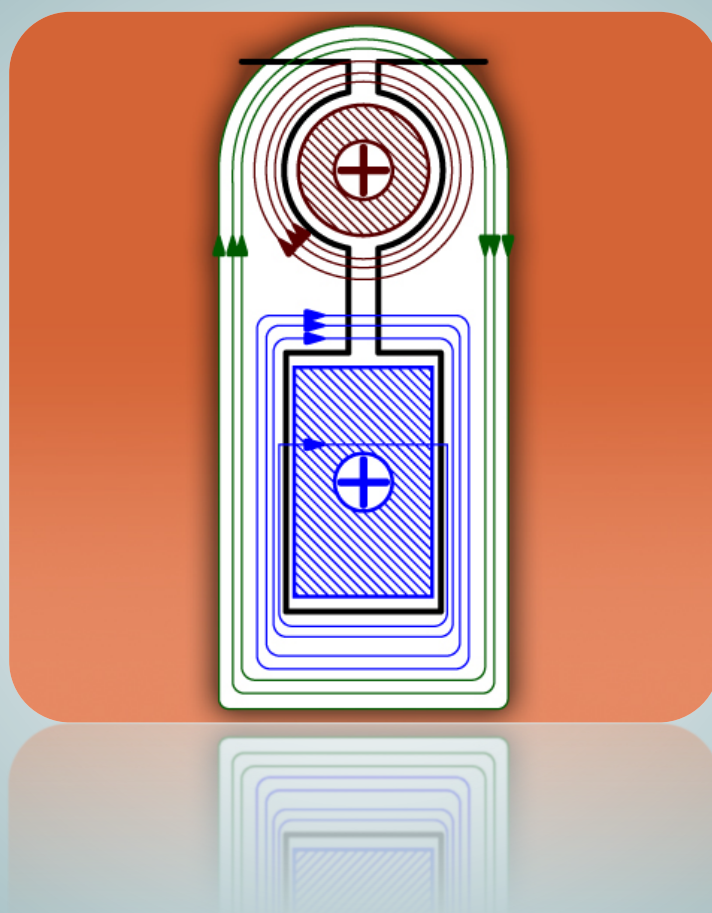


# Máquinas Eléctricas II

Tema 4. Máquinas asíncronas o de inducción.  
Fundamento Teórico del Libro Excel «Calasin4»



**Miguel Ángel Rodríguez Pozueta**

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

# ÍNDICE

## FUNDAMENTO TEÓRICO DEL LIBRO EXCEL “CALASIN4”

Circuito equivalente, corriente del rotor y par .....	1
Cálculo de otras magnitudes .....	5
Caso de rotor bobinado .....	7
Cálculo de magnitudes en varios métodos de arranque.....	8
Arranque estrella triángulo .....	8
Arranque por autotransformador .....	8
Arranque mediante un arrancador electrónico.....	9
Clases NEMA y CEI .....	10

© 2016, Miguel Angel Rodríguez Pozueta.

Universidad de Cantabria (España)



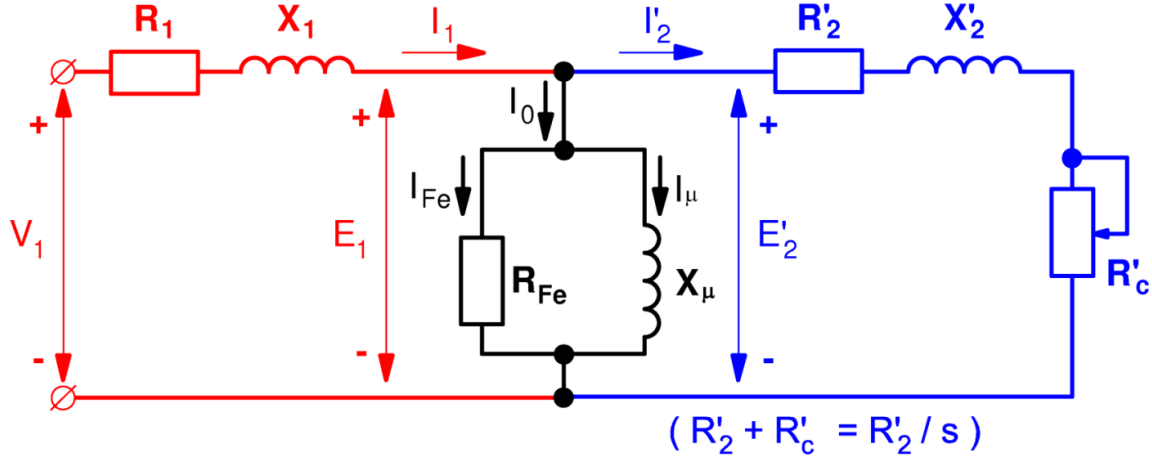
*Está permitida la reproducción total o parcial de este documento bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Unported que incluye, entre otras, la condición inexcusable de citar su autoría (Miguel Angel Rodríguez Pozueta - Universidad de Cantabria) y su carácter gratuito.*

*Puede encontrar más documentación gratuita en la página web del autor:*  
<http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm>

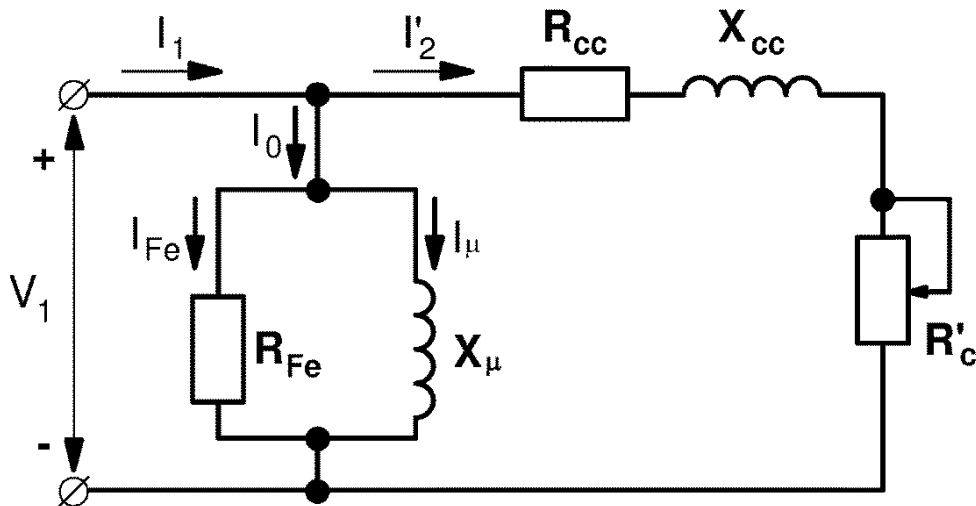
## FUNDAMENTO TEÓRICO DEL LIBRO DE CÁLCULO "CALASIN4"

*Miguel Angel Rodríguez Pozueta*

### CIRCUITO EQUIVALENTE, CORRIENTE DEL ROTOR Y PAR



*Fig. 1: Circuito equivalente exacto de una máquina asíncrona trifásica*



*Fig. 2: Circuito equivalente aproximado de una máquina asíncrona trifásica*

La Fig. 1 representa el circuito equivalente exacto de una máquina asíncrona trifásica. Muchas veces, para simplificar los cálculos, se utiliza el circuito equivalente aproximado de la Fig. 2, en el cual se desprecia el efecto de la caída de tensión producida por la corriente de vacío  $I_0$  en el estator (en  $R_1$  y en  $X_1$ ) de la máquina.

En estas figuras aparecen los siguientes parámetros:

$$R_{cc} = R_1 + R'_2 \quad X_{cc} = X_1 + X'_2 \quad \bar{Z}_{cc} = R_{cc} + j X_{cc} \quad (1)$$

$$R'_c = R'_2 \left( \frac{1}{s} - 1 \right) \quad R_{cc} + R'_c = (R_1 + R'_2) + R'_2 \left( \frac{1}{s} - 1 \right) = R_1 + \frac{R'_2}{s} \quad (2)$$

Usando el circuito equivalente aproximado se obtiene que la corriente del rotor reducida al estator,  $I'_2$ , vale:

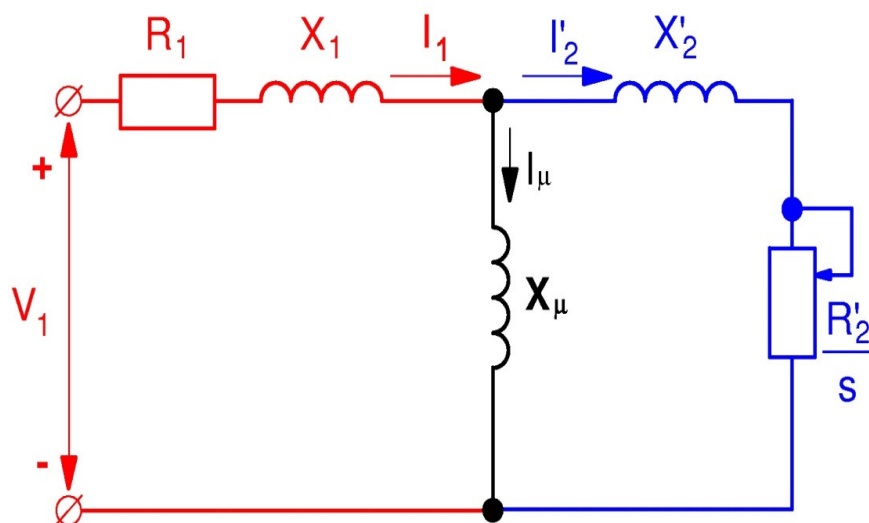
$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} \quad (3)$$

De esta expresión, se deduce que el par  $M$  proporcionado por la máquina en su eje se obtiene así:

$$M = \frac{3 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60}} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} \quad (4)$$

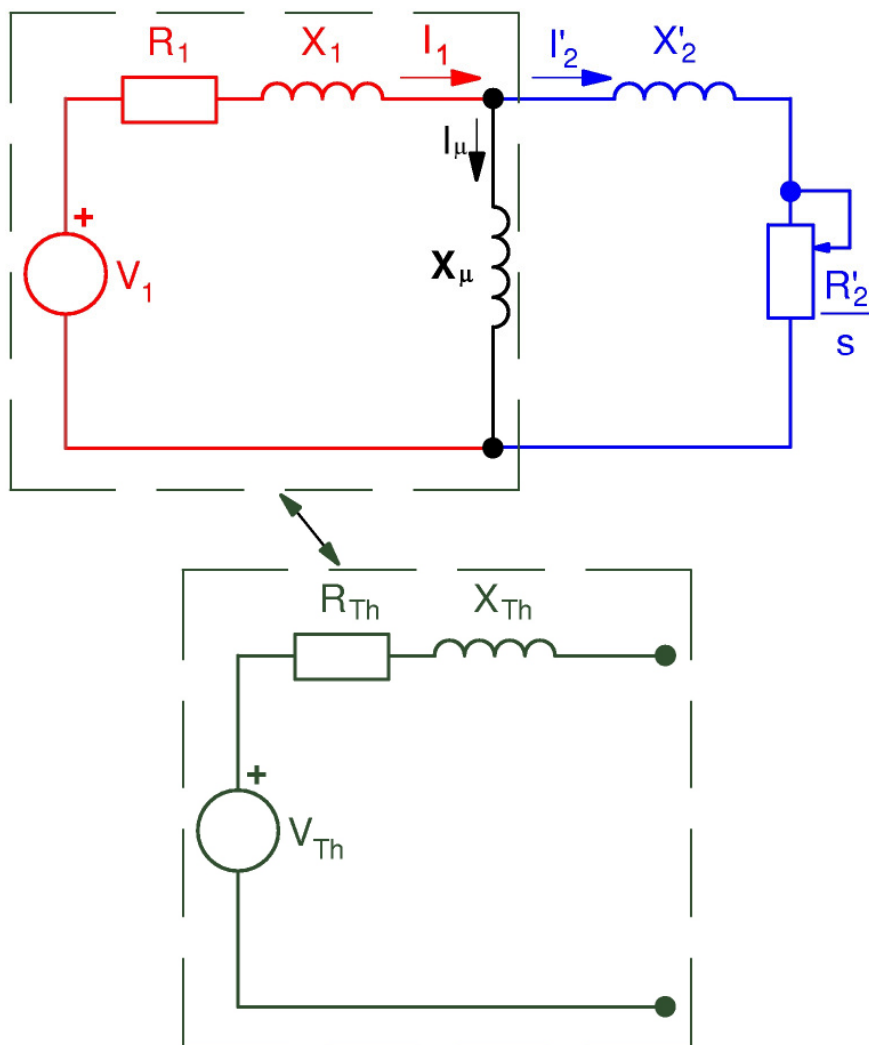
La corriente de vacío  $I_0$  de un motor asíncrono es mucho mayor que la de un transformador de tamaño similar. Esto es debido a que su componente magnetizante  $I_\mu$  debe ser grande porque su circuito magnético tiene entrehierros. Esto hace que en el circuito equivalente aproximado (Fig. 2) el cálculo de la corriente del rotor  $I'_2$  mediante la relación (3), la cual se utiliza para obtener la fórmula (4) del par  $M$ , tenga un cierto error. Vamos a buscar un circuito equivalente simplificado que origine un error más pequeño en el cálculo de la corriente del rotor reducida al estator  $I'_2$ .

En una máquina asíncrona sucede que  $I_\mu \gg I_{Fe}$  ( $I_{Fe}$  es la corriente de pérdidas en el hierro) por lo que no se cometerá mucho error en el cálculo de la corriente del rotor reducida al estator,  $I'_2$ , si se desprecia  $I_{Fe}$  frente a  $I_\mu$  y se parte de un circuito equivalente (Fig. 3) en el que se ha quitado la resistencia de pérdidas en el hierro  $R_{Fe}$  al circuito equivalente exacto (Fig. 1):

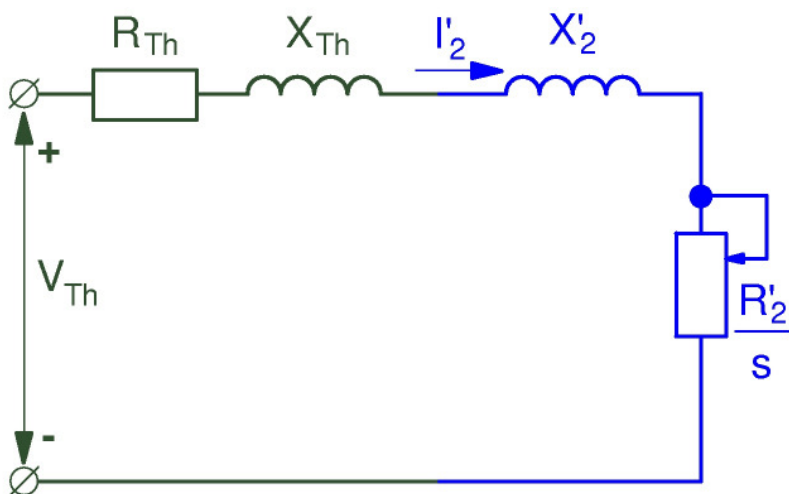


**Fig. 3:** Circuito equivalente en el que se ha suprimido la resistencia  $R_{Fe}$  al circuito equivalente exacto (Fig. 1) de una máquina asíncrona

Utilizando el circuito equivalente de Thevenin del conjunto de la impedancia estator y de la reactancia magnetizante se obtiene un circuito equivalente simplificado (Figs. 4 y 5) con una sola rama con resistencias y reactancias en serie.



*Fig. 4: Obtención del circuito equivalente simplificado Thevenin*



*Fig. 5: Circuito equivalente simplificado Thevenin*

Comparando las Figs. 2 y 5 se observa que la corriente  $I'_2$  y el par  $M$  se pueden calcular con más precisión si se siguen usando las relaciones (3) y (4), pero sustituyendo las magnitudes del estator  $V_1$ ,  $R_1$  y  $X_1$  por las magnitudes  $V_{Th}$ ,  $R_{Th}$  y  $X_{Th}$ , respectivamente:

$$X_{Thcc} = X_{Th} + X'_2 \quad (5)$$

$$I'_2 = \frac{V_{Th}}{\sqrt{\left(R_{Th} + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{Thcc}^2}} \quad M = \frac{3 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60}} \frac{V_{Th}^2}{\left(R_{Th} + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{Thcc}^2} \quad (6)$$

Los parámetros del circuito equivalente de la Fig. 5 se calculan así:

$$\bar{Z}_1 = R_1 + jX_1$$

$$\bar{c}_1 = 1 + \frac{\bar{Z}_1}{jX_\mu} = \frac{R_1 + j(X_1 + X_\mu)}{jX_\mu} \rightarrow \boxed{c_1 = |\bar{c}_1| = \frac{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_\mu)^2}}{X_\mu}} \quad (7)$$

$$\bar{V}_{Th} = \bar{V}_1 \frac{jX_\mu}{R_1 + j(X_1 + X_\mu)} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{c}_1} \rightarrow \boxed{V_{Th} = \frac{V_1}{c_1}} \quad (8)$$

$$\frac{1}{\bar{Z}_{Th}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{jX_\mu} \rightarrow \bar{Z}_{Th} = \frac{jX_\mu (R_1 + jX_1)}{R_1 + j(X_1 + X_\mu)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{c}_1} \rightarrow \boxed{Z_{Th} = \frac{Z_1}{c_1}} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{Th} &= \frac{jX_\mu (R_1 + jX_1)}{R_1 + j(X_1 + X_\mu)} \cdot \frac{R_1 - j(X_1 + X_\mu)}{R_1 - j(X_1 + X_\mu)} = \\ &= \frac{jX_\mu \left[ R_1^2 - j(R_1 X_1 + R_1 X_\mu) + jR_1 X_1 + (X_1^2 + X_1 X_\mu) \right]}{R_1^2 + (X_1 + X_\mu)^2} = \\ &= \frac{jX_\mu R_1^2 + R_1 X_\mu^2 + jX_\mu (X_1^2 + X_1 X_\mu)}{R_1^2 + (X_1 + X_\mu)^2} \end{aligned}$$

$$R_{Th} = \Re \{ \bar{Z}_{Th} \} = \frac{R_1 X_\mu^2}{R_1^2 + (X_1 + X_\mu)^2} \rightarrow \boxed{R_{Th} = \frac{R_1}{c_1^2}} \quad (10)$$

$$\bar{Z}_{Th} = R_{Th} + jX_{Th} \rightarrow \boxed{X_{Th} = \sqrt{Z_{Th}^2 - R_{Th}^2}} \quad (11)$$

Adviértase que si en estas expresiones (ecuaciones (5) a (11)) se hace que el parámetro  $c_1$  valga 1 ( $c_1 = 1$ ) volvemos a encontrarnos con los parámetros y ecuaciones (ecuaciones (3) y (4)) del circuito equivalente aproximado de la Fig. 2.

El parámetro  $X_{Th}$  también se puede obtener así:

$$X_{Th} = \mathcal{I}_m \{ \bar{Z}_{Th} \} = \frac{X_\mu R_1^2 + X_\mu X_1^2 + X_\mu^2 X_1}{R_1^2 + (X_1 + X_\mu)^2} = \frac{\frac{R_1^2}{X_\mu} + \frac{X_1^2}{X_\mu} + X_1}{\frac{R_1^2 + (X_1 + X_\mu)^2}{X_\mu^2}} \rightarrow \boxed{X_{Th} = \frac{\frac{Z_1^2}{X_\mu} + X_1}{c_1^2}} \quad (12)$$

### CÁLCULO DE OTRAS MAGNITUDES

- Velocidad de sincronismo en r.p.m.: 
$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} \quad (13)$$

- Velocidad de sincronismo en rad/s: 
$$\Omega_1 = \frac{2\pi f_1}{p} \quad (14)$$

- Deslizamiento: 
$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad (15)$$

- Deslizamiento de par máximo: 
$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_{Th}^2 + X_{Thcc}^2}} \quad (16)$$

- Velocidad de par máximo en r.p.m.: 
$$n_m = n_1 (1 - s_m) \quad (17)$$

- Resistencia adicional a introducir en serie con cada una de las fases del rotor de un motor de anillos para conseguir el par máximo en el arranque:

- Valor reducido al estator: 
$$R'_{adic} = \sqrt{R_{Th}^2 + X_{Thcc}^2} - R'_2 \quad (18)$$

- Valor real: Ver las relaciones (33b)

- Corriente de vacío (valor de fase): 
$$I_0 \approx I_\mu = \frac{V_{Th}}{X_\mu} \quad (19)$$

- Impedancia equivalente a todo el circuito de la Fig. 3:

$$\bar{Z}_{total} = R_{total} + j X_{total} \quad Z_{total} = \sqrt{R_{total}^2 + X_{total}^2} \quad (20a)$$

Esta impedancia no es constante, es función del deslizamiento  $s$ . Para obtenerla se calcula primero la impedancia  $Z_p$  del conjunto de la impedancia del rotor y la reactancia  $X_\mu$  en paralelo (ver el siguiente apartado).  $Z_{total}$  es el resultado de poner la impedancia del estator en serie con  $Z_p$ :

$$R_{total} = R_1 + R_p \quad X_{total} = X_1 + X_p \quad (20b)$$

- Impedancia equivalente del conjunto de la impedancia del rotor y la reactancia magnetizante  $X_\mu$  en paralelo 
$$\bar{Z}_p = R_p + j X_p \quad (21a)$$

Esta impedancia no es constante, ya que, al igual que  $Z_{total}$ , es función del deslizamiento  $s$ . Para obtenerla se puede seguir un procedimiento similar al utilizado anteriormente para el cálculo de  $Z_{Th}$ :

$$\bar{c}_2 = 1 + \frac{\frac{R'_2}{s} + j X'_2}{j X_\mu} \rightarrow c_2 = |\bar{c}_2| = \frac{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X'_2 + X_\mu)^2}}{X_\mu} \quad (21b)$$

$$Z_p = \frac{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s}\right)^2 + X'^2_2}}{c_2} \quad (21c)$$

$$R_p = \frac{\frac{R'_2}{s}}{c^2_2} \quad X_p = \sqrt{Z^2_p - R^2_p} \quad (21d)$$

- Factor de potencia y corriente de fase del estator:

$$\cos \varphi_1 = \frac{R_{total}}{Z_{total}} \quad I_1 = \frac{V_1}{Z_{total}} \quad (22)$$

En estos cálculos se está despreciando la no linealidad del circuito magnético, luego se está suponiendo que la reactancia magnetizante  $X_\mu$  conserva siempre el mismo valor. También se desprecian las pérdidas en el hierro y las pérdidas mecánicas. Por lo tanto, el cálculo de estas magnitudes de esta manera conlleva cierto error.

- Velocidad en r.p.m.:  $n = n_1 (1 - s) \quad (23)$

- Velocidad en rad/s:  $\Omega = \frac{2\pi}{60} n \quad (24)$

- Tensión de fase en cada resistencia externa  $R_x$  puesta en serie con una fase del rotor:

- Valor de fase reducido al estator:  $V'_2 = R'_x \cdot I'_2 \quad (25)$

- Valor de fase real: Ver las relaciones (33a)

- Potencia disipada en las resistencias externas conectadas en serie con el devanado del rotor:  $P_2 = 3 \cdot R'_x \cdot I'^2_2 \quad (26)$

- Potencia de pérdidas en el cobre en el estator y en el rotor:

$$P_{Cu1} = 3 \cdot R_1 \cdot I^2_1 \quad P_{Cu2} = 3 \cdot R'_2 \cdot I'^2_2 \quad (27)$$

- Potencia de pérdidas en el cobre en el estator en vacío:

$$P_{Cu0} = 3 \cdot R_1 \cdot I^2_0 \quad (28)$$

- Potencia del entrehierro ( $P_a$ ) y potencia mecánica interna ( $P_{mi}$ ) (que es aproximadamente igual a la potencia útil):

$$P_a = 3 I'^2_2 \frac{R'_2}{s} \quad P_{mi} = 3 I'^2_2 R'_2 \left( \frac{1}{s} - 1 \right) \quad (29)$$



- Relación entre los valores de línea ( $V_L$ ) y de fase ( $V$ ) de las tensiones de un sistema trifásico equilibrado:
  - Conexión estrella:  $V_L = \sqrt{3} V$  (30a)
  - Conexión triángulo:  $V_L = V$  (30b)
- Relación entre los valores de línea ( $I_L$ ) y de fase ( $I$ ) de las corrientes de un sistema trifásico equilibrado:
  - Conexión estrella:  $I_L = I$  (31a)
  - Conexión triángulo:  $I_L = \sqrt{3} I$  (31b)

Los valores de las magnitudes de la máquina cuando el par es máximo se obtienen mediante las fórmulas anteriores si en ellas se da al deslizamiento  $s$  el valor  $s_m$ .

Los valores de las magnitudes de la máquina en el arranque se obtienen mediante las fórmulas anteriores si en ellas se da al deslizamiento  $s$  el valor 1.

### CASO DE ROTOR BOBINADO

En las máquinas asíncronas de rotor bobinado y colector de anillos las relaciones de transformación de tensiones  $m_v$  y de corrientes  $m_i$  son iguales:

$$m_v = m_i \quad (32)$$

Si se conocen estas relaciones de transformación es posible calcular los verdaderos valores de las magnitudes del rotor y no sólo sus valores reducidos al estator:

$$V_2 = \frac{V'_2}{m_v} \quad I_2 = m_i \cdot I'_2 \quad (33a)$$

$$R_2 = \frac{R'_2}{m_v \cdot m_i} \quad R_x = \frac{R'_x}{m_v \cdot m_i} \quad R_{adic} = \frac{R'_{adic}}{m_v \cdot m_i} \quad (33b)$$

En el caso de que se conecte una resistencia  $R_x$  en serie con cada fase del rotor es preciso modificar todas las fórmulas (excepto la (18)) reemplazando en ellas el valor de  $R'_2$  por la suma  $R'_2 + R'_x$ .

$R_{adic}$  es un valor particular de  $R_x$  que hace que el par máximo se produzca en el arranque.

## **CÁLCULO DE MAGNITUDES EN VARIOS MÉTODOS ARRANQUE**

En todos los métodos de arranque que se van a mencionar seguidamente se supone que el rotor permanece en cortocircuito (es decir,  $R_x = 0$ ).

### **Arranque estrella triángulo**

Para que se pueda utilizar el método de arranque estrella-triángulo la red que alimenta al motor debe tener una tensión de línea igual a la tensión asignada de fase del motor. De esta manera el estator debería estar conectado en triángulo para que sus fases estuvieran sometidas a su tensión asignada. Se cumplen las siguientes relaciones:

$$V_{1redL} = V_1 \quad (34a)$$

Arranque con conexión triángulo:

$$I_a \approx I'_{2a} = \frac{V_{Th}}{\sqrt{(R_{Th} + R'_2)^2 + X_{Thcc}^2}} \quad I_{aL} \approx I'_{2aL} = \sqrt{3} I'_{2a} \quad (34b)$$

$$M_a = \frac{3 \cdot R'_2 \cdot I_{2a}^2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \quad (34c)$$

Arranque con conexión estrella:

$$I_{a\lambda} = I_{a\lambda L} = \frac{I_{aL}}{3} \quad M_{a\lambda} = \frac{M_a}{3} \quad (34d)$$

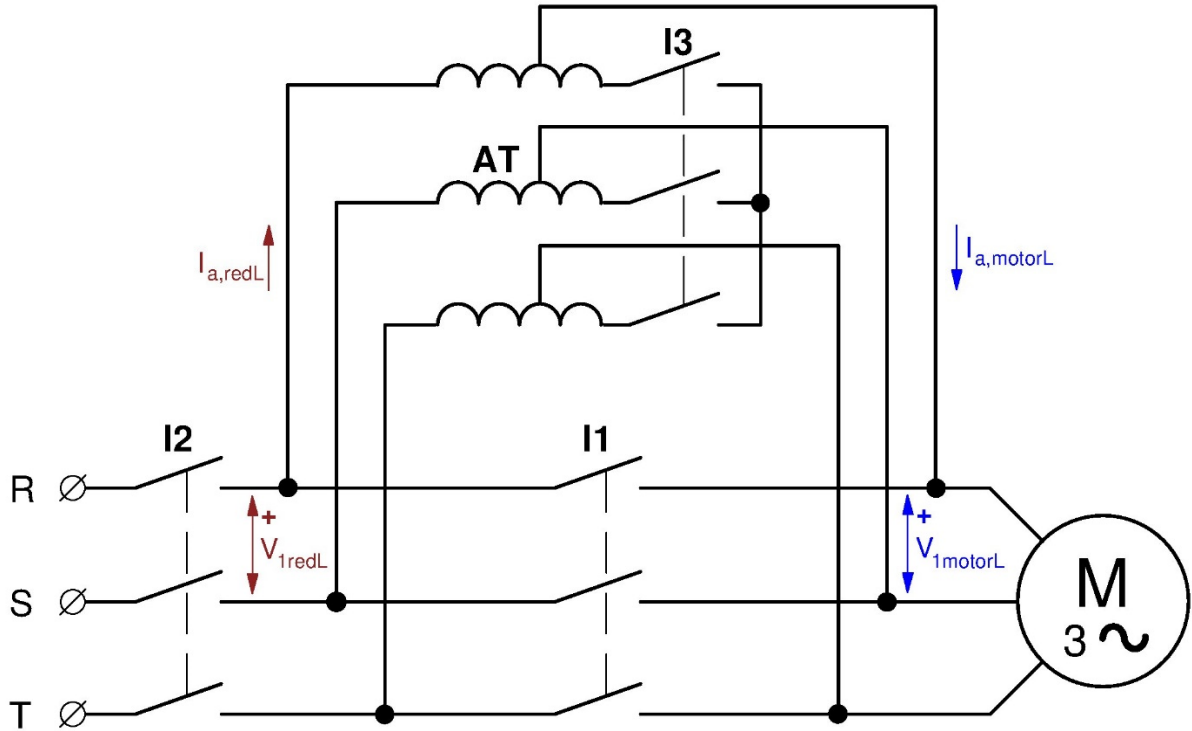
En la fórmula (34a) el valor de  $V_1$  que utiliza CALASIN es la tensión de fase que calcula inicialmente a partir de los datos de tensión de línea  $V_{1L}$  y la conexión del estator de la máquina. En las fórmulas (34d)  $I_{aL}$  y  $M_a$  son, respectivamente, la corriente de línea y el par de arranque en triángulo.

### **Arranque por autotransformador**

En el arranque por autotransformador (Fig. 6) la máquina se alimenta con una tensión reducida, cuyo valor de línea es  $V_{1motorL}$ , que le suministra un autotransformador cuyo primario está conectado a una red de tensión de línea  $V_{1redL}$  (CALASIN da a  $V_{1redL}$  el mismo valor que el de la tensión de línea  $V_{1L}$  introducida como dato inicial). Se denomina  $x$  a la relación (inferior a la unidad) entre estas dos tensiones.

En este método la conexión –estrella o triángulo– del estator de la máquina permanece invariable.

En este caso se verifican las siguientes relaciones:



*Fig. 6: Arranque con autotransformador*

$$V_{1redL} = V_{1L} \quad x = \frac{V_{1motorL}}{V_{1redL}} \quad (35a)$$

$$I_{a,aut} = I_{a,red} = x^2 I_a \quad I_{a,motor} = \frac{I_{a,red}}{x} \quad (35b)$$

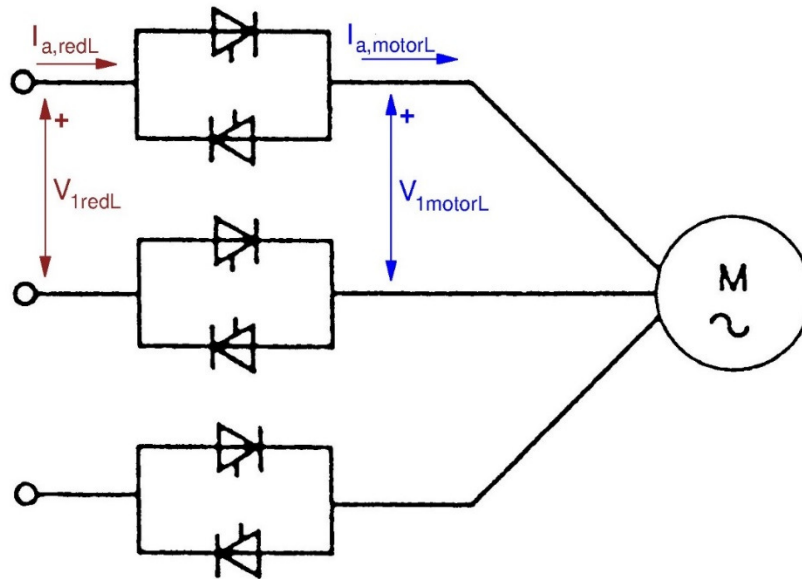
$$M_{a,aut} = x^2 M_a \quad (35c)$$

En las fórmulas anteriores  $I_a$  y  $M_a$  son, respectivamente, la corriente de fase y el par en el arranque directo a la tensión  $V_{1redL}$ . Por otra parte,  $I_{a,motor}$  e  $I_{a,motorL}$  son los valores eficaces de las corrientes de fase y de línea, respectivamente, que circulan por las fases del estator de la máquina. Además, el valor eficaz de la corriente de línea que circula por la red eléctrica que alimenta al primario del autotransformador es  $I_{a,autL} = I_{a,redL}$  y su respectivo valor de fase, supuesta la misma conexión -estrella o triángulo- que en el estator, es  $I_{a,aut} = I_{a,red}$ . Por otra parte,  $M_{a,aut}$  es el par de arranque cuando el motor recibe la tensión reducida  $V_{1motorL}$  que le proporciona el autotransformador.

### Arranque mediante un arrancador electrónico

Al igual que en el arranque por autotransformador este es un método de arranque en el que el motor recibe una tensión reducida que, en este caso, le suministra un arrancador electrónico (Fig. 7). La conexión del estator del motor permanece invariable.

Ahora se verifican las siguientes relaciones:



*Fig. 7: Arranque mediante un arrancador electrónico*

$$V_{1redL} = V_{1L} \quad x = \frac{V_{1motorL}}{V_{1redL}} \quad (36a)$$

$$I_{a,elect} = I_{a,red} = x I_a \quad I_{a,motor} = I_{a,red} \quad (36b)$$

$$M_{a,elect} = x^2 M_a \quad (36c)$$

De forma similar al arranque por autotransformador, en las fórmulas anteriores  $I_a$  y  $M_a$  son, respectivamente, la corriente de fase y el par en el arranque directo a la tensión  $V_{1redL}$ . Por otra parte,  $I_{a,motor}$  e  $I_{a,motorL}$  son los valores eficaces de las corrientes de fase y de línea, respectivamente, que circulan por las fases del estator de la máquina. Además, el valor eficaz de la corriente de línea que circula por la red eléctrica que alimenta al arrancador electrónico es  $I_{a,electL} = I_{a,redL}$  y su respectivo valor de fase, supuesta la misma conexión -estrella o triángulo- que en el estator, es  $I_{a,elect} = I_{a,red}$ . Por otra parte,  $M_{a,elect}$  es el par de arranque cuando el motor recibe la tensión reducida  $V_{1motorL}$  que le proporciona el arrancador.

## CLASES NEMA Y CEI

La *National Electrical Manufacturers Association* (NEMA), que es una asociación de fabricantes norteamericanos de máquinas eléctricas, y el *Comité Electrotécnico Internacional* (CEI o IEC), han clasificado los motores asíncronos trifásicos según el diseño de su rotor. A estos diseños corresponden las curvas de par representadas en la Fig. 8 y el reparto aproximado de  $X_{cc}$  entre  $X_1$  y  $X'_2$  indicado en la Tabla I.

Los diseños NEMA más importantes son:

- **Motores de inducción de clase A:** Son motores de simple jaula, en los que apenas se da el efecto pelicular, con barras de gran sección y, consecuentemente, de baja resistencia.

- Motores de inducción de clase B: Son motores de ranura profunda. Aunque su par de arranque es casi igual al de los motores de clase A (es ligeramente inferior), su corriente de arranque es menor. Estos motores son equivalentes a los de la clase N de la CEI.
- Motores de inducción clase C: Son motores de doble jaula o de ranura profunda. Tienen mayor par de arranque que los motores A y B y presentan menor par máximo y mayores deslizamientos de plena carga y de par máximo que los motores A y B. Estos motores son equivalentes a los de la clase H de la CEI.
- Motores de inducción de clase D: Son motores de simple jaula en los que las barras del rotor son de pequeña sección y están construidas con un metal de alta resistividad. Esto hace que su resistencia sea elevada, lo que origina que el deslizamiento de par máximo sea muy alto, así como el correspondiente a la plena carga.

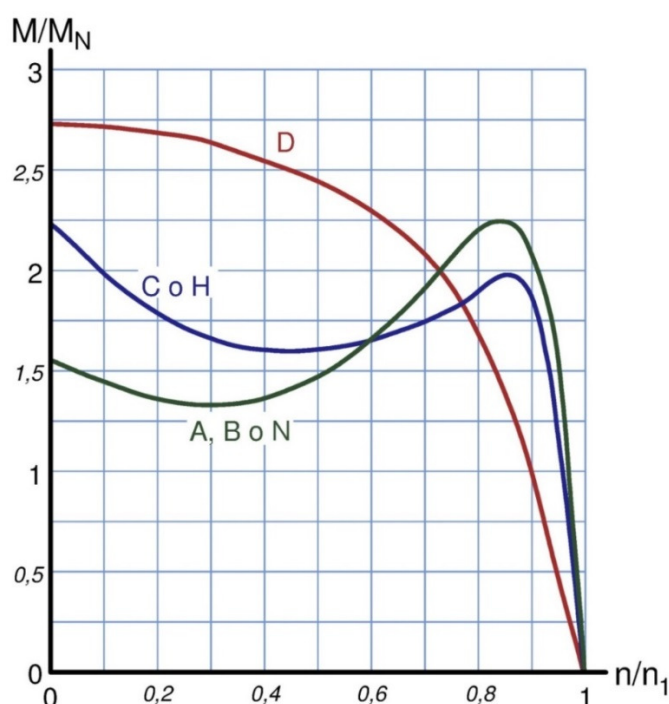


Fig. 8: Curvas par-velocidad para los diseños NEMA A, B, C y D y CEI N y H

Tabla I: Distribución empírica de reactancias según NEMA. Valores en fracciones respecto  $X_{cc}$

CLASE DE MOTOR	$X_1$	$X'_2$
A	0,5	0,5
B	0,4	0,6
C	0,3	0,7
D	0,5	0,5
Rotor bobinado	0,5	0,5