior se ha realizado sin errores.

PROBLEMA A.2.1

ENUNCIADO

En el motor del problema A.1.2 calcular la resistencia que debe añadirse en serie por fase en el rotor para obtener el par máximo en el arranque.

RESULTADOS

$R_{adic} = 0,169\ \Omega$

A.2: Maniobras. Control de velocidad

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

* Este problema se resuelve por aplicación directa de la expresión que calcula la resistencia adicional R'_{adic} a añadir con cada fase del rotor para obtener el par máximo en el arranque.

Esta expresión da el valor de la resistencia adicional a conectar en serie con cada fase del rotor reducida al estator. El verdadero valor de la resistencia adicional R_{adic} , sin reducir al estator, se obtiene dividiendo R'_{adic} entre las relaciones de transformación de tensiones m_v y de intensidades m_i.

En máquinas asíncronas trifásicas de rotor bobinado ambas relaciones de transformación son iguales ($m_i = m_v$).

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA A.2.1

Datos:

$R_1 = 0{,}2\ \Omega$ $\quad R'_2 = 0{,}1438\ \Omega$ $\quad X_{cc} = 0{,}7949\ \Omega$

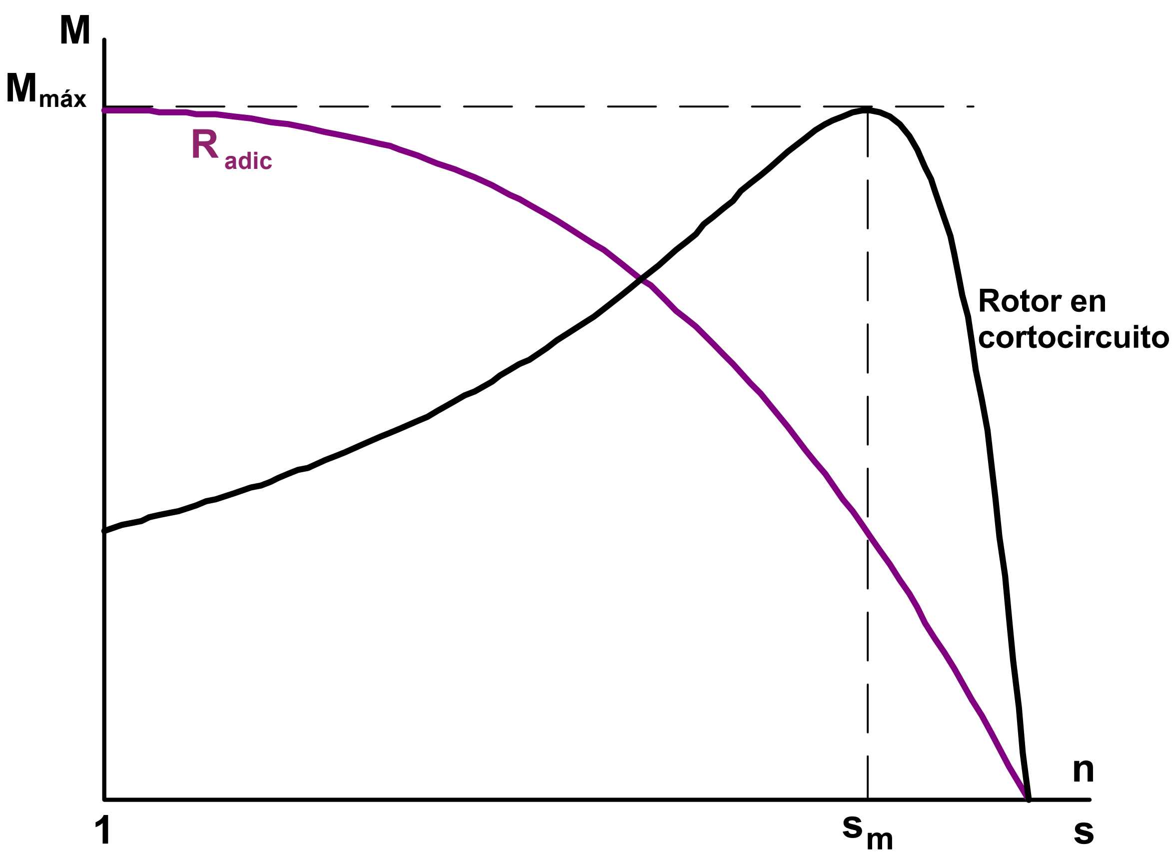
$m_v = m_i = 2$

Resolución:

Se sabe que el deslizamiento al cuál se produce el par máximo de una máquina asíncrona actuando como motor es

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \tag{1}$$

Al añadir una resistencia adicional en serie con cada fase del rotor se consigue modificar este deslizamiento de par máximo sin que cambie el valor de dicho par máximo. Cuando esta resistencia adicional vale R_{adic} se consigue que el par máximo se produzca en el arranque, es decir, para un deslizamiento unidad (ver la figura adjunta).



En consecuencia, cuando la resistencia conectada en serie con cada fase del rotor es R_{adic} sucede que

$$s_m = 1 = \frac{R'_2 + R'_{adic}}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \quad \rightarrow \quad R'_{adic} = \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2} - R'_2 \qquad (2)$$

Por lo tanto, en el presente caso sustituyendo valores en (2) se llega a

$$R'_{adic} = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}7949^2} - 0{,}1438 = 0{,}676\ \Omega$$

La resistencia R_{adic} se obtiene a partir de su valor reducido al estator R'_{adic} de la siguiente manera:

$$R'_{adic} = m_v\ m_i\ R_{adic} \quad \rightarrow \quad R_{adic} = \frac{R'_{adic}}{m_v\ m_i} \qquad (3)$$

es decir, sustituyendo valores:

$$R_{adic} = \frac{0{,}676}{2 \cdot 2} = 0{,}169\ \Omega$$

<u>La resistencia que debe añadirse por fase al rotor para obtener el par máximo en el arranque es de 0,169 Ω</u>.

PROBLEMA A.2.2

ENUNCIADO

En el motor del problema A.1.4 calcular:

- **a)** La mínima tensión de la red a la cual este motor puede arrancar si debe mover una carga que demanda un par independiente de la velocidad de 100 Nm.
- **b)** Corrientes de arranque directo a la tensión asignada y mediante el método estrella-triángulo.

RESULTADOS

a) $V_1 = 170$ V

b) $I_{aL} = 317{,}1$ A; $I_{a\lambda} = 105{,}7$ A

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

* Hay que plantear que el par para deslizamiento unidad (el arranque) y a una tensión desconocida vale 100 Nm. Esto permite despejar la tensión de fase.

  Como la conexión es triángulo, la tensión de línea es igual a la de fase.

* En los arranques se puede despreciar la corriente de vacío I_0.

* La intensidad de fase en el arranque directo se obtiene igualándola a la del rotor reducida al estator cuando el deslizamiento vale 1 y la tensión es la asignada. Esta se calcula de la expresión que se deduce del circuito equivalente aproximado del motor.

  Como la conexión es triángulo, la corriente de arranque de línea es raíz de 3 veces mayor que la de fase.

* La intensidad de arranque estrella-triángulo es la tercera parte de la corriente de línea en el arranque directo.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA A.2.2

Datos:

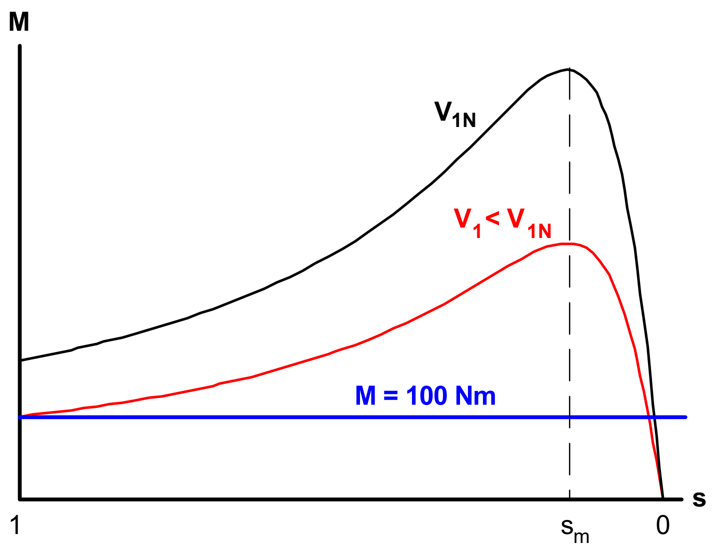
$m_1 = 3$ fases $V_{1N} = 220$ V $f_1 = 50$ Hz $P_m \approx 0$ W

$R_1 = R'_2 = 0{,}174\ \Omega$ $X_{cc} = 1{,}15\ \Omega$ $P_{Fe} \approx 0$ W

$n_1 = 1000$ r.p.m. Conexión triángulo en el estator

Resolución:

a) La mínima tensión a la cual este motor puede arrancar con un par de 100 Nm es aquella a la que el motor proporciona 100 Nm en el arranque, es decir, a deslizamiento unidad (ver la figura adjunta).



Por lo tanto, se toma la ecuación del par de un motor asíncrono:

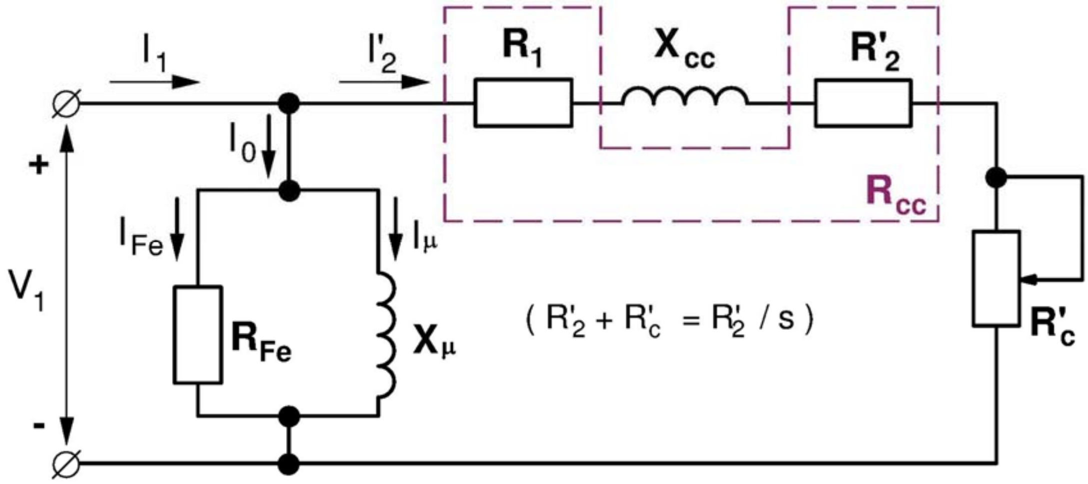
$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} \tag{1}$$

y se plantea que para deslizamiento s = 1 y a una tensión V_1 desconocida proporciona 100 Nm. Esto da una ecuación de la que se puede despejar la tensión V_1:

$$100 = \frac{3 \cdot 0{,}174}{\frac{2\pi}{60} 1000} \frac{V_1^2}{(0{,}174 + 0{,}174)^2 + 1{,}15^2} \rightarrow V_1 = 170 \text{ V}$$

Como el estator está conectado en triángulo, la tensión de línea es igual a la de fase. Por lo tanto, <u>la mínima tensión de la red con la que este motor puede arrancar moviendo un par resistente de 100 Nm es de $V_{1L} = 170$ V</u>.

b)



Durante el arranque la corriente del rotor reducida al estator es mucho mayor que la de vacío I_0 y, por lo tanto, se desprecia esta última. Así, del circuito equivalente aproximado de un motor asíncrono (ver la figura) y sabiendo que en el arranque el deslizamiento vale la unidad (s = 1) se obtiene que la intensidad de fase en un arranque vale:

$$\frac{V_1}{\sqrt{(R_1 + R'_2)^2 + X_{cc}^2}} \qquad (2)$$

Luego, en el caso de arranque directo, poniendo en la expresión (2) que la tensión es la asignada, se obtiene que:

$$I_a = \frac{220}{\sqrt{(0{,}174 + 0{,}174)^2 + 1{,}15^2}} = 183{,}1 \text{ A}$$

que, al tratarse de conexión triángulo, da una corriente de línea de arranque directo $\sqrt{3}$ veces mayor:

$$I_{aL} = \sqrt{3} \cdot 183{,}1 = 317{,}1\text{A}$$

En el arranque estrella-triángulo la intensidad de arranque es igual a la tercera parte de la intensidad (de línea) del arranque directo:

$$I_{a\lambda} = \frac{317{,}1}{3} = 105{,}7 \text{ A}$$

<u>La intensidad de arranque directo vale I_{aL} = 317,1 A y la del arranque estrella-triángulo vale $I_{a\lambda}$ = 105,7 A</u>.

PROBLEMA A.2.3

ENUNCIADO

Una máquina de inducción trifásica de rotor de jaula de ardilla está conectada a una red de 380 V y tiene las siguientes características:

$V_{1NL} = 380/660$ V	$f_1 = 50$ Hz	$n_N = 585$ r.p.m.
$R_1 = 0{,}5\ \Omega$	$R'_2 = 0{,}7\ \Omega$	$X_1 = X'_2 = 3\ \Omega$

En esta máquina se pueden despreciar las pérdidas mecánicas y en el hierro, así como la corriente de vacío.

Determinar:

- **a)** La forma de conexión (estrella o triángulo) del estator y el número de polos de la máquina.
- **b)** La corriente de línea, el factor de potencia y la potencia absorbida de la red cuando el motor funciona en condiciones asignadas.
- **c)** La potencia desarrollada, el par mecánico en el eje y el rendimiento del motor en las condiciones del apartado anterior.
- **d)** El par de frenado si la máquina se la hace funcionar como freno a contracorriente, para lo cual se permutan dos fases de la red de alimentación cuando la máquina estaba funcionando como motor a 585 r.p.m.
- **e)** La potencia mecánica absorbida y la potencia eléctrica que la máquina entrega a la red si se la hace funcionar como generador asíncrono girando con una velocidad de 615 r.p.m., para lo cual se acopla una turbina de gas a su eje.

RESULTADOS

- **a)** Conexión triángulo; $2p = 10$ polos
- **b)** $I_{1NL} = 22{,}6$ A; $\cos \varphi_{1N} = 0{,}979$; $P_{1N} = 14554$ W
- **c)** $P_{uN} = 13941$ W; $M_N = 227{,}6$ Nm; $\eta_N = 95{,}79\%$
- **d)** $M = -66{,}53$ Nm
- **e)** $P_m = -15692$ W; $P_1 = -15036$ W

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

* El enunciado dice que el motor es de 380/660 V. Esto significa que para que el motor tenga su tensión de fase asignada en el estator (V_{1N} = 380 V), la tensión de línea debe ser V_{1NL} = 660 V si la conexión del estator es estrella y V_{1NL} = 380 V si la conexión es triángulo. Por lo tanto, se puede saber la forma en que hay que conectar el motor a partir de la tensión de línea V_{1NL} de la red de alimentación.

* Para una frecuencia f_1 dada, la velocidad de sincronismo n_1 del motor sólo puede tomar un número limitado de valores en función del número de pares de polos p. Por otra parte, la velocidad n de funcionamiento del motor es ligeramente inferior a la de sincronismo.

  Por lo tanto, la velocidad de sincronismo del motor será aquella de las correspondientes a la frecuencia f_1 que es inmediatamente mayor que la velocidad n a la que gira el motor para una carga dada. Conocidas la velocidad de sincronismo n_1 y la frecuencia f_1 se obtienen fácilmente el número de pares de polos p y el número de polos 2p.

* El deslizamiento s se calcula aplicando la fórmula que lo define en función de la velocidad de sincronismo n_1 y de la velocidad de giro n de la máquina. Cuando dicha velocidad de giro es la asignada n_N se obtiene el deslizamiento asignado s_N.

* La corriente de fase del estator I_1 es igual a la del rotor reducido al primario I'_2 si se desprecia la corriente de vacío I_0.

  La corriente del rotor reducido al primario I'_2 se puede calcular partiendo del circuito equivalente aproximado del motor.

  Para pasar de corriente de fase I_1 a corriente de línea I_{1L} hay que tener en cuenta la forma de conexión, estrella o triángulo, del estator.

* Despreciar la corriente de vacío I_0 equivale a suprimir la rama en paralelo del circuito equivalente. En este caso, el factor de potencia del motor Cos φ_1 es el correspondiente a la impedancia del circuito equivalente que queda cuando se suprime dicha rama en paralelo.

* La potencia absorbida por el motor P_1 es la potencia activa consumida por un sistema trifásico. Por lo tanto, se puede determinar mediante la expresión que calcula la potencia activa en circuitos trifásicos equilibrados.

* Si se desprecian las pérdidas mecánicas, la potencia útil P_u es igual a la potencia mecánica interna P_{mi}. Esta es la potencia que en el circuito equivalente se consume en la resistencia de carga R'_c.

* El par mecánico en el eje M es igual al cociente de la potencia útil entre la velocidad de giro del motor Ω, medida en radianes geométricos por segundo.

* El rendimiento η es el cociente de la potencia útil P_u entre la potencia absorbida P_1.

* Al intercambiar dos fases de la red, la máquina asíncrona pasa a funcionar como <u>freno a contracorriente</u> con una velocidad de sincronismo inversa de $-n_1$.

  En el momento del intercambio de las fases, por inercia mecánica la velocidad n sigue siendo la misma que justo antes (la velocidad asignada en este problema). Hay que calcular el nuevo deslizamiento s' con esta misma velocidad de giro n, pero con la velocidad de sincronismo inversa $-n_1$. Este deslizamiento sale mayor que la unidad.

  El par actuando como freno se calcula con la fórmula general del par de una máquina asíncrona trifásica introduciendo el deslizamiento s' y la velocidad de sincronismo $-n_1$. Al tratarse de un par de frenado tendrá signo negativo.

* A 615 r.p.m. la máquina gira por encima de la velocidad de sincronismo y por lo tanto funciona como <u>generador</u> con un deslizamiento negativo.

  La intensidad del rotor reducida al estator I'_2 y la potencia mecánica absorbida por el eje P_u se calculan de igual manera que en el apartado c). Al ser un generador la potencia mecánica en el eje P_u es negativa.

  La potencia eléctrica cedida a la red a través del estator P_1 se puede calcular como suma de las potencias activas consumidas en la totalidad de las resistencias del circuito equivalente (que en este caso se tomará sin la rama en paralelo porque se está despreciando la corriente de vacío I_0). Esta potencia P_1 es negativa porque ahora la máquina está actuando como generador.

RESOLUCION DEL PROBLEMA 2.2.3

Datos:

$m_1 = 3$ fases	380/660 V	$f_1 = 50$ Hz	$n_N = 585$ r.p.m.
$R_1 = 0{,}5\ \Omega$	$R'_2 = 0{,}7\ \Omega$	$X_1 = 3\ \Omega$	$X'_2 = 3\ \Omega$
$P_m \approx 0$	$I_0 \approx 0$	$V_{1NL} = 380$ V	

Resolución:

a) En un motor trifásico el estator puede conectarse en estrella o en triángulo. Si se desea que la máquina funcione a su tensión asignada V_{1N}, las tensiones de línea deberán ser:

Conexión estrella: $V_{1NL} = \sqrt{3}\ V_{1N}$

Conexión triángulo: $V_{1NL} = V_{1N}$

En este caso el enunciado indica que el motor es de 380/660 V. Esto quiere decir que para que el motor reciba su tensión asignada de fase ($V_{1N} = 380$ V), la tensión de línea deberá ser $V_{1NL} = 660$ V si el estator está conectado en estrella y deberá ser $V_{1NL} = 380$ V si está conectado en triángulo. Como la tensión de línea de la red es de 380 V se deduce, pues, que el estator está conectado en triángulo.

Es sabido que la velocidad de sincronismo, expresada en r.p.m., se calcula mediante la expresión:

$$n_1 = \frac{60\ f_1}{p} \tag{1}$$

Por lo que, para una frecuencia f_1 de 50 Hz se pueden obtener las siguientes velocidades de sincronismo en función del número de pares de polos p del motor:

$p = 1 \rightarrow n_1 = 3000$ r. p. m. $\qquad p = 4 \rightarrow n_1 = 750$ r. p. m.

$p = 2 \rightarrow n_1 = 1500$ r. p. m. $\qquad p = 5 \rightarrow n_1 = 600$ r. p. m.

$p = 3 \rightarrow n_1 = 1000$ r. p. m. $\qquad p = 6 \rightarrow n_1 = 500$ r. p. m.

y así sucesivamente.

Por otra parte, la velocidad de giro n del rotor guarda la siguiente relación con la velocidad de sincronismo n_1 y el deslizamiento s:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad \rightarrow \quad n = n_1(1 - s) \tag{2}$$

En funcionamiento normal el deslizamiento s es pequeño y la velocidad de giro n es ligeramente inferior a la de sincronismo n_1.

Por lo tanto, si en este caso se sabe que la frecuencia del estator f_1 vale 50 Hz y la velocidad asignada es de 585 r.pm. se puede deducir que la velocidad de sincronismo será de 600 r.p.m. En efecto, de los posibles valores de velocidad de sincronismo para 50 Hz el más cercano por exceso a 585 r.p.m. es 600 r.p.m.

Para n_1 = 600 r.p.m. y f_1 = 50 Hz el número de pares de polos p vale 5. Luego, el número de polos es el doble, 2p = 10 polos.

<u>El estator está conectado en triángulo y el número de polos es 2p = 10 polos</u>.

b) Cuando se conoce una velocidad, ésta no se utiliza directamente para calcular el comportamiento de un motor asíncrono, sino que se emplea el deslizamiento correspondiente. Por esto, lo primero que hay que hacer cuando hay un dato de velocidad es calcular su deslizamiento. En este caso, para condiciones asignadas se tiene un deslizamiento:

$$s_N = \frac{n_1 - n_N}{n_1} = \frac{600 - 585}{600} = 0{,}025$$

La reactancia de cortocircuito X_{cc} de esta máquina vale:

$$X_{cc} = X_1 + X'_2 = 3 + 3 = 6\ \Omega$$

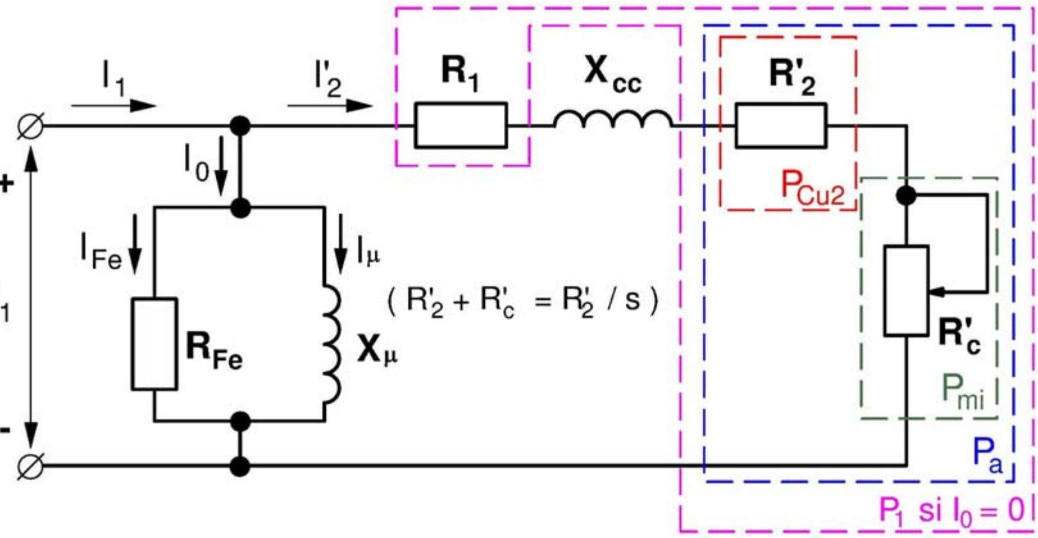


Fig. 1: Circuito equivalente de una máquina asíncrona trifásica

Dado que se desprecia la corriente de vacío I_0, la corriente del estator I_1 se toma igual a la del rotor reducida al estator I'_2. Del circuito equivalente aproximado (ver la Fig. 1) se obtiene que:

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} \qquad (3)$$

Luego, en el caso de condiciones asignadas se llega a:

$$I_{1N} \approx I'_{2N} = \frac{380}{\sqrt{\left(0{,}5 + \frac{0{,}7}{0{,}025}\right)^2 + 6^2}} = 13{,}05 \text{ A}$$

Como el estator está conectado en triángulo, la corriente asignada de línea I_{1N} tiene este valor:

$$I_{1NL} = \sqrt{3}\ I_{1N} = \sqrt{3}\ 13{,}05 = 22{,}6 \text{ A}$$

Despreciar la corriente de vacío I_0 equivale a suprimir la rama en paralelo del circuito equivalente (Fig. 1). En este caso, el factor de potencia correspondiente a la impedancia del resto del circuito equivalente es:

$$\text{Cos}\ \varphi_1 = \frac{R_1 + \frac{R'_2}{s}}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} \qquad (4)$$

que en este motor y en condiciones asignadas vale:

$$\text{Cos}\ \varphi_{1N} = \frac{R_1 + \frac{R'_2}{s_N}}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s_N}\right)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0{,}5 + \frac{0{,}7}{0{,}025}}{\sqrt{\left(0{,}5 + \frac{0{,}7}{0{,}025}\right)^2 + 6^2}} = 0{,}979$$

(En realidad, el factor de potencia será algo inferior al obtenido en la expresión anterior debido a que realmente la corriente de vacío no es nula).

La potencia absorbida P_1 es la potencia activa consumida por un sistema trifásico. Por lo tanto, se obtiene que:

$$P_1 = \sqrt{3}\ V_{1L}\ I_{1L}\ \text{Cos}\ \varphi_1 \qquad (5)$$

lo que da lugar para este motor en condiciones asignadas a:

$$P_{1N} = \sqrt{3}\ V_{1NL}\ I_{1NL}\ \cos\varphi_{1N} = \sqrt{3}\cdot 380\cdot 22{,}6\cdot 0{,}979 = 14554\ \text{W}$$

<u>En condiciones asignadas este motor consume I_{1NL} = 22,6 A con un factor de potencia $\cos\varphi_{1N}$ = 0,979, lo que equivale a una potencia P_{1N} = 14,55 kW</u>.

c) Si se desprecian las pérdidas mecánicas, la potencia útil P_u es igual a la potencia mecánica interna P_{mi}. Esta es la potencia que en el circuito equivalente (Fig. 1) se consume en la resistencia de carga R'_c. Luego:

$$P_u \approx P_{mi} = m_1\ I'^2_2\ R'_c = m_1\ I'^2_2\ R'_2\left(\frac{1}{s} - 1\right) \tag{6}$$

Utilizando la expresión anterior con los valores asignados de corriente (de fase) y deslizamiento se obtiene:

$$P_{uN} = 3\cdot 13{,}05^2\cdot 0{,}7\cdot\left(\frac{1}{0{,}025} - 1\right) = 13941\ \text{W}$$

El par mecánico en el eje M es igual a la potencia útil entre la velocidad:

$$M = \frac{P_u}{\Omega} = \frac{P_u}{\frac{2\pi}{60}\ n} \tag{7}$$

lo que para condiciones asignadas da lugar a:

$$M_N = \frac{P_{uN}}{\frac{2\pi}{60}\ n_N} = \frac{13941}{\frac{2\pi}{60}\ 585} = 227{,}6\ \text{Nm}$$

El rendimiento η es el cociente de la potencia útil P_u entre la potencia absorbida P_1:

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} \tag{8}$$

Lo que en condiciones asignadas da lugar a:

$$\eta_N = \frac{P_{uN}}{P_{1N}} = \frac{13941}{14554} = 0{,}958 = 95{,}79\%$$

(Si se tuvieran en cuenta las pérdidas mecánicas y las del hierro se obtendría un rendimiento menor).

En condiciones asignadas en este motor se tiene una potencia útil P_{uN} = 13,94 kW, un par M_N = 227,6 Nm y un rendimiento η_N = 95,79%.

d) Al intercambiar dos fases de la red de alimentación a esta máquina se le cambia el orden de la secuencia de fases. Se pasa de tener un sistema trifásico de corrientes de secuencia directa, que origina un campo giratorio en sentido directo (con una velocidad de sincronismo $+n_1$), a tener un sistema de corrientes inverso, que origina un campo giratorio en sentido inverso (con una velocidad de sincronismo $-n_1$).

En la Fig. 2 se han representado las curvas del par de esta máquina cuando se alimenta con un sistema de corrientes directo (curva 1) y cuando se alimenta con un sistema trifásico de corrientes inverso (curva 2). Cuando la máquina está alimentada con corrientes de secuencia directa (que originan un campo giratorio de velocidad de sincronismo $+n_1$) y gira a una velocidad n, el deslizamiento s vale:

$$s = \frac{+n_1 - n}{+n_1} = 1 - \frac{n}{n_1} \tag{9}$$

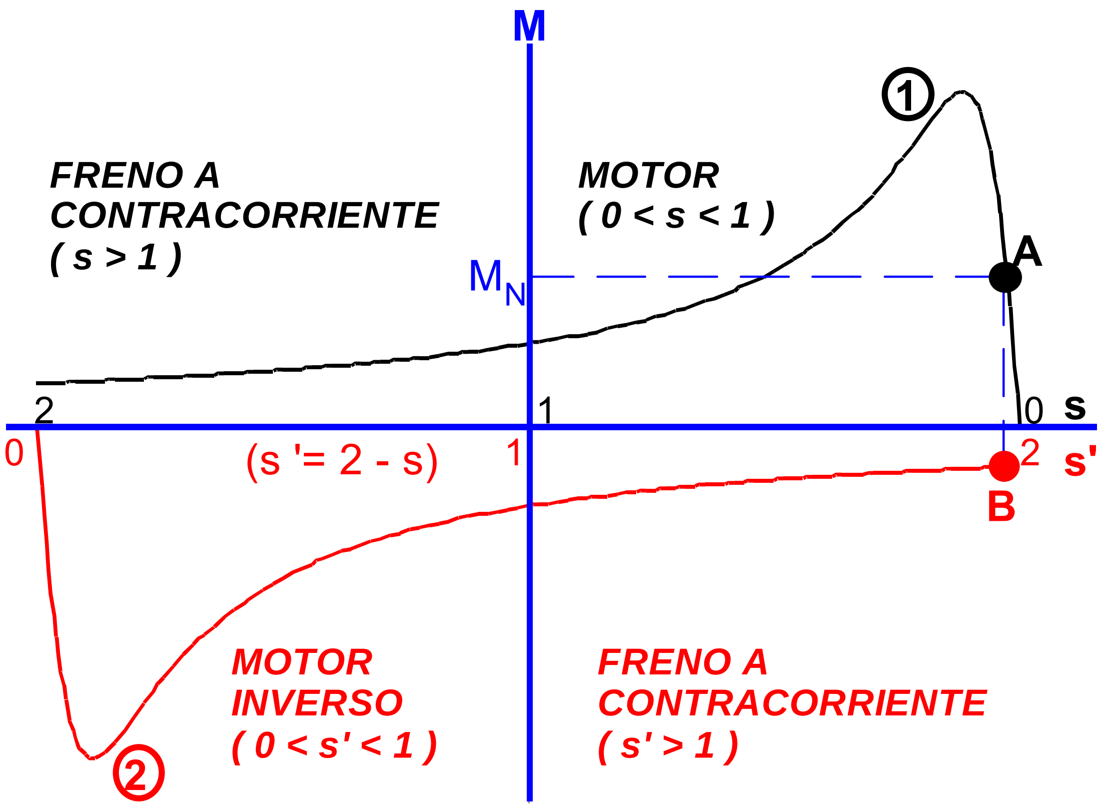


Fig. 2: Curvas del par de una máquina asíncrona trifásica actuando como motor y como freno a contracorriente:
(1): Alimentada con un sistema de corrientes de secuencia directa
(2): Alimentada con un sistema de corrientes de secuencia inversa

mientras que, girando a la misma velocidad n, cuando la máquina está alimentada con corrientes de secuencia inversa (que originan un campo giratorio de velocidad de sincronismo $-n_1$) el deslizamiento s' pasa a valer:

$$s' = \frac{-n_1 - n}{-n_1} = 1 + \frac{n}{n_1} = 2 - s \qquad (10)$$

Teniendo en cuenta que cuando el motor está alimentado con corrientes de secuencia inversa la velocidad de sincronismo es negativa (de sentido inverso), lo que significa que cuando actúa como motor en estas condiciones origina un par de signo negativo (en sentido inverso), y que el deslizamiento s' en estas condiciones está relacionado con el deslizamiento s cuando funciona con corrientes de secuencia directa según la relación (10) se deduce la forma que tiene la curva del par en estas condiciones (curva 2 de la Fig. 2).

En la curva 1 de la Fig.2 (funcionamiento con corrientes de secuencia directa) se aprecia que cuando el deslizamiento s tiene valores comprendidos entre 0 y 1 el par que origina la máquina tiende a hacerla girar en sentido directo y la máquina efectivamente está girando con este sentido. Por esta razón, en este rango de deslizamientos la máquina actúa como <u>motor</u> girando en sentido directo. Si el deslizamiento s alcanza valores superiores a 1, el par generado por la máquina sigue siendo de sentido directo, pero la velocidad a la que gira es negativa (de sentido inverso). En este caso el par de la máquina se opone a la velocidad y la máquina está actuando como <u>freno</u> girando en sentido inverso.

En la curva 2 de la Fig.2 (funcionamiento con corrientes de secuencia inversa) se aprecia que cuando el deslizamiento s' tiene valores comprendidos entre 0 y 1 el par que origina la máquina tiende a hacerla girar en sentido inverso y la máquina efectivamente está girando con este sentido. Por esta razón, en este rango de deslizamientos la máquina actúa como <u>motor</u> girando en sentido inverso. Si el deslizamiento s' alcanza valores superiores a 1, el par generado por la máquina sigue siendo de sentido inverso, pero la velocidad a la que gira es positiva (de sentido directo). En este caso el par de la máquina se opone a la velocidad y la máquina está actuando como <u>freno</u> girando en sentido directo.

Por otra parte, en el circuito equivalente de una máquina asíncrona trifásica (Fig. 1) se aprecia que cuando actúa como freno a contracorriente, es decir, con deslizamientos mayores que la unidad; se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} s > 1 \ \rightarrow \ \dfrac{R'}{s} > 0 \ \rightarrow \ \mathbf{P_a > 0} \\ s > 1 \ \rightarrow \ R'_c = R'_2 \left(\dfrac{1}{s} - 1\right) < 0 \ \rightarrow \ \mathbf{P_{mi} < 0} \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Como el signo positivo de las potencias corresponde al funcionamiento como motor, esto significa que en el funcionamiento como freno a contracorriente la potencia que atraviesa el entrehierro P_a es del mismo signo que cuando actúa como motor, es decir, va del estator al rotor. Sin embargo, la potencia mecánica interna P_{mi} ahora es de signo opuesto a cuando actúa como motor y, en consecuencia, esta potencia no la genera la máquina y sale hacia la carga mecánica, sino que es una potencia que entra hacia la máquina asíncrona por su eje, dando lugar a un par opuesto a la velocidad (actuación como freno). Esto indica que cuando la máquina funciona como freno a contracorriente, le entra potencia tanto a través del estator como a través de su eje de giro. Toda esta potencia al final se disipa en forma de calor en la propia máquina y puede llegar a estropearla.

En la máquina que se está analizando en este problema sucede que cuando estaba funcionando en condiciones asignadas (punto de funcionamiento A de la Fig. 2, con un deslizamiento s_N = 0,025 y una velocidad n_N = 585 r.p.m.) se le permutan dos de las fases de forma instantánea. Debido a la inercia mecánica del sistema la máquina todavía sigue girando a la misma velocidad n_N justo en el instante siguiente de la permutación de las fases. Por lo tanto, el punto de funcionamiento pasa a ser el B de la Fig. 2 situado sobre la curva 2. En este punto B, el deslizamiento s' vale:

$$s' = 2 - s_N = 1 - 0{,}025 = 1{,}975$$

mayor que la unidad y la máquina pasa a actuar como freno a contracorriente.

Utilizando la expresión del par de una máquina asíncrona trifásica:

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} \tag{12}$$

para la tensión asignada y el deslizamiento s' en el punto B, se obtiene que en estas condiciones se ejerce un par M:

$$M = \frac{3 \frac{0{,}7}{1{,}975}}{\frac{2\pi}{60}(-600)} \frac{380^2}{\left(0{,}5 + \frac{0{,}7}{1{,}975}\right)^2 + 6^2} = -66{,}53 \text{ Nm}$$

<u>Al invertir la secuencia de fases de la máquina cuando estaba funcionando como motor en condiciones asignadas, la máquina pasa a ejercer un par de frenando M = -66,53 Nm</u>.

e)

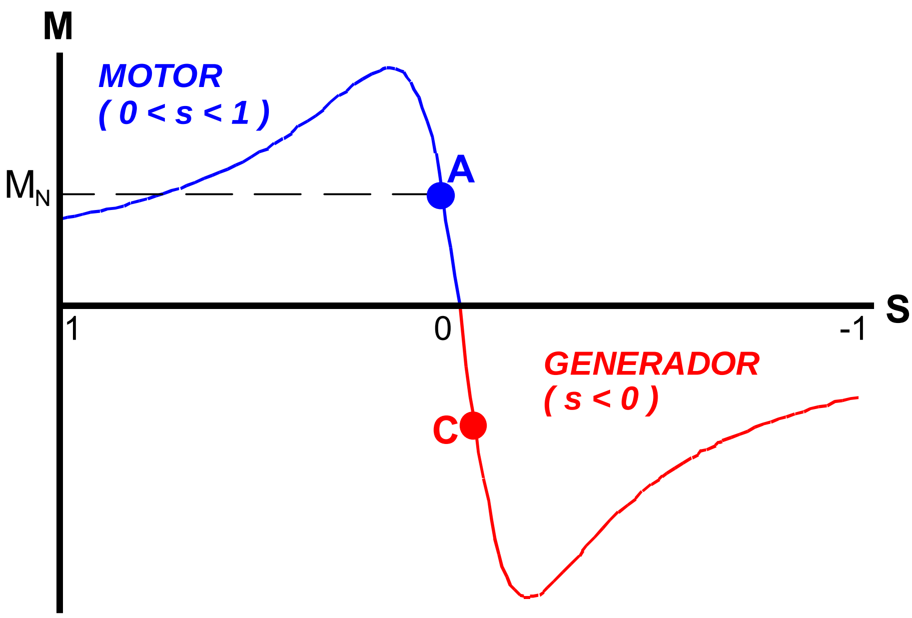


Fig. 3: Curva del par de una máquina asíncrona trifásica actuando como motor y como generador

Si la máquina se le hace girar a mayor velocidad que la de sincronismo pasa a actuar como generador (punto C de la Fig. 3) con un deslizamiento s negativo y ejerciendo un par opuesto a la velocidad. En estas condiciones del circuito equivalente (Fig. 1) se deduce que:

$$\left.\begin{array}{l} s < 0 \;\rightarrow\; \dfrac{R'}{s} < 0 \;\rightarrow\; \mathbf{P_a} < \mathbf{0} \\[2ex] s < 0 \;\rightarrow\; R'_c = R'_2\left(\dfrac{1}{s} - 1\right) < 0 \;\rightarrow\; \mathbf{P_{mi}} < \mathbf{0} \end{array}\right\} \tag{13}$$

Como el signo positivo de las potencias corresponde al funcionamiento como motor, esto significa que en el funcionamiento como generador la potencia que atraviesa el entrehierro P_a es de signo contrario al que cuando actúa como motor, es decir, va del rotor hacia el estator. Además, la potencia mecánica interna P_{mi} ahora es de signo opuesto a cuando actúa como motor y, en consecuencia, esta potencia no la genera la máquina y sale hacia la carga mecánica, sino que es una potencia que entra hacia la máquina asíncrona por su eje, dando lugar a un par opuesto a la velocidad. Esto indica que cuando la máquina funciona como generador, le entra potencia mecánica a través de su eje de giro y sale (genera) potencia activa desde el estator hacia la red. Por consiguiente, en esta situación desde el lado mecánico la máquina actúa como freno (robando potencia mecánica y ejerciendo un par opuesto a la velocidad) y desde el lado eléctrico actúa como generador (convirtiendo la potencia mecánica que ha captado por el eje en potencia eléctrica).

En la máquina que se está analizando en este problema sucede que cuando se le hace girar a n = 615 r.p.m. el deslizamiento s pasa a ser:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{600 - 616}{600} = -0{,}025$$

Con este deslizamiento y a la tensión asignada y despreciando la corriente de vacío I_0, la expresión (3) indica que se tiene una corriente I_1 en el estator de:

$$I_1 \approx I'_2 = \frac{380}{\sqrt{\left(0{,}5 + \dfrac{0{,}7}{-0{,}025}\right)^2 + 6^2}} = 13{,}50\ \text{A}$$

Si se desprecian las pérdidas mecánicas, la potencia mecánica que sale por el eje P_u es igual a la potencia mecánica interna P_{mi}. Esta es la potencia que en el circuito equivalente (Fig. 1) se consume en la resistencia de carga R'_c. Luego, de la expresión (6) se deduce que:

$$P_u \approx P_{mi} = 3 \cdot 13{,}50^2 \cdot 0{,}7 \left(\frac{1}{-0{,}025} - 1\right) = -15692\ \text{W}$$

Despreciar la corriente de vacío I_0 equivale a suprimir la rama en paralelo del circuito equivalente (Fig. 1). En este caso, la potencia (activa) absorbida por el motor P_1 es igual a la suma de las potencias consumidas por todas las resistencias del circuito equivalente (en las reactancias no se consume potencia activa):

$$P_1 = m_1\ I'^2_2 \left(R_1 + R'_2 + R'_c\right) = m_1\ I'^2_2 \left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right) \qquad (14)$$

Sustituyendo valores, se obtiene que:

$$P_1 = 3 \cdot 13{,}50^2 \left(0{,}5 + \frac{0{,}7}{-0{,}025}\right) = -15036\ \text{W}$$

<u>Cuando a esta máquina se le hace girar a 615 r.p.m. pasa a actuar como generador tomando una potencia mecánica P_u = -15,69 kW por su eje y generando una potencia eléctrica P_1 = 15,04 kW que cede a la red a través del estator</u>.

PROBLEMA A.2.4

ENUNCIADO

Un motor de inducción trifásico de 380/660 V, 1764 r.p.m. y **60 Hz** tiene estos parámetros:

$$R_1 = R'_2 = 0{,}5\ \Omega \qquad\qquad X_{cc} = 5\ \Omega$$

Si se desprecian las pérdidas magnéticas y mecánicas, calcular:

- **a)** La velocidad de sincronismo, número de polos y tensión de la red si se desea conectarlo en triángulo.
- **b)** Par y corriente de arranque directo.
- **c)** Ídem si se emplea el método estrella-triángulo.
- **d)** Par asignado.
- **e)** La velocidad a que girará si debe vencer un par de 70 Nm y la tensión se ha reducido a un 90% de la asignada .
- **f)** La velocidad de giro si el par resistente se mantiene constante e igual a 70 Nm y la tensión se sigue reduciendo hasta el mínimo valor en que el motor aún puede seguir girando.

NOTA: Representar los resultados de los apartados e) y f) sobre la curva par-velocidad.

RESULTADOS

a) n_1 = 1800 r.p.m.; 2p = 4 polos; V_{1L} = 380 V
b) M_a = 44,2 Nm; I_{aL} = 129 A
c) $M_{a\lambda}$ = 14,7 Nm; $I_{a\lambda}$ = 43 A
d) M_N = 85 Nm
e) n = 1764 r.p.m.
f) n = 1621 r.p.m.

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

* Para una frecuencia f_1 dada, la velocidad de sincronismo n_1 del motor sólo puede tomar un número limitado de valores en función del número de pares de polos p. Por otra parte, la velocidad n de funcionamiento del motor es ligeramente inferior a la de sincronismo.

Por lo tanto, la velocidad de sincronismo del motor será aquella de las correspondientes a la frecuencia f_1 que es inmediatamente mayor que la velocidad n a la que gira el motor para una carga dada. Conocidas la velocidad de sincronismo n_1 y la frecuencia f_1 se obtienen fácilmente el número de pares de polos p y el número de polos 2p.

* El enunciado dice que el motor es de 380/660 V. Esto significa que para que el motor tenga su tensión de fase asignada en el estator (V_{1N} = 380 V), la tensión de línea debe ser V_{1NL} = 660 V si la conexión del estator es estrella y V_{1NL} = 380 V si la conexión es triángulo.

* Durante el arranque la corriente I'_{2a} del rotor reducida al estator es mucho mayor que la de vacío I_0 y, por lo tanto, se desprecia esta última. Así, del circuito equivalente aproximado de un motor asíncrono y sabiendo que en el arranque el deslizamiento vale la unidad (s = 1) se obtiene que la intensidad de fase en un arranque. En el caso del arranque directo la tensión es la asignada.

* Una vez conocida la corriente de fase en el arranque directo, la de línea I_{aL} se calcula teniendo en cuenta que el estator está conectado en triángulo.

* El par de arranque directo se calcula mediante la fórmula del par en la que se da el valor asignado a la tensión del estator y el valor unidad al deslizamiento (s = 1).

* En el arranque estrella-triángulo la corriente de línea y el par son la tercera parte de las correspondientes magnitudes del arranque directo.

* Para obtener el par asignado se utiliza la expresión del par de un motor asíncrono en la que se introducen la tensión y el deslizamiento asignados.

* Dado que en las expresiones que analizan el comportamiento de un motor de inducción se utiliza el deslizamiento, cuando se pida un dato de velocidad lo que hay que hacer es obtener primero el deslizamiento correspondiente. La velocidad se calcula después a partir del deslizamiento.

* El punto de funcionamiento a tensión reducida se obtiene planteando una ecuación en la que la incógnita es el deslizamiento. Esta ecuación consiste en la ecuación del par que se iguala al par de 70 Nm y en el que la tensión que se introduce es 0,9 V_{1N}.

  Esta ecuación tiene dos soluciones. La correcta es la que corresponde a funcionamiento como motor con pequeño deslizamiento.

* Para resolver de manera más sencilla la ecuación de segundo grado que se menciona en la sugerencia anterior se puede utilizar una variable auxiliar igual al cociente R'_2/s.

* El mínimo valor al que puede reducirse la tensión de alimentación del motor sin que llegue a pararse cuando está moviendo una carga con un par resistente constante de 70 Nm, es aquella a la que el motor tiene como par máximo 70 Nm. Por lo tanto, el deslizamiento y la velocidad del motor en esta situación son los correspondientes al par máximo.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA A.2.4

Datos:

$m_1 = 3$ fases	380/660 V	$n_N = 1764$ r.p.m.
$f_1 = 60$ Hz	Conexión triángulo en el estator	
$R_1 = 0{,}5\ \Omega$	$R'_2 = 0{,}5\ \Omega$	$X_{cc} = 5\ \Omega$
$P_m \approx 0$ W	$P_{Fe} \approx 0$ W	

Resolución:

a) Es sabido que la velocidad de sincronismo, expresada en r.p.m., se calcula mediante la expresión:

$$n_1 = \frac{60\ f_1}{p} \tag{1}$$

Por lo que, para una frecuencia f_1 de 60 Hz se pueden obtener las siguientes velocidades de sincronismo en función del número de pares de polos p del motor:

$$\begin{array}{llll} p = 1 & \rightarrow\ n_1 = 3600 \text{ r. p. m.} & p = 4 & \rightarrow\ n_1 = 900 \text{ r. p. m.} \\ p = 2 & \rightarrow\ n_1 = 1800 \text{ r. p. m.} & p = 5 & \rightarrow\ n_1 = 720 \text{ r. p. m.} \\ p = 3 & \rightarrow\ n_1 = 1200 \text{ r. p. m.} & p = 6 & \rightarrow\ n_1 = 600 \text{ r. p. m.} \end{array}$$

y así sucesivamente.

Por otra parte, la velocidad de giro n del rotor guarda la siguiente relación con la velocidad de sincronismo n_1 y el deslizamiento s:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad \rightarrow \quad n = n_1(1 - s) \tag{2}$$

En funcionamiento normal el deslizamiento s es pequeño y la velocidad de giro n es ligeramente inferior a la de sincronismo n_1.

Por lo tanto, si en este caso se sabe que la frecuencia del estator f_1 vale 60 Hz y la velocidad asignada es de 1764 r.pm. se puede deducir que la velocidad de sincronismo será de 1800 r.p.m. En efecto, de los posibles valores de velocidad de sincronismo para 60 Hz el más cercano por exceso a 1764 r.p.m. es 1800 r.p.m.

Para n_1 = 1800 r.p.m. y f_1 = 60 Hz el número de pares de polos p vale 2. Luego, el número de polos es el doble, 2p = 4 polos.

En un motor trifásico el estator puede conectarse en estrella o en triángulo. Si se desea que la máquina funcione a su tensión asignada V_{1N}, las tensiones de línea deberán ser:

Conexión estrella: $V_{1NL} = \sqrt{3}\ V_{1N}$

Conexión triángulo: $V_{1NL} = V_{1N}$

En este caso el enunciado indica que el motor es de 380/660 V. Esto quiere decir que para que el motor reciba su tensión asignada de fase (V_{1N} = 380 V), la tensión de línea deberá ser V_{1NL} = 660 V si el estator está conectado en estrella y deberá ser V_{1NL} = 380 V si está conectado en triángulo.

La velocidad de sincronismo es n_1 = 1800 r.p.m., el número de polos es 2p = 4 polos y la tensión de línea de la red de alimentación es V_{1NL} = 380 V.

b)

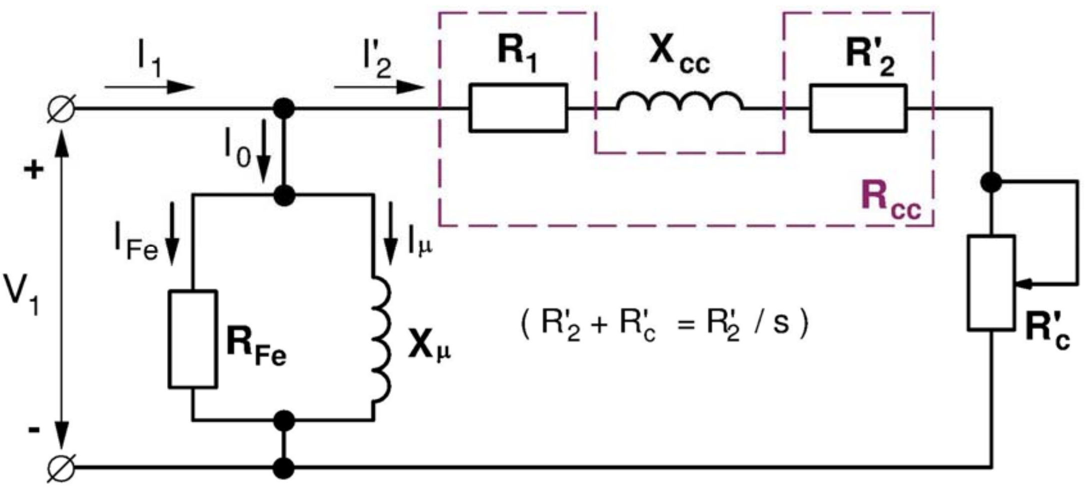


Fig. 1: Circuito equivalente aproximado de una máquina asíncrona trifásica

Durante el arranque la corriente del rotor reducida al estator es mucho mayor que la de vacío I_0 y, por lo tanto, se desprecia esta última. Así, del circuito equivalente aproximado de un motor asíncrono (ver la Fig. 1) y sabiendo que en el arranque el deslizamiento vale la unidad (s = 1) se obtiene que la intensidad de fase en un arranque vale:

$$\frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + R'_2\right)^2 + X_{cc}^2}} \qquad (3)$$

Luego, en el caso de arranque directo, poniendo en la expresión (3) que la tensión es la asignada, se obtiene que:

$$I_a = \frac{380}{\sqrt{\left(0{,}5 + 0{,}5\right)^2 + 5^2}} = 74{,}5 \text{ A}$$

que, al tratarse de conexión triángulo, da una corriente de línea de arranque directo $\sqrt{3}$ veces mayor:

$$I_{aL} = \sqrt{3} \cdot 74{,}5 = 129 \text{ A}$$

El par de arranque directo M_a se calcula mediante la ecuación del par:

$$M = \frac{m_1 \dfrac{R'_2}{s}}{\dfrac{2\pi}{60} n_1} I'^2_2 \tag{4}$$

en la que se utilizará la intensidad de fase en el arranque directo y el deslizamiento de arranque s = 1. Se obtiene que:

$$M_a = \frac{m_1 R'_2}{\dfrac{2\pi}{60} n_1} I_a^2 = \frac{3 \cdot 0{,}5}{\dfrac{2\pi}{60} 1800} 74{,}5^2 = 44{,}2 \text{ Nm}$$

En la Fig. 2 se ha representado sobre la curva del par a tensión asignada (curva 1) el punto A de funcionamiento del motor en el momento del arranque directo.

El par y la corriente de línea en el arranque directo son M_a = 44,2 Nm e I_{aL} = 129 A.

c) Se sabe que en el arranque estrella-triángulo la corriente de línea y el par están relacionados con las correspondientes magnitudes del arranque directo de esta manera:

$$I_{a\lambda} = \frac{I_{aL}}{3} \qquad M_{a\lambda} = \frac{M_a}{3} \tag{5}$$

Luego, en este caso se obtiene lo siguiente:

$$I_{a\lambda} = \frac{129}{3} = 43 \text{ A} \qquad M_{a\lambda} = \frac{44{,}2}{3} = 14{,}7 \text{ Nm}$$

El par y la corriente de línea en el arranque estrella-triángulo son $M_{a\lambda}$ = 14,7 Nm e $I_{a\lambda}$ = 43 A.

d) Cuando se conoce una velocidad, ésta no se utiliza directamente para calcular el comportamiento de un motor asíncrono sino que se emplea el deslizamiento correspondiente. Por esto, lo primero que hay que hacer cuando hay un dato de velocidad es calcular su deslizamiento. En este caso, para condiciones asignadas se tiene que:

$$s_N = \frac{n_1 - n_N}{n_1} = \frac{1800 - 1764}{1800} = 0{,}02$$

El par asignado M_N se calcula mediante la ecuación del par:

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} \tag{6}$$

en la que se utilizará la tensión asignada de fase V_{1N} = 380 V y el deslizamiento asignado s_N:

$$M_N = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s_N}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_{1N}^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s_N}\right)^2 + X_{cc}^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}02}}{\frac{2\pi}{60} 1800} \frac{380^2}{\left(0{,}5 + \frac{0{,}5}{0{,}02}\right)^2 + 5^2} = 85 \text{ Nm}$$

En la Fig. 2 se ha representado sobre la curva del par a tensión asignada (curva 1) el punto B de funcionamiento del motor en condiciones asignadas.

<u>El par asignado vale M_N = 85 Nm</u>.

e) Si se cambia la tensión de alimentación los pares varían proporcionalmente al cuadrado de las tensiones. Sin embargo, el deslizamiento s_m que proporciona el par máximo no varía al modificar la tensión. En la Fig. 2 la curva 1 es la curva del par del motor a la tensión asignada V_{1N} y la curva 2 es la curva del par del motor a una tensión menor $V_1 = 0{,}9\ V_{1N}$.

Si el motor debe vencer un par resistente constante de 70 Nm (curva 3 de la Fig. 2), la Fig. 2 indica que existen dos posibles puntos de funcionamiento: C y D. Evidentemente, el punto de funcionamiento correcto será el punto C en el que la máquina actúa como motor con pequeño deslizamiento.

En este apartado del problema se pide calcular una velocidad. Dado que las expresiones que permiten el estudio de un motor asíncrono están expresadas en función del deslizamiento, siempre que se pida el cálculo de una velocidad lo que se hará primero es calcular el deslizamiento correspondiente para, después, obtener a partir de él la velocidad.

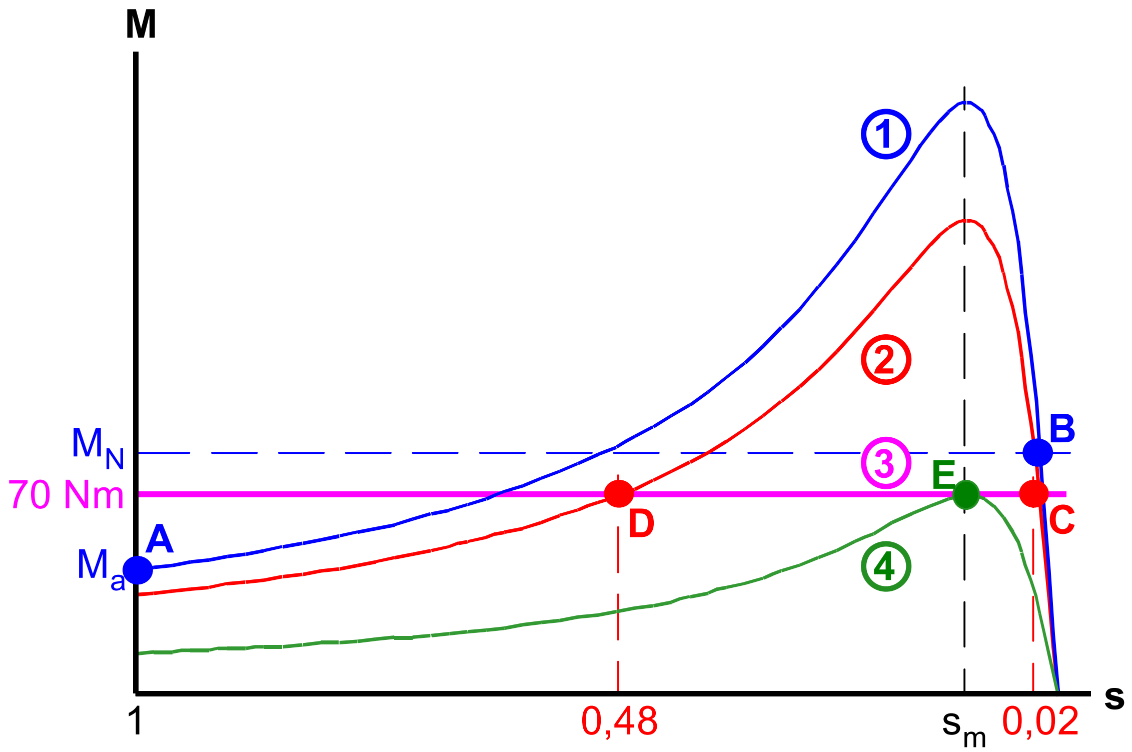


Fig. 2: Curvas del par de:
(1): Motor asíncrono a la tensión asignada o V_{1N}
(2): Motor asíncrono a una tensión $V_1 = 0{,}9\ V_{1N}$
(3): Carga con un par resistente constante de 70 Nm
(4): Motor asíncrono a una tensión en la que el par máximo vale 70 Nm

A partir de la expresión (6), que permite calcular el par de un motor de inducción, se puede obtener una ecuación de la que se puede despejar el deslizamiento. Para ello se sustituyen valores en esta ecuación poniendo que el par es 70 Nm y que la tensión V_1 vale:

$$V_1 = 0{,}9\ V_{1N} = 0{,}9 \cdot 380 = 342\ \text{V}$$

La ecuación que se obtiene es:

$$70 = \frac{3 \cdot \frac{0{,}5}{s}}{\frac{2\pi}{60}\,1800} \, \frac{342^2}{\left(0{,}5 + \frac{0{,}5}{s}\right)^2 + 5^2}$$

Esto es una ecuación de segundo grado que permite despejar el deslizamiento s. Para resolver más fácilmente esta ecuación se puede operar usando una variable auxiliar x así:

$$x = \frac{R'_2}{s} = \frac{0{,}5}{s} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{0{,}5}{x}$$

Con esta variable auxiliar la ecuación anterior se convierte en:

$$70 = \frac{3\,x}{\frac{2\pi}{60}\,1800} \frac{342^2}{(0{,}5 + x)^2 + 5^2}$$

Al resolverla se obtienen estos resultados:

$$x = \begin{cases} 25 \\ 2{,}08 \end{cases} \Rightarrow \quad s = \begin{cases} \mathbf{0{,}02} \\ 0{,}48 \end{cases}$$

La solución correcta es la primera, en la que la máquina actúa como motor con pequeño deslizamiento (punto C en la curva 2 de la Fig. 2). A este deslizamiento le corresponde una velocidad:

$$n = n_1(1 - s) = 1800\,(1 - 0{,}02) = 1764 \ \text{r.p.m.}$$

<u>Cuando el motor está alimentado a una tensión de 342 V, la velocidad a la que proporciona un par de 70 Nm es n = 1764 r.p.m.</u>

f) El mínimo valor al que puede reducirse la tensión de alimentación del motor sin que llegue a pararse cuando está moviendo una carga con un par resistente constante de 70 Nm, es aquella a la que el motor tiene como par máximo 70 Nm. En la Fig. 2 la curva 4 es la curva del par del motor a esta tensión y el punto de funcionamiento será el E, es decir, el correspondiente al par máximo.

El deslizamiento en esta situación es, pues:

$$s = s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{o{,}5^2 + 5^2}} = 0{,}0995$$

y la velocidad correspondiente es:

$$n = n_m = n_1\,(1 - s) = 1800\,(1 - 0{,}0995) = 1621 \ \text{r.p.m.}$$

<u>En esta situación el motor girará a 1621 r.p.m.</u>

PROBLEMA A.2.5

ENUNCIADO

Un motor trifásico de jaula de ardilla tiene estas características cuando funciona en condiciones asignadas:

$V_{1NL} = 660/380$ V		$f_{1N} = 50$ Hz	$n_N = 1425$ r.p.m.
$R_1 = 0{,}7\ \Omega$	$R'_2 = 0{,}9\ \Omega$	$X_{1N} = 0{,}8\ \Omega$	$X'_{2N} = 1{,}2\ \Omega$

En esta máquina se puede despreciar las pérdidas mecánicas y magnéticas, así como la corriente de vacío.

El motor está alimentado por un convertidor de frecuencias que funciona en lazo abierto. Entre 0 y 50 Hz la tensión de línea que proporciona dicho convertidor varía linealmente entre 80 y 660 V. Para frecuencias por encima de 50 Hz la tensión de línea permanece constante e igual a 660 V.

- **a)** Indicar el número de polos y la forma de conexión del motor si funciona a marcha industrial cuando el convertidor proporciona 50 Hz.
- **b)** Calcular el par de arranque cuando el convertidor suministra 10, 50 y 70 Hz.

NOTA: Representar los resultados de los apartados e) y f) sobre la curva par-velocidad.

RESULTADOS

a) $2p = 4$ polos; Conexión estrella

b) $M_a = 378{,}4$ Nm a 50 Hz; $M_a = 404{,}8$ Nm a 10 Hz; $M_a = 170{,}5$ Nm a 70 Hz

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

* Cuando se dice que un motor asíncrono funciona con una "*marcha industrial*" significa que está alimentado a su tensión y frecuencia asignadas (V_{1N} y f_{1N}).

* Para una frecuencia f_1 dada, la velocidad de sincronismo n_1 del motor sólo puede tomar un número limitado de valores en función del número de pares de polos p. Por otra parte, la velocidad n de funcionamiento del motor es ligeramente inferior a la de sincronismo.

  Por lo tanto, la velocidad de sincronismo del motor será aquella de las correspondientes a la frecuencia asignada f_{1N} = 50 Hz que es inmediatamente mayor que la velocidad asignada n_N. Conocida la velocidad de sincronismo n_{1N} a la frecuencia asignada f_{1N} se obtienen fácilmente el número de pares de polos p y el número de polos 2p.

* El enunciado dice que el motor es de 660/380 V. Esto significa que para que el motor tenga su tensión de fase asignada en el estator (V_{1N} = 380 V), la tensión de línea debe ser V_{1NL} = 660 V si la conexión del estator es estrella y V_{1NL} = 380 V si la conexión es triángulo.

  Por otra parte, el variador de frecuencias alimenta al motor con V_{1L} = 660 V cuando funciona con la frecuencia asignada f_{1N} = 50 Hz.

* La tensión de línea V_{1L} que proporciona el variador es función de la frecuencia f_1. Habrá que calcular las tensiones que proporciona para las frecuencias de 10, 50 y 70 Hz que cita el enunciado para, después, calcular las tensiones de fase V_1 teniendo en cuenta la forma de conexión del estator.

* Las siguientes magnitudes de un motor asíncrono varían en función de la frecuencia del estator f_1: la velocidad de sincronismo n_1 y la reactancia de cortocircuito X_{cc}. Habrá que calcular los valores de estas magnitudes para las frecuencias de 10, 50 y 70 Hz que cita el enunciado.

* Para una frecuencia f_1 dada la tensión V_1 que recibe el motor permanece constante. Por lo tanto, el par de arranque M_a se calculará mediante la fórmula del par en función de la tensión y del deslizamiento en la que se sustituirán los valores de V_1, n_1 y X_{cc} correspondientes a las tres frecuencias (10, 50 y 70 Hz) que pide el enunciado y en la que se pondrá que el deslizamiento vale 1 (deslizamiento en el arranque).

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA A.2.5

Datos:

$m_1 = 3$ fases	660/380 V	$f_{1N} = 50$ Hz	$n_N = 1425$ r.p.m.
$R_1 = 0{,}7\ \Omega$	$R'_2 = 0{,}9\ \Omega$	$X_{1N} = 0{,}8\ \Omega$	$X'_{2N} = 1{,}2\ \Omega$
$P_m \approx 0$	$P_{Fe} \approx 0$	$I_0 \approx 0$	

Si $0 < f_1 < 50$ Hz, la tensión de línea V_{1L} varía linealmente entre 80 y 660 V

Si $f_1 > 50$ Hz, la tensión V_{1L} permanece constante e igual a 660 V

Resolución:

a) Cuando un motor asíncrono funciona con una "*marcha industrial*" significa que está alimentado a su tensión y frecuencia asignadas (V_{1N} y f_{1N}).

Hay infinidad de marchas industriales. Dos de las más significativas son la marcha asignada (donde además de la tensión y frecuencia asignadas, se consume también la corriente asignada y se genera la potencia asignada) y la marcha de vacío (donde el motor está alimentado a la tensión y frecuencia asignadas y no produce ninguna potencia útil. En este caso el motor consume la corriente de vacío en el estator).

Se puede demostrar que en todas las marchas industriales y siempre que el motor funcione con deslizamientos s pequeños, el flujo por polo Φ_M permanece prácticamente constante e igual para todas ellas. Del mismo modo, también permanecen prácticamente constantes e iguales para todas las marchas industriales con deslizamientos pequeños las pérdidas en el hierro P_{Fe} y las pérdidas mecánicas P_m (que, por esta razón, se denominan pérdidas fijas).

Es sabido que la velocidad de sincronismo, expresada en r.p.m., se calcula mediante la expresión:

$$n_1 = \frac{60\ f_1}{p} \qquad (1)$$

Por lo que, para una frecuencia f_1 de 50 Hz se pueden obtener las siguientes velocidades de sincronismo en función del número de pares de polos p del motor:

$$p = 1 \rightarrow n_1 = 3000 \text{ r. p. m.} \qquad p = 4 \rightarrow n_1 = 750 \text{ r. p. m.}$$

$$p = 2 \rightarrow n_1 = 1500 \text{ r. p. m.} \qquad p = 5 \rightarrow n_1 = 600 \text{ r. p. m.}$$

$$p = 3 \rightarrow n_1 = 1000 \text{ r. p. m.} \qquad p = 6 \rightarrow n_1 = 500 \text{ r. p. m.}$$

y así sucesivamente.

Por otra parte, la velocidad de giro n del rotor guarda la siguiente relación con la velocidad de sincronismo n_1 y el deslizamiento s:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad \rightarrow \quad n = n_1(1 - s) \tag{2}$$

En funcionamiento normal el deslizamiento s es pequeño y la velocidad de giro n es ligeramente inferior a la de sincronismo n_1.

Luego, si en el enunciado se dice que la velocidad asignada es de n_N = 1425 r.p.m. cuando la frecuencia es la asignada f_{1N} = 50 Hz, se puede deducir que la velocidad síncrona a esta frecuencia será de 1500 r.p.m. En efecto, de los posibles valores de velocidad de sincronismo para 50 Hz el más cercano por exceso a 1425 r.p.m. es 1500 r.p.m.

Para n_{1N} = 1500 r.p.m. y f_{1N} = 50 Hz el número de pares de polos p vale 2. Luego, el número de polos es el doble, 2p = 4 polos.

En un motor trifásico el estator puede conectarse en estrella o en triángulo. Si se desea que la máquina funcione a su tensión asignada V_{1N}, las tensiones de línea deberán ser:

Conexión estrella: $V_{1NL} = \sqrt{3}\ V_{1N}$

Conexión triángulo: $V_{1NL} = V_{1N}$

En este caso el enunciado indica que el motor es de 660/380 V. Esto quiere decir que para que el motor reciba su tensión asignada de fase (V_{1N} = 380 V), la tensión de línea deberá ser V_{1NL} = 660 V si el estator está conectado en estrella y deberá ser V_{1NL} = 380 V si está conectado en triángulo.

El enunciado también dice que cuando el variador de frecuencias proporciona la frecuencia asignada del motor f_{1N} = 50 Hz, la tensión de línea vale V_{1L} = 660 V y el motor se encuentra en condiciones asignadas y, por lo tanto, cada una de sus fases está a la tensión asignada V_{1N} = 380 V. Esto indica que el motor está conectado en estrella.

<u>El número de polos es 2p = 4 polos y la forma de conexión del estator es estrella</u>.

b) Uno de los mejores métodos de control de la velocidad de un motor asíncrono consiste en la variación de la frecuencia de alimentación de las corrientes del estator como se muestra en la Fig. 1.

El principio de este método consiste en variar la frecuencia f_1 del estator de tal forma que el flujo por polo Φ_M en el motor asíncrono permanezca constante e igual al que existe en condiciones asignadas. De esta forma la capacidad de generar par de la máquina asíncrona se mantiene para todas las frecuencias f_1 y el par máximo $M_{máx}$ también permanece constante (ver la Fig. 1).

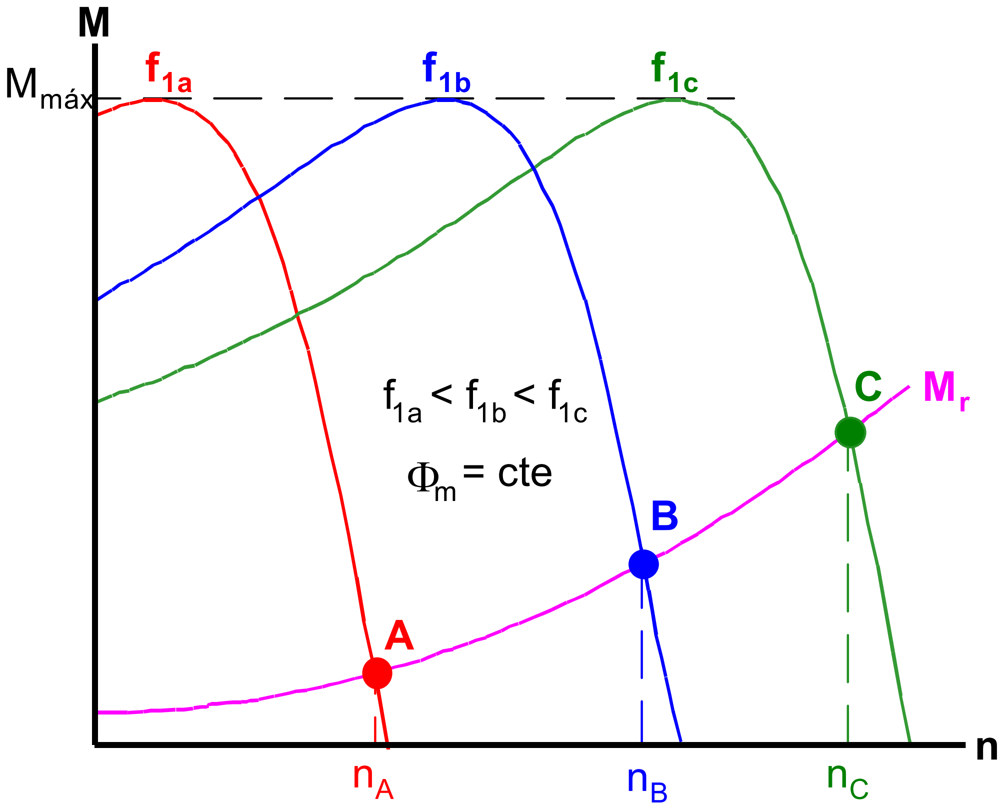


Fig. 1: Curvas de par para un motor asíncrono a varias frecuencias si el flujo por polo se mantiene constante

Así, en la Fig. 1 se muestran las curvas par-velocidad de un motor asíncrono para tres frecuencias diferentes (f_{1a}, f_{1b} y f_{1c}) y la curva Par-velocidad del par resistente M_r de la carga mecánica que es movida por este motor. Se observa que la velocidad de sincronismo es diferente para cada frecuencia (la velocidad de sincronismo para cada curva se da en el punto de corte de la curva con el eje de abscisas) y los puntos de funcionamiento para cada frecuencia son A, B y C, respectivamente. Se comprueba que de esta manera utilizando estas tres frecuencias se obtienen tres velocidades de giro, n_A, n_B y n_C, diferentes. Como la frecuencia f_1 se puede variar de forma continua dentro de cierto margen, se consigue regular la velocidad de forma continua dentro de un margen de velocidades.

Si este sistema se quiere utilizar para alcanzar velocidades altas, por encima de la velocidad asignada, sucede que esto requiere aumentar excesivamente la tensión de alimentación V_1, lo cual puede ser peligroso para el motor. Por esta razón, lo usual es intentar mantener el flujo constante para velocidades de giro que requieran frecuencias f_1 inferiores a la asignada. Para velocidades superiores a la asignada la frecuencia se varía manteniendo constante la tensión V_1 con un valor igual al de la tensión asignada V_{1N}. De esta forma, aunque cuando la velocidad es superior a la asignada el flujo va disminuyendo a medida que aumenta la frecuencia, se está seguro de que el motor no se ve sometido a tensiones peligrosas.

Cuando el variador de frecuencias que alimenta al motor actúa como una fuente de tensión, el intentar mantener el flujo por polo constante exige variar la tensión con la frecuencia f_1 y con el deslizamiento s. Sin embargo, si una vez seleccionada la frecuencia f_1 que se desea, se conforma con mantener el flujo por polo Φ_M constante sólo cuando el deslizamiento es pequeño (zona normal de funcionamiento de la máquina) se observa que basta con mantener la tensión V_1 constante para conseguirlo. Es decir, si se desea un sistema de control más sencillo en el que el flujo por polo Φ_M se mantiene constante sólo para deslizamientos pequeños, basta con que el variador de frecuencias esté diseñado para que varíe la tensión de alimentación V_1 sólo en función de la frecuencia f_1. De esta forma, para diferentes frecuencias f_1 la tensión V_1 que se suministra al motor es diferente, pero mientras no se varíe la frecuencia la tensión permanecerá constante. Es decir, realmente en vez de seguir las curvas par-velocidad de la Fig. 1, en las que para cada frecuencia el flujo por polo Φ_M es constante, se siguen unas curvas en las que la tensión V_1 es constante para cada frecuencia f_1 aunque diferente de unas frecuencias a otras.

La forma en que se varía la tensión V_1 con la frecuencia f_1 suele ser similar a como se indica en el enunciado de este problema y se representa la Fig. 2. Es una variación lineal de la tensión con la frecuencia, partiendo de un valor mínimo de la tensión (punto A), hasta la tensión asignada (en la cual la frecuencia será también la asignada (punto B)). Por encima de la tensión asignada ya no se aumenta más la tensión (aunque, a causa de ello, el flujo empiece a disminuir) para que, como ya se ha indicado anteriormente, el motor no se vea sometido a tensiones peligrosas.

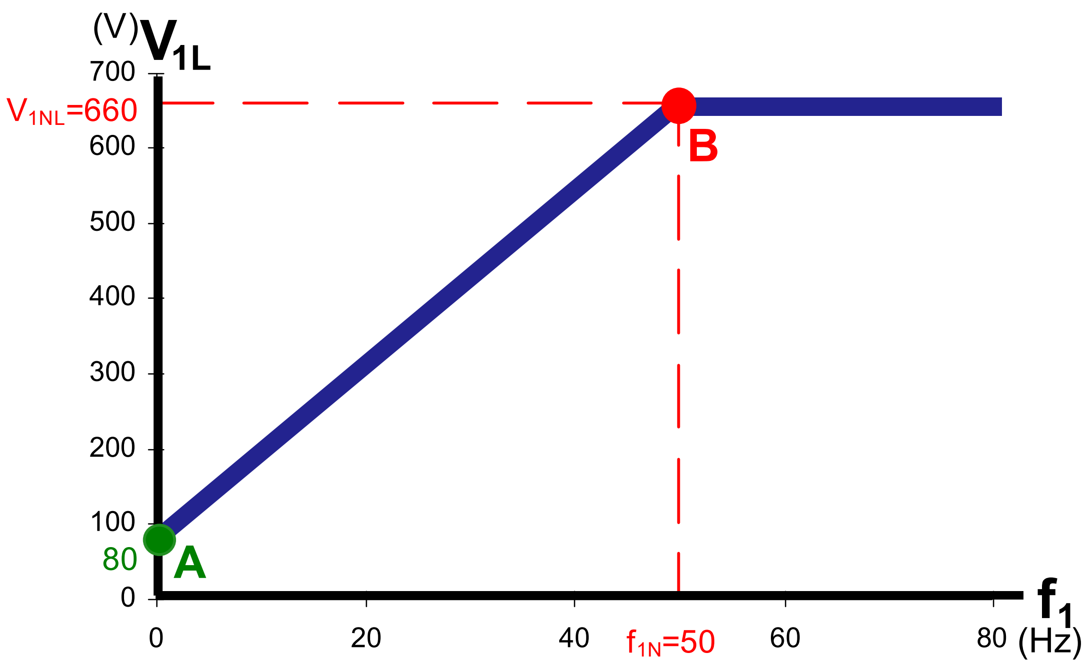


Fig. 2: Relación entre la tensión y la frecuencia en el variador de frecuencias

La ley de variación de la tensión de línea V_{1L} con la frecuencia f_1 representada en la Fig. 2 es la siguiente:

$$0 \leq f_1 \leq f_{1N} (= 50 \text{ Hz}) \quad \rightarrow \quad V_{1L} = 80 + \frac{660 - 80}{50} f_1 = 80 + 1{,}16 \, f_1$$
$$f_1 \geq f_{1N} (= 50 \text{ Hz}) \quad \rightarrow \quad V_{1L} = 660 \text{ V}$$

Teniendo en cuenta la conexión estrella del estator, la tensión de fase V_1 se obtiene dividiendo la tensión de línea V_{1L} entre $\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} &0 \leq f_1 \leq 50 \text{ Hz} \quad \rightarrow \quad V_1 = \frac{V_{1L}}{\sqrt{3}} = 46{,}19 + 6{,}7 \, f_1 \\ &f_1 \geq 50 \text{ Hz} \quad \rightarrow \quad V_1 = 380 \text{ V} \end{aligned} \qquad (3)$$

La velocidad de sincronismo se calcula mediante la relación (1) de la cual se deduce que:

$$n_1 = n_{1N} \frac{f_1}{f_{1N}} \quad \rightarrow \quad n_1 = 1500 \frac{f_1}{50} = 30 \, f_1 \qquad (4)$$

Suponiendo despreciable el efecto piel en los conductores del motor, los parámetros R_1, R'_2 y L_{cc} se les puede considerar invariables con la frecuencia. De esto se deduce que:

$$X_{cc} = X_1 + X'_2 = 2 \, \pi \, f_1 \, L_{cc} \quad \rightarrow X_{cc} = \frac{f_1}{f_{1N}} X_{ccN}$$
$$X_{cc} = \frac{f_1}{f_{1N}} \left(X_{1N} + X'_{2N} \right) = \frac{f_1}{50} \left(0{,}8 + 1{,}2 \right) \quad \rightarrow \quad X_{cc} = \frac{f_1}{25} \qquad (5)$$

Dado que una vez fijada la frecuencia f_1 la tensión V_1 permanece constante, en este problema se puede aplicar esta expresión del par en función de la tensión y del deslizamiento:

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s} \right)^2 + X_{cc}^2} \qquad (6)$$

En el arranque el deslizamiento s vale 1. Por lo tanto, el par de arranque M_a se calcula poniendo deslizamiento s = 1 en la expresión (6).

Para calcular los pares de arranque a diferentes frecuencias que solicita el enunciado el procedimiento a seguir será, pues, el calcular los valores de la tensión V_1, de la velocidad síncrona n_1 y de la reactancia de cortocircuito X_{cc} correspondientes a cada frecuencia. Para ello se utilizarán las expresiones (3), (4) y (5). A continuación, para calcular cada par de arranque M_a se sustituyen estos valores de V_1, n_1 y X_{cc} en la expresión (6) y se pone que el deslizamiento vale 1. Los resultados que se obtienen son los siguientes:

* Para f_1 = 10 Hz:

$$V_1 = 46{,}19 + 6{,}7 \cdot 10 = 113{,}19 \text{ V}$$

$$n_1 = 30 \cdot 10 = 300 \text{ r.p.m.}$$

$$X_{cc} = \frac{10}{25} = 0{,}4 \ \Omega$$

$$M_a = \frac{m_1 R'_2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + R'_2\right)^2 + X_{cc}^2} = \frac{3 \cdot 0{,}9}{\frac{2\pi}{60} 300} \frac{113{,}19^2}{\left(0{,}7 + 0{,}9\right)^2 + 0{,}4^2} = 404{,}8 \text{ Nm}$$

* Para f_1 = 50 Hz (= f_{1N}):

$$V_1 = V_{1N} = 380 \text{ V}$$

$$n_1 = n_{1N} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

$$X_{cc} = X_{ccN} = 2 \ \Omega$$

$$M_a = \frac{m_1 R'_2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + R'_2\right)^2 + X_{cc}^2} = \frac{3 \cdot 0{,}9}{\frac{2\pi}{60} 1500} \frac{380^2}{\left(0{,}7 + 0{,}9\right)^2 + 2^2} = 378{,}4 \text{ Nm}$$

* Para f_1 = 70 Hz:

$$V_1 = 380 \text{ V}$$

$$n_1 = 30 \cdot 70 = 2100 \text{ r.p.m.}$$

$$X_{cc} = \frac{70}{25} = 2{,}8 \ \Omega$$

$$M_a = \frac{m_1 R'_2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + R'_2\right)^2 + X_{cc}^2} = \frac{3 \cdot 0{,}9}{\frac{2\pi}{60} 2100} \frac{380^2}{\left(0{,}7 + 0{,}9\right)^2 + 2{,}8^2} = 170{,}5 \text{ Nm}$$

Los pares de arranque son: para f_1 = 10 Hz, M_a = 404,8 Nm; para f_1 = 50 Hz, M_a = 378,4 Nm y para f_1 = 70 Hz, M_a = 170,5 Nm.

PROBLEMA A.2.6

ENUNCIADO

Se tiene un motor trifásico de jaula de ardilla de 6 polos y 50 Hz que está a su tensión asignada cuando se lo conecta en estrella a una red de 700 V. Los parámetros de esta máquina son:

$R_1 \approx 0\ \Omega$ $R'_2 = 0{,}1\ \Omega$ $X_{cc} = 1{,}25\ \Omega$ $J = 20$ kgm

Calcular el tiempo de arranque de este motor en vacío hasta que su deslizamiento sea igual a 0,05 si funciona a su tensión asignada.

RESULTADOS

$t_a = 3{,}63$ s

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

* Este motor tiene su estator conectado en estrella y se conoce su tensión asignada de línea V_{1NL}. Con esta información se puede obtener la tensión asignada de fase V_{1N} que se utilizará más adelante.

* Para una frecuencia f_1 dada, la velocidad de sincronismo n_1 del motor sólo puede tomar un número limitado de valores en función del número de pares de polos p. Por otra parte, la velocidad n de funcionamiento del motor es ligeramente inferior a la de sincronismo.

  Por lo tanto, la velocidad de sincronismo del motor será aquella de las correspondientes a la frecuencia f_1 que es inmediatamente mayor que la velocidad asignada n_N. Conocida la velocidad de sincronismo n_1 se obtienen fácilmente el número de pares de polos p y el número de polos 2p.

  En este caso interesa calcular no solo la velocidad de sincronismo en r.p.m. (n_1), sino también en rad/s (Ω_1).

* El deslizamiento de par máximo s_m se puede obtener mediante la fórmula que lo expresa en función de los parámetros de resistencia y de reactancia del circuito equivalente.

* El par máximo $M_{máx}$ se obtiene introduciendo el deslizamiento de par máximo s_m y la tensión asignada V_{1N} en la fórmula general del par M (que expresa el par M en función de los parámetros del circuito equivalente, la tensión V_{1N}, la velocidad de sincronismo n_1 y el deslizamiento s).

* La *constante electromecánica* τ_{mec} de un motor asíncrono es el tiempo de arranque ideal si este proceso se realizase en vacío desde el reposo hasta que el motor alcanzase la velocidad de sincronismo Ω_1 y durante toda esta maniobra el par del motor fuera siempre constante e igual al par máximo $M_{máx}$.

  Este parámetro se obtiene mediante una fórmula que lo expresa en función del momento de inercia J, de la velocidad de sincronismo Ω_1 y del par máximo $M_{máx}$.

* Según el enunciado, en este motor se verifica que la resistencia del estator R_1 es despreciable frente a la resistencia del rotor reducida al estator R'_2 ($R_1 <<< R'_2$). Por lo tanto, el parámetro a ($a = R_1/R'_2$) es prácticamente nulo y se puede emplear la versión simplificada de la *fórmula de Kloss*.

* Partiendo de la versión simplificada de la fórmula de Kloss y de la ecuación del equilibrio mecánico de la máquina se deduce la expresión del tiempo de arranque en vacío desde el reposo hasta que el deslizamiento vale s_B.

  Con esta expresión se obtiene el tiempo de arranque t_a que pide el enunciado.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA A.2.6

Datos:

$m_1 = 3$ fases	$V_{1NL} = 700$ V	$f_1 = 50$ Hz	$2p = 6$ polos
$R_1 \approx 0\ \Omega$	$R'_2 = 0{,}1\ \Omega$	$X_{cc} = 1{,}25\ \Omega$	$J = 20$ kgm
$s_B = 0{,}05$	Conexión estrella		

Resolución:

a) Dada la conexión estrella del estator, la tensión asignada de fase de este motor vale:

$$\text{Conexión estrella} \quad \Rightarrow \quad V_{1N} = \frac{V_{1NL}}{\sqrt{3}} = \frac{700}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad V_{1N} = 404 \text{ V}$$

La velocidad de sincronismo se calcula mediante estas expresiones:

$$n_1 = \frac{60\ f_1}{p}\ \text{(r.p.m.)} \qquad \Omega_1 = \frac{2\ \pi}{60}\ n_1 = \frac{2\ \pi\ f_1}{p}\ \text{(rad/s)} \tag{1}$$

Luego, en este motor la velocidad de sincronismo (n_1 en r.pm. y Ω_1 en rad/s) vale:

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{3} \quad \Rightarrow \quad n_1 = 1000 \text{ r.p.m.} \qquad \Omega_1 = \frac{2\ \pi \cdot 50}{3} \quad \Rightarrow \quad \Omega_1 = 104{,}7 \text{ rad/s}$$

Cuando una máquina asíncrona suministra su par máximo el deslizamiento correspondiente s_m se calcula así:

$$s_m = \pm \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \tag{2}$$

La fórmula anterior da dos valores de s_m. El correspondiente al funcionamiento como motor se obtiene utilizando el signo + en dicha fórmula. En este caso, el valor del deslizamiento de par máximo s_m es:

$$s_m = \frac{0{,}1}{\sqrt{0^2 + 1{,}25^2}} \quad \Rightarrow \quad s_m = 0{,}08$$

El par M que suministra una máquina asíncrona se calcula mediante esta expresión:

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60}\ n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} \tag{3}$$

El par máximo $M_{máx}$ a la tensión asignada se obtiene introduciendo los valores del deslizamiento de par máximo s_m y de la tensión asignada de fase V_{1N} en la fórmula (3):

$$M_{máx} = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s_m}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_{1N}^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s_m}\right)^2 + X_{cc}^2} \tag{4}$$

Por lo tanto, en este caso el par máximo $M_{máx}$ vale:

$$M_{máx} = \frac{3 \frac{0,1}{0,08}}{\frac{2\pi}{60} 1000} \frac{404^2}{\left(0 + \frac{0,1}{0,08}\right)^2 + 1,25^2} \quad \Rightarrow \quad M_{máx} = 1870 \text{ Nm}$$

La *constante electromecánica* τ_{mec} de un motor asíncrono se obtiene con esta fórmula:

$$\tau_{mec} = \frac{J\,\Omega_1}{M_{máx}} \tag{5}$$

Luego, en el motor que se está analizando este parámetro vale:

$$\tau_{mec} = \frac{20 \cdot 104,7}{1870} \quad \Rightarrow \quad \tau_{mec} = 1,12 \text{ s}$$

Cuando la resistencia del estator R_1 es despreciable se puede usar la forma simplificada de la *fórmula de Kloss*:

$$R_1 <<< R'_2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{R_1}{R'_2} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{M_{máx}} = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}} \tag{6}$$

Utilizando la fórmula anterior se deduce la siguiente expresión para calcular el tiempo de arranque t_a en vacío de un motor asíncrono desde su inicio -con el rotor parado- hasta que la máquina alcanza una velocidad tal que su deslizamiento es s_B:

$$t_a = \tau_{mec} \left[\frac{1}{4\,s_m} - \frac{s_m}{2} \ln s_B \right] \tag{7}$$

En el caso de que el deslizamiento final s_B valga 0,05 (que es lo que se supone habitualmente y, según indica el enunciado, es lo que sucede en el arranque que se está estudiando), la expresión anterior se convierte en:

$$s_B = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad t_a = \tau_{mec}\left[\frac{1}{4\,s_m} + \frac{3}{2}\,s_m\right] \tag{8}$$

(ln 0,05 = -3)

Luego, sustituyendo valores en la fórmula anterior, se obtiene que en este caso el motor tarda en arrancar el siguiente tiempo t_a:

$$t_a = 1{,}12\left[\frac{1}{4 \cdot 0{,}08} + \frac{3}{2} \cdot 0{,}08\right] \quad \Rightarrow \quad \underline{t_a = 3{,}63 \text{ s}}$$

<u>Este motor tiene un tiempo de arranque en vacío de t_a = 3,63 s</u>.

PROBLEMA A.2.7

ENUNCIADO

Un *motor asíncrono trifásico de rotor bobinado* está conectado en triángulo y tiene estas características:

690/400 V	50 Hz	960 r.p.m.	
$R_1 = 0{,}114\ \Omega$	$R'_2 = 0{,}4\ \Omega$	$X_{cc} = 2\ \Omega$	$m_i = 2$

Si se desprecian la corriente de vacío y las pérdidas mecánicas, calcule:

- **a)** La tensión de línea (es decir, la tensión entre fases) para que el motor esté a su tensión asignada, la velocidad de sincronismo, el número de polos y los deslizamientos asignado y de par máximo.
- **b)** El par y la corriente de línea en el arranque directo y en el arranque estrella-triángulo.
- **c)** El par y la corriente de línea en el arranque mediante un autotransformador que en el momento de arrancar suministra al estator una tensión de línea de 248 V. Repetir el cálculo del par y de la corriente de línea si ahora se utiliza un arrancador electrónico que en el instante de arrancar proporciona al estator una tensión de línea de 200 V.
- **d)** El par asignado.

Este motor mueve una carga mecánica que demanda un par constante e igual al par asignado y se desea reducir su velocidad a 920 r.p.m.

- **e)** Si esta variación de la velocidad se realiza modificando la tensión con que se alimenta el motor ¿Cuál es la tensión de línea que es preciso suministrar al estator?
- **f)** Si esta variación de la velocidad se realiza introduciendo resistencias en serie con las fases del rotor y alimentando el estator con su tensión asignada ¿Cuál es valor de la resistencia que hay que conectar en serie con cada fase del rotor? ¿Cuál es la tensión entre dos anillos del colector de la máquina en este caso? Calcule también la frecuencia de las corrientes del rotor y la potencia activa consumida en estas resistencias conectadas a través del colector de anillos.

Se sabe que en esta máquina la reactancia del estator y la reactancia del rotor reducida al estator son iguales ($X_1 = X'_2$) y que la reactancia magnetizante vale $X_\mu = 100\ \Omega$.

- **g)** Vuelva a calcular el par asignado de este motor utilizando ahora los parámetros del circuito simplificado serie (el cual se obtiene aplicando el Teorema de Thévenin al circuito equivalente exacto).

NOTA: Salvo en la pregunta f), el motor tiene siempre su rotor en cortocircuito.

A.2: Maniobras. Control de velocidad

RESULTADOS

a) $V_{1NL} = 400$ V; $n_1 = 1000$ r.p.m.; $2p = 6$ polos; $s_N = 0{,}04$; $s_m = 0{,}2$

b) $I_{aL} = 335{,}5$ A; $M_a = 430$ Nm; $I_{a\lambda} = 111{,}8$ A; $M_{a\lambda} = 143{,}3$ Nm

c) $I_{a,autL} = 129$ A; $M_{a,aut} = 165{,}3$ Nm; $I_{a,electL} = 167{,}8$ A; $M_{a,elec} = 107{,}5$ Nm

d) $M_N = 431{,}2$ Nm

e) $V_{1L} = 301{,}3$ V

f) $R_x = 0{,}1\ \Omega$; $V_{2L} = 13{,}4$ V; $f_2 = 4$ Hz: $P_2 = 1807$ W

g) $M_N = 422{,}9$ Nm

A.2: Maniobras. Control de velocidad

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

* El enunciado dice que el motor es de 400/690 V. Esto significa que para que el motor tenga su tensión de fase asignada en el estator (V_{1N} = 400 V), la tensión de línea V_{1NL} debe ser 690 V si la conexión del estator es estrella y 400 V si la conexión es triángulo.

* Para una frecuencia f_1 dada, la velocidad de sincronismo n_1 del motor sólo puede tomar un número limitado de valores en función del número de pares de polos p. Por otra parte, la velocidad n de funcionamiento del motor es ligeramente inferior a la de sincronismo.

  Por lo tanto, la velocidad de sincronismo del motor será aquella de las correspondientes a la frecuencia f_1 que es inmediatamente mayor que la velocidad n a la que gira el motor para una carga dada. Conocidas la velocidad de sincronismo n_1 y la frecuencia f_1 se obtienen fácilmente el número de pares de polos p y el número de polos 2p.

* Conocida la velocidad de sincronismo n_1 en r.p.m. se puede obtener la velocidad de sincronismo Ω_1 en rad/s mediante un simple proceso de cambio de unidades.

* El deslizamiento s se calcula aplicando la fórmula que lo define en función de la velocidad de sincronismo n_1 y de la velocidad de giro n de la máquina. Cuando dicha velocidad de giro es la asignada n_N se obtiene el deslizamiento asignado s_N.

* El deslizamiento de par máximo s_m se puede obtener mediante la fórmula que lo expresa en función de los parámetros de resistencia y de reactancia del circuito equivalente.

* Durante el arranque la corriente del rotor reducida al estator es mucho mayor que la de vacío y, por lo tanto, se desprecia esta última. Así, del circuito equivalente aproximado de un motor asíncrono y sabiendo que en el arranque el deslizamiento vale la unidad (s = 1) se obtiene que la intensidad de fase en un arranque. En el caso del arranque directo la tensión es la asignada.

* Una vez conocida la corriente de fase en el arranque directo, la de línea se calcula teniendo en cuenta que el estator está conectado en triángulo.

* El par de arranque directo se calcula mediante la fórmula del par en la que se da el valor asignado a la tensión del estator y el valor unidad al deslizamiento (s = 1).

* En el arranque estrella-triángulo la corriente de línea y el par son la tercera parte de las correspondientes magnitudes del arranque directo.

* Para calcular la corriente de línea y el par, tanto en el arranque con autotransformador como con un arrancador electrónico, se relacionan estas magnitudes con sus correspondientes magnitudes de arranque directo mediante un parámetro adimensional x que es igual al cociente entre la tensión que recibe el motor en el momento de arrancar y su tensión asignada.

Máquinas asíncronas o de inducción

A.2: Maniobras. Control de velocidad

* Para obtener el par asignado M_N se emplea la expresión del par de un motor de inducción en la que se introducen la tensión del estator y el deslizamiento asignados (V_{1N} y s_N).

* Dado que en las expresiones que analizan el comportamiento de un motor de inducción se utiliza el deslizamiento, cuando se tiene un dato de velocidad lo primero que hay que hacer es obtener el deslizamiento correspondiente.

* El punto de funcionamiento a tensión reducida se obtiene planteando una ecuación en la que la incógnita es la tensión de fase V_1. Esta ecuación consiste tomar la ecuación del par e igualarla al par asignado.

  Una vez obtenida la tensión de fase V_1 se calcula la tensión de línea V_{1L} teniendo en cuenta la forma de conexión (estrella o triángulo) del estator.

* En máquinas asíncronas de rotor bobinado sucede que la relación de transformación de tensiones m_v es igual a la relación de transformación de intensidades m_i ($m_v = m_i$).

* Cuando se varía la velocidad introduciendo resistencias R_x en serie con las fases del rotor y teniendo que suministrar el par asignado M_N, de la fórmula del par se deduce que el cociente $(R'_2 + R'_x)/s$ debe ser igual al cociente $(R'_2)/s_N$. Esto permite plantear una ecuación de la que se puede despejar R'_x.

  R'_x es el valor reducido al estator de la resistencia R_x conectada en serie con cada fase del rotor. Esto permite calcular el valor (sin reducir al estator) R_x de estas resistencias.

* La corriente I'_2 del rotor reducida al estator se obtiene del circuito equivalente aproximado donde hay que sustituir la resistencia R'_2 por la suma $R'_2 + R'_x$.

  I'_2 es el valor reducido al estator de la intensidad I_2 del rotor. Esto permite calcular el valor (sin reducir al estator) I_2 de esta intensidad.

* Tanto el rotor como las resistencias R_x se conectan en estrella. La tensión de fase V_2 en el rotor se calcula partiendo de I_2 y de R_x y aplicando la Ley de Ohm.

  La tensión entre dos anillos del colector es la tensión de línea V_{2L} que, dada la conexión estrella, es igual a $\sqrt{3}$ veces la tensión de fase V_2.

* La potencia activa consumida por las tres resistencias R_x es igual a la potencia activa P_2 suministrada por el rotor a través del colector de anillos. Esta potencia se puede calcular aplicando la Ley de Joule a las resistencias R_x; es decir, esta potencia es igual a tres veces el producto de resistencia por intensidad al cuadrado en las resistencias R_x.

Máquinas asíncronas o de inducción

A.2: Maniobras. Control de velocidad

* Es sabido que la reactancia de cortocircuito X_{cc} es igual a la suma de las reactancias del estator X_1 y del rotor reducida al estator X'_2. Conocido el valor de X_{cc} y sabiendo que las reactancias X_1 y X'_2 son iguales, se pueden calcular los respectivos valores de X_1 y de X'_2.

* Si se aplica el Teorema de Thévenin al circuito equivalente exacto se obtiene el circuito equivalente simplificado serie; el cual, comparado con el circuito equivalente aproximado, permite un cálculo más exacto de la corriente del rotor reducida al estator I'_2 y, en consecuencia, del par M.

* Calcule ahora el parámetro c_1 a partir de los valores de las reactancias del estator X_1 y magnetizante X_μ.

* Una vez determinado el parámetro c_1 se pueden calcular los parámetros del estator del circuito equivalente serie R_{Th} y X_{Th}, así como, la tensión V_{Th} que corresponde a la tensión asignada V_{1N}. Para ello basta con dividir por c_1 los parámetros R_1, X_1 y V_1 (V_{1N} en este caso), respectivamente.

* Finalmente, obtenga el par asignado M_N de una forma más exacta mediante una expresión similar a la empleada anteriormente en la que los parámetros del estator, V_1, R_1 y X_1, se sustituyen por sus respectivos parámetros del circuito equivalente serie, V_{Th}, R_{Th} y X_{Th}, que se han calculado en la sugerencia anterior. Al tratarse de la determinación del par asignado M_N, habrá que introducir el deslizamiento asignado s_N en dicha fórmula.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA A.2.7

Datos:

$m_1 = 3$ fases	Conexión triángulo en el estator	
690/400 V	$f_1 = 50$ Hz	$n_N = 960$ r.p.m.
$R_1 = 0{,}114\ \Omega$	$R'_2 = 0{,}4\ \Omega$	$X_{cc} = 2\ \Omega$
$m_i = 2$	$P_m \approx 0$ W	$P_{Fe} \approx 0$ W
Apartado c):	Autotransformador: $V_{1,motorL} = 248$ V	
	Arrancador electrónico: $V_{1,motorL} = 200$ V	
Apartados e) y f):	$M_r = M_N$	$n = 920$ r.p.m.
Apartado g):	$X_1 = X'_2$	$X_\mu = 100\ \Omega$

Resolución:

a) En un motor trifásico el estator puede conectarse en estrella o en triángulo. Si se desea que la máquina funcione a su tensión asignada V_{1N}, las tensiones de línea deberán ser:

Conexión estrella: $V_{1NL} = \sqrt{3}\ V_{1N}$

Conexión triángulo: $V_{1NL} = V_{1N}$

En este caso el enunciado indica que el motor es de 690/400 V. Esto quiere decir que para que el motor reciba su tensión asignada de fase ($V_{1N} = 400$ V), la tensión de línea deberá ser $V_{1NL} = 690$ V si el estator está conectado en estrella y deberá ser $V_{1NL} = 400$ V si está conectado en triángulo. Por lo tanto, como el motor está conectado en triángulo la tensión de línea debe ser $V_{1NL} = 400$ V.

Es sabido que la velocidad de sincronismo, expresada en r.p.m., se calcula mediante la expresión:

$$n_1 = \frac{60\ f_1}{p} \tag{1}$$

Por lo que, para una frecuencia f_1 de 50 Hz se pueden obtener las siguientes velocidades de sincronismo en función del número de pares de polos p del motor:

$$p = 1 \rightarrow n_1 = 3000 \text{ r. p. m.} \qquad p = 3 \rightarrow n_1 = 1000 \text{ r. p. m.}$$
$$p = 2 \rightarrow n_1 = 1500 \text{ r. p. m.} \qquad p = 4 \rightarrow n_1 = 750 \text{ r. p. m.}$$

y así sucesivamente.

Por otra parte, la velocidad de giro n del rotor guarda la siguiente relación con la velocidad de sincronismo n_1 y el deslizamiento s:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad \rightarrow \quad n = n_1 (1 - s) \tag{2}$$

En funcionamiento normal el deslizamiento s es pequeño y la velocidad de giro n es ligeramente inferior a la de sincronismo n_1.

Por lo tanto, si en este caso se sabe que la frecuencia del estator f_1 vale 50 Hz y la velocidad asignada es de 960 r.pm. se puede deducir que la velocidad de sincronismo será de 1000 r.p.m. En efecto, de los posibles valores de velocidad de sincronismo para 50 Hz el más cercano por exceso a 960 r.p.m. es 1000 r.p.m.

Para n_1 = 1000 r.p.m. y f_1 = 50 Hz el número de pares de polos p vale 3. Luego, el número de polos es el doble, 2p = 6 polos.

Si se desea conocer la velocidad de sincronismo en rad/s se utilizan estas relaciones:

$$\Omega_1 = \frac{2\,\pi\,f_1}{p} \qquad \Omega_1 = \frac{2\,\pi}{60}\,n_1 \tag{3}$$

Por consiguiente, en este motor se tiene que:

$$\Omega_1 = \frac{2\,\pi}{60}\,1000 \quad \Rightarrow \quad \underline{\Omega_1 = 104{,}7 \text{ rad/s}}$$

El deslizamiento asignado y la velocidad asignadas están relacionados mediante la fórmula (2), luego:

$$s_N = \frac{n_1 - n_N}{n_1} = \frac{1000 - 960}{1000} \quad \Rightarrow \quad \underline{s_N = 0{,}04}$$

El deslizamiento de par máximo se puede calcular mediante esta expresión:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \tag{4}$$

Luego, en este motor resulta que:

$$s_m = \frac{0{,}4}{\sqrt{0{,}114^2 + 2^2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{s_m = 0{,}2}$$

<u>En este motor la tensión de línea de la red de alimentación es V_{1NL} = 400 V, la velocidad de sincronismo es n_1 = 1000 r.p.m. (Ω_1 = 104,7 rad/s), el número de polos es 2p = 6 polos, el deslizamiento asignado es s_N = 0,04 y el deslizamiento de par máximo vale s_m = 0,2</u>.

b)

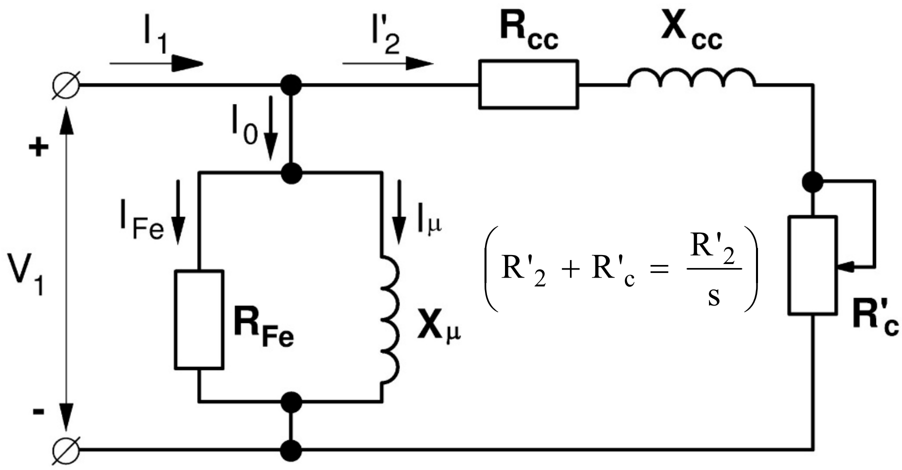


Fig. 1: Circuito equivalente aproximado de una máquina asíncrona trifásica

Durante el arranque la corriente del rotor reducida al estator es mucho mayor que la de vacío y, por lo tanto, se desprecia esta última. Así, del circuito equivalente aproximado de un motor asíncrono (ver la Fig. 1) y sabiendo que en el arranque el deslizamiento vale s = 1 se obtiene que la intensidad de fase en un arranque vale:

$$\frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + R'_2\right)^2 + X_{cc}^2}} \tag{5}$$

Luego, en el caso de arranque directo, poniendo en la expresión (5) que la tensión es la asignada, se obtiene que:

$$I_a = \frac{400}{\sqrt{\left(0{,}114 + 0{,}4\right)^2 + 2^2}} \quad \Rightarrow \quad I_a = 193{,}7 \text{ A}$$

que al tratarse de conexión triángulo da una corriente de línea de arranque directo $\sqrt{3}$ veces mayor:

$$\text{Conexión triángulo: } I_{aL} = \sqrt{3} \cdot 193{,}7 \quad \Rightarrow \quad \underline{I_{aL} = 335{,}5 \text{ A}}$$

El par de un motor asíncrono se puede obtener mediante esta fórmula:

$$M = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s} I'^2_2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \tag{6}$$

El par de arranque directo M_a se calcula mediante la expresión (6) en la que se utilizará la intensidad de fase en el arranque directo y el deslizamiento de arranque s = 1. Se obtiene que:

$$M_a = \frac{m_1 \, R'_2}{\frac{2\pi}{60} \, n_1} I_a^2 = \frac{3 \cdot 0{,}4}{104{,}7} 193{,}7^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{M_a = 430 \text{ Nm}}$$

Se sabe que en el arranque estrella-triángulo la corriente de línea y el par están relacionados con las correspondientes magnitudes del arranque directo de esta manera:

$$I_{a\lambda} = \frac{I_{aL}}{3} \qquad\qquad M_{a\lambda} = \frac{M_a}{3} \tag{7}$$

Luego, en este caso se obtiene lo siguiente:

$$I_{a\lambda} = \frac{335{,}3}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{I_{a\lambda} = 111{,}8 \text{ A}}$$

$$M_{a\lambda} = \frac{430}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{M_{a\lambda} = 143{,}3 \text{ Nm}}$$

<u>La corriente de línea y el par en el arranque directo son, respectivamente, I_{aL} = 335,5 A y M_a = 430 Nm. La corriente de línea y el par en el arranque estrella-triángulo son, respectivamente, $I_{a\lambda}$ = 111,8 A y $M_{a\lambda}$ = 143,3 Nm</u>.

c)

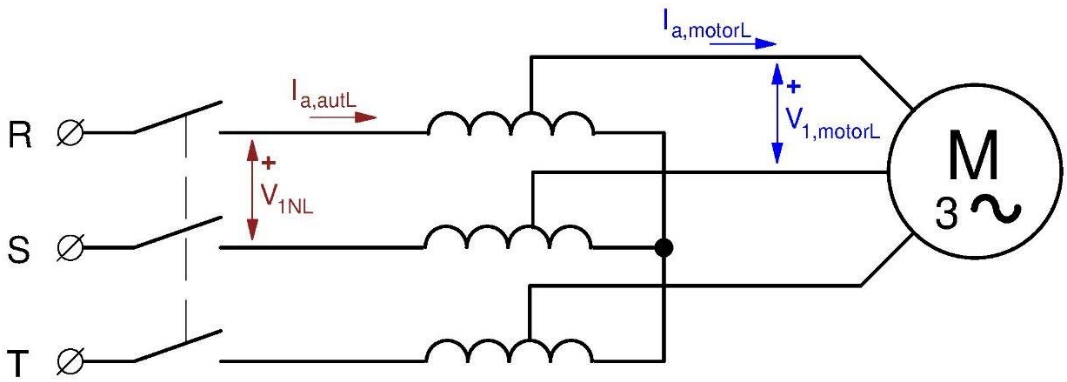


Fig. 2: Circuito para el arranque por autotransformador

En la figura anterior se muestra el circuito para realizar el arranque por autotransformador de una máquina asíncrona trifásica. Para analizar este arranque se utiliza un parámetro adimensional e inferior a 1, denominado x, que es igual a la relación entre la tensión que recibe el motor en el momento de arrancar y su tensión asignada:

$$x = \frac{V_{1,motorL}}{V_{1NL}} \tag{8}$$

La corriente de línea y el par en el arranque por autotransformador y en el arranque directo están relacionadas mediante estas expresiones:

$$I_{a,autL} = x^2 \cdot I_{aL} \qquad\qquad M_{a,aut} = x^2 \cdot M_a \tag{9}$$

Luego, en nuestro caso se obtienen estos resultados:

$$x = \frac{248}{400} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}62$$

$$I_{a,autL} = 0{,}62^2 \cdot 335{,}5 \quad \Rightarrow \quad \underline{I_{a,autL} = 129\ \text{A}}$$

$$M_{a,aut} = 0{,}62^2 \cdot 430 \quad \Rightarrow \quad \underline{M_{a,aut} = 165{,}3\ \text{Nm}}$$

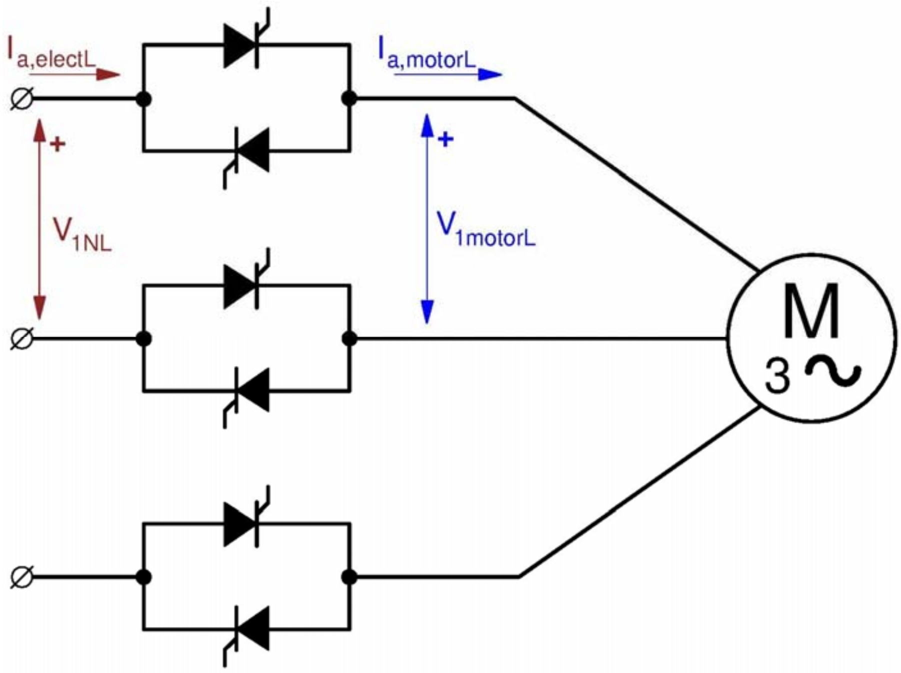


Fig. 3: Circuito para el arranque con un arrancador electrónico

En la figura anterior se muestra el circuito para realizar el arranque mediante un arrancador electrónico. Para analizar este arranque se vuelve a utilizar el parámetro adimensional x definido mediante la relación (8).

La corriente de línea y el par en el arranque mediante un arrancador electrónico y en el arranque directo ahora están relacionadas mediante estas expresiones:

$$I_{a,elctL} = x \cdot I_{aL} \qquad\qquad M_{a,elect} = x^2 \cdot M_a \tag{10}$$

Luego, en nuestro caso se obtienen estos resultados:

$$x = \frac{200}{400} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}5$$

$$I_{a,electL} = 0{,}5 \cdot 335{,}5 \quad \Rightarrow \quad \underline{I_{a,electL} = 167{,}8\ \mathrm{A}}$$

$$M_{a,elect} = 0{,}5^2 \cdot 430 \quad \Rightarrow \quad \underline{M_{a,elect} = 107{,}5\ \mathrm{Nm}}$$

<u>La corriente de línea y el par en el arranque con autotransformador son, respectivamente, $I_{a,autL}$ = 129 A y $M_{a,aut}$ = 165,3 Nm. La corriente de línea y el par en el arranque con arrancador electrónico son, respectivamente, $I_{a,electL}$ = 167,8 A y $M_{a,elect}$ = 107,5 Nm</u>.

d) En este motor, aplicando la relación (2) para condiciones asignadas se obtuvo en el apartado a) que el deslizamiento asignado es s_N = 0,04.

Partiendo del circuito equivalente aproximado (Fig. 1) y de la ecuación (6) se deduce la fórmula para calcular el par de la máquina:

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} = \frac{m_1\, y}{\Omega_1} \frac{V_1^2}{(R_1 + y)^2 + X_{cc}^2} \qquad (11)$$

$$(y = R'_2/s)$$

En la expresión anterior, a la derecha del segundo signo = se ha introducido la variable auxiliar y ($y = R'_2/s$) y se utiliza la velocidad de sincronismo Ω_1 en rad/s. Esta variable auxiliar se ha denominado "x" en otros problemas, pero aquí se ha preferido llamarla "y" para evitar confusiones con la relación de tensiones "x" que aparece en la pregunta c).

Para obtener el par asignado M_N habrá que introducir en la expresión (11) los valores de la tensión asignada de fase V_{1N} y del deslizamiento asignado s_N o, lo que es equivalente, el valor de la variable auxiliar y_N:

$$y_N = \frac{R'_2}{s_N} = \frac{0{,}4}{0{,}04} \quad \Rightarrow \quad y_N = 10\ \Omega$$

Por consiguiente, el par asignado se calcula así:

$$M_N = \frac{m_1\, y_N}{\Omega_1} \frac{V_{1N}^2}{(R_1 + y_N)^2 + X_{cc}^2} = \frac{3 \cdot 10}{104{,}7} \frac{400^2}{(0{,}114 + 10)^2 + 2^2} = \underline{431{,}2\ \mathrm{Nm}} \qquad (12)$$

<u>El par asignado vale M_N = 431,2 Nm</u>.

e) Cuando se conoce una velocidad, ésta no se utiliza directamente para calcular el comportamiento de una máquina asíncrona, sino que se emplea el deslizamiento correspondiente. Por esto, lo primero que hay que hacer cuando hay un dato de velocidad es calcular su deslizamiento. En este caso, la aplicación de la fórmula (2) da este resultado:

$$s = \frac{1000 - 920}{1000} \quad \Rightarrow \quad s = 0{,}08$$

A este deslizamiento le corresponde una variable auxiliar y (ver la relación (11)) así:

$$y = \frac{R'_2}{s} = \frac{0{,}4}{0{,}08} \quad \Rightarrow \quad y = 5\ \Omega$$

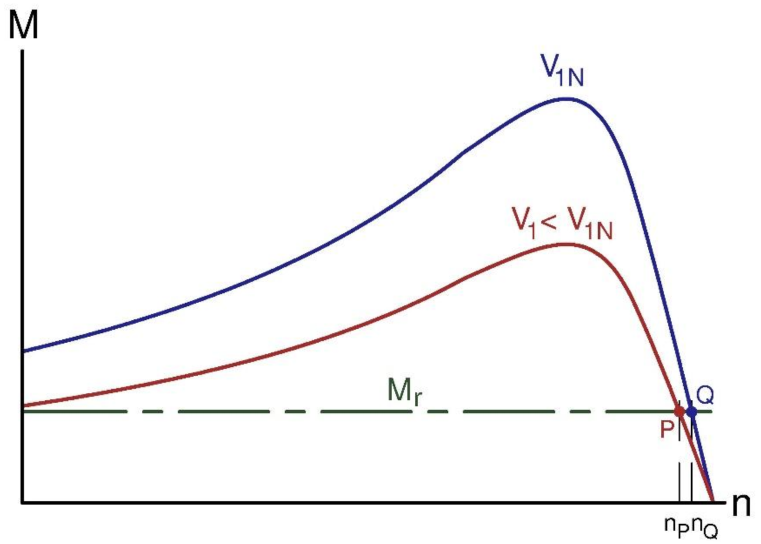


Fig. 4: Curvas de par de un motor asíncrono a dos tensiones diferentes

Si se cambia la tensión de alimentación los pares varían proporcionalmente al cuadrado de las tensiones. Sin embargo, el deslizamiento s_m que proporciona el par máximo no varía al modificar la tensión. En la Fig. 4 se muestra como se cambia la velocidad cuando la tensión del motor varía de su valor asignado (velocidad n_Q) a un valor inferior (velocidad n_P) si el par resistente M_r permanece constante.

Planteando la fórmula del par (11) para el par asignado, el deslizamiento s (o la variable auxiliar y) que se acaba de calcular y dejando la tensión como incógnita se obtiene una ecuación de donde se puede despejar la tensión V_1 que se pide:

$$M_r = M_N \quad \Rightarrow \quad 431{,}2 = \frac{3 \cdot 5}{104{,}7} \frac{V_1^2}{(0{,}114 + 5)^2 + 2^2} \quad \Rightarrow \quad V_1 = 301{,}3\ \text{V}$$

Como el estator está conectado en triángulo sucede que: $V_{1L} = V_1 = 301{,}3$ V

<u>Para conseguir que este motor gire a 920 r.p.m. proporcionando el par asignado, hay que alimentarlo con una tensión de línea $V_{1L} = 301{,}3$ V</u>.

f)

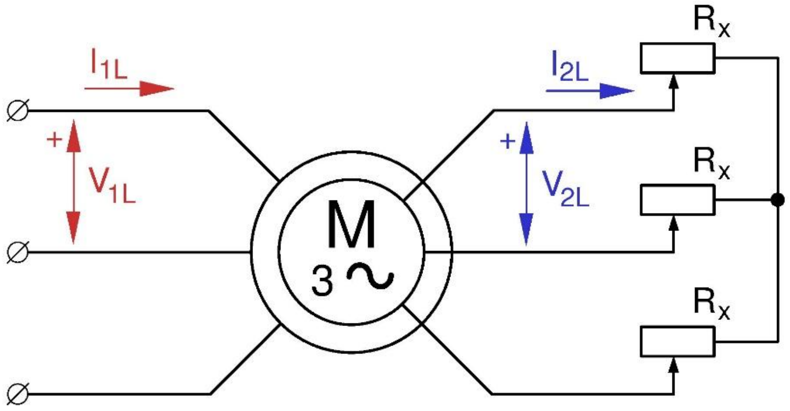


Fig. 5: Circuito para controlar la velocidad añadiendo resistencias en serie con el rotor

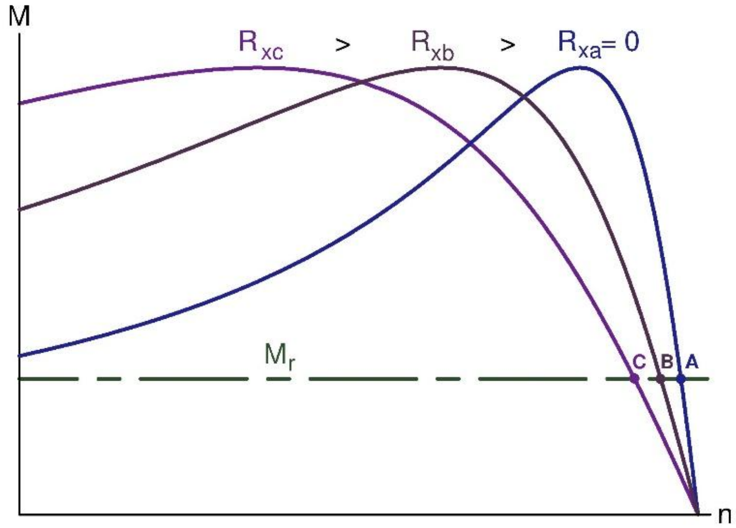


Fig. 6: Curvas de par de un motor asíncrono con resistencias en serie con el rotor

En la Fig. 5 se muestran las conexiones del motor cuando se conecta una resistencia R_x en serie con cada una de las fases del rotor.

Si se añaden resistencias R_x en serie con el rotor el par máximo no varía, sin embargo, el deslizamiento s_m que proporciona dicho par máximo aumenta con el valor de las resistencias R_x. En la Fig. 6 se muestra como se modifica la velocidad mediante este método cuando el par resistente M_r es constante. En dicha figura se aprecia que la velocidad es la correspondiente al punto A cuando el rotor está en cortocircuito ($R_{xa} = 0$), el motor gira a la velocidad del punto B si añade una resistencia R_{xb} en serie con cada fase del rotor y gira a la velocidad del punto C si se añade una resistencia R_{xc} -mayor que R_{xb}- en serie con cada fase del rotor.

Si el motor tiene una resistencia R_x (cuyo valor reducido al estator es R'_x) en serie con cada fase del rotor, la ecuación de su par ahora es similar a la (11) si en ella se sustituye el parámetro R'_2 por la suma $R'_2 + R'_x$:

$$M = \frac{m_1 \dfrac{R'_2 + R'_x}{s}}{\dfrac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \dfrac{R'_2 + R'_x}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} = \frac{m_1\ y}{\Omega_1} \frac{V_1^2}{(R_1 + y)^2 + X_{cc}^2} \qquad (13)$$

$$\left(y = \frac{R'_2 + R'_x}{s}\right)$$

Nótese que cuando el par se expresa en función de la variable auxiliar y, la ecuación del par M queda exactamente igual que cuando el rotor está en cortocircuito (fórmula (11); pero ahora aparece la resistencia R'_x sumada a la resistencia R'_2 en el numerador de la expresión que define a la variable auxiliar y.

Como la velocidad es la misma que en la pregunta anterior, se tiene el mismo valor del deslizamiento s:

$$s = \frac{1000 - 920}{1000} \quad \Rightarrow \quad s = 0{,}08$$

Como el par resistente es igual al par asignado se cumplirá que:

$$M = M_r \quad \Rightarrow \quad M_N = \frac{m_1\ y}{\Omega_1} \frac{V_1^2}{(R_1 + y)^2 + X_{cc}^2} \qquad (14)$$

Sustituyendo valores en la expresión anterior se obtiene una ecuación de segundo grado donde la incógnita es y. Una vez resuelta se obtienen dos valores de y, de los cuáles se despejan dos valores de R'_x, uno positivo y otro negativo. El valor correcto es el positivo.

Sin embargo, se puede operar de una forma mucho más sencilla si se comparan las relaciones (12), cuando la máquina estaba en condiciones asignadas, y (14), cuando suministra el par asignado teniendo resistencias en serie con el rotor. De dicha comparación se deduce que se debe verificar la siguiente igualdad:

$$y = y_N \quad \Rightarrow \quad \frac{R'_2 + R'_x}{s} = \frac{R'_2}{s_N}$$

Luego, se llega a:

$$\frac{0{,}4 + R'_x}{0{,}08} = \frac{0{,}4}{0{,}04} = 10 \quad \Rightarrow \quad R'_x = 0{,}4\ \Omega$$

Dado que R'_x es el valor de R_x reducido al estator, se deduce que:

$$R'_x = m_i \cdot m_v \cdot R_x \quad \Rightarrow \quad R_x = \frac{R'_x}{m_i \cdot m_v} \qquad (15)$$

En máquinas de rotor bobinado sucede que:

$$\text{Rotor bobinado} \quad \Rightarrow \quad m_v = m_i \quad \Rightarrow \quad m_v = 2$$

Luego, la resistencia R_x que hay que introducir en este motor vale:

$$R_x = \frac{R'_x}{m_i \cdot m_v} = \frac{0{,}4}{2 \cdot 2} \quad \Rightarrow \quad \underline{R_x = 0{,}1\ \Omega}$$

Del circuito equivalente aproximado (Fig. 1) se deduce que ahora la corriente I'_2 es:

$$I'_2 = \frac{V_{1N}}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2 + R'_x}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{(R_1 + y)^2 + X_{cc}^2}} \qquad (16)$$

Luego:

$$I'_2 = \frac{400}{\sqrt{(0{,}114 + 10)^2 + 2^2}} \quad \Rightarrow \quad I'_2 = 38{,}8\ \text{A}$$

Dado que I'_2 es el valor de I_2 reducido al estator, se deduce que:

$$I'_2 = \frac{I_2}{m_i} \quad \Rightarrow \quad I_2 = m_i \cdot I'_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 2 \cdot 38{,}8 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 77{,}6\ \text{A}$$

Tanto las tres fases del rotor como las tres resistencias R_x están conectadas en estrella (Fig. 5), luego:

$$\text{Conexión estrella} \quad \Rightarrow \quad I_{2L} = I_2 \quad \Rightarrow \quad I_{2L} = 77{,}6\ \text{A}$$

Aplicando la Ley de Ohm a una de las resistencias R_x añadidas al rotor (Fig. 5) se obtiene que:

$$V_2 = R_x \cdot I_{2L} = R_x \cdot I_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 0{,}1 \cdot 77{,}6 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 7{,}76\ \text{V}$$

$$\text{Conexión estrella} \quad \Rightarrow \quad V_{2L} = \sqrt{3} \cdot V_2 = \sqrt{3} \cdot 7{,}76 \quad \Rightarrow \quad \underline{V_{2L} = 13{,}4\ \text{V}}$$

La tensión entre dos anillos del colector es igual a la tensión V_{2L} entre fases del rotor.

La frecuencia f_2 de las tensiones y corrientes del rotor se calcula así:

$$f_2 = s \cdot f_1 \qquad (17)$$

Lo que significa que, en este caso, la frecuencia del rotor vale:

$$f_2 = 0{,}08 \cdot 50 \quad \Rightarrow \quad \underline{f_2 = 4\ \text{Hz}}$$

La potencia activa consumida por las resistencias R_x añadidas al rotor es P_2 y vale:

$$P_2 = 3 \cdot R_x \cdot I_2^2 \tag{18}$$

Luego, en este motor estas resistencias consumen:

$$P_2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 77{,}6^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{P_2 = 1807\ \text{W}}$$

<u>Para conseguir que este motor gire a 920 r.p.m. proporcionando el par asignado M_N, hay que añadir en serie con cada fase del rotor una resistencia $R_x = 0{,}1\ \Omega$. En esta situación la tensión entre dos anillos del colector tiene un valor eficaz $V_{2L} = 13{,}4$ V y una frecuencia $f_2 = 4$ Hz. Estas resistencias consumen una potencia $P_2 = 1807$ W</u>.

g)

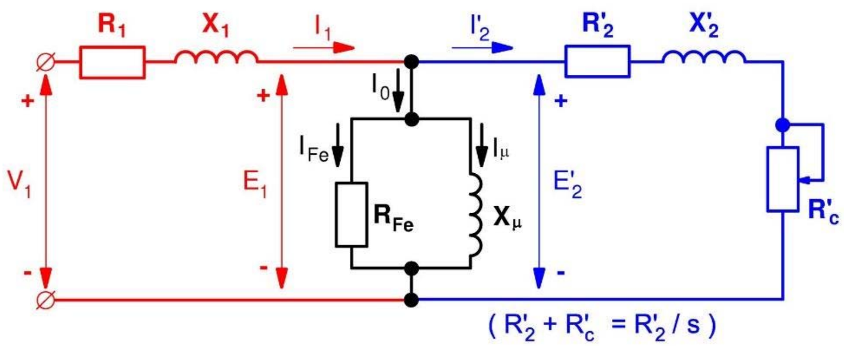


Fig. 7: Circuito equivalente exacto

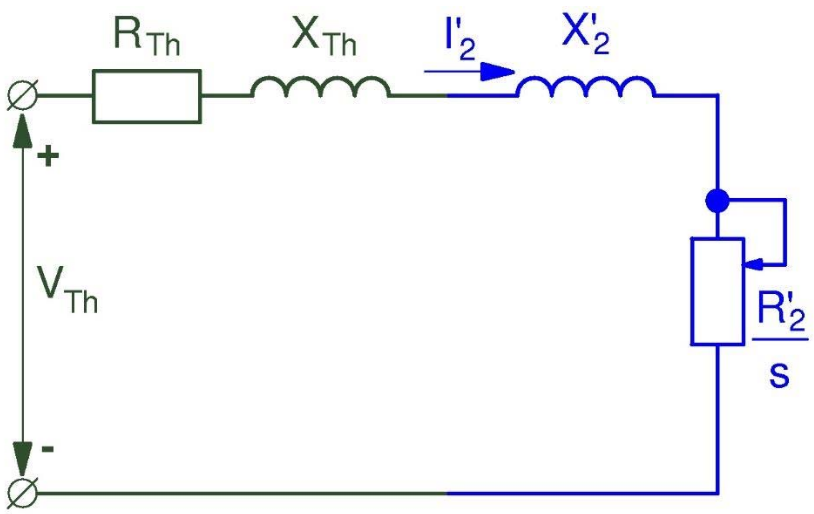


Fig. 8: Circuito equivalente simplificado serie

Máquinas asíncronas o de inducción

A.2: Maniobras. Control de velocidad

En un motor asíncrono la corriente de vacío I_0 no es tan despreciable frente a la del rotor reducida al estator I'_2. Luego, al pasar del circuito equivalente exacto (Fig. 7) al circuito equivalente aproximado (Fig. 1) se comete cierto error que repercute en el cálculo de I'_2 y esto, a su vez, también afecta al cálculo del par (relaciones (6) y (11)).

Si se aplica el Teorema de Thévenin al circuito equivalente exacto de la Fig. 7 se obtiene el circuito equivalente simplificado serie de la Fig. 8, el cual permite un cálculo más exacto de la corriente I'_2 y, en consecuencia, del par M. Con los parámetros de este circuito equivalente, la fórmula del par pasa a ser:

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_{Th}^2}{\left(R_{Th} + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{Thcc}^2} = \frac{m_1 \ y}{\Omega_1} \frac{V_{Th}^2}{\left(R_{Th} + y\right)^2 + X_{Thcc}^2} \qquad (19)$$

$$\left(X_{Thcc} = X_{Th} + X'_2 \ ; \quad y = \frac{R'_2}{s}\right)$$

Si se aceptan ciertas aproximaciones (que provocarán un error en el cálculo del par mucho menor que el debido al empleo del circuito equivalente aproximado de la Fig. 1) los parámetros del circuito equivalente simplificado serie (Fig. 8) se calculan mediante estas fórmulas:

$$c_1 = 1 + \frac{X_1}{X_\mu} \qquad V_{Th} = \frac{V_1}{c_1}$$

$$R_{Th} = \frac{R_1}{c_1} \qquad X_{Th} = \frac{X_1}{c_1} \qquad X_{Thcc} = X_{Th} + X'_2 \qquad (20)$$

Luego, es este motor:

$$X_1 = X'_2 \ ; \quad X_{cc} = X_1 + X'_2 \quad \Rightarrow \quad X_1 = X'_2 = \frac{X_{cc}}{2} \quad \Rightarrow \quad X_1 = X'_2 = 1 \ \Omega$$

$$c_1 = 1 + \frac{X_1}{X_\mu} = 1 + \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1{,}01$$

$$V_{Th} = \frac{V_1}{c_1} = \frac{400}{1{,}01} \quad \Rightarrow \quad V_{Th} = 396 \text{ V}$$

$$R_{Th} = \frac{R_1}{c_1} = \frac{0{,}114}{1{,}01} \quad \Rightarrow \quad R_{Th} = 0{,}113 \ \Omega$$

$$X_{Th} = \frac{X_1}{c_1} = \frac{1}{1{,}01} \quad \Rightarrow \quad X_{Th} = 0{,}99 \ \Omega$$

$$X_{Thcc} = X_{Th} + X'_2 = 0{,}99 + 1 \quad \Rightarrow \quad X_{Thcc} = 1{,}99 \ \Omega$$

Utilizando estos parámetros en la ecuación del par (19) cuando tanto la tensión como el deslizamiento toman sus valores asignados, se obtiene este valor del par asignado M_N:

$$y_N = \frac{R'_2}{s_N} = \frac{0{,}4}{0{,}04} \quad \Rightarrow \quad y_N = 10\ \Omega$$

$$M_N = \frac{3 \cdot 10}{104{,}7} \frac{396^2}{(0{,}113 + 10)^2 + 1{,}99^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{M_N = 422{,}9\ \text{Nm}}$$

Si se compara este valor del par asignado M_N con el obtenido en la pregunta d) se advierte que el valor calculado en d) presenta un error del 2%:

$$\frac{431{,}2}{422{,}9} = 1{,}02 \quad \Rightarrow \quad \text{Error} = 1{,}02 - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Error} = 0{,}02 = 2\%$$

<u>Utilizando los parámetros del circuito simplificado serie se realiza un cálculo más exacto del par asignado, cuyo valor resulta ser M_N = 422,9 Nm.</u>

PROBLEMA A.3.1

ENUNCIADO

Un motor de inducción monofásico de 4 polos, **60 Hz** y 110 V tiene estos parámetros:

$R_1 = 1{,}86\ \Omega$	$X_1 = 2{,}56\ \Omega$
$R'_2 = 3{,}56\ \Omega$	$X'_2 = 2{,}56\ \Omega$
$X_\mu = 53{,}4\ \Omega$	Pérdidas mecánicas: $P_m = 13{,}5$ W

Si este motor está funcionando con un deslizamiento del 5% y se desprecian las pérdidas en el hierro P_{Fe}, calcular:

- **a)** Corriente del estator.
- **b)** Par útil.

RESULTADOS

a) $I_1 = 4{,}28$ A
b) $M = 1{,}045$ Nm

Máquinas asíncronas o de inducción

A.3: Motores monofásicos de inducción

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

* La velocidad de sincronismo n_1 en un motor asíncrono monofásico se calcula con las mismas expresiones que en los motores trifásicos. Por lo tanto, se puede obtener a partir de la frecuencia f_1 y del número de pares de polos p.

* La velocidad de giro n del motor se calcula a partir de la velocidad de sincronismo n_1 y del deslizamiento s.

* Para calcular la corriente del estator I_1 se parte del circuito equivalente de un motor asíncrono monofásico. Se calcula primero la impedancia equivalente de este circuito cuando el deslizamiento vale s = 0,05 y se aplica después la ley de Ohm.

* La potencia electromagnética que atraviesa el entrehierro P_a es igual a la diferencia de las potencias P_{ad} y P_{ai}. En el circuito equivalente la potencia P_{ad} es la que se consume en la resistencia $(R'_2/2s)$ y la potencia P_{ai} es la que se consume en la resistencia $(R'_2/2(2-s))$.

* El par interno M se calcula dividiendo la potencia electromagnética P_a (medida en vatios) entre la velocidad de sincronismo Ω_1 (medida en radianes geométricos por segundo).

* El par debido a las pérdidas mecánicas M_m se calcula dividiendo la potencia de pérdidas mecánicas P_m (medida en vatios) entre la velocidad de giro del motor Ω (medida en radianes geométricos por segundo).

* El par útil M es la diferencia entre el par interno M y el par de pérdidas mecánicas M_m.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA A.3.1

Datos:

$m_1 = 1$ fase	$2p = 4$ polos	$f_1 = 60$ Hz	$V_{1N} = 110$ V
$R_1 = 1{,}86\ \Omega$	$X_1 = 2{,}56\ \Omega$	$R'_2 = 3{,}56\ \Omega$	$X'_2 = 2{,}56\ \Omega$
$X_\mu = 53{,}4\ \Omega$	$P_m = 13{,}5$ W	$P_{Fe} \approx 0$	$s = 5\% = 0{,}05$

Resolución:

a)

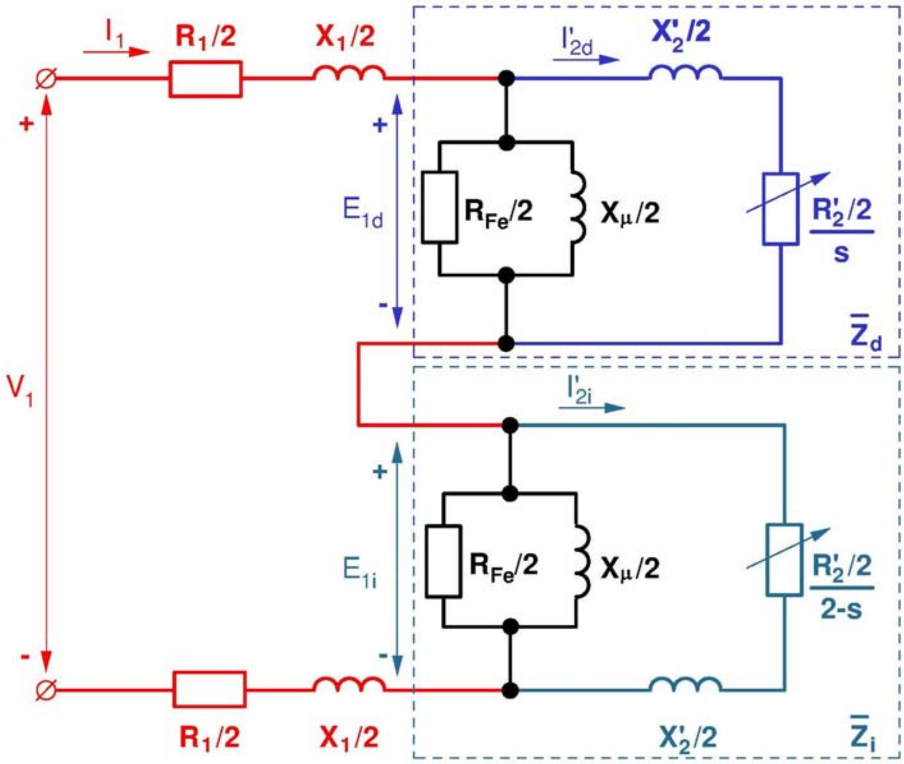


Fig. 1: Circuito equivalente de un motor asíncrono monofásico

De acuerdo con los datos del enunciado se tiene que:

$$P_{Fe} \approx 0 \quad \rightarrow \quad I_{Fe} \approx 0 \quad \rightarrow \quad R_{Fe} \approx \infty$$

$$\frac{X_\mu}{2} = \frac{53{,}4}{2} = 26{,}7\ \Omega \qquad \frac{X'_2}{2} = \frac{2{,}56}{2} = 1{,}28\ \Omega$$

$$\frac{R'_2}{2\ s} = \frac{3{,}56}{2 \cdot 0{,}05} = 35{,}6\ \Omega \qquad \frac{R'_2}{2\,(2-s)} = \frac{3{,}56}{2 \cdot (2-0{,}05)} = 0{,}913\ \Omega$$

$p = 2$ pares de polos $\qquad n_1 = \dfrac{60\ f_1}{p} = \dfrac{60 \cdot 60}{2} = 1800$ r.p.m.

A.3: Motores monofásicos de inducción

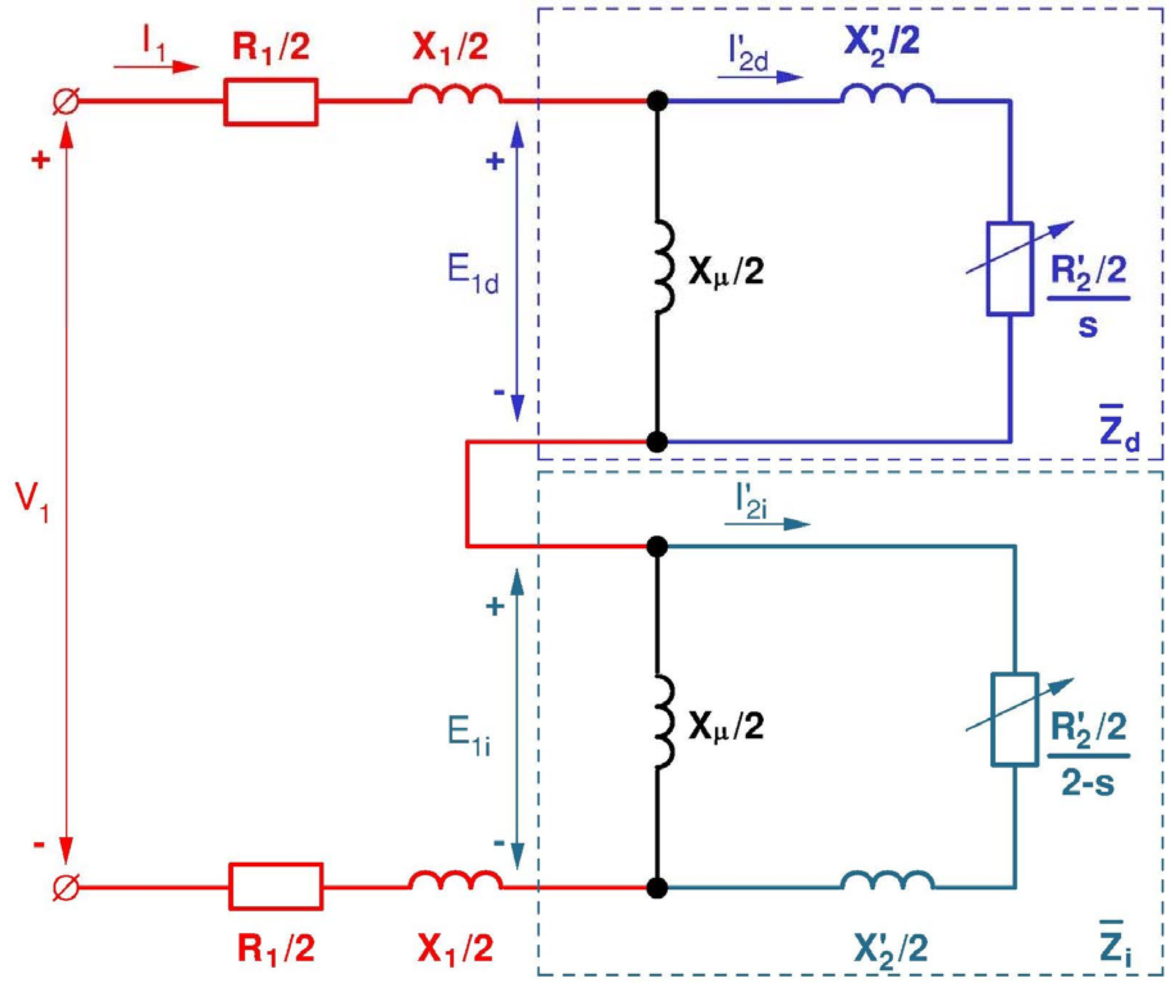


Fig. 2: Circuito equivalente simplificado de un motor asíncrono monofásico

El circuito equivalente completo de un motor asíncrono monofásico es el representado en la Fig. 1. Ahora bien, según se acaba de deducir, la resistencia de pérdidas en el hierro R_{Fe} de este motor es muy grande, prácticamente infinita. Esto simplifica el circuito equivalente de la Fig. 1 dejándolo como se representa en la Fig. 2.

Cuando el deslizamiento s vale 5%, la impedancia $\overline{Z}_d \left(= R_d + j\, X_d\right)$ de la Fig. 2 tiene este valor:

$$\overline{Z}_d = \frac{1}{\dfrac{1}{j\,\dfrac{X_\mu}{2}} + \dfrac{1}{\dfrac{R'_2}{2\,s} + j\,\dfrac{X'_2}{2}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{j\,26{,}7} + \dfrac{1}{35{,}6 + j\,1{,}28}}$$

$$\overline{Z}_d = R_d + j\,X_d = 12{,}4 + j\,17\ \Omega$$

y la impedancia $\overline{Z}_i \left(= R_i + j\,X_i\right)$ de la Fig. 2 es:

$$\overline{Z}_i = \frac{1}{\dfrac{1}{j\,\dfrac{X_\mu}{2}} + \dfrac{1}{\dfrac{R'_2}{2\,(2-s)} + j\,\dfrac{X'_2}{2}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{j\,26{,}7} + \dfrac{1}{0{,}913 + j\,1{,}28}}$$

$$\overline{Z}_i = R_i + j\,X_i = 0{,}83 + j\,1{,}25\ \Omega$$

Por lo tanto, de la Fig. 2 se deduce que la corriente del estator I_1 vale:

$$\bar{I}_1 = \frac{\overline{V}_1}{\left(R_1 + j\,X_1\right) + \overline{Z}_d + \overline{Z}_i}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + R_d + R_i\right)^2 + \left(X_1 + X_d + X_i\right)^2}} \qquad (1)$$

Lo cual da, sustituyendo valores, el siguiente resultado:

$$I_1 = \frac{110}{\sqrt{(1{,}86 + 12{,}4 + 0{,}83)^2 + (2{,}56 + 17 + 1{,}25)^2}} = 4{,}28\ \text{A}$$

<u>La corriente del estator vale $I_1 = 4{,}28$ A</u>.

b) La potencia electromagnética P_a que atraviesa el entrehierro de un motor asíncrono monofásico se puede calcular como diferencia de dos términos:

$$P_a = P_{ad} - P_{ai} = I'^2_{2d}\,\frac{R'_2/2}{s} - I'^2_{2i}\,\frac{R'_2/2}{2-s} \qquad (2)$$

Ahora bien, en este caso donde no existe la resistencia R_{Fe}, se tiene que también P_{ad} es igual a la potencia activa consumida en la impedancia $\overline{Z}_d$ y P_{ai} es la potencia activa consumida en la impedancia $\overline{Z}_i$. Luego:

$$R_{Fe} = \infty \;\rightarrow\; \begin{cases} P_{ad} = I_1^2\,R_d \\ P_{ai} = I_1^2\,R_i \end{cases} \;\rightarrow\; P_a = I_1^2\left(R_d - R_i\right) \qquad (3)$$

Sustituyendo valores, se obtiene que:

$$P_a = 4{,}28^2\,(12{,}4 - 0{,}83) = 212\ \text{W}$$

El par interno M de la máquina se calcula mediante la siguiente relación:

$$M = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{P_a}{\frac{2\pi}{60} n_1} \tag{4}$$

que, sustituyendo valores, da este resultado:

$$M = \frac{212}{\frac{2\pi}{60} 1800} = 1{,}12 \text{ Nm}$$

El par debido a las pérdidas mecánicas M_m es así:

$$M_m = \frac{P_m}{\Omega} = \frac{P_m}{\frac{2\pi}{60} n} = \frac{P_m}{\frac{2\pi}{60} n_1 (1 - s)} \tag{5}$$

y en este motor vale:

$$M_m = \frac{13{,}5}{\frac{2\pi}{60} 1800\,(1 - 0{,}05)} = 0{,}075 \text{ Nm}$$

Por lo tanto, el par útil M_u es:

$$M_u = M - M_m \tag{6}$$

y tiene un valor de:

$$M_u = 1{,}12 - 0{,}075 = 1{,}045 \text{ Nm}$$

<u>El par útil de este motor vale M_u = 1,045 Nm</u>.

Máquinas asíncronas o de inducción

A.3: Motores asíncronos trifásicos de doble jaula

PROBLEMA A.3.2

ENUNCIADO

Un motor asíncrono trifásico de doble jaula y 4 polos tiene su estator conectado en triángulo, se alimenta con una tensión de 400 V y 50 Hz y su velocidad asignada es 1440 r.p.m.

En esta máquina se pueden despreciar la corriente de vacío y las pérdidas en el hierro y los parámetros de su circuito equivalente son:

Estator:	$R_1 = 1\ \Omega$	$X_1 = 3\ \Omega$
Jaula exterior:	$R'_{2e} = 3\ \Omega$	$X'_{2e} = 1\ \Omega$
Jaula interior:	$R'_{2i} = 0{,}6\ \Omega$	$X'_{2i} = 5\ \Omega$

Calcular:

a) Los pares de arranque y asignado.

b) El factor de jaula.

RESULTADOS

a) $M_a = 185$ Nm; $M_N = 169$ Nm

b) $m = 0{,}6$

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN

* La velocidad de sincronismo n_1 del motor se calcula a partir de la frecuencia del estator f_1 y del número de pares de polos p.

* El deslizamiento asignado s_N se calcula a partir de las velocidades de sincronismo n_1 y asignada n_N del motor.

* Un motor de doble jaula se puede analizar mediante las mismas expresiones que las de un motor de simple jaula, pero teniendo en cuenta que los parámetros del rotor R'_2 y X'_2 no son constantes, sino funciones de la frecuencia rotórica f_2. Dado que la frecuencia f_1 en este problema permanece constante, queda que R'_2 y X'_2 son funciones del deslizamiento s (pues $f_2 = s\ f_1$).

Para obtener a un valor dado del deslizamiento s los valores que le corresponden de los parámetros R'_2 y X'_2, se utiliza el circuito equivalente de un motor de doble jaula. En este circuito se calcula la impedancia equivalente de todo el rotor (la impedancia de las dos jaulas en paralelo) y se identifica con la impedancia rotórica de un motor de simple jaula ($R'_2/s + j\ X'_2$), lo que permite despejar los valores de R'_2 y X'_2.

* El factor de jaula se puede obtener mediante una expresión que lo expresa en función de los parámetros de resistencia y de reactancia, reducidos al estator, de ambas jaulas.

RESOLUCION DEL PROBLEMA A.3.2

Datos:

$m_1 = 3$ fases	Doble jaula	Conexión triángulo	$I_0 \approx 0$; $P_{Fe} \approx 0$
$2p = 4$ polos	$V_{1L} = 400$ V	$f_1 = 50$ Hz	$n_N = 1440$ r.p.m.
Estator:	$R_1 = 1\ \Omega$	$X_1 = 3\ \Omega$	
Jaula exterior:	$R'_{2e} = 3\ \Omega$	$X'_{2e} = 1\ \Omega$	
Jaula interior:	$R'_{2i} = 0{,}6\ \Omega$	$X'_{2i} = 5\ \Omega$	

Resolución:

a)

* En los motores de *doble jaula* y en los de *ranura profunda* se manifiesta un apreciable efecto piel en los conductores del rotor. Esto hace que estos motores se comporten como un motor de simple jaula cuyos parámetros de resistencia y de reactancia del rotor reducido al estator, R'_2 y X'_2, no son constantes sino función de la frecuencia rotórica f_2. Dado que se verifica que:

$$f_2 = s\, f_1 \tag{1}$$

sucede que si uno de estos motores se alimenta con corrientes siempre de igual frecuencia f_1, los parámetros del rotor, R'_2 y X'_2, son función del deslizamiento s.

En la Fig. 1 se muestra el circuito equivalente de un motor de doble jaula. Este circuito equivalente también es válido para un motor de ranura profunda.

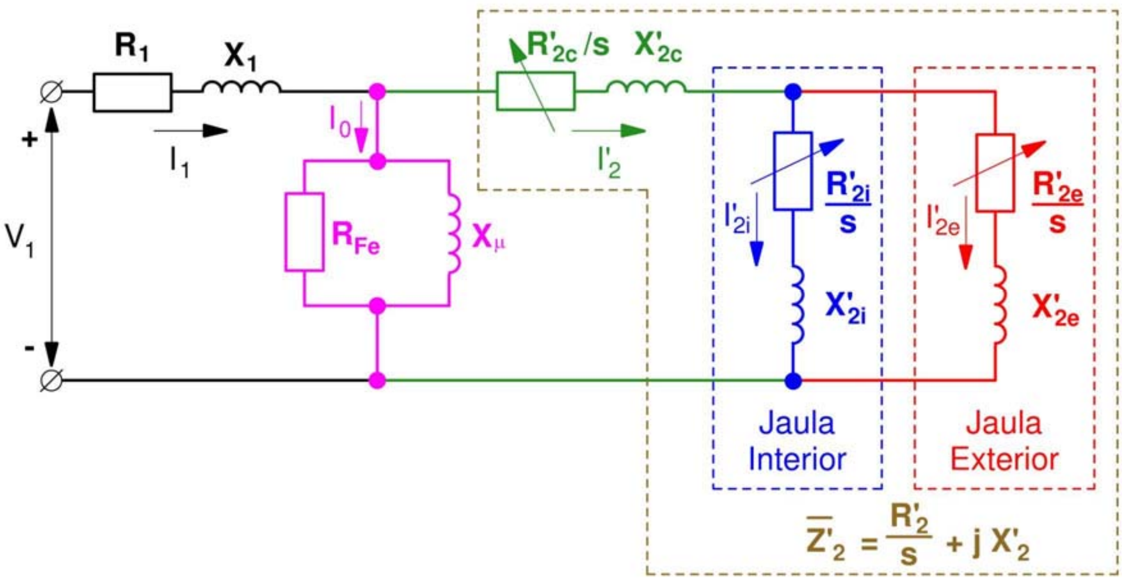


Fig. 1: Circuito equivalente de un motor asíncrono trifásico de doble jaula

La resistencia R'_{2c} corresponde a la resistencia de los anillos de cortocircuito cuando estos anillos son comunes a ambas jaulas y las resistencias R'_{2e} y R'_{2i} corresponden a las barras de las jaulas interior y exterior, respectivamente. En los motores en los que los anillos de cortocircuito son diferentes para ambas jaulas, se da un valor nulo a la resistencia R'_{2c} y la resistencia de los anillos se incorpora a R'_{2e} y R'_{2i}.

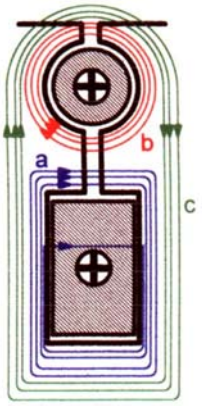


Fig. 2: Dispersión en una ranura del rotor de un motor de doble jaula

En la Fig. 2 se representa una ranura de un motor de doble jaula y las líneas del campo magnético de dispersión correspondientes. Además de estas líneas de dispersión, también existirán las correspondientes al campo magnético principal que no se han incluido en la Fig. 2.

En la Fig. 2 se puede apreciar que existen unas líneas de campo magnético de dispersión que sólo rodean a una de las jaulas (líneas del tipo a y del tipo b en la Fig. 2). El campo magnético de dispersión cuyas líneas de campo sólo rodean a una jaula, en virtud del Teorema de Ampére, sólo es debido a la corriente que circula por esta jaula y sólo afecta a dicha jaula. En el circuito equivalente de la Fig. 1 los efectos de estos campos magnéticos de dispersión están representados por las reactancias X'_{2e} y X'_{2i}. Por otra parte, en la Fig. 2 se puede apreciar que también existen otras líneas de campo magnético de dispersión que son comunes a ambas jaulas (líneas del tipo c en la Fig. 2). Este campo de dispersión será originado por el efecto conjunto de las corrientes de las dos jaulas y ejerce influencia sobre ambas. Aunque este campo magnético afecta a dos de los devanados del motor, sigue tratándose de un campo magnético de dispersión pues sus líneas de campo no atraviesan el entrehierro y no afectan al devanado del estator. En el circuito equivalente de la Fig. 1 los efectos de este campo magnético de dispersión común están representados por la reactancia X'_{2c}.

El circuito equivalente de la Fig. 1 se suele simplificar de forma que en el rotor sólo aparezcan 4 parámetros de resistencia y reactancia. Siempre se suele considerar nula la resistencia común R'_{2c} y, si es preciso, su efecto se incluye dentro de las resistencias de cada jaula, R'_{2e} y R'_{2i}. Algunos autores recomiendan despreciar la reactancia X'_{2e} de la jaula externa porque su valor suele ser pequeño comparado con $\frac{R'_{2e}}{s}$. Otros recomiendan despreciar la reactancia común X'_{2c} y aumentar las reactancias de cada jaula, X'_{2e} y X'_{2i}, para incluir de un modo aproximado sus efectos.

A.3: Motores asíncronos trifásicos de doble jaula

* En este problema, según se desprende de los datos proporcionados por el enunciado, se ha optado por la segunda simplificación (despreciar R'_{2a} y X'_{2c}) y, además, se ha despreciado la rama en paralelo del circuito equivalente de la Fig. 1, pues se indica que se considera que la corriente de vacío I_0 tiene un valor nulo. Por todo esto, el circuito equivalente simplificado que se va utilizar es el representado en la Fig. 3.

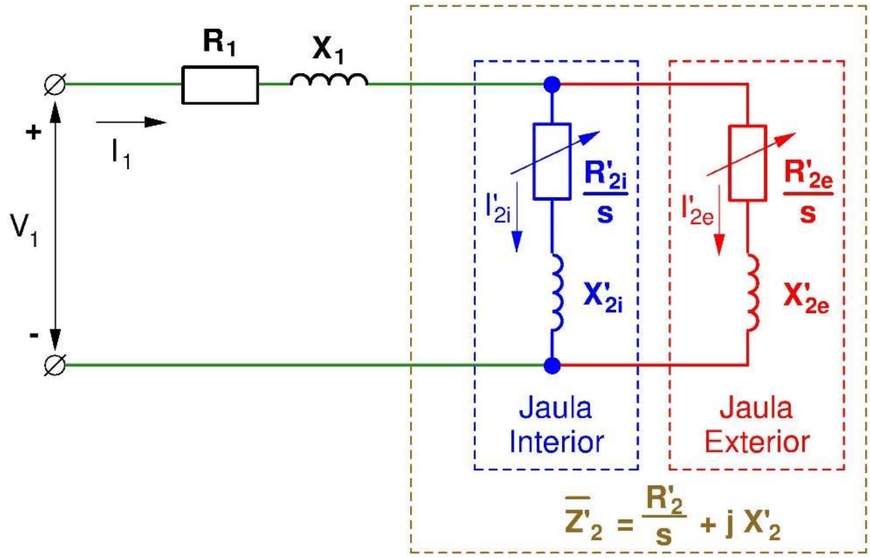


Fig. 3: Circuito equivalente simplificado de un motor asíncrono trifásico de doble jaula

La forma de operar será el calcular para un deslizamiento s determinado la impedancia equivalente $\overline{Z}'_2$ del rotor (de las dos jaulas en paralelo) e identificar esta impedancia con la impedancia $\frac{R'_2}{s} + j\,X'_2$ de un motor de simple jaula. Se resuelve entonces como si el motor fuera de simple jaula (Fig. 4) con estos valores de R'_2 y X'_2.

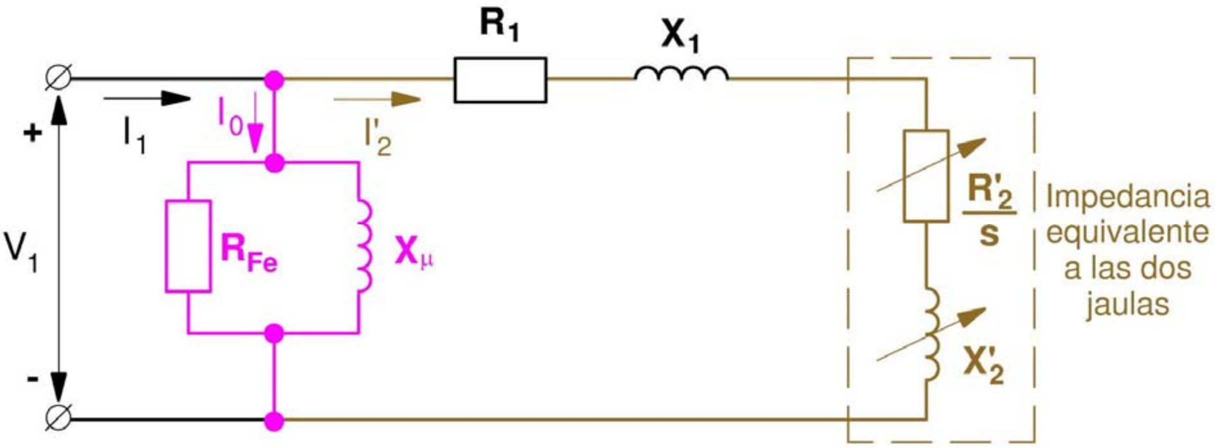


Fig. 4: Circuito equivalente de un motor de doble jaula con resistencia y reactancia del rotor variables con la frecuencia rotórica f_2

Téngase presente que estos valores de R'_2 y X'_2 sólo son válidos para un valor dado del deslizamiento s. Para otro valor del deslizamiento habrá que volver a calcular los valores de los parámetros R'_2 y X'_2 que le corresponden.

En el motor del enunciado, teniendo en cuenta la conexión triángulo del estator, la frecuencia f_1 y el número de pares de polos p, se obtiene que:

$$V_{1N} = V_{1NL} = 400 \text{ V} \qquad\qquad n_1 = \frac{60\ f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

En el arranque (cuando el deslizamiento es $s_a = 1$) se tiene lo siguiente:

$$\frac{R'_{2e}}{s_a} = \frac{3}{1} = 3\ \Omega \qquad\qquad \frac{R'_{2i}}{s_a} = \frac{0{,}6}{1} = 0{,}6\ \Omega$$

En consecuencia, en el arranque la impedancia equivalente a las dos jaulas en paralelo $\overline{Z}'_2$, que en este caso particular se denomina $\overline{Z}'_{2a}$, vale:

$$\overline{Z}'_{2a} = \frac{R'_{2a}}{s_a} + j\,X'_{2a} = \frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{R'_{2e}}{s_a} + j\,X'_{2e}} + \dfrac{1}{\dfrac{R'_{2i}}{s_a} + j\,X'_{2i}}} \tag{2}$$

$$\overline{Z}'_{2a} = \frac{R'_{2a}}{1} + j\,X'_{2a} = \frac{1}{\dfrac{1}{3 + j\,1} + \dfrac{1}{0{,}6 + j\,5}} = 1{,}68 + j\,1{,}54\ \Omega$$

Luego, en el arranque se tiene que:

$\underline{R'_{2a} = 1{,}68\ \Omega}$ $\qquad\qquad$ $\underline{X'_{2a} = 1{,}54\ \Omega}$

El par de arranque se calcula utilizando estos valores en la expresión del par de un motor de simple jaula:

$$M = \frac{m_1 \dfrac{R'_2}{s}}{\dfrac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \dfrac{R'_2}{s}\right)^2 + \left(X_1 + X'_2\right)^2} \tag{3}$$

y poniendo que en el arranque el deslizamiento es $s_a = 1$ y los parámetros del rotor son R'_{2a} y X'_{2a}, se obtiene que el par de arranque M_a vale:

$$M_a = \frac{m_1 \frac{R'_{2a}}{s_a}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_{2a}}{s_a}\right)^2 + (X_1 + X'_{2a})^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{1{,}68}{1}}{\frac{2\pi}{60} 1500} \frac{400^2}{\left(1 + \frac{1{,}68}{1}\right)^2 + (3 + 1{,}54)^2} = 184{,}7 \text{ Nm}$$

* El deslizamiento en condiciones asignadas; es decir, para una velocidad de n_N = 1440 r.p.m., vale

$$s_N = \frac{n_1 - n_N}{n_1} = \frac{1500 - 1440}{1500} = 0{,}04$$

En condiciones asignadas, de la expresión (2), se obtiene que:

$$\frac{R'_{2e}}{s_N} = \frac{3}{0{,}04} = 75 \ \Omega \qquad \frac{R'_{2i}}{s_N} = \frac{0{,}6}{0{,}04} = 15 \ \Omega$$

y, en consecuencia, en estas condiciones la impedancia del rotor reducida al estator toma este valor:

$$\overline{Z}'_{2N} = \frac{R'_{20}}{s_N} + j\,X'_{20} = \frac{1}{\frac{1}{75 + j\,1} + \frac{1}{15 + j\,5}} = 12{,}65 + j\,6{,}45 \ \Omega$$

En las expresiones anteriores R'_{20} y X'_{20} son los valores de los parámetros R'_2 y X'_2 cuando la máquina tiene deslizamientos pequeños, entre los cuales se encuentra el deslizamiento asignado s_N. Es decir, en condiciones asignadas los valores de R'_2 y de X'_2 son, respectivamente, R'_{20} y X'_{20}.

Luego, en condiciones asignadas los parámetros del rotor son;

$$\frac{R'_{20}}{0{,}04} = 12{,}65 \ \Omega \quad \rightarrow \quad \underline{R'_{20} = 0{,}51 \ \Omega}$$

$$\underline{X'_{20} = 3{,}49 \ \Omega}$$

Sustituyendo estos valores de R'_2 y X'_2 en la ecuación del par (3) y poniendo que el deslizamiento es $s_N = 0{,}04$ se obtiene el par asignado M_N de este motor:

$$M_N = \frac{m_1 \dfrac{R'_{2N}}{s_N}}{\dfrac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_{1N}^2}{\left(R_1 + \dfrac{R'_{2N}}{s_N}\right)^2 + \left(X_1 + X'_{2N}\right)^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot 12{,}65}{\dfrac{2\pi}{60} 1500} \frac{400^2}{(1 + 12{,}65)^2 + (3 + 3{,}49)^2} = 169 \text{ Nm}$$

<u>En este motor el par de arranque vale M_a = 185 Nm y el par asignado tiene un valor de M_N = 169 Nm</u>.

<u>NOTA</u>: Obsérvese como en un motor de doble jaula se consigue que la resistencia equivalente del rotor R’$_2$ sea mayor durante el arranque, logrando así mejorar el par y reducir la corriente durante el arranque con respecto a un motor de simple jaula.

b) En los motores de doble jaula para una carga cualquiera, donde los parámetros globales del rotor (del conjunto de las dos jaulas) son R’$_2$ y X’$_2$, se verifica que esta relación siempre da el mismo valor:

$$m = \frac{R'_2 - R'_{20}}{X'_{20} - X'_2} \tag{4}$$

m es el *factor de jaula* del motor considerado y R’$_{20}$ y X’$_{20}$ son los valores de los parámetros R’$_2$ y X’$_2$ cuando la máquina tiene deslizamientos pequeños (incluido el deslizamiento asignado). Es decir, el factor de jaula es una constante de la máquina que se puede obtener mediante la relación (4), independientemente de cual sea el deslizamiento para el cual se han determinado los valores de R’$_2$ y X’$_2$.

En la práctica el factor de jaula se calcula mediante una cualquiera de estas dos relaciones:

$$m = \frac{R'_{2a} - R'_{20}}{X'_{20} - X'_{2a}} \quad ; \qquad m = \frac{R'_{2e} + R'_{2i}}{X'_{2e} + X'_{2i}} \tag{5}$$

R’$_{2a}$ y X’$_{2a}$ son los valores de los parámetros R’$_2$ y X’$_2$ en el arranque; esto es, cuando el deslizamiento vale 1.

Empleando la primera de las relaciones (5) se obtiene que:

$$m = \frac{R'_{2a} - R'_{20}}{X'_{20} - X'_{2a}} = \frac{1{,}68 - 0{,}51}{3{,}49 - 1{,}54} = 0{,}6$$

Alternativamente, se puede utilizar la segunda de las relaciones (5) y se obtiene también que:

$$m = \frac{R'_{2e} + R'_{2i}}{X'_{2e} + X'_{2i}} = \frac{3 + 0{,}6}{1 + 5} = 0{,}6$$

<u>El factor de jaula de este motor vale m = 0,6</u>.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ALGER, P. L. 1970. *Induction machines. Their behavior and uses*. 2ª edición. New York: Gordon and Breach Science Publishers.

[2] CHAPMAN. 2005. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.

[3] CORTES. 1977. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. Tomo III: Máquinas de corriente alterna asíncronas*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.

[4] FAURE BENITO. 2000. *Máquinas y accionamientos eléctricos*. Madrid: Colegio Oficial de Ingenieros Navales y Oceánicos.

[5] FITZGERALD, KINGSLEY Y UMANS. 2004. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw Hill Interamericana.

[6] FOGIEL, M. 1987. *The electrical machines problem solver*. New York. Research and Education Association.

[7] FRAILE MORA, J. 2015. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L.

[8] FRAILE MORA, J. y FRAILE ARDANUY, J. 2015. *Problemas de máquinas eléctricas*. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L

[9] GURRUTXAGA, J. A. 1985. *El fenómeno electromagnético. Tomo IV. Las máquinas eléctricas II*. Santander: Dpto. de publicaciones de la E.T.S.I.C.C.P. de Santander.

[10] IVANOV-SMOLENSKI, A. V. 1984. *Máquinas eléctricas (3 tomos)*. Moscú: Editorial Mir.

[11] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas (2 tomos)*. Moscú: Editorial Mir.

[12] LANGSDORF. 1977. *Teoría de las máquinas de corriente alterna*. Méjico: McGraw-Hill.

[13] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2017. *Arranque de motores asíncronos*. Web del autor en la Universidad de Cantabria: http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm#Asincronas

[14] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2017. *Frenado de máquinas asíncronas o de inducción*. Web del autor en la Universidad de Cantabria: http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm#Asincronas

[15] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2017. *Variación de velocidad en motores asíncronos*. Web del autor en la Universidad de Cantabria: http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm#Asincronas

[16] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2017. *Máquina asíncrona doblemente alimentada*. Web del autor en la Universidad de Cantabria: http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm#Asincronas

[17] MURPHY, J. M. D. & TURNBULL, F. G. 1988. *Power electronic control of AC motors*. Oxford - Gran Bretaña. Pergamon Press.

[18] ORTEGA PLANA. JUAN Mª y RAMÍREZ VAZQUEZ, J. 1991. *Enciclopedia CEAC de la electricidad: Máquinas de corriente alterna*. Barcelona: Ediciones CEAC, S.A.

[19] SANZ FEITO. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Educación.

[20] SERRANO IRIBARNEGARAY. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.

[21] SUÁREZ CREO, J.M. y MIRANDA BLANCO, B.N. 2006. *Máquinas eléctricas. Funcionamiento en régimen permanente*. Santiago de Compostela: Tórculo Edicións, S.L.

Hay más problemas resueltos de máquinas asíncronas incluidos en varios documentos elaborados por el autor, los cuales se indican en las citas bibliográficas [13], [14], [15] y [16]. Todos estos documentos, en formato .pfd, pueden obtenerse gratuitamente en esta dirección web: http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm#Asincronas.