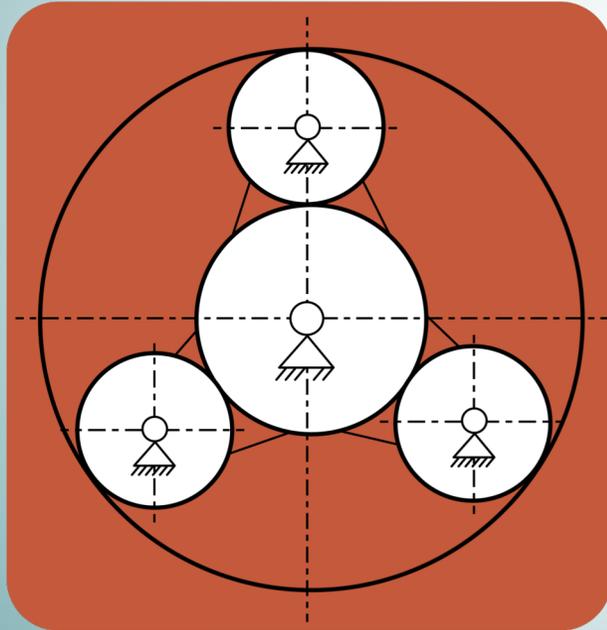


# Máquinas y Mecanismos

## 12. Engranajes Cilíndricos



**Alfonso Fernández del Rincón**  
**Pablo García Fernández**

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

Este material se publica bajo licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



## Epígrafes del tema

12.1 Ley General de Engrane.

12.2 Engranajes de Perfil de Evolvente.

12.3 Propiedades analíticas del perfil de Evolvente.

### Duración estimada

3 horas

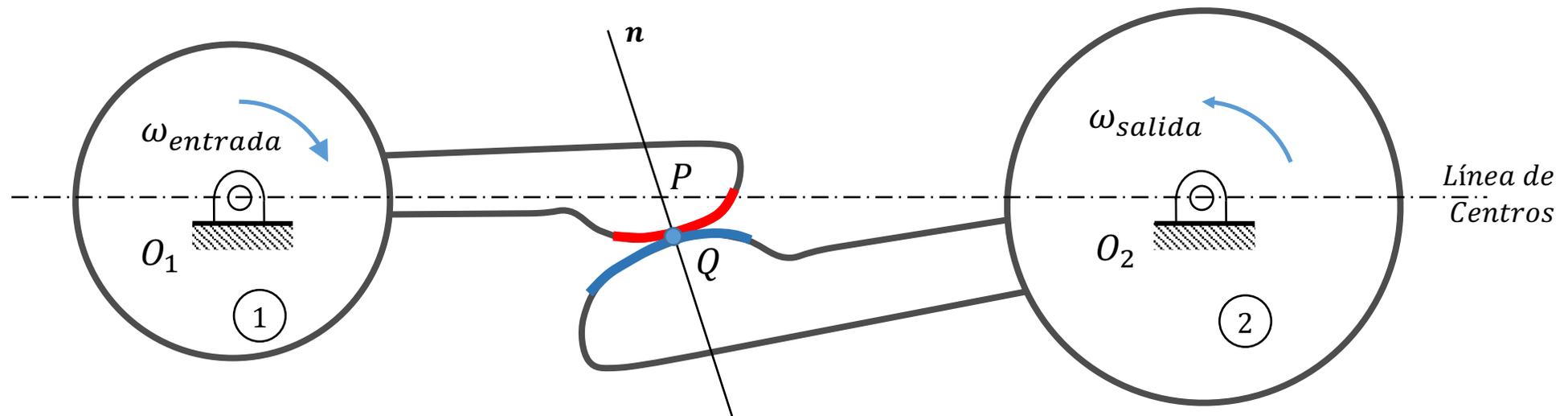
### Modalidades organizativas

- Clases teóricas: 2 hora
- Prácticas de aula: 1 horas
- Prácticas de laboratorio: 0 horas

La necesidad de transmitir pares elevados mediante “palancas” dispuestas alrededor de un cuerpo cilíndrico presenta inconvenientes a la hora de conseguir una relación de transmisión constante.

$$\mu = \frac{\omega_{salida}}{\omega_{entrada}} = \text{cte}$$

**Objetivo:** definir que condiciones deben cumplir los perfiles de las “palancas” ( $\xi_1$  y  $\xi_2$ ?) para conseguir que la relación de transmisión sea constante.

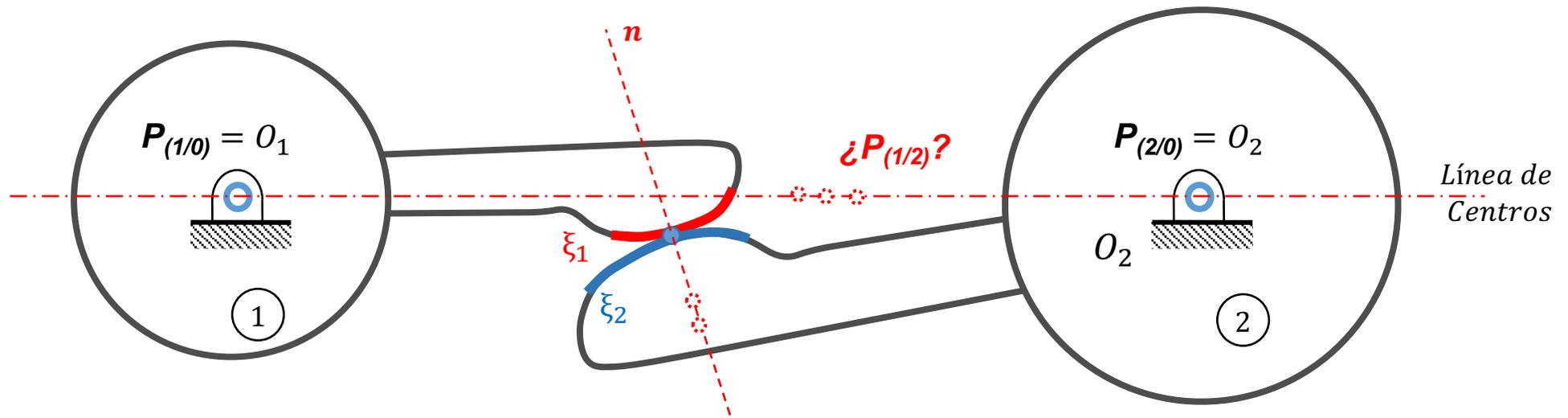


**Enunciado:** “La normal a los perfiles ( $n$ ) en el punto de contacto ( $Q$ ) debe pasar por un punto fijo de la línea de centros ( $P$ ). A ese punto se le denomina **punto primitivo**”. Si se verifica la ley general del engrane, la relación de transmisión de los perfiles es constante.

## Demostración:

Disponemos de tres (3) elementos (el elemento  $0$  (fijo), el elemento  $1$  y el elemento  $2$ ; dos (2) pares rotación (en  $O_1$  y  $O_2$ ) y un (1) par leva (definido por el contacto entre los perfiles  $\xi_1$  y  $\xi_2$  pertenecientes a los cuerpos  $1$  y  $2$ ).

$$\left. \begin{array}{l} O_1 = P_{(1/0)} \\ O_2 = P_{(2/0)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{T}^{\text{ma}} \text{ ARONHOLD-KENNEDY}} P_{(1/2)} \in \overline{O_1 O_2}$$

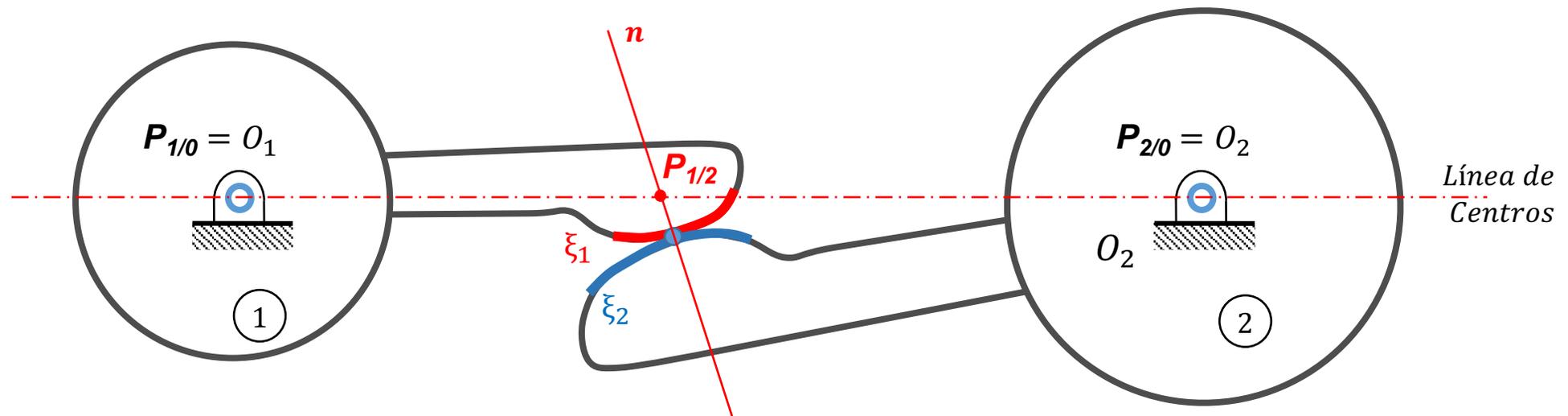


Como no existe penetración ni separación, la única posibilidad de movimiento entre 1 y 2 es el deslizamiento paralelo a la tangente ( $t$ ) a los perfiles en el punto de contacto. Como consecuencia podemos concluir que  $\xrightarrow{\quad} P_{(1/2)} \in n$

## Demostración:

Por lo tanto, el polo del movimiento relativo  $P_{(1/2)}$  se encuentra en la intersección de la línea de centros ( $O_1O_2$ ) y la normal ( $n$ ) a los perfiles en el punto de contacto. Además, dado que es el polo, su velocidad como perteneciente al elemento 1 debe ser la misma que la velocidad como perteneciente al elemento 2.

$$\vec{v}_{P_{1/2}(1/0)} = \vec{v}_{P_{1/2}(2/0)} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{P_{1/0}(1/0)} + \vec{\omega}_{(1/0)} \times \overrightarrow{P_{1/0}P_{1/2}} = \vec{v}_{P_{2/0}(2/0)} + \vec{\omega}_{(2/0)} \times \overrightarrow{P_{2/0}P_{1/2}}$$



$$\vec{\omega}_{(1/0)} \times \overrightarrow{P_{1/0}P_{1/2}} = \vec{\omega}_{(2/0)} \times \overrightarrow{P_{2/0}P_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\vec{\omega}_{(1/0)}}{\vec{\omega}_{(2/0)}} = \frac{\overrightarrow{P_{2/0}P_{1/2}}}{\overrightarrow{P_{1/0}P_{1/2}}}$$

Para que sea constante,  $P_{(1/2)}$  debe permanecer fijo

Los perfiles  $\xi_1$  y  $\xi_2$  que verifican la ley general de engrane se denominan “**Perfiles Conjugados**” y el polo  $P_{(1/2)}$  es el “**punto primitivo**”.

## ¿Cómo construir perfiles conjugados?

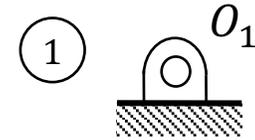
Datos:  $\xi_1, \mu, O_1$  y  $O_2$ ;      Incógnita:  $\xi_2$ ?

1.- A partir de la relación de transmisión  $\mu$  y de la distancia entre centros ( $d=O_1O_2$ ) podemos determinar los radios de los cilindros rodantes equivalentes resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{\vec{\omega}_{(2/0)}}{\vec{\omega}_{(1/0)}} = \frac{R_1}{R_2} \\ R_1 + R_2 &= d \end{aligned} \right\} \rightarrow R_1, R_2 \rightarrow P_{1/2}$$

2.- Unimos el perfil  $\xi_1$  a la rueda de radio  $R_1$ .

3.- Tomamos un punto  $a_1$  cualquiera en el perfil  $\xi_1$  y trazamos la normal  $n_1$ , obteniendo el punto  $c_1$  en la intersección con la circunferencia de radio  $R_1$ .



## ¿Cómo construir perfiles conjugados?

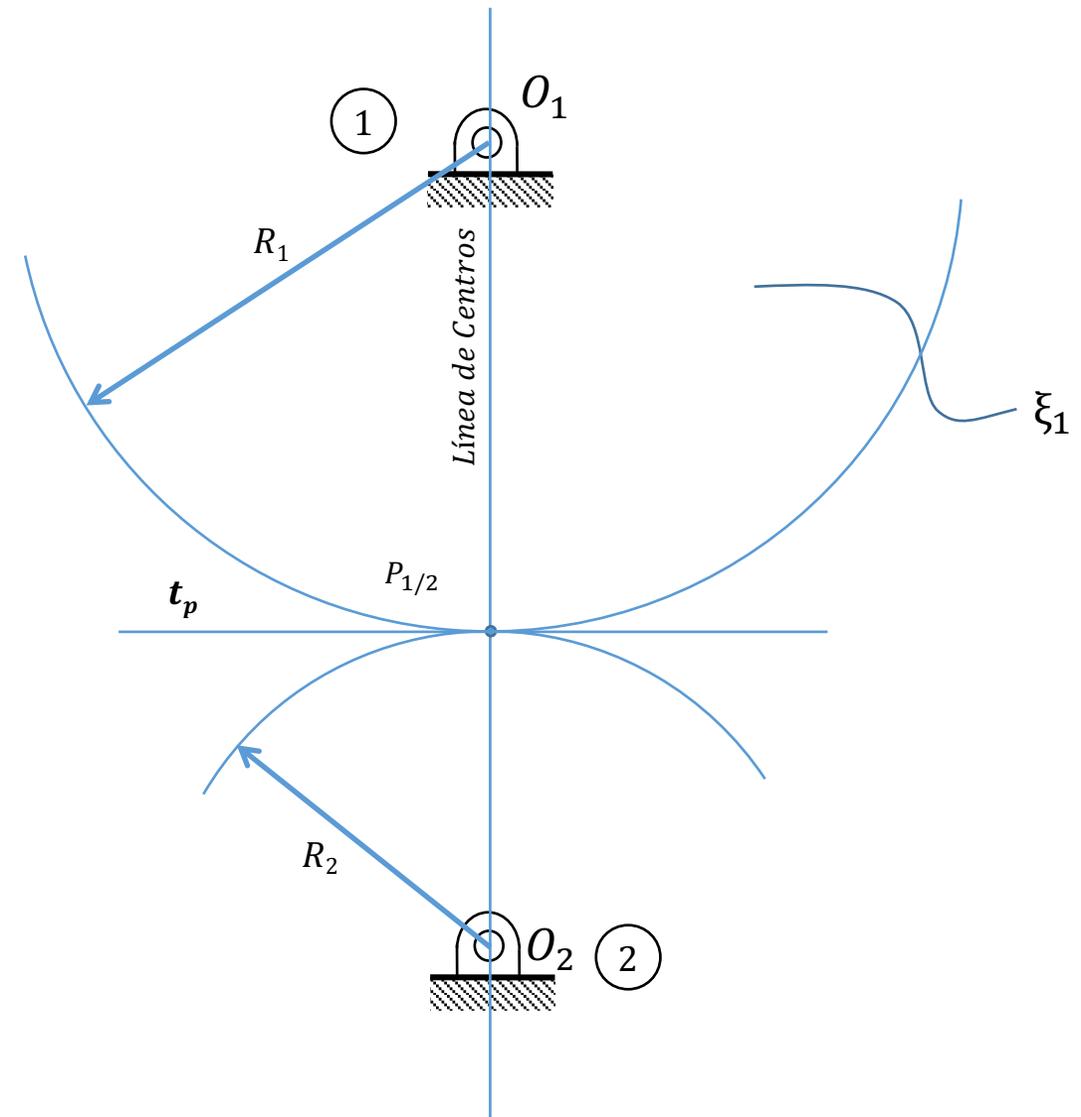
Datos:  $\xi_1, \mu, O_1$  y  $O_2$ ;      Incógnita:  $\xi_2$ ?

1.- A partir de la relación de transmisión  $\mu$  y de la distancia entre centros ( $d=O_1O_2$ ) podemos determinar los radios de los cilindros rodantes equivalentes resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{\vec{\omega}_{(2/0)}}{\vec{\omega}_{(1/0)}} = \frac{R_1}{R_2} \\ R_1 + R_2 &= d \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_1, R_2 \Rightarrow P_{1/2}$$

2.- Unimos el perfil  $\xi_1$  a la rueda de radio  $R_1$ .

3.- Tomamos un punto  $a_1$  cualquiera en el perfil  $\xi_1$  y trazamos la normal  $\mathbf{n}_1$ , obteniendo el punto  $c_1$  en la intersección con la circunferencia de radio  $R_1$ .



## ¿Cómo construir perfiles conjugados?

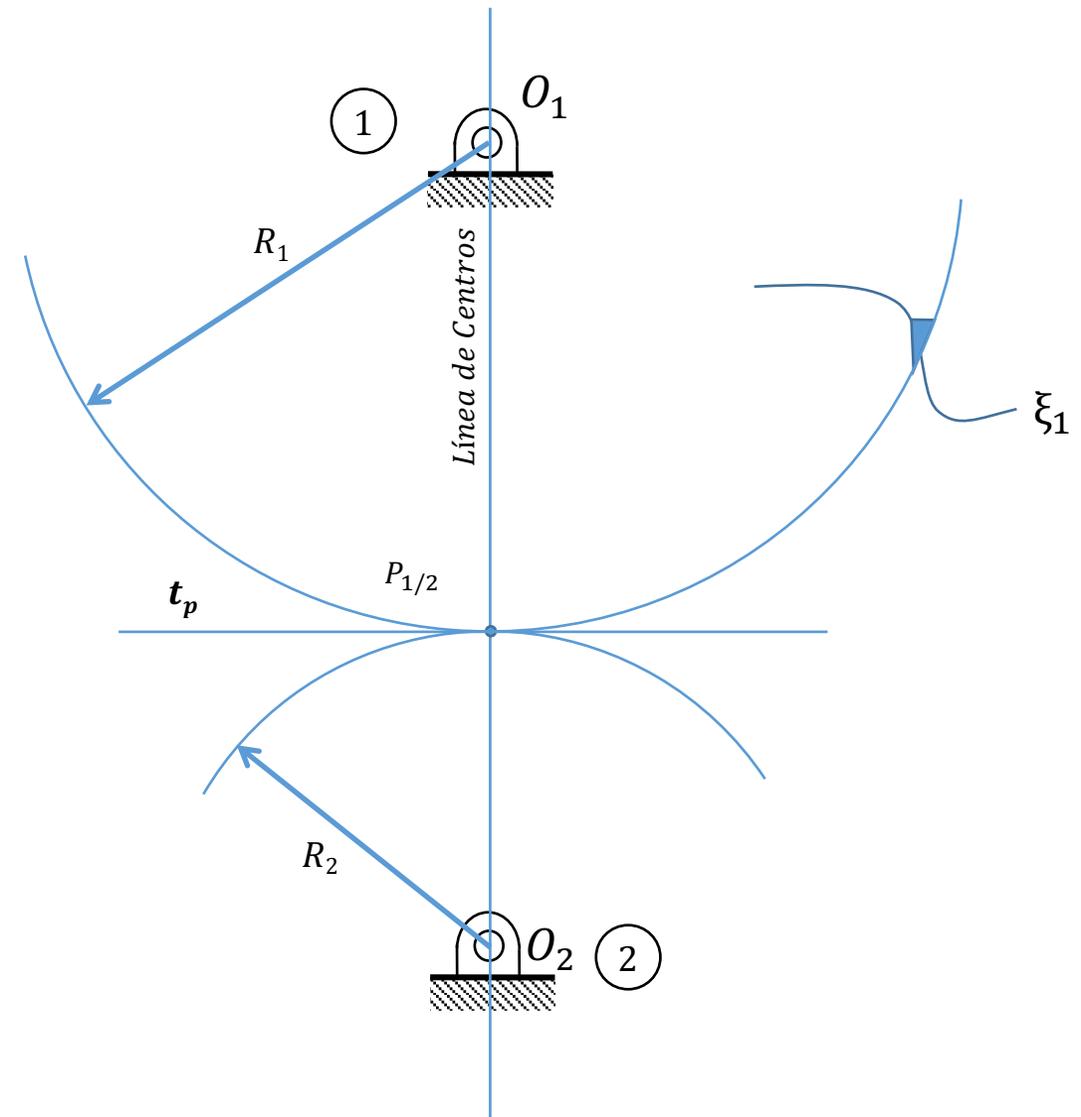
Datos:  $\xi_1, \mu, O_1$  y  $O_2$ ;      Incógnita:  $\xi_2$ ?

1.- A partir de la relación de transmisión  $\mu$  y de la distancia entre centros ( $d=O_1O_2$ ) podemos determinar los radios de los cilindros rodantes equivalentes resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{\vec{\omega}_{(2/0)}}{\vec{\omega}_{(1/0)}} = \frac{R_1}{R_2} \\ R_1 + R_2 &= d \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_1, R_2 \Rightarrow P_{1/2}$$

2.- Unimos el perfil  $\xi_1$  a la rueda de radio  $R_1$ .

3.- Tomamos un punto  $a_1$  cualquiera en el perfil  $\xi_1$  y trazamos la normal  $n_1$ , obteniendo el punto  $c_1$  en la intersección con la circunferencia de radio  $R_1$ .



## ¿Cómo construir perfiles conjugados?

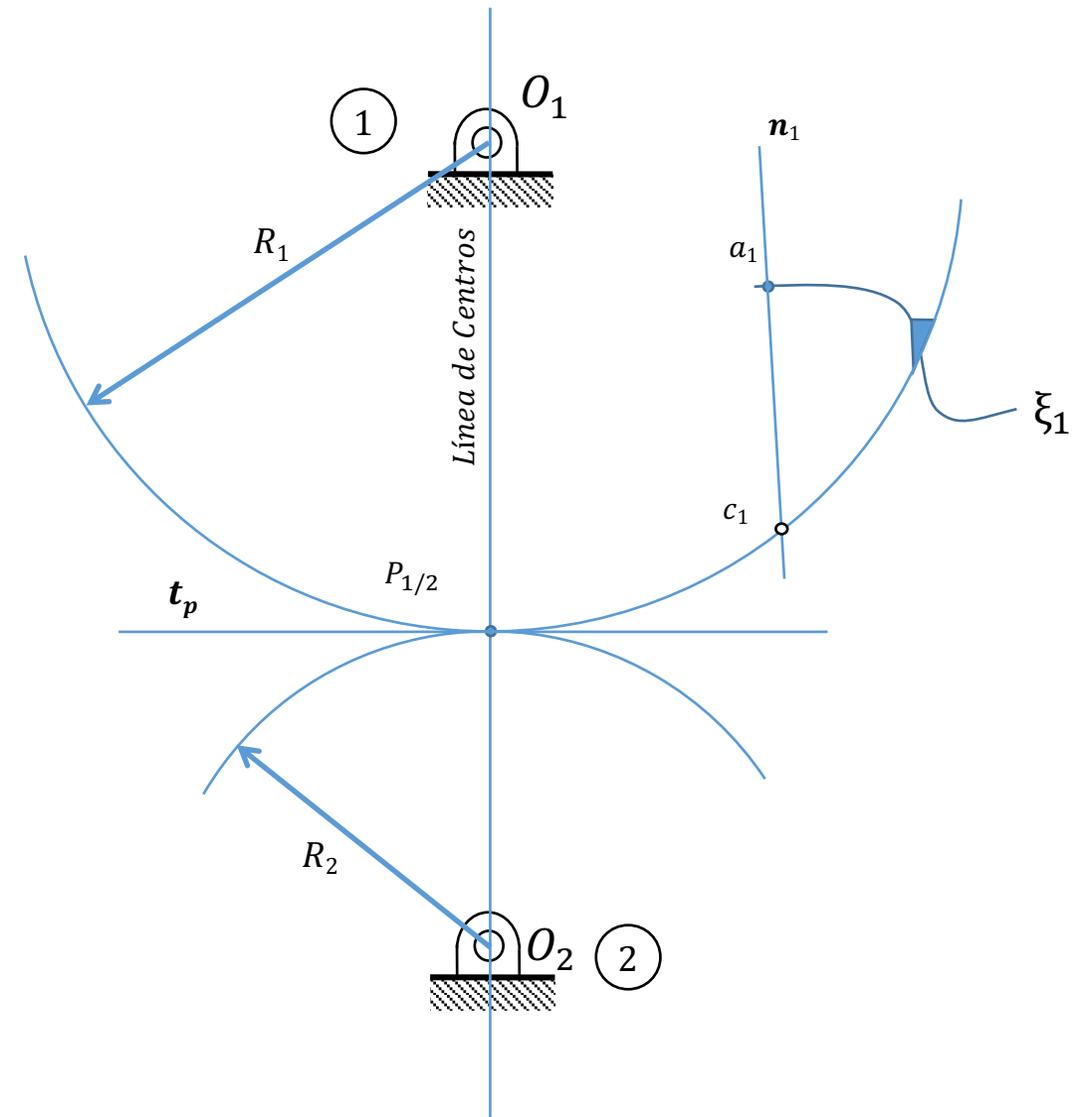
Datos:  $\xi_1, \mu, O_1$  y  $O_2$ ;      Incógnita:  $\xi_2$ ?

1.- A partir de la relación de transmisión  $\mu$  y de la distancia entre centros ( $d=O_1O_2$ ) podemos determinar los radios de los cilindros rodantes equivalentes resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{\vec{\omega}_{(2/0)}}{\vec{\omega}_{(1/0)}} = \frac{R_1}{R_2} \\ R_1 + R_2 &= d \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_1, R_2 \Rightarrow P_{1/2}$$

2.- Unimos el perfil  $\xi_1$  a la rueda de radio  $R_1$ .

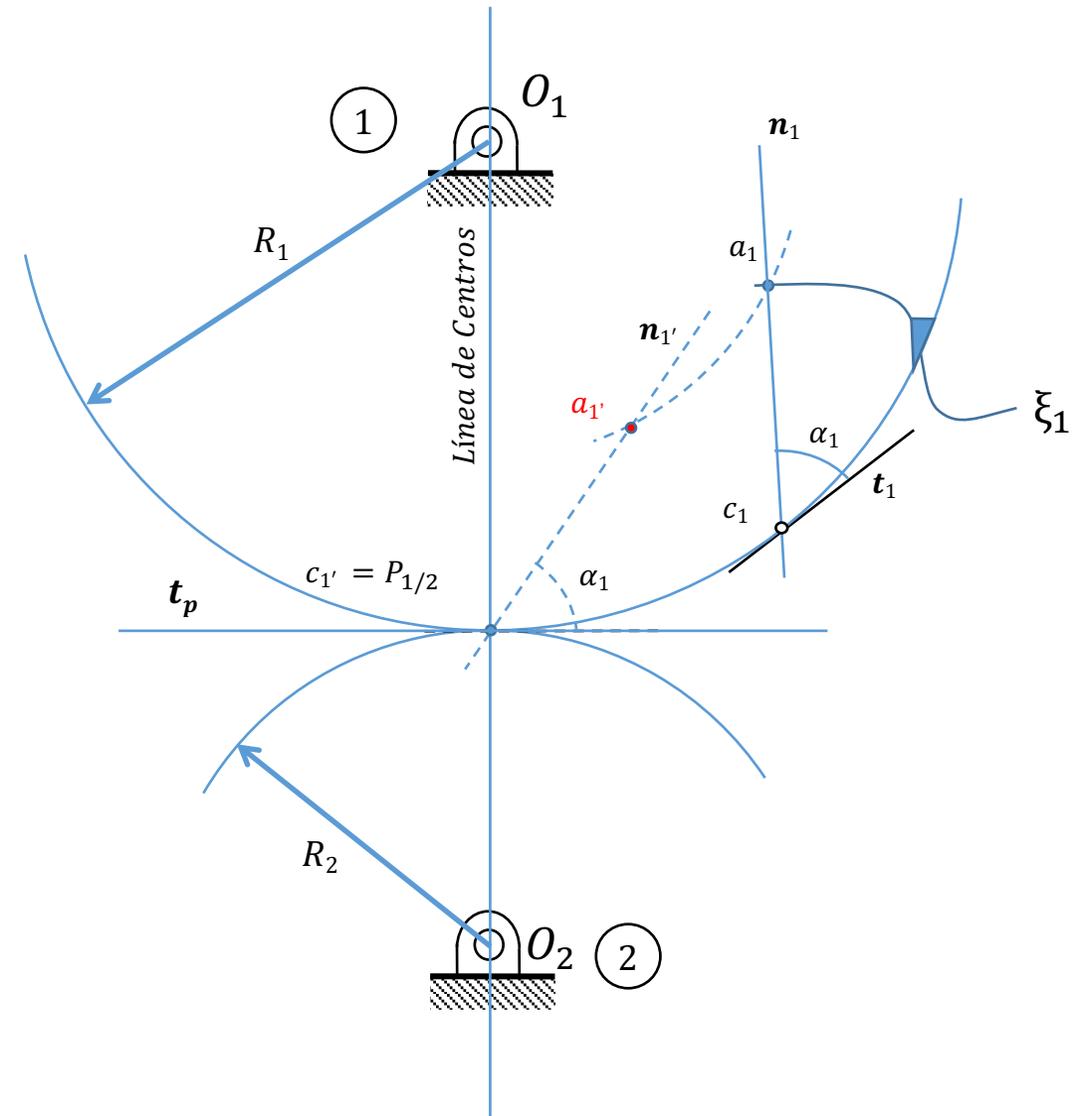
3.- Tomamos un punto  $a_1$  cualquiera en el perfil  $\xi_1$  y trazamos la normal  $n_1$ , obteniendo el punto  $c_1$  en la intersección con la circunferencia de radio  $R_1$ .



4.- Obtenemos la tangente  $t_1$  a la circunferencia de radio  $R_1$  en el punto  $c_1$  y determinamos el ángulo ( $\alpha_1$ ) que forma con la normal al perfil  $n_1$ .

5.- Para que se cumpla la “ley general de engrane”, en el instante en que el punto  $a_1$  engrana, la normal al perfil  $\xi_1$  pasará por el  $P_{1/2}$ . Para que esto suceda,  $c_1$  pasara a ocupar la posición  $c_1'$  coincidiendo con  $P_{1/2}$ . De esta forma la normal al perfil  $\xi_1$  pasará por un punto de la *línea de centros*.

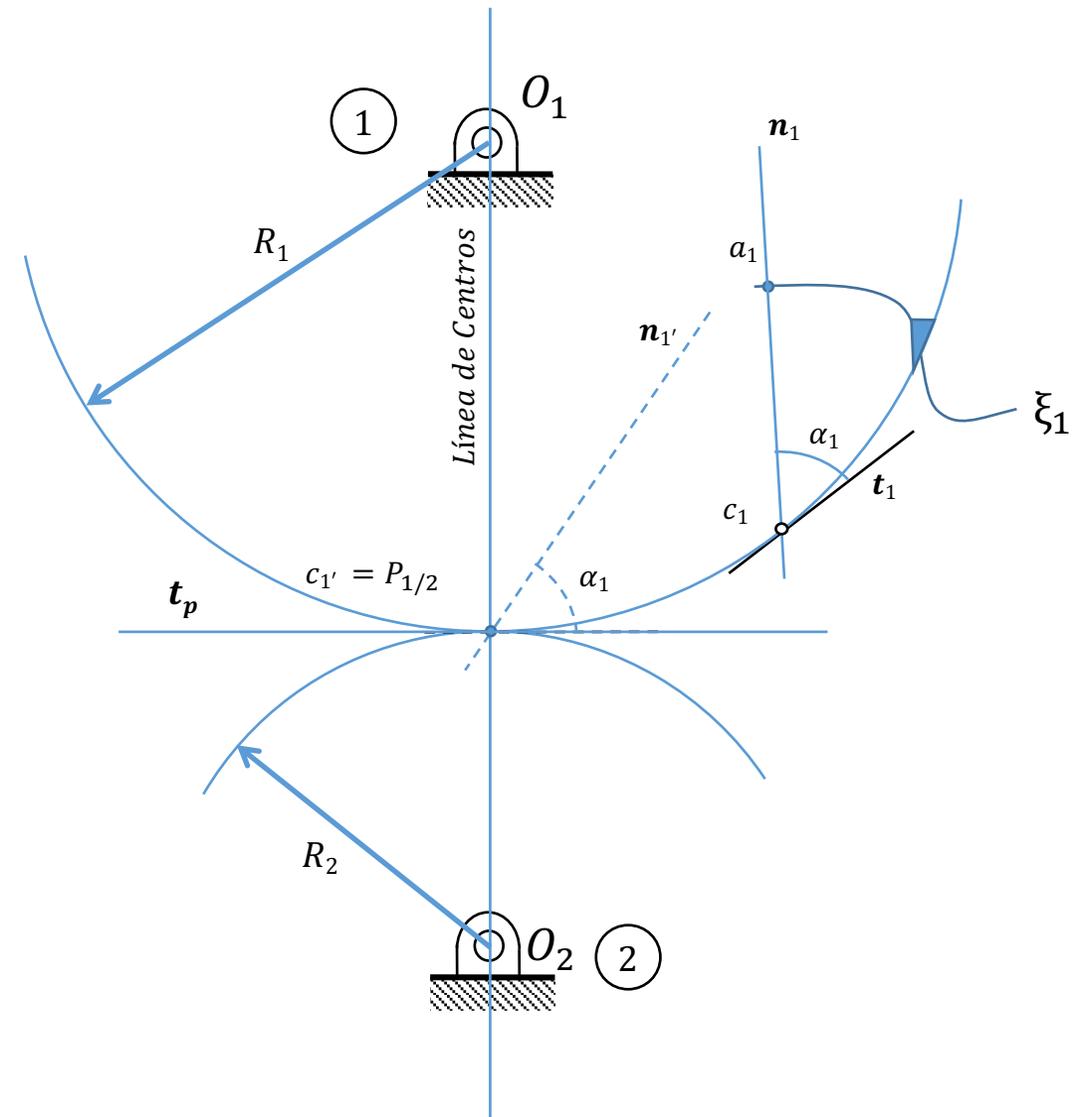
Para obtener su posición trazamos la recta  $n_{1'}$  que forma un ángulo  $\alpha_1$  con la tangente polar  $t_p$  obteniendo el punto  $a_1'$  en la intersección con la circunferencia de centro  $O_1$  y radio  $O_1a_1$ .



4.- Obtenemos la tangente  $t_1$  a la circunferencia de radio  $R_1$  en el punto  $c_1$  y determinamos el ángulo ( $\alpha_1$ ) que forma con la normal al perfil  $n_1$ .

5.- Para que se cumpla la “ley general de engrane”, en el instante en que el punto  $a_1$  engrana, la normal al perfil  $\xi_1$  pasará por el  $P_{1/2}$ . Para que esto suceda,  $c_1$  pasara a ocupar la posición  $c_1'$  coincidiendo con  $P_{1/2}$ . De esta forma la normal al perfil  $\xi_1$  pasará por un punto de la *línea de centros*.

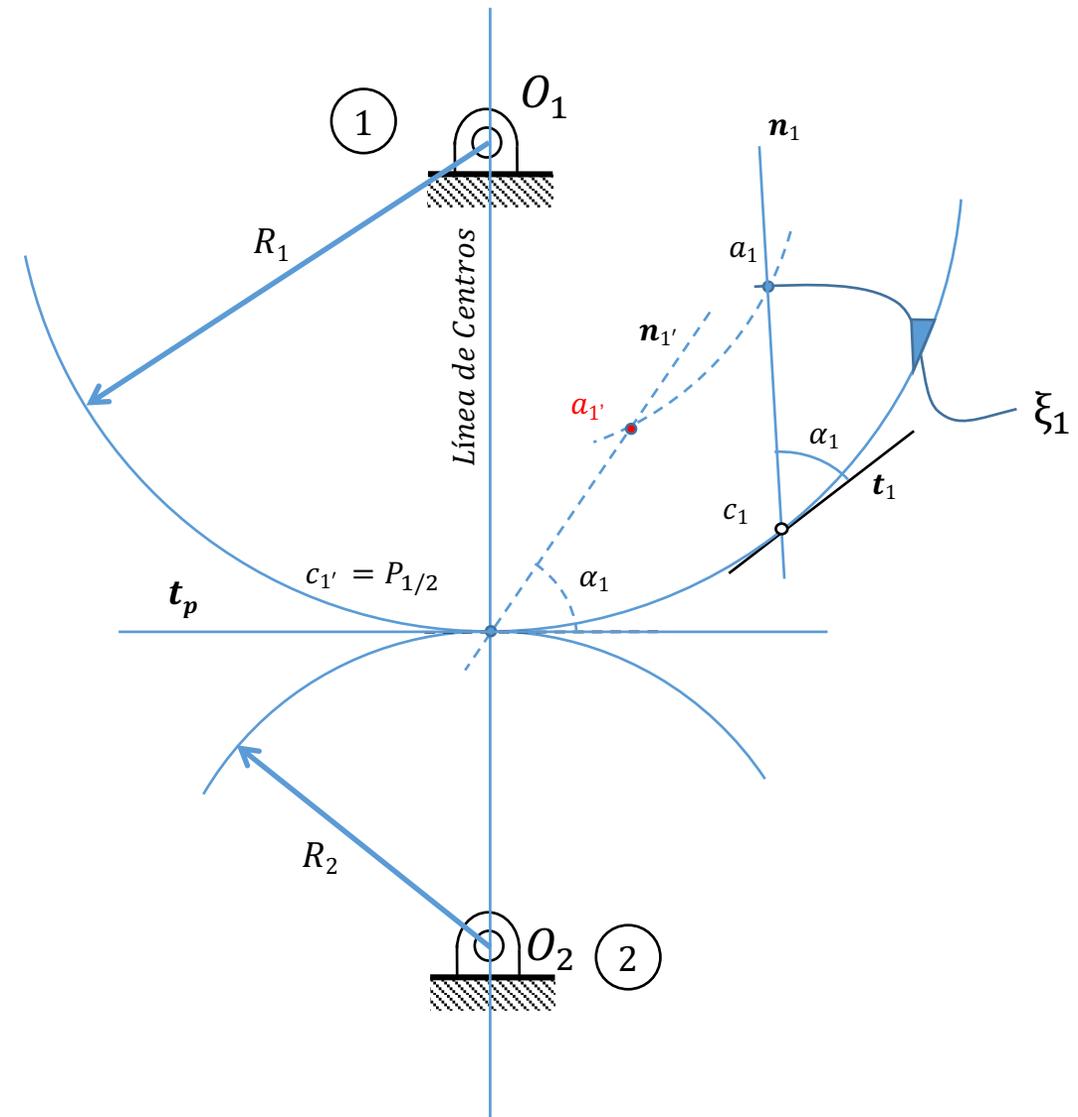
Para obtener su posición trazamos la recta  $n_{1'}$  que forma un ángulo  $\alpha_1$  con la tangente polar  $t_p$ , obteniendo el punto  $a_1'$  en la intersección con la circunferencia de centro  $O_1$  y radio  $O_1a_1$ .



4.- Obtenemos la tangente  $t_1$  a la circunferencia de radio  $R_1$  en el punto  $c_1$  y determinamos el ángulo ( $\alpha_1$ ) que forma con la normal al perfil  $n_1$ .

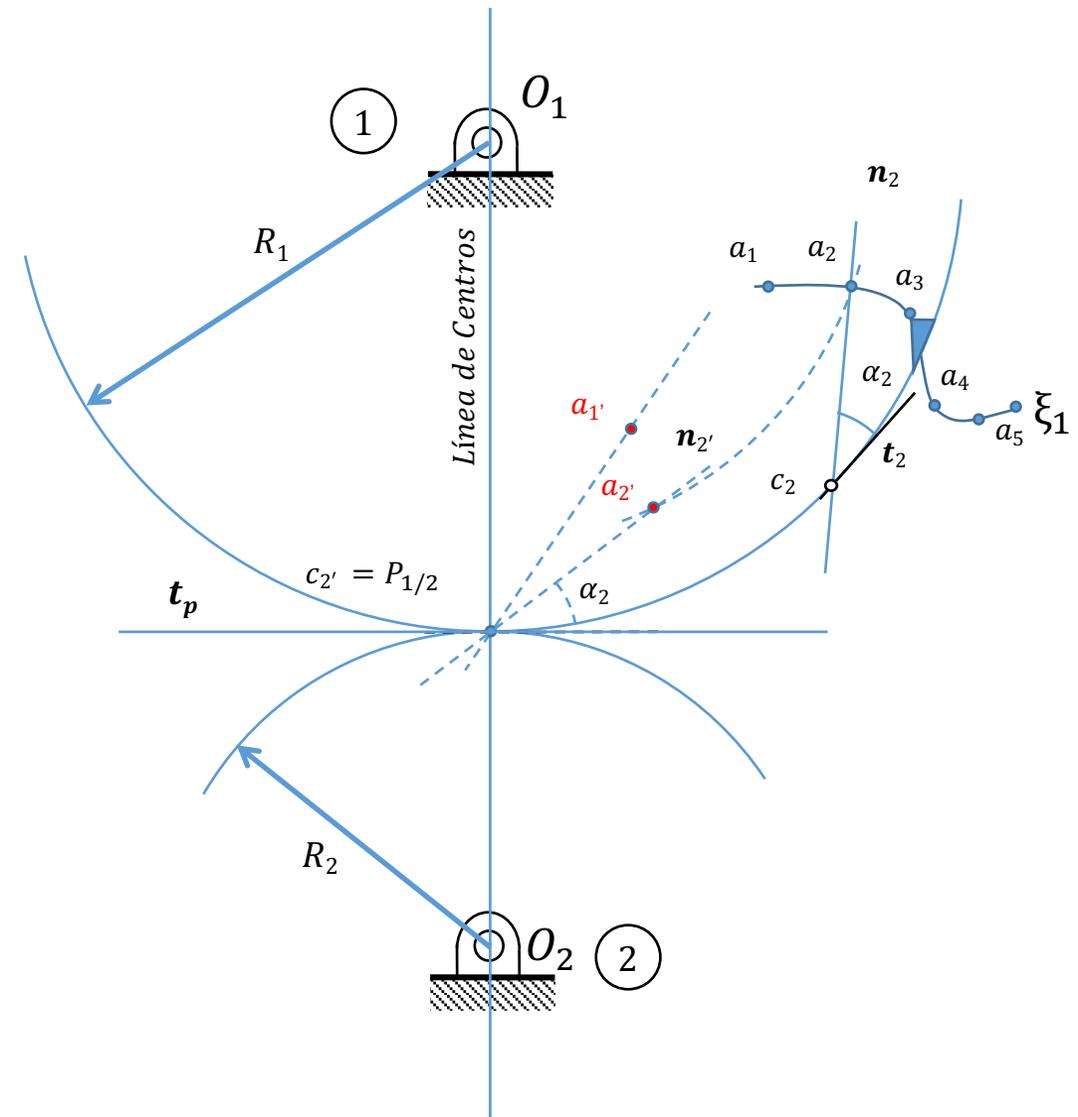
5.- Para que se cumpla la “ley general de engrane”, en el instante en que el punto  $a_1$  engrana, la normal al perfil  $\xi_1$  pasará por el  $P_{1/2}$ . Para que esto suceda,  $c_1$  pasara a ocupar la posición  $c_1'$  coincidiendo con  $P_{1/2}$ . De esta forma la normal al perfil  $\xi_1$  pasará por un punto de la *línea de centros*.

Para obtener su posición trazamos la recta  $n_{1'}$  que forma un ángulo  $\alpha_1$  con la tangente polar  $t_p$ , obteniendo el punto  $a_1'$  en la intersección con la circunferencia de centro  $O_1$  y radio  $O_1a_1$ .



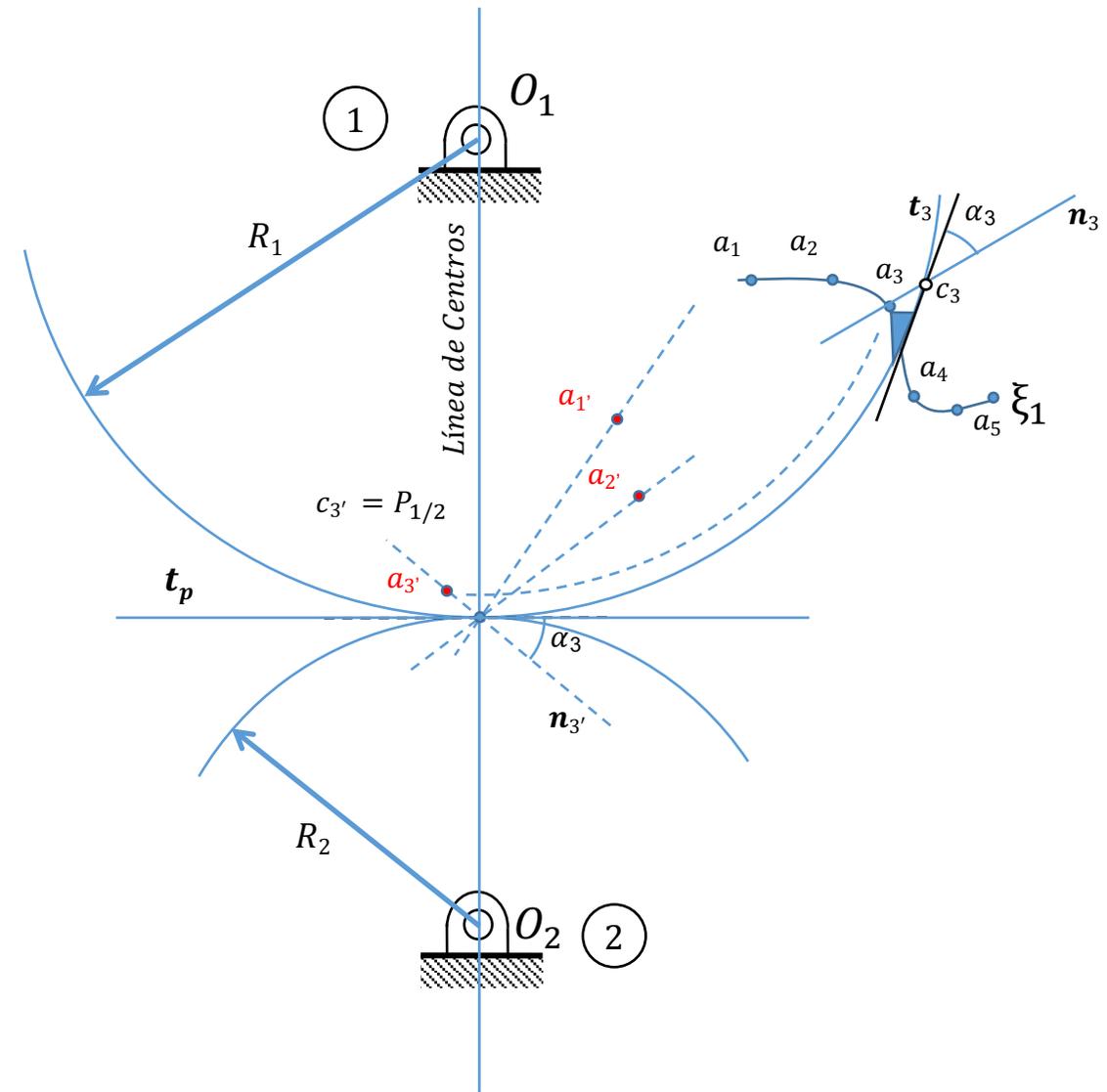
6.- Se repite el proceso para otros puntos del perfil  $\xi_1$ , obteniendo los puntos  $a_2', a_3', a_4', \dots$  que definen la denominada **línea de engrane**. Esta línea representa el lugar geométrico del punto matemático que coincide en cada instante con el punto de contacto entre los perfiles.

7.- Para obtener el perfil conjugado de  $\xi_1$ , hay que tener en cuenta que el movimiento relativo entre ambas ruedas es equivalente a la rodadura sin deslizamiento entre los cilindros rodantes equivalentes definidos por los correspondientes círculos primitivos de radio  $(R_1, R_2)$ . Por lo tanto, el arco girado por el cilindro 1 ( $c_1P_{1/2}$ ) para que el punto  $a_1$  alcance la posición de contacto  $a_1'$ , debe ser el mismo que el arco girado por el cilindro 2, ( $d_1P_{1/2}$ ) para que contacte el punto  $b_1$  del perfil conjugado  $\xi_2$ .



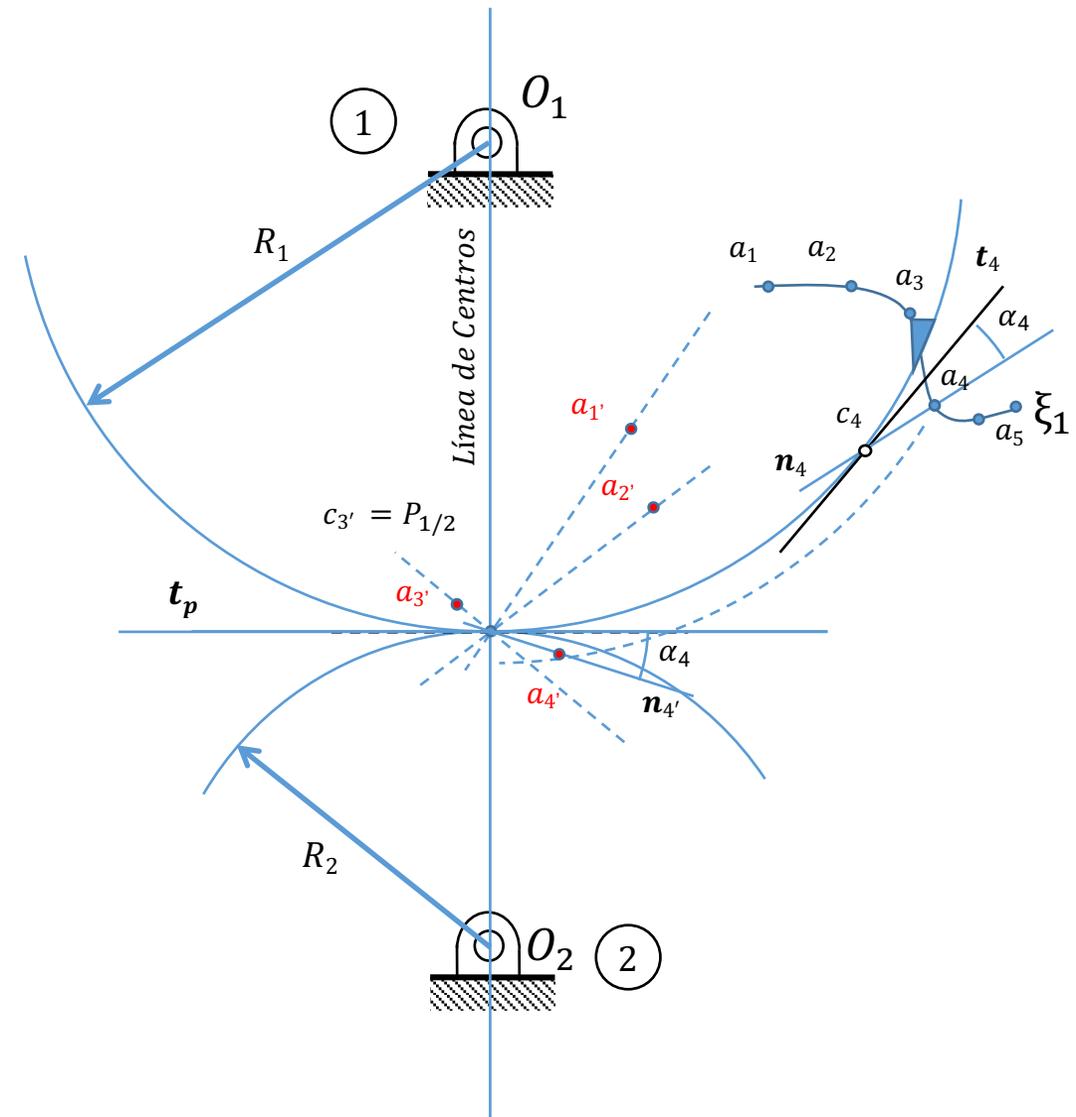
6.- Se repite el proceso para otros puntos del perfil  $\xi_1$ , obteniendo los puntos  $a_2'$ ,  $a_3'$ ,  $a_4'$ , ... que definen la denominada **línea de engrane**. Esta línea representa el lugar geométrico del punto matemático que coincide en cada instante con el punto de contacto entre los perfiles.

7.- Para obtener el perfil conjugado de  $\xi_1$ , hay que tener en cuenta que el movimiento relativo entre ambas ruedas es equivalente a la rodadura sin deslizamiento entre los cilindros rodantes equivalentes definidos por los correspondientes círculos primitivos de radio ( $R_1, R_2$ ). Por lo tanto, el arco girado por el cilindro 1 ( $c_1P_{1/2}$ ) para que el punto  $a_1$  alcance la posición de contacto  $a_1'$  debe ser el mismo que el arco girado por el cilindro 2, ( $d_1P_{1/2}$ ) para que contacte el punto  $b_1$  del perfil conjugado  $\xi_2$ .



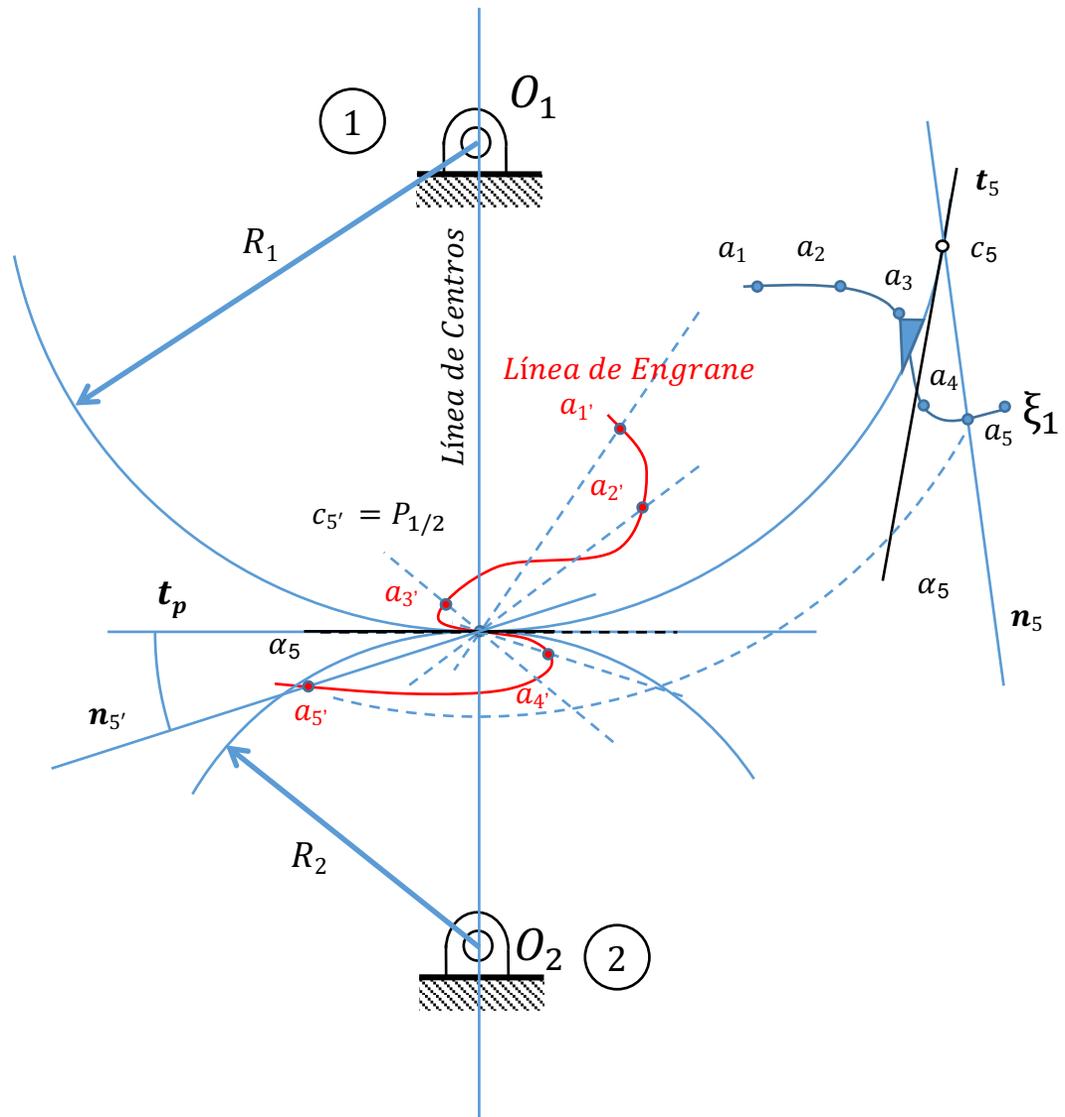
6.- Se repite el proceso para otros puntos del perfil  $\xi_1$ , obteniendo los puntos  $a_{2'}$ ,  $a_{3'}$ ,  $a_{4'}$ , ... que definen la denominada **línea de engrane**. Esta línea representa el lugar geométrico del punto matemático que coincide en cada instante con el punto de contacto entre los perfiles.

7.- Para obtener el perfil conjugado de  $\xi_1$ , hay que tener en cuenta que el movimiento relativo entre ambas ruedas es equivalente a la rodadura sin deslizamiento entre los cilindros rodantes equivalentes definidos por los correspondientes círculos primitivos de radio ( $R_1$ ,  $R_2$ ). Por lo tanto, el arco girado por el cilindro 1 ( $c_1P_{1/2}$ ) para que el punto  $a_1$  alcance la posición de contacto  $a_{1'}$  debe ser el mismo que el arco girado por el cilindro 2, ( $d_1P_{1/2}$ ) para que contacte el punto  $b_1$  del perfil conjugado  $\xi_2$ .



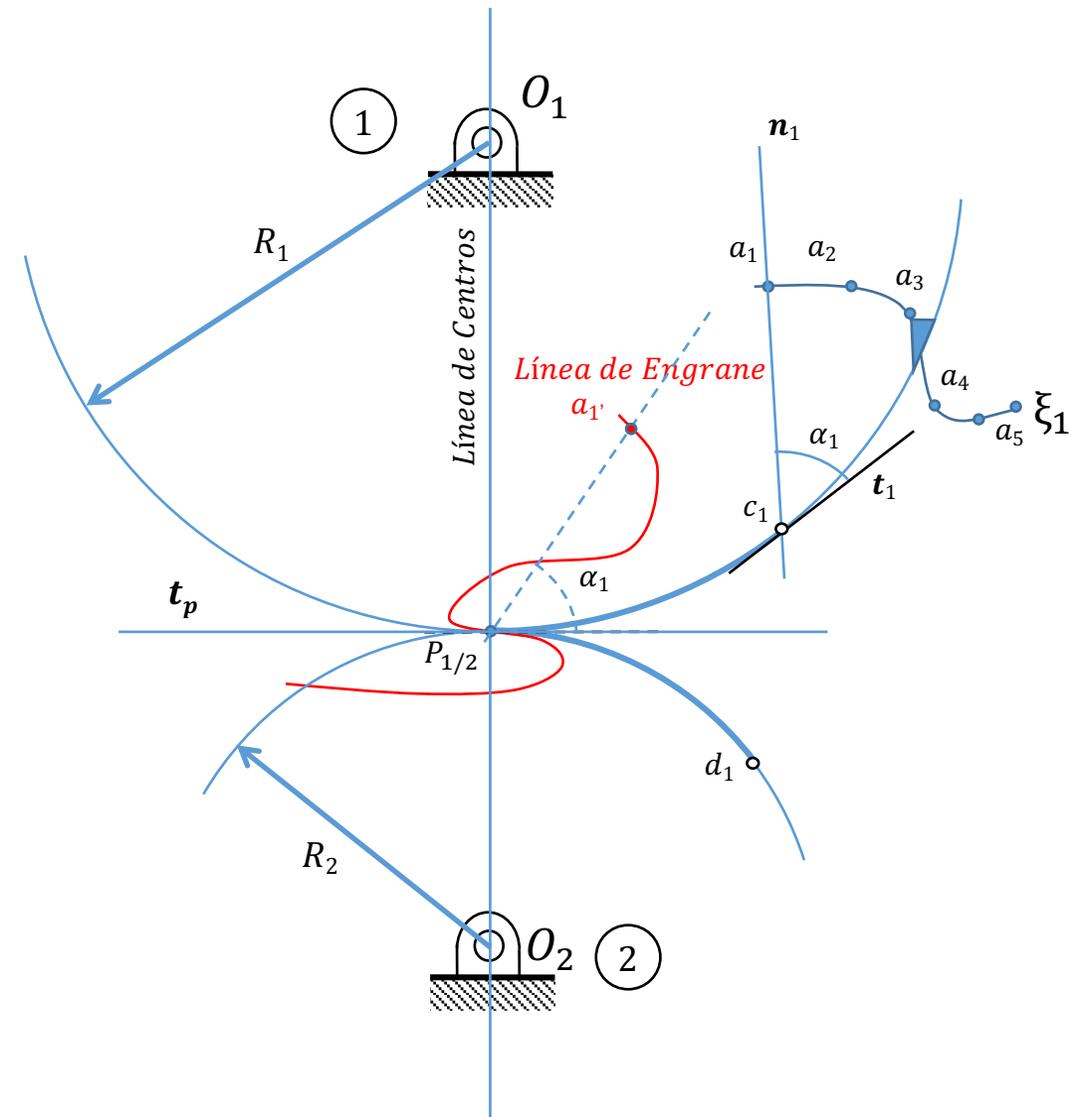
6.- Se repite el proceso para otros puntos del perfil  $\xi_1$ , obteniendo los puntos  $a_{2'}$ ,  $a_{3'}$ ,  $a_{4'}$ , ... que definen la denominada **línea de engrane**. Esta línea representa el lugar geométrico del punto matemático que coincide en cada instante con el punto de contacto entre los perfiles.

7.- Para obtener el perfil conjugado de  $\xi_1$ , hay que tener en cuenta que el movimiento relativo entre ambas ruedas es equivalente a la rodadura sin deslizamiento entre los cilindros rodantes equivalentes definidos por los correspondientes círculos primitivos de radio  $(R_1, R_2)$ . Por lo tanto, el arco girado por el cilindro 1 ( $c_1P_{1/2}$ ) para que el punto  $a_1$  alcance la posición de contacto  $a_{1'}$  debe ser el mismo que el arco girado por el cilindro 2, ( $d_1P_{1/2}$ ) para que contacte el punto  $b_1$  del perfil conjugado  $\xi_2$ .



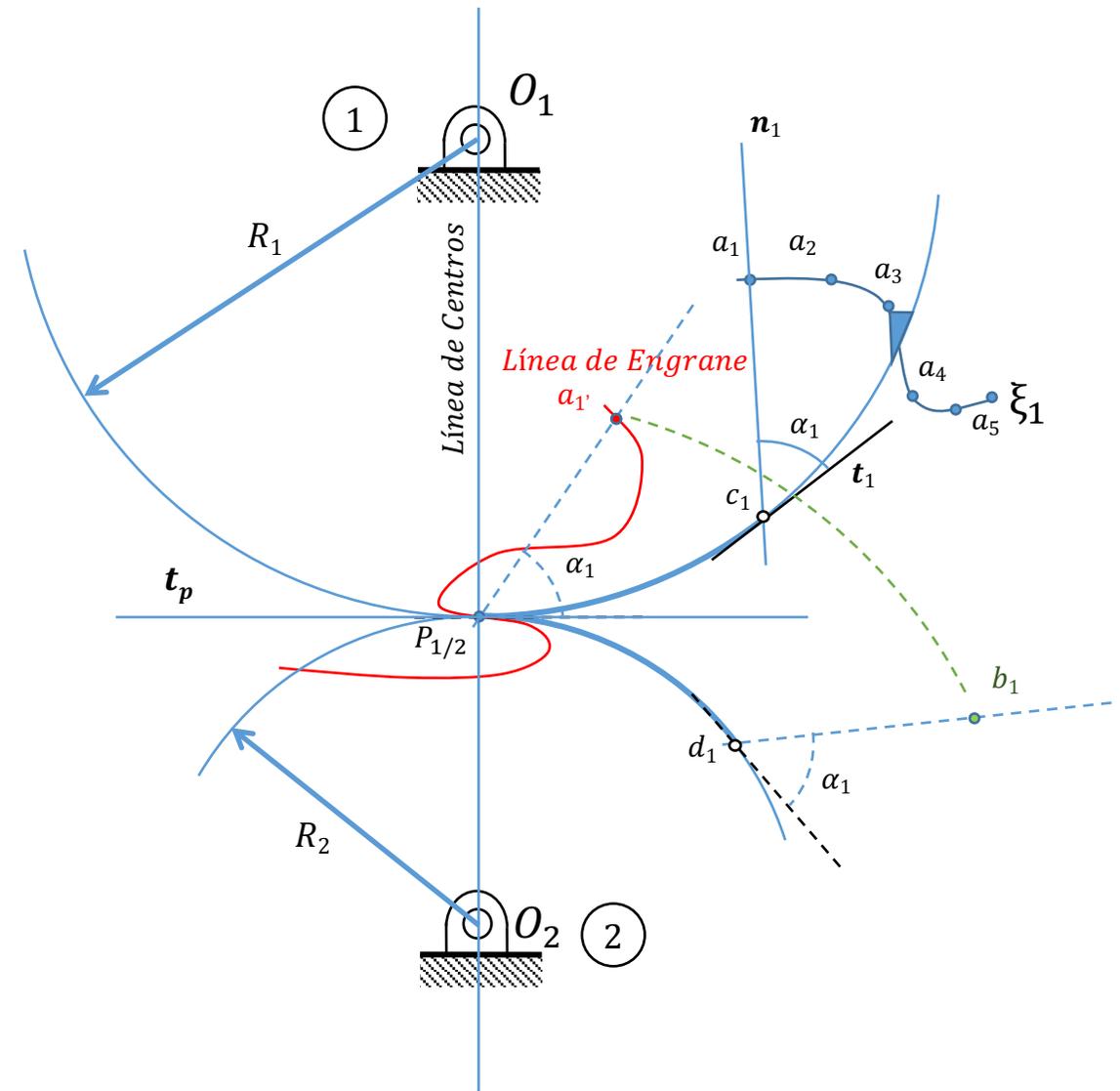
6.- Se repite el proceso para otros puntos del perfil  $\xi_1$ , obteniendo los puntos  $a_2'$ ,  $a_3'$ ,  $a_4'$ , ... que definen la denominada **línea de engrane**. Esta línea representa el lugar geométrico del punto matemático que coincide en cada instante con el punto de contacto entre los perfiles.

7.- Para obtener el perfil conjugado de  $\xi_1$ , hay que tener en cuenta que el movimiento relativo entre ambas ruedas es equivalente a la rodadura sin deslizamiento entre los cilindros rodantes equivalentes definidos por los correspondientes círculos primitivos de radio ( $R_1, R_2$ ). Por lo tanto, el arco girado por el cilindro 1 ( $c_1P_{1/2}$ ) para que el punto  $a_1$  alcance la posición de contacto  $a_1'$ , debe ser el mismo que el arco girado por el cilindro 2, ( $d_1P_{1/2}$ ) para que contacte el punto  $b_1$  del perfil conjugado  $\xi_2$ .

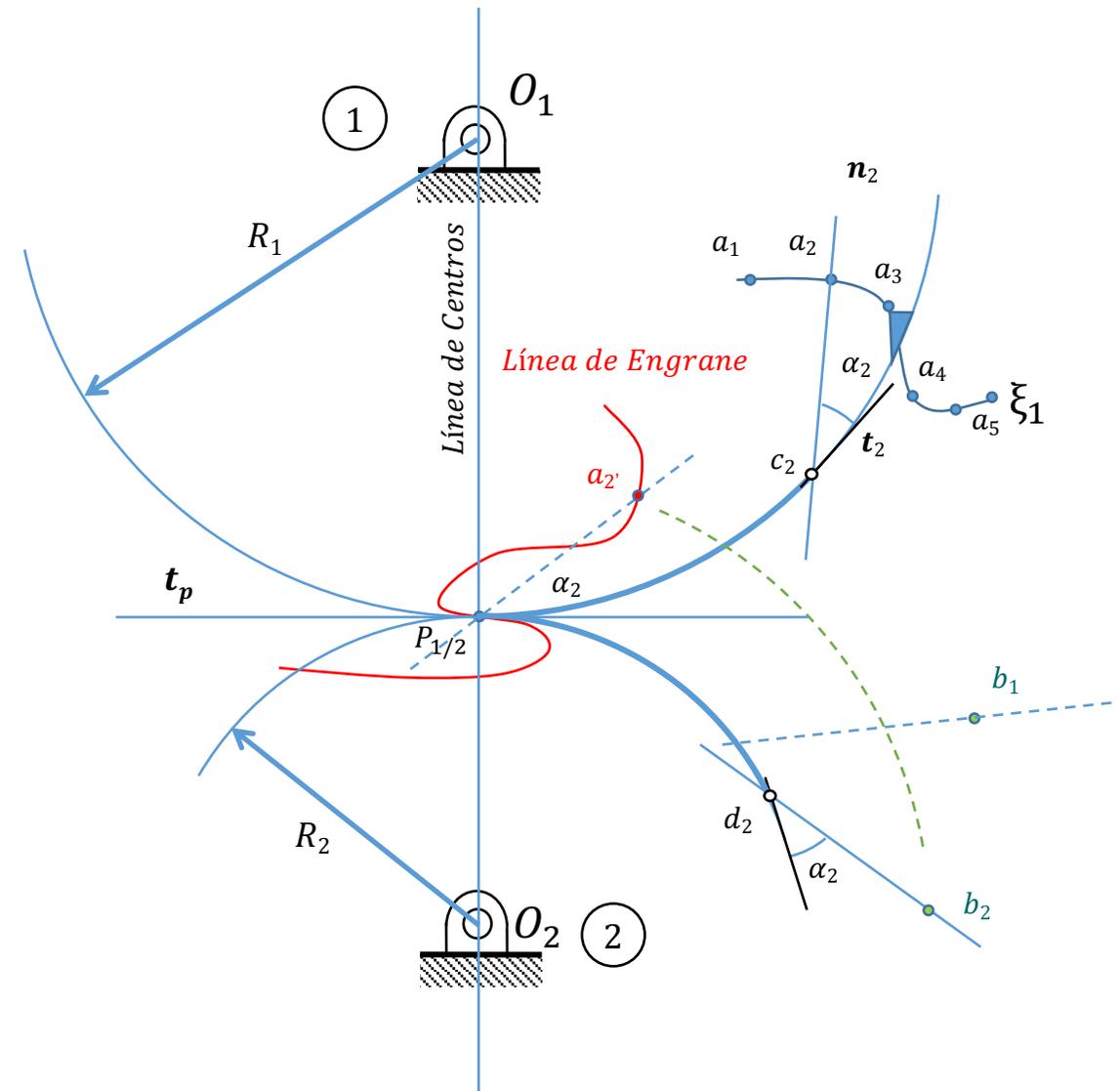


6.- Se repite el proceso para otros puntos del perfil  $\xi_1$ , obteniendo los puntos  $a_2'$ ,  $a_3'$ ,  $a_4'$ , ... que definen la denominada **línea de engrane**. Esta línea representa el lugar geométrico del punto matemático que coincide en cada instante con el punto de contacto entre los perfiles.

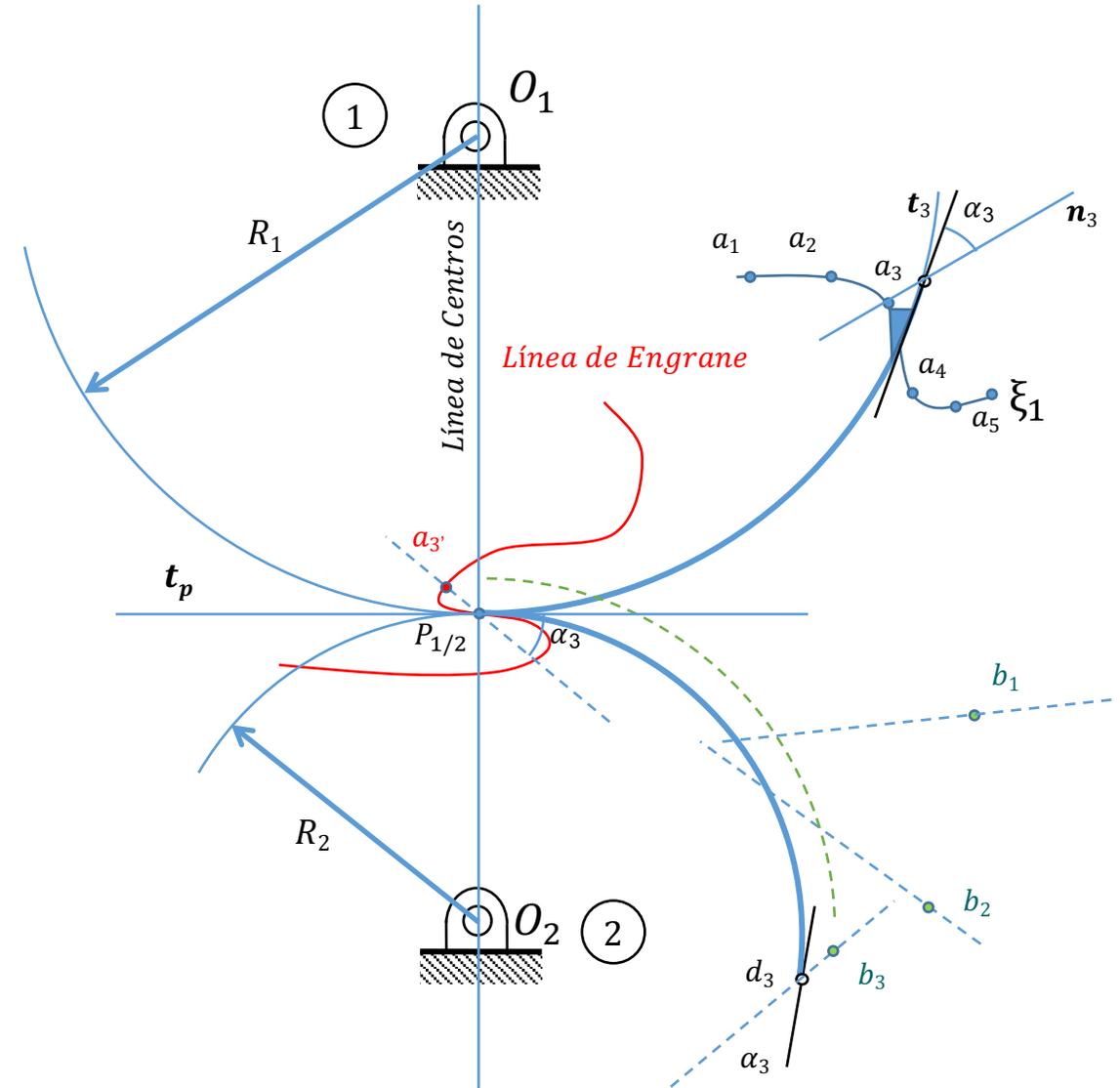
7.- Para obtener el perfil conjugado de  $\xi_1$ , hay que tener en cuenta que el movimiento relativo entre ambas ruedas es equivalente a la rodadura sin deslizamiento entre los cilindros rodantes equivalentes definidos por los correspondientes círculos primitivos de radio ( $R_1, R_2$ ). Por lo tanto, el arco girado por el cilindro 1 ( $c_1P_{1/2}$ ) para que el punto  $a_1$  alcance la posición de contacto  $a_1'$ , debe ser el mismo que el arco girado por el cilindro 2, ( $d_1P_{1/2}$ ) para que contacte el punto  $b_1$  del perfil conjugado  $\xi_2$ .



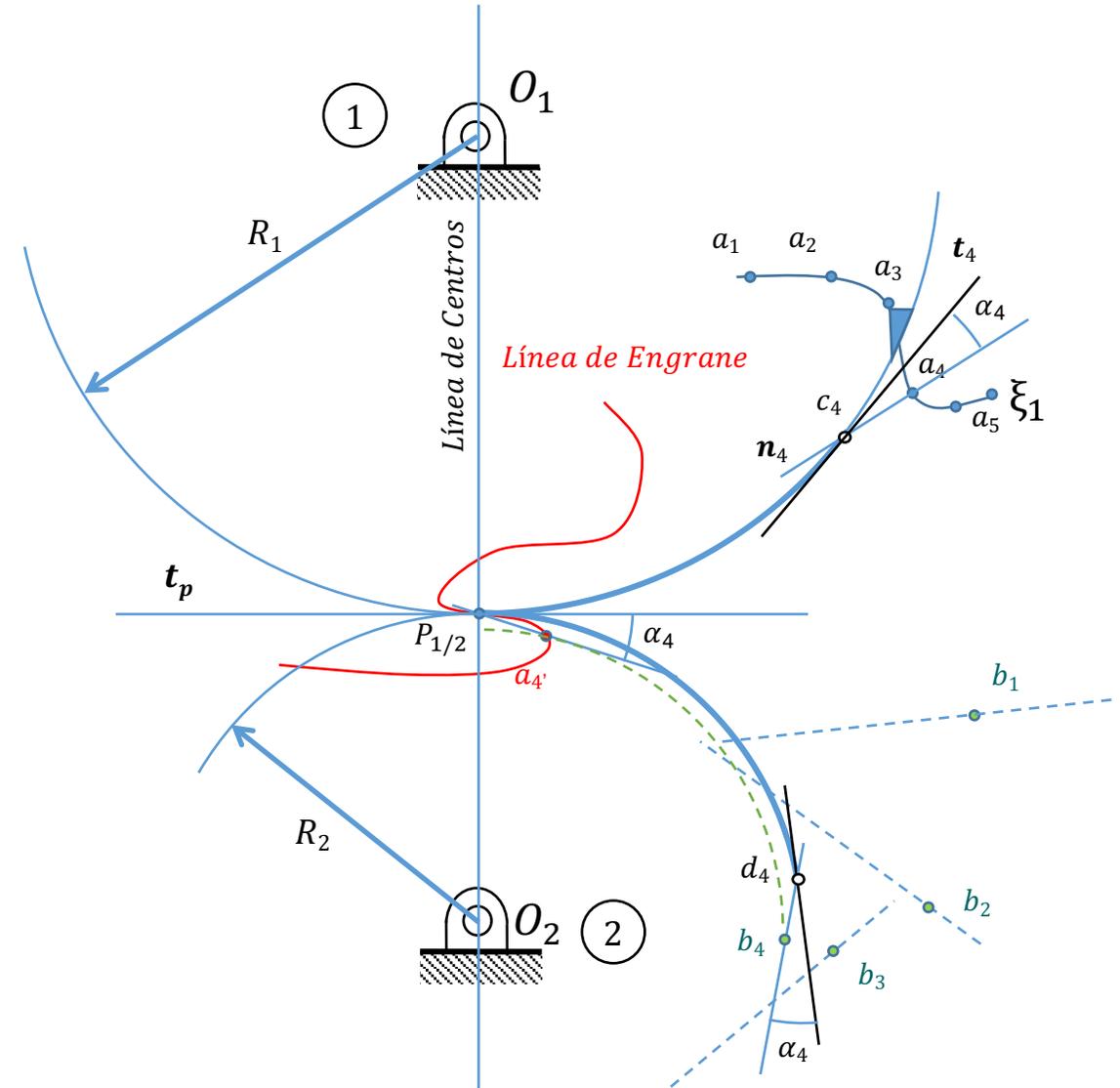
8.- Se repite el proceso para el resto de puntos de la línea de engrane, obteniendo los puntos  $b_2, b_3, b_4, \dots$  obteniendo el perfil conjugado  $\xi_2$ .



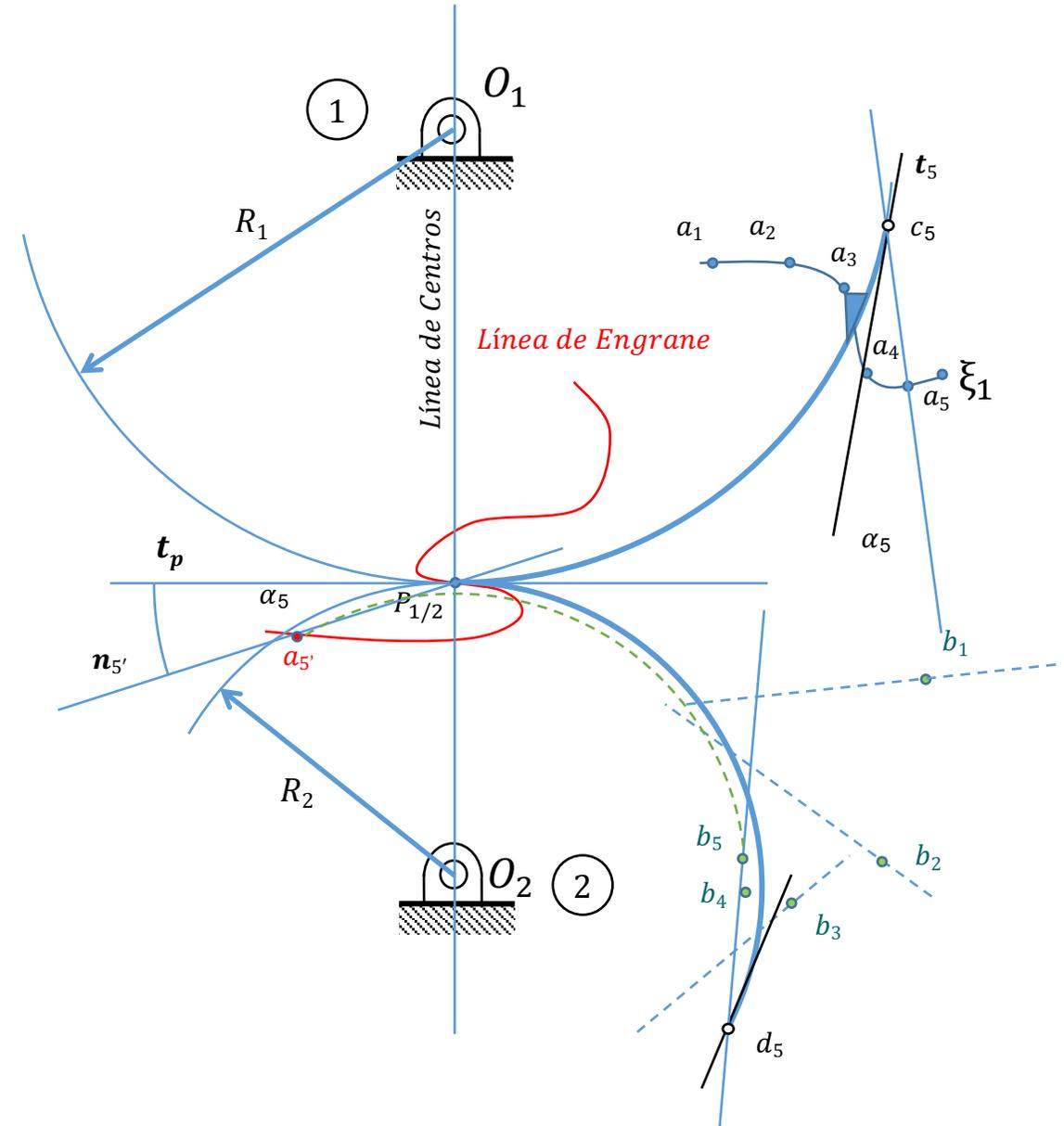
8.- Se repite el proceso para el resto de puntos de la línea de engrane, obteniendo los puntos  $b_2, b_3, b_4, \dots$  obteniendo el perfil conjugado  $\xi_2$ .



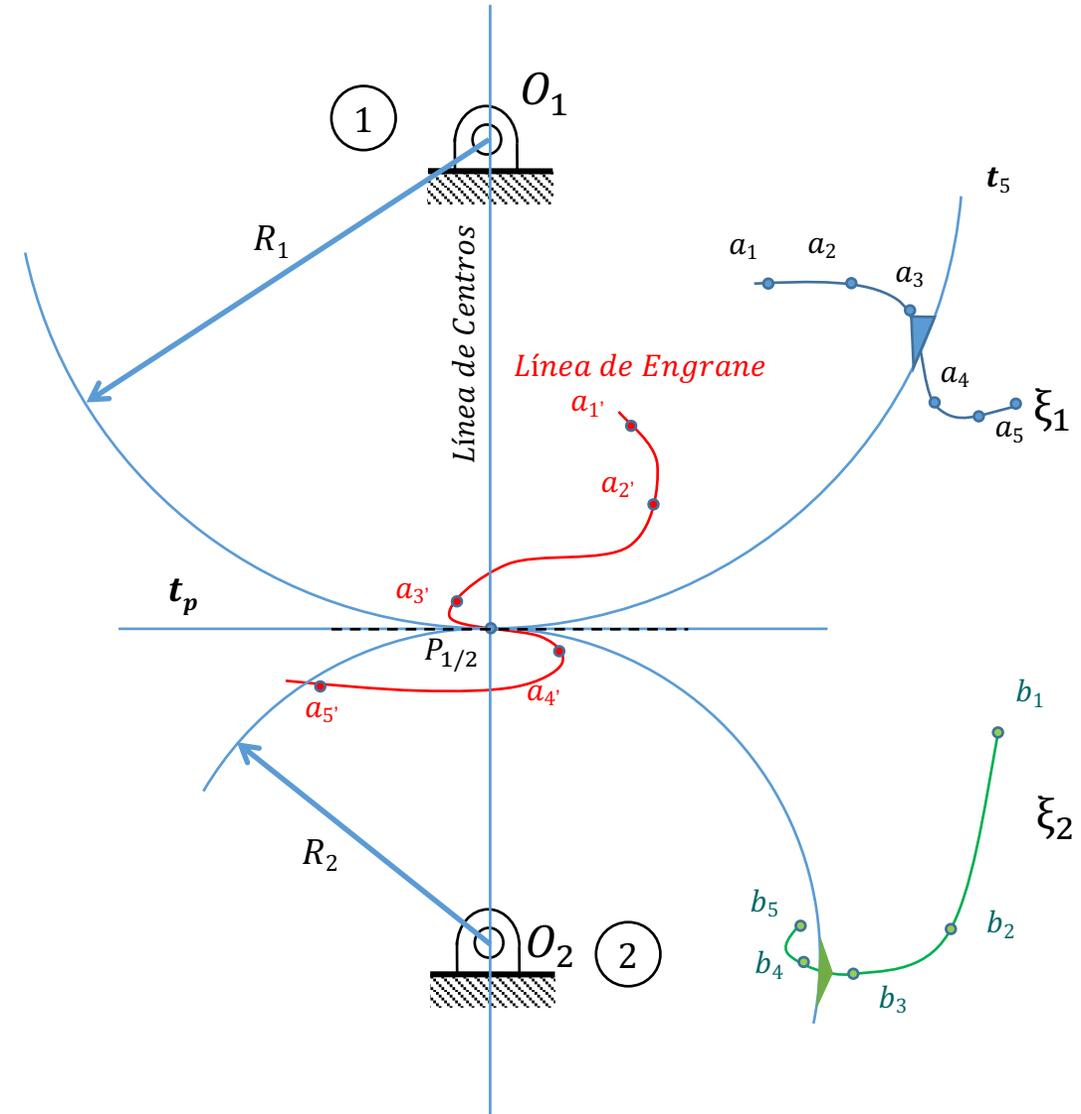
8.- Se repite el proceso para el resto de puntos de la línea de engrane, obteniendo los puntos  $b_2, b_3, b_4, \dots$  obteniendo el perfil conjugado  $\xi_2$ .



8.- Se repite el proceso para el resto de puntos de la línea de engrane, obteniendo los puntos  $b_2, b_3, b_4, \dots$  obteniendo el perfil conjugado  $\xi_2$ .

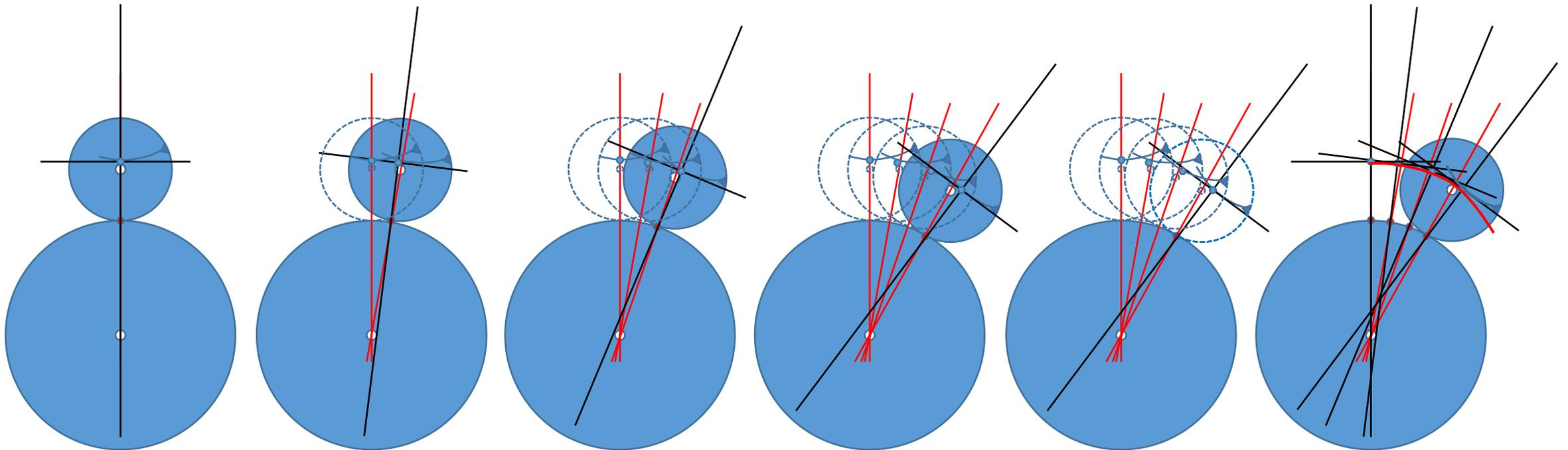


8.- Se repite el proceso para el resto de puntos de la línea de engrane, obteniendo los puntos  $b_2, b_3, b_4, \dots$  obteniendo el perfil conjugado  $\xi_2$ .

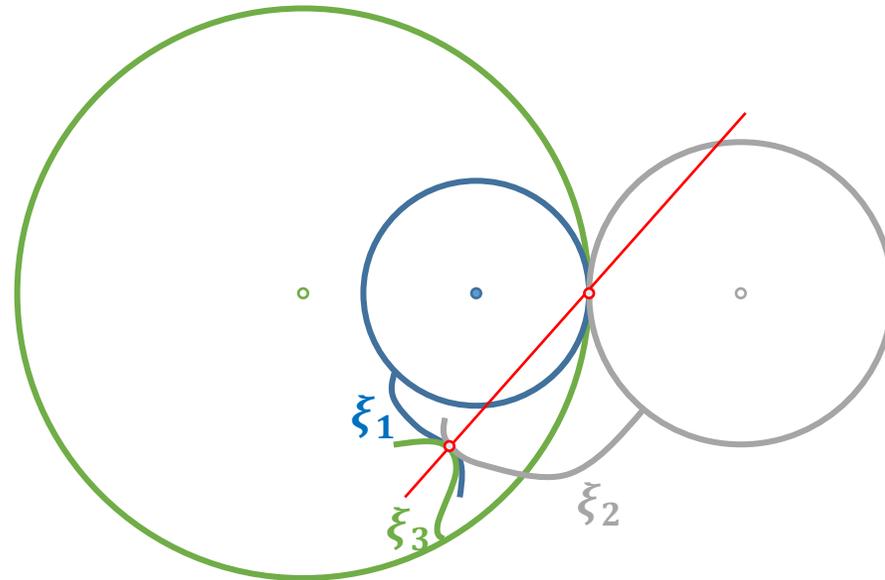


1.- El conjugado de  $\xi_2$  es  $\xi_1$ . Si fijáramos  $\xi_2$  a un cilindro de radio  $R_2$  y siguiéramos el procedimiento descrito previamente obtendríamos  $\xi_1$ . La demostración de esta afirmación es inmediata atendiendo al proceso presentado.

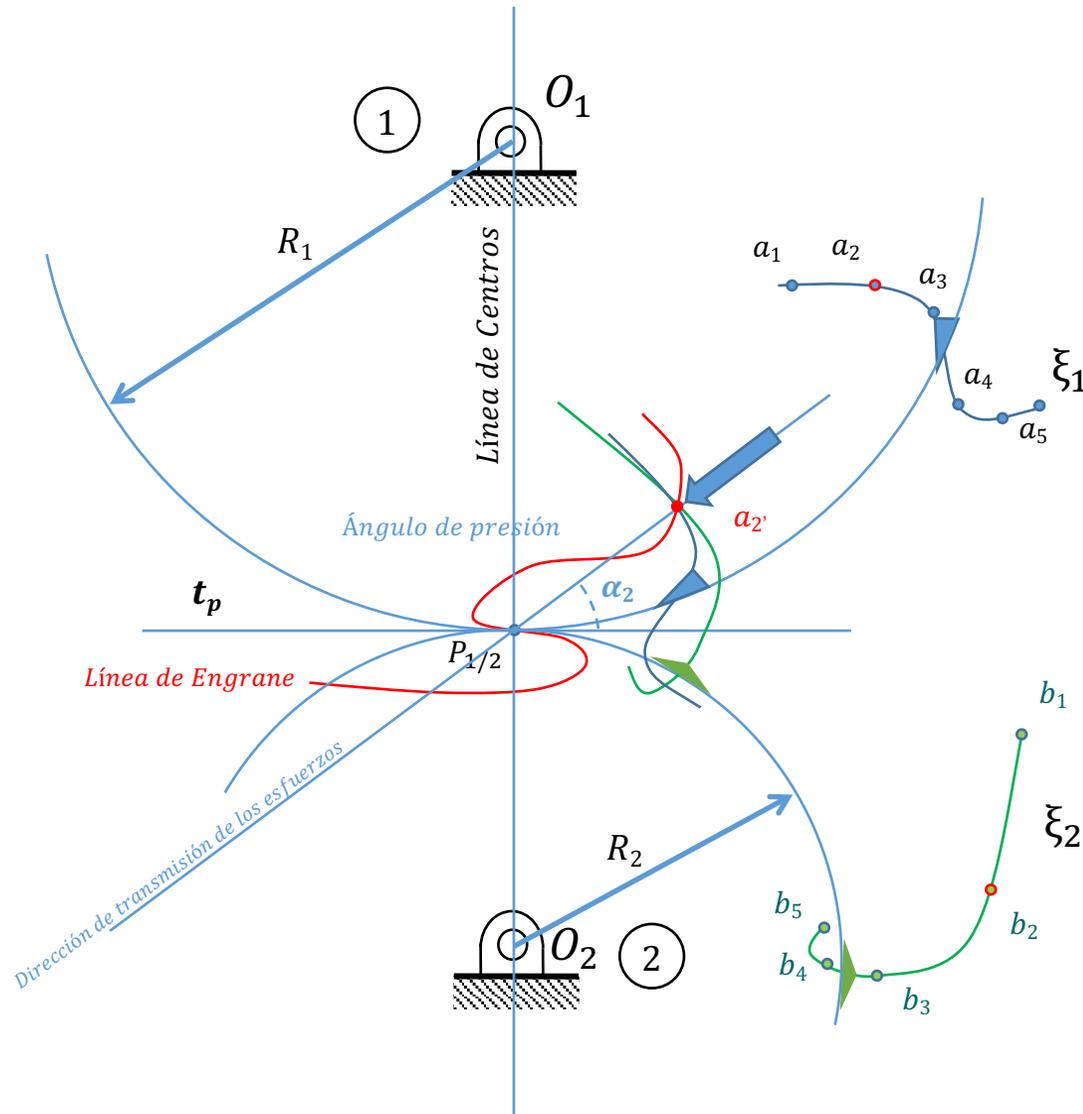
2.- Si fijamos  $\xi_1$  a una ruleta de radio  $R_1$  y la hacemos girar sobre una base de radio  $R_2$ , el perfil conjugado  $\xi_2$ , es la envolvente de las posiciones de  $\xi_1$ .



3.- Si  $\xi_1$  es conjugado de  $\xi_2$  y este a su vez es conjugado de  $\xi_3$ . Entonces,  $\xi_1$  es conjugado de  $\xi_3$ .



4.-El movimiento relativo del perfil  $\xi_1$  sobre su conjugado de  $\xi_2$  es una rodadura con velocidad angular  $\vec{\omega}_{(1/2)}$  y un deslizamiento con velocidad  $\vec{\omega}_{(1/2)} \times \overrightarrow{QP}_{1/2}$ , siendo  $Q$  el punto de contacto entre los perfiles.



El procedimiento descrito previamente permite obtener el perfil conjugado dado un perfil cualquiera, por lo que a priori es posible diseñar ruedas que posean “palancas” cuyos perfiles cumplen la ley general de engrane.

¿Cómo debe ser el perfil?

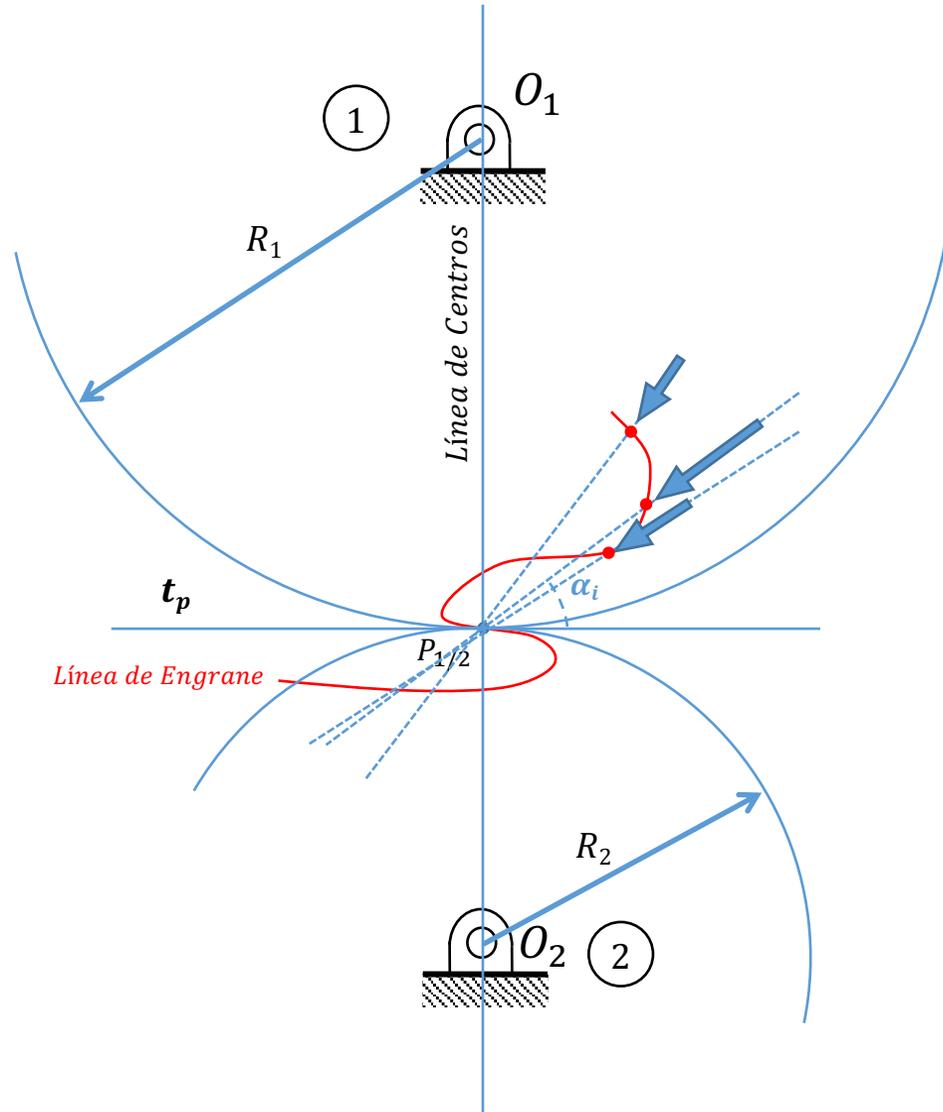
¿Existen perfiles con mejores prestaciones?

Se define el **ángulo de presión** ( $\alpha_i$ ), como el ángulo que forma la normal a los perfiles en el punto de contacto con la perpendicular a la línea de centros.

Si asumimos que los esfuerzos de rozamiento son reducidos (para eso los engranajes requieren la presencia de lubricante), este ángulo nos indica la dirección de transmisión de los esfuerzos. Por lo tanto, una línea de transmisión arbitraria implica que esta dirección va a cambiar a lo largo del engrane.



!!! Ruido y Vibraciones!!!



El procedimiento descrito previamente permite obtener el perfil conjugado dado un perfil cualquiera, por lo que a priori es posible diseñar ruedas que posean “palancas” cuyos perfiles cumplen la ley general de engrane.

¿Cómo debe ser el perfil?

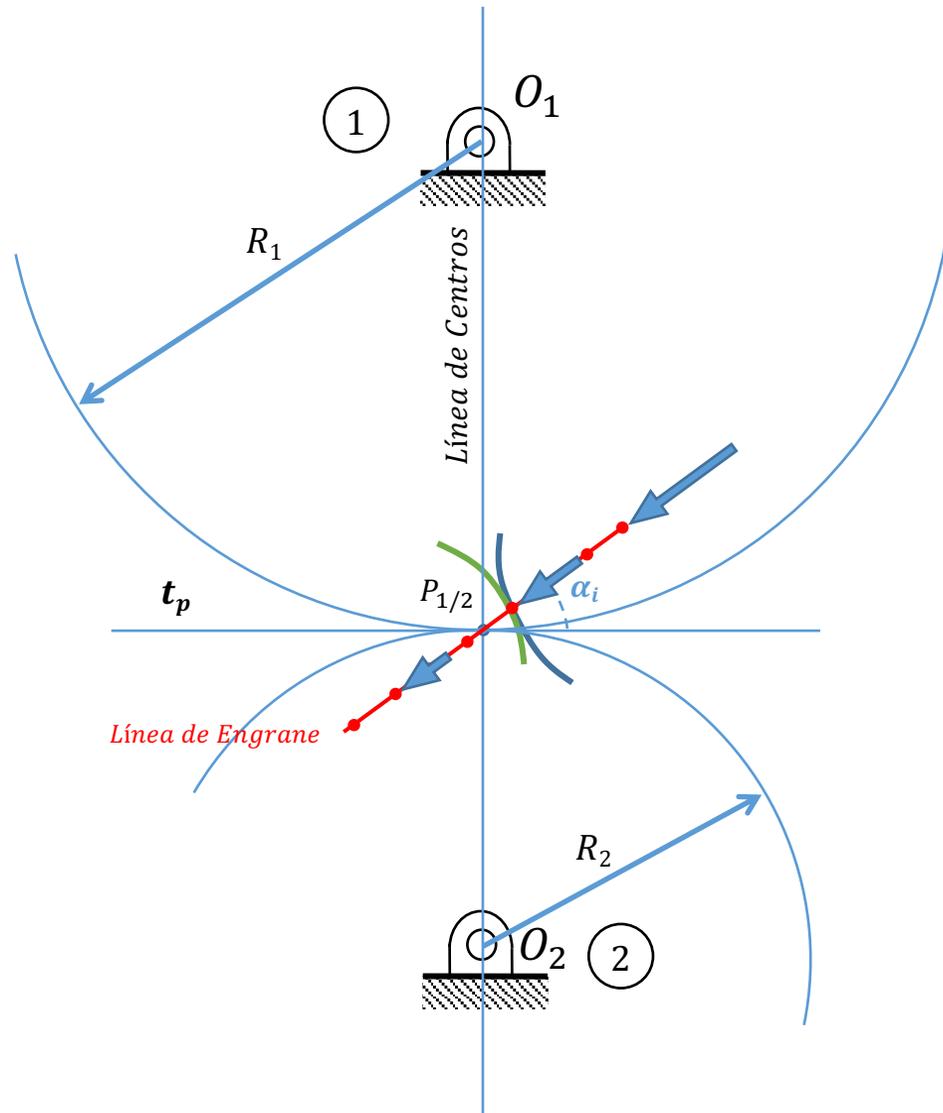
¿Existen perfiles con mejores prestaciones?

Se define el **ángulo de presión** ( $\alpha_i$ ), como el ángulo que forma la normal a los perfiles en el punto de contacto con la perpendicular a la línea de centros.

Si asumimos que los esfuerzos de rozamiento son reducidos (para eso los engranajes requieren la presencia de lubricante), este ángulo nos indica la dirección de transmisión de los esfuerzos. Por lo tanto, una línea de transmisión arbitraria implica que esta dirección va a cambiar a lo largo del engrane.



!!! Ruido y Vibraciones!!!



El procedimiento descrito previamente permite obtener el perfil conjugado dado un perfil cualquiera, por lo que a priori es posible diseñar ruedas que posean “palancas” cuyos perfiles cumplen la ley general de engrane.

¿Cómo debe ser el perfil?

¿Existen perfiles con mejores prestaciones?

Se define el **ángulo de presión** ( $\alpha_i$ ), como el ángulo que forma la normal a los perfiles en el punto de contacto con la perpendicular a la línea de centros.

Si asumimos que los esfuerzos de rozamiento son reducidos (para eso los engranajes requieren la presencia de lubricante), este ángulo nos indica la dirección de transmisión de los esfuerzos. Por lo tanto, una línea de transmisión arbitraria implica que esta dirección va a cambiar a lo largo del engrane.



!!! Ruido y Vibraciones!!!

¿Cómo conseguir que el ángulo de presión permanezca constante?

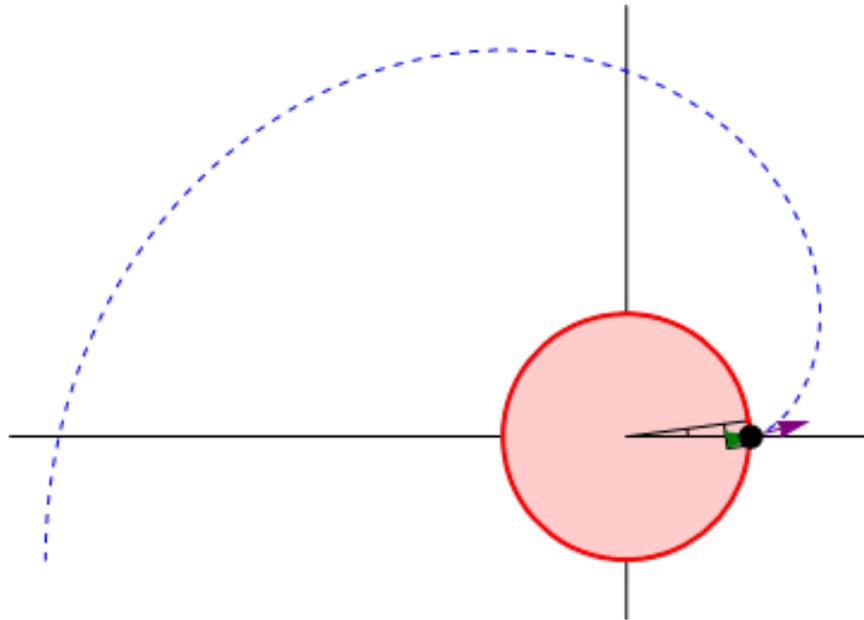


Línea de engrane recta

## Perfil de Evolvente

Una **Evolvente** (también Involuta), es una curva cuya **Evoluta** es un círculo.

Una **Evoluta** es el lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva. (p.e. evoluta de un círculo es un punto)



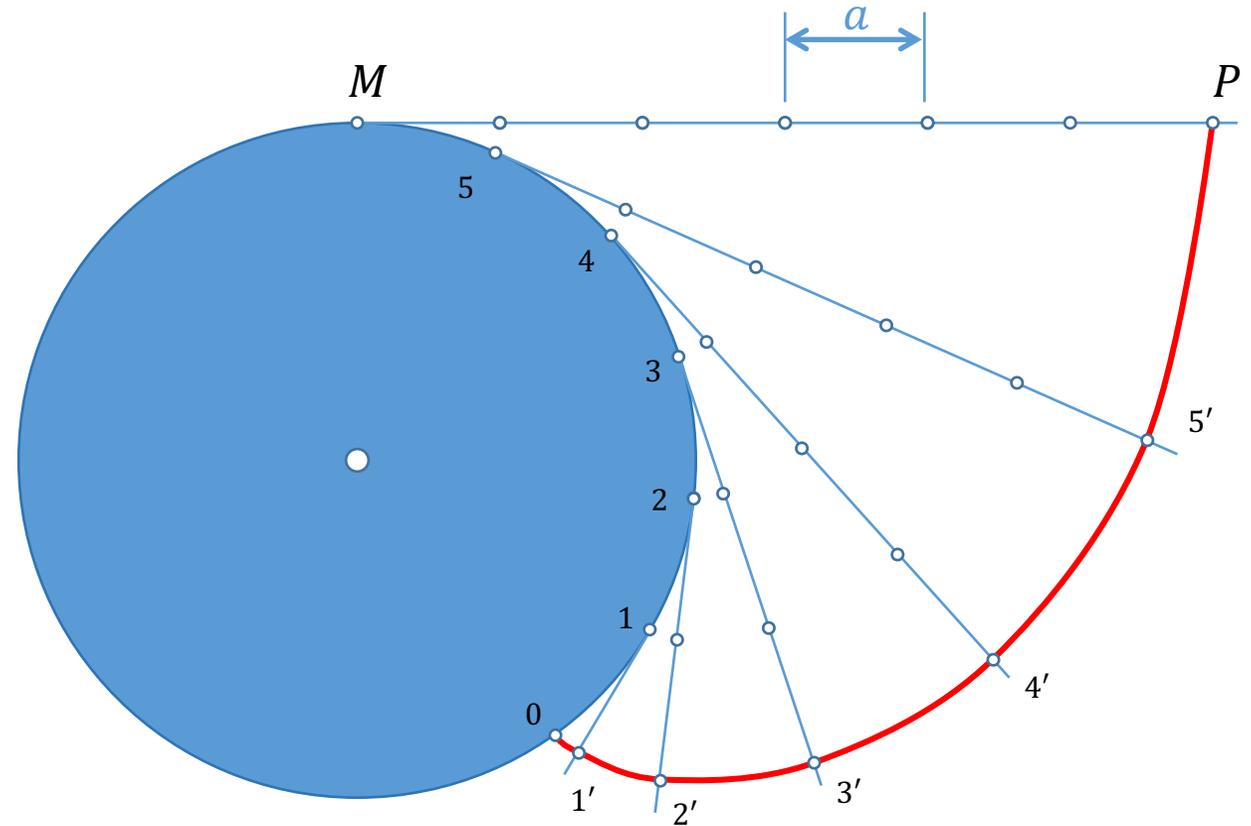
Se puede construir una Evolvente a partir de la trayectoria que describe el extremo de un hilo tenso que se desenrolla de una bobina circular. A este círculo se le denomina *círculo base*.

[http://laplace.us.es/wiki/index.php/2.2.\\_Evolvente\\_de\\_una\\_circunferencia](http://laplace.us.es/wiki/index.php/2.2._Evolvente_de_una_circunferencia)

## Construcción gráfica del perfil de Evolvente

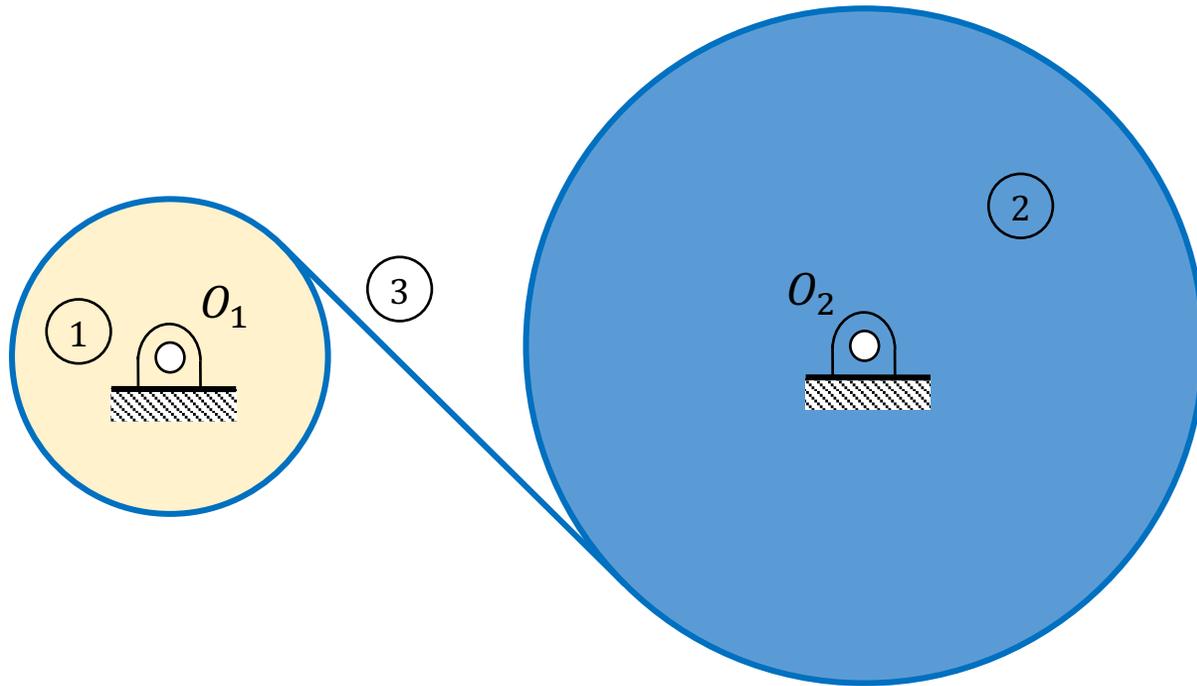
Datos: Círculo base

1. Punto  $P$ , trazar tangente al círculo base  $\rightarrow M$ .
2. Dividir  $PM$  en un número arbitrario de partes
3. Dividir la circunferencia base en puntos cuya distancia sea igual al segmento  $a \rightarrow 0, 1, 2, 3, \dots$
4. Trazar tangentes en cada uno de esos puntos y obtener los puntos  $1', 2', 3', 4', 5', \dots$  situados a una distancia  $a, 2a, 3a, 4a, 5a, \dots$
5. Unir los puntos.  $\rightarrow$  **PERFIL DE EVOLVENTE**



Vamos a disponer de dos círculos de radio  $\rho_1$  y  $\rho_2$  con centro en  $O_1$  y  $O_2$ , sobre los que se enrolla un hilo.

¿g.d.l.?



- N=4 elementos
- 0: Bancada ó Bastidor
  - 1: Cilindro de radio  $\rho_1$
  - 2: Cilindro de radio  $\rho_2$
  - 3: Hilo enrollado Asumir que 3 es como una barra *rígida* que contacta con 1 y con 2

$P_I=2$ ; Pares R en  $O_1$  y  $O_2$

$P_{II}=2$ ; Par Leva de contacto de 3 con 1 y con 2

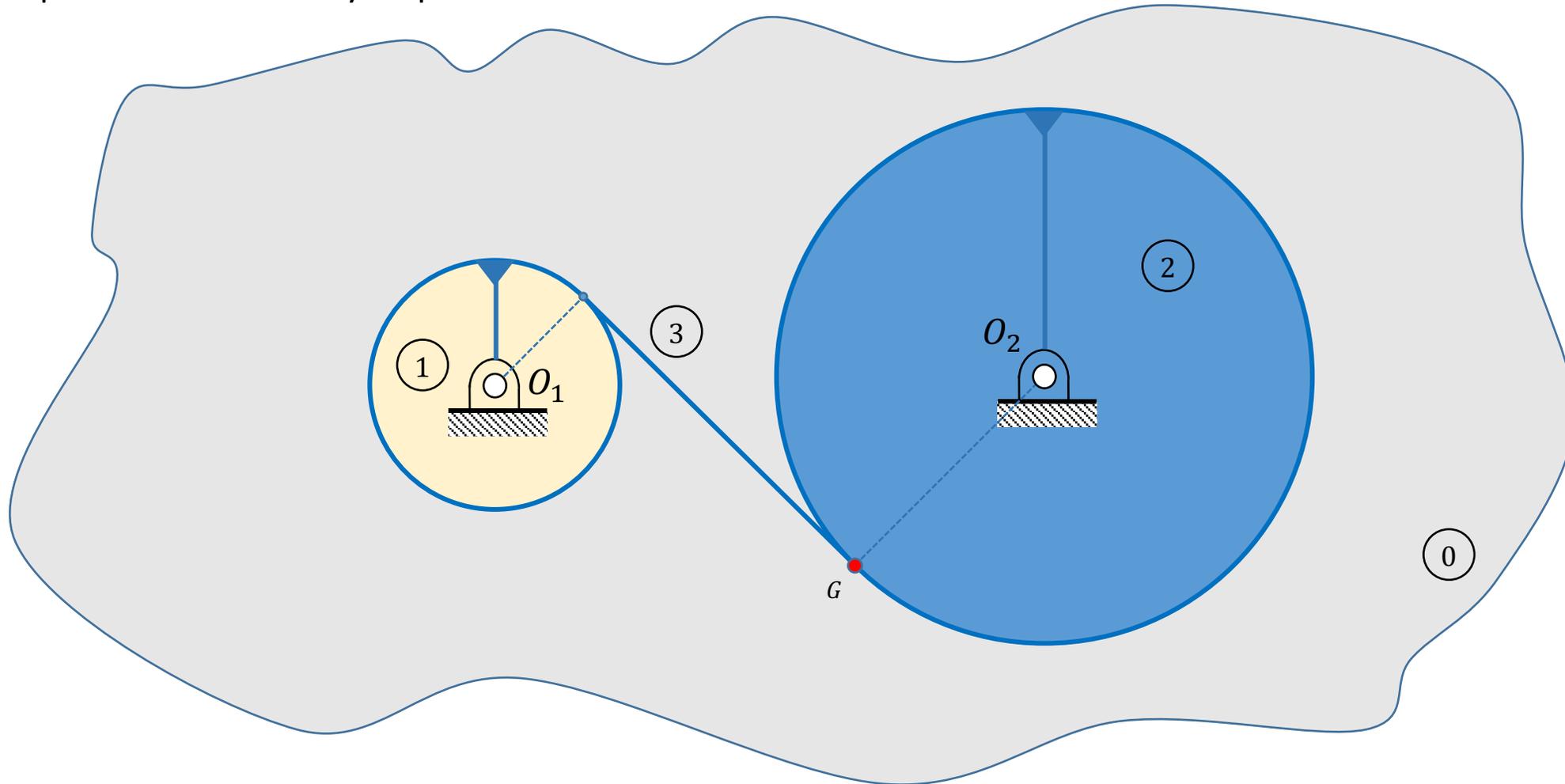
$$G=3 \times (4-1) - 2 \times 2 - 2 = 3$$

Para que la transmisión funcione correctamente, no puede haber deslizamiento. Por lo tanto los pares leva deben considerarse como pares de clase I (Rodadura pura).

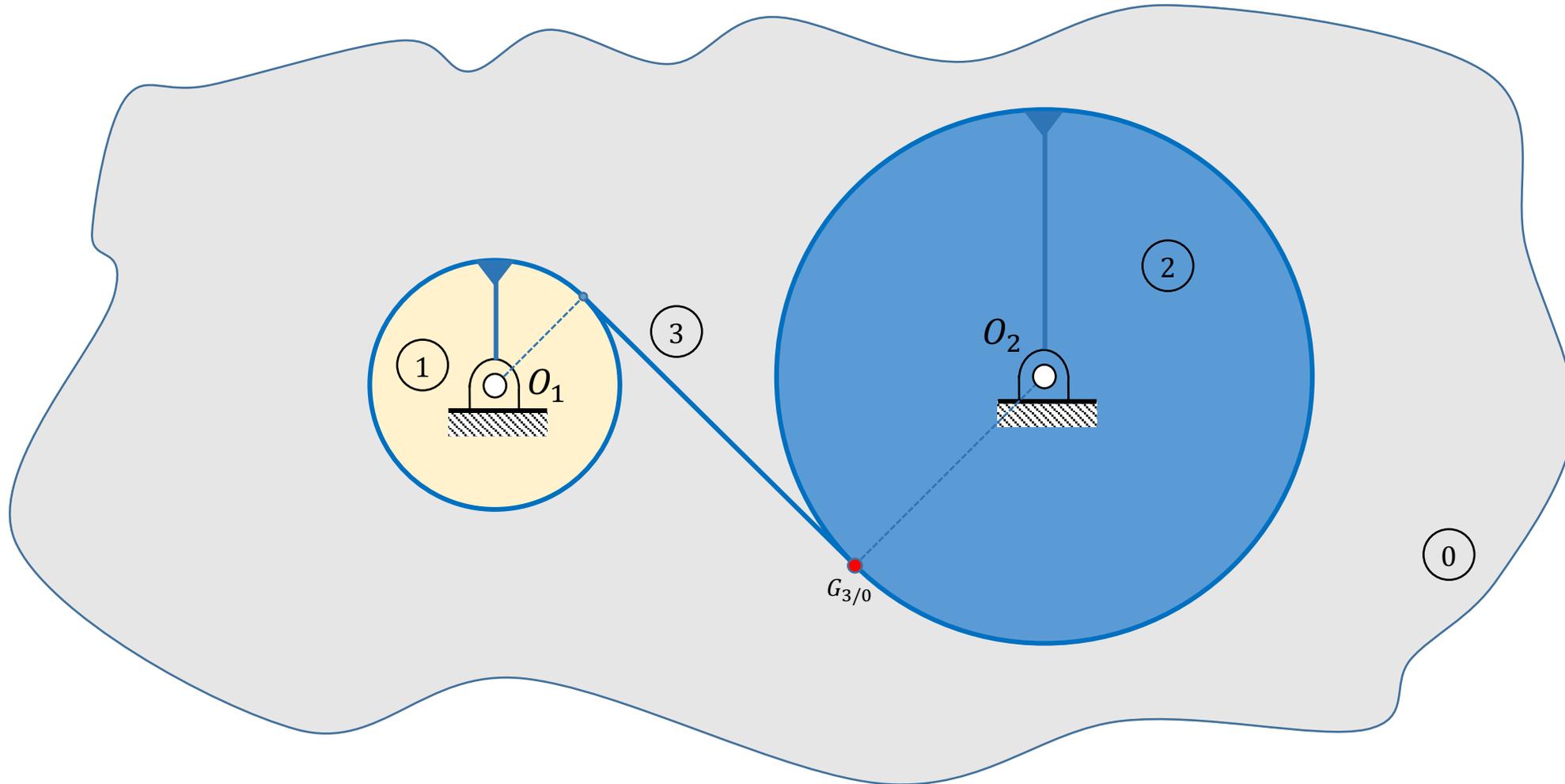


$$G=3 \times (4-1) - 2 \times 4 = 1$$

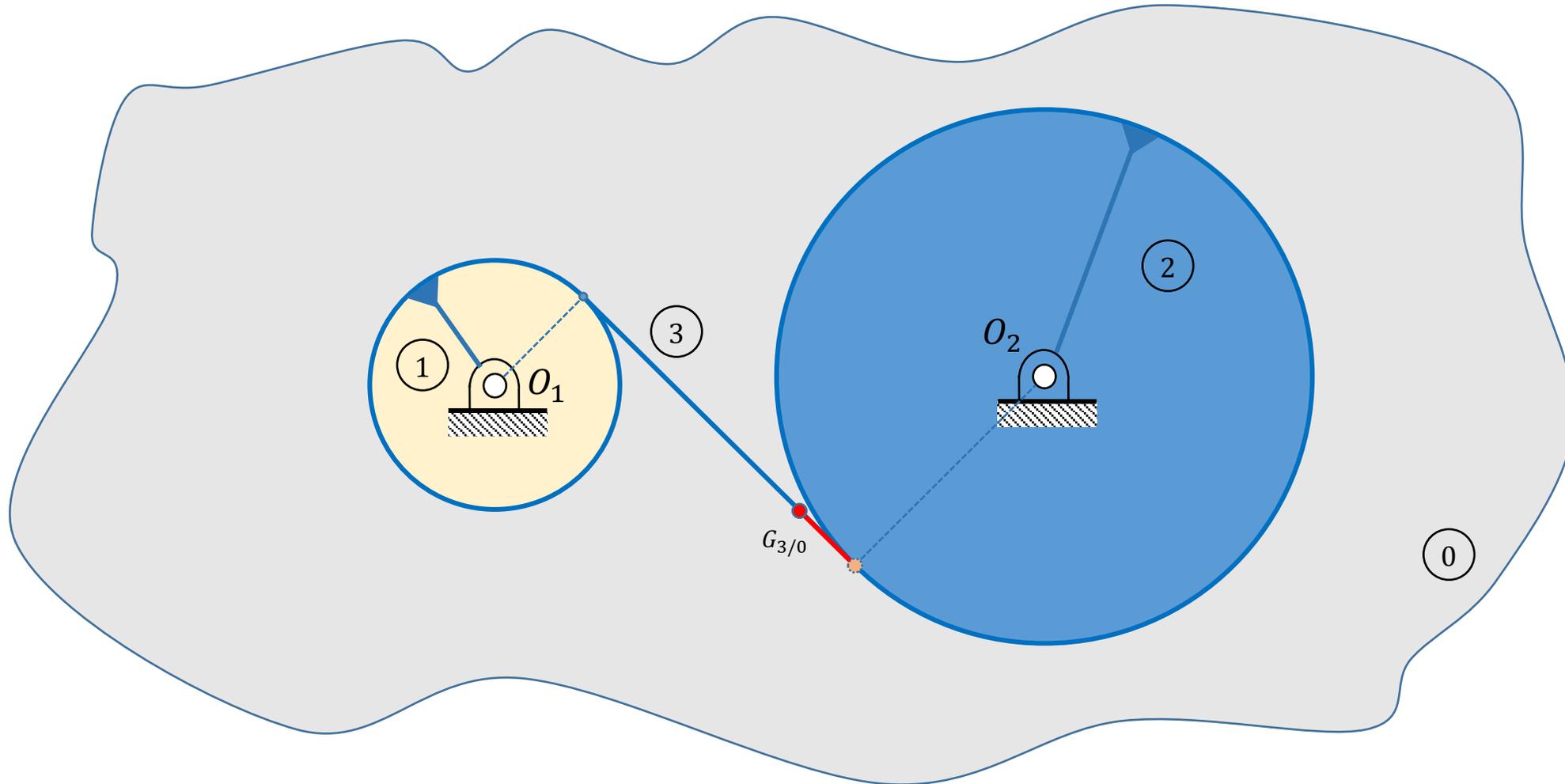
Imaginemos que queremos analizar la trayectoria de un punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 0 (Fijo), respecto del sistema 1 y respecto del sistema 2.



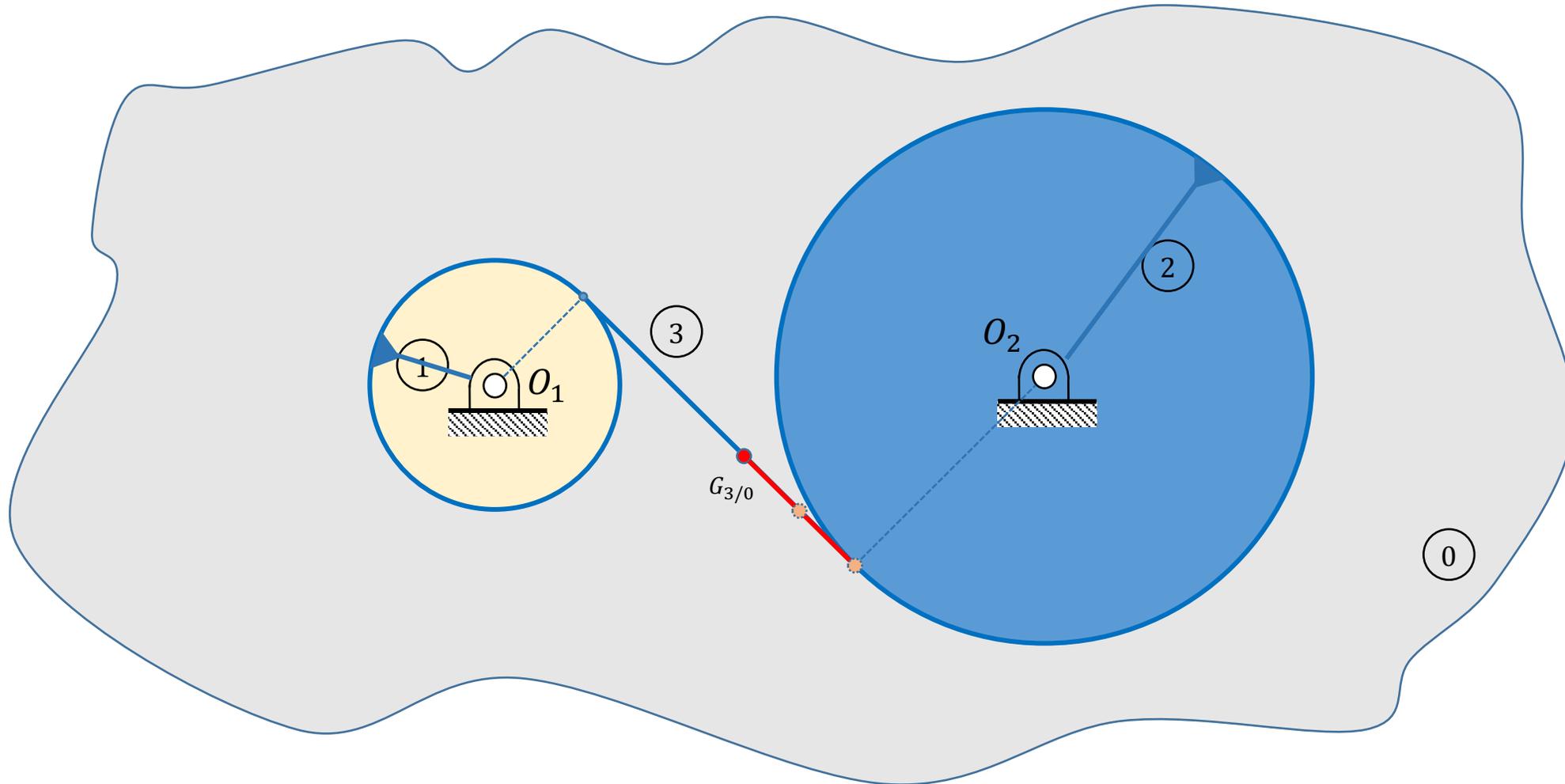
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 0 (Fijo).



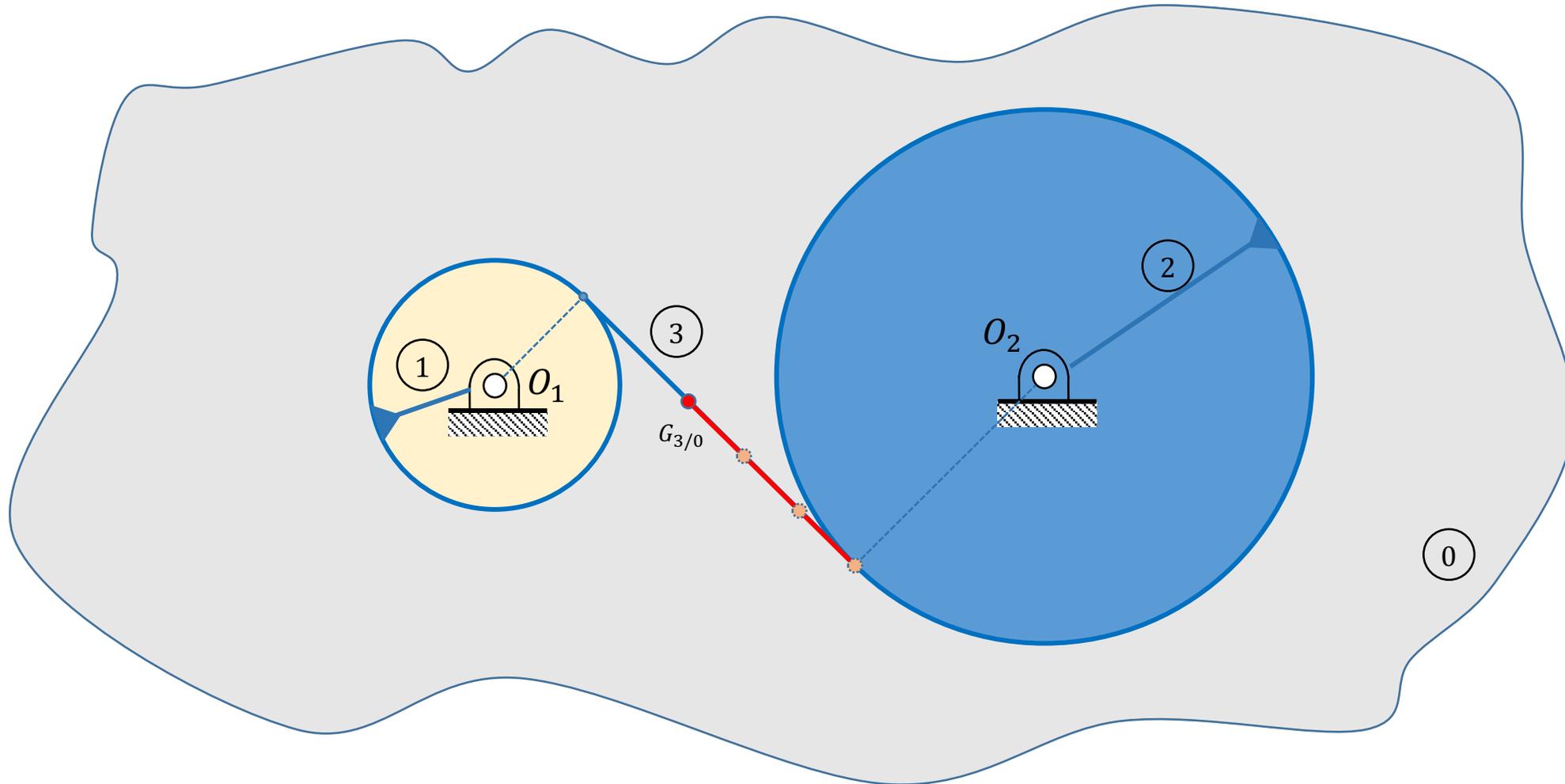
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 0 (Fijo).



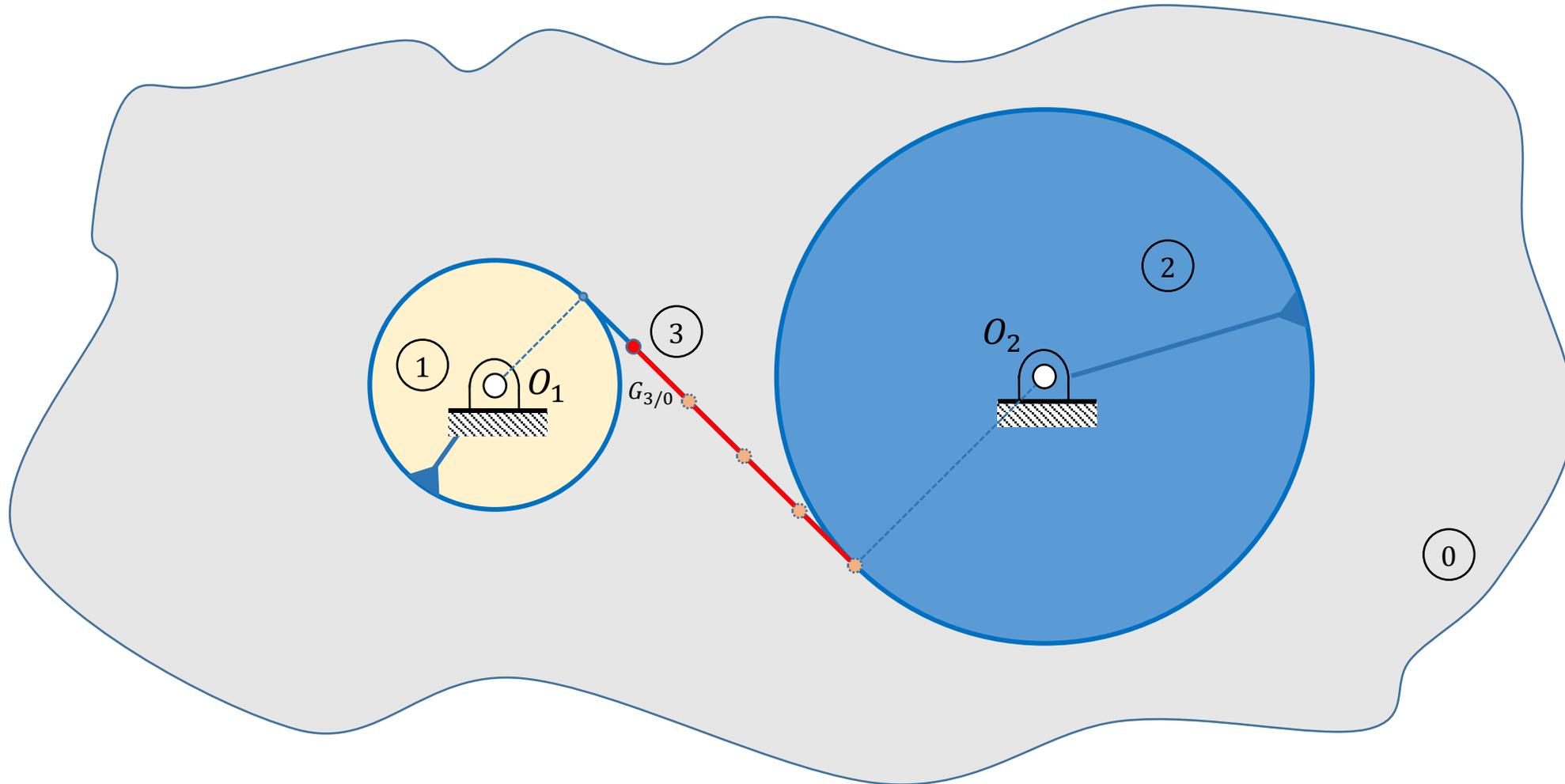
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 0 (Fijo).



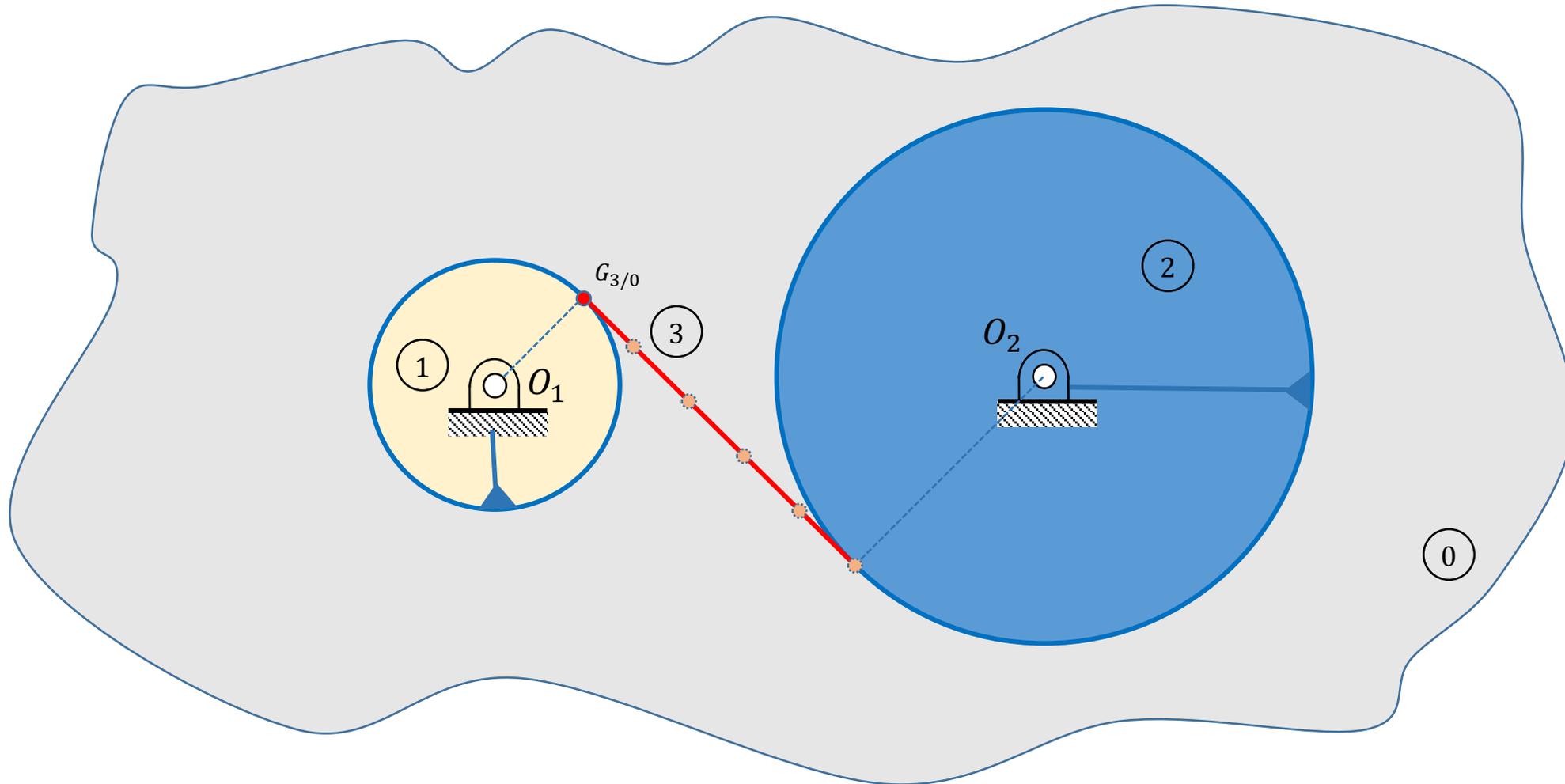
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 0 (Fijo).



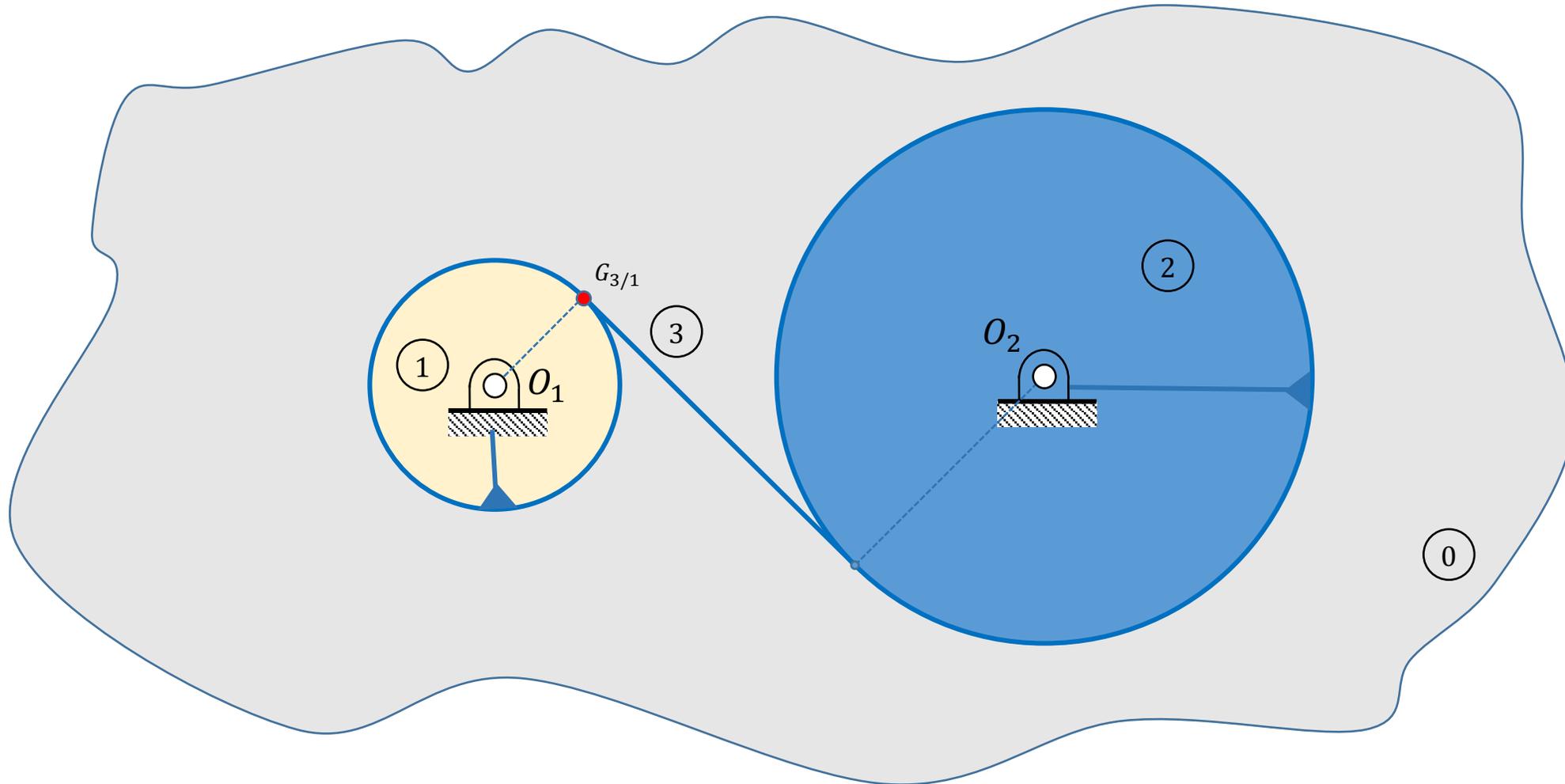
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 0 (Fijo).



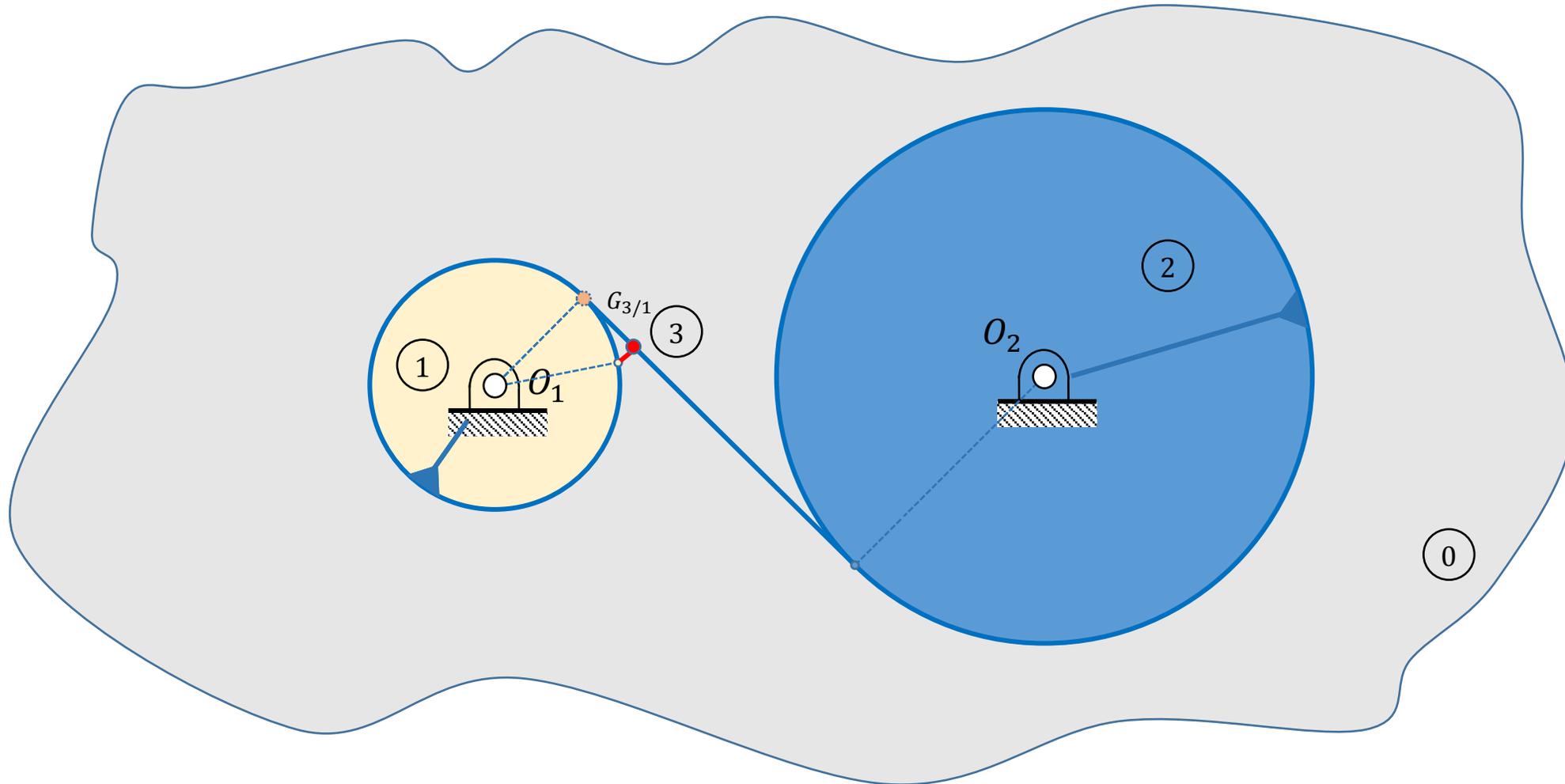
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 0 (Fijo).



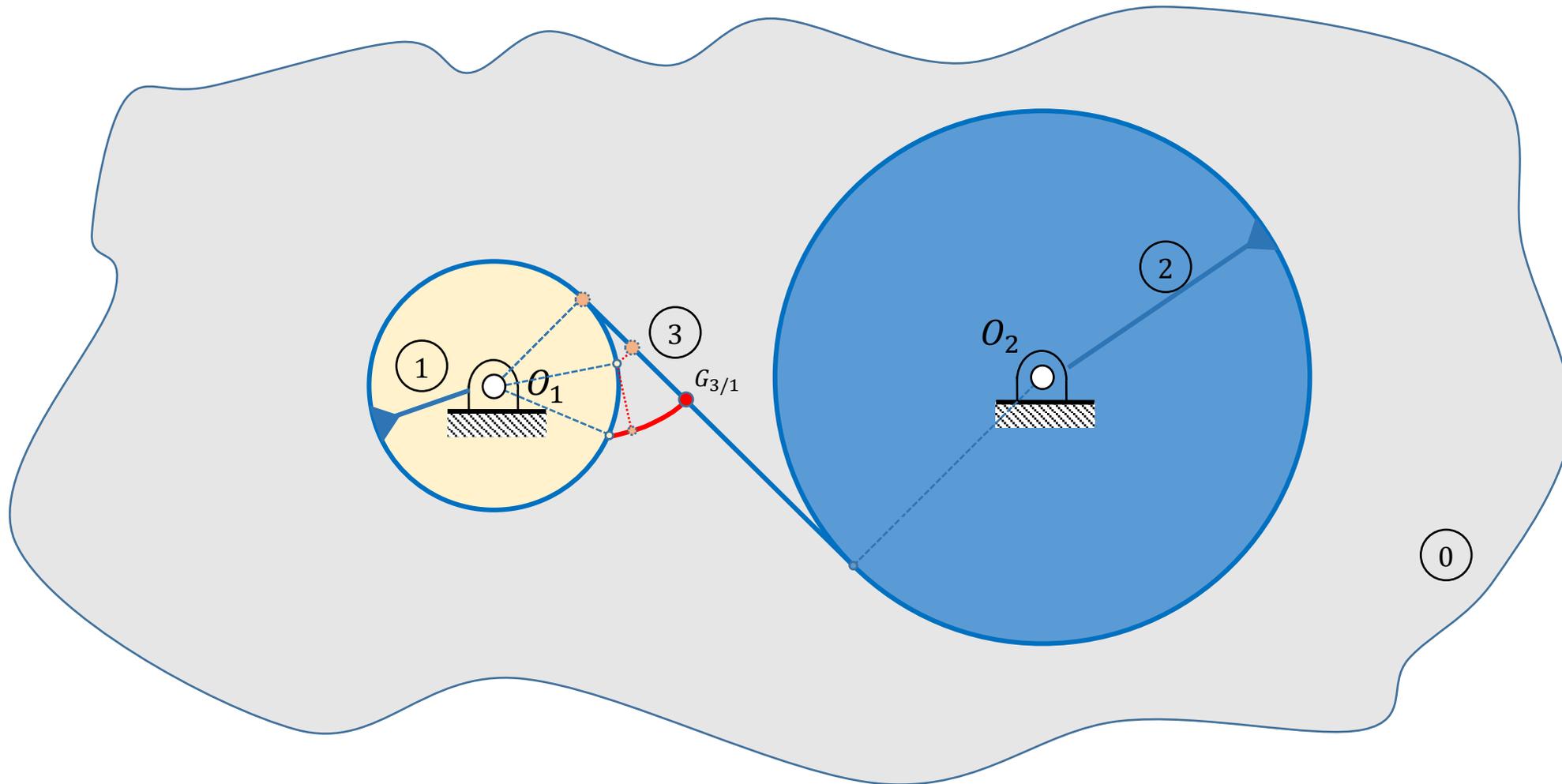
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 1 (piñón).



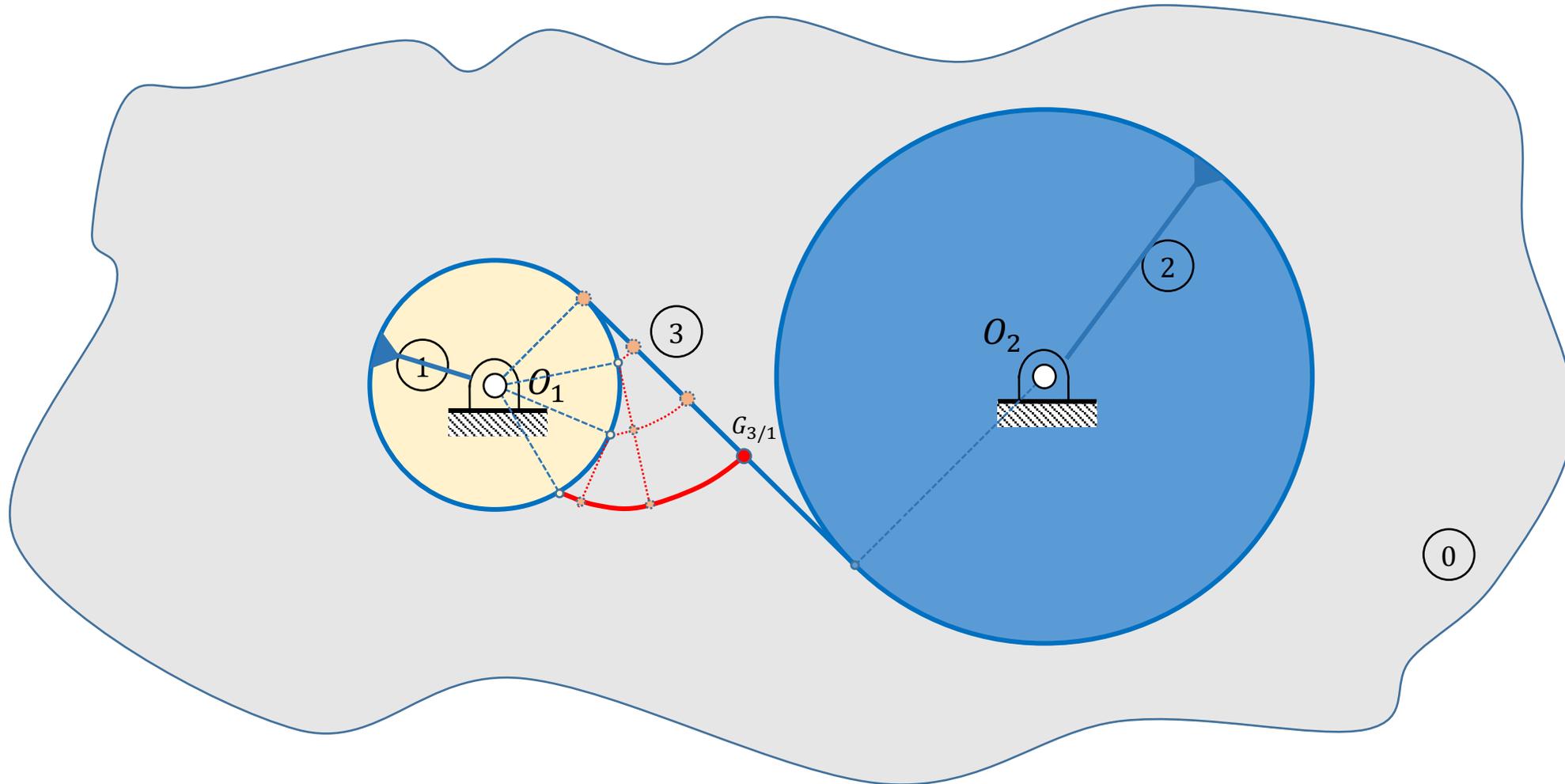
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 1 (piñón).



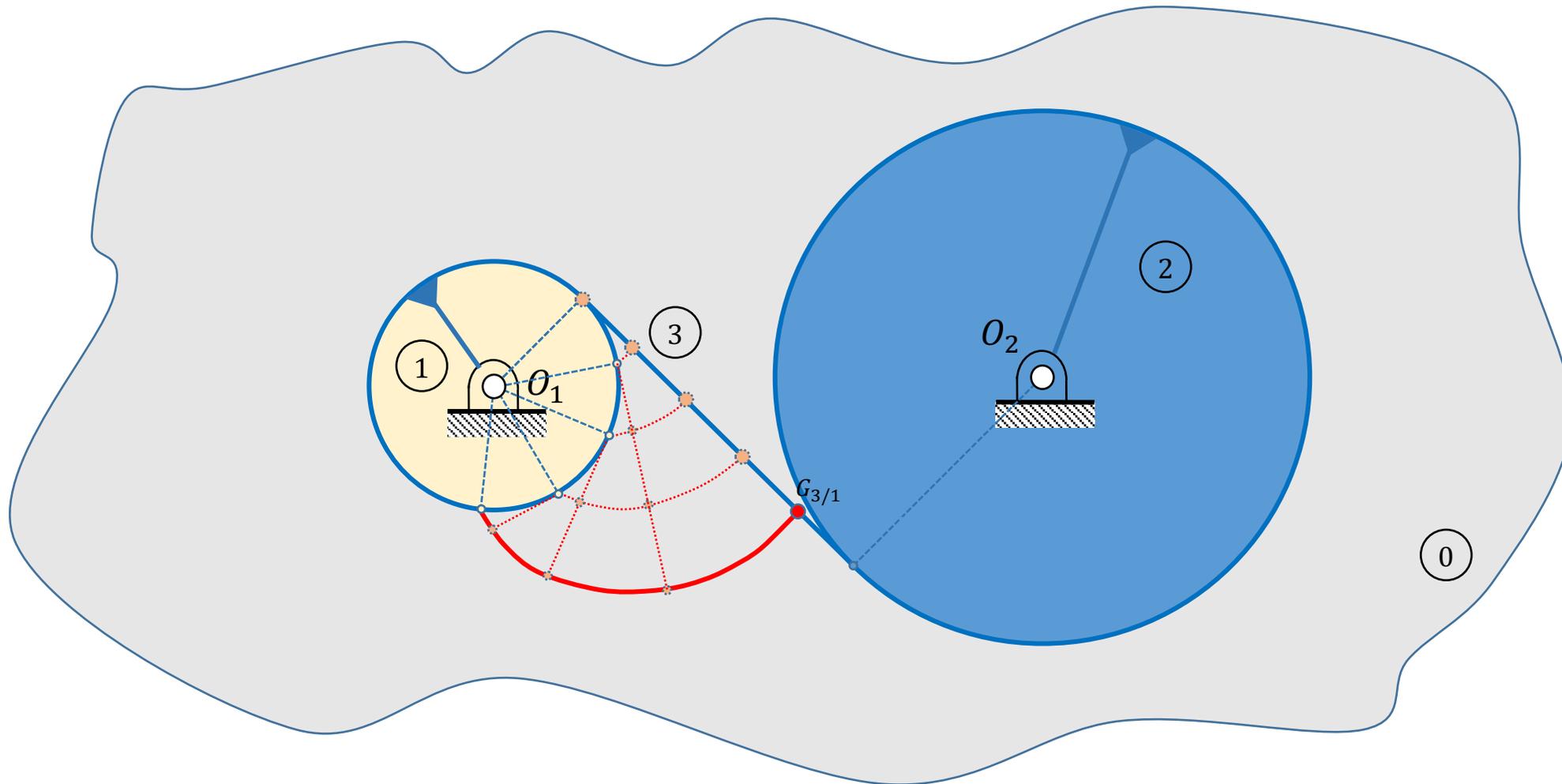
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 1 (piñón).



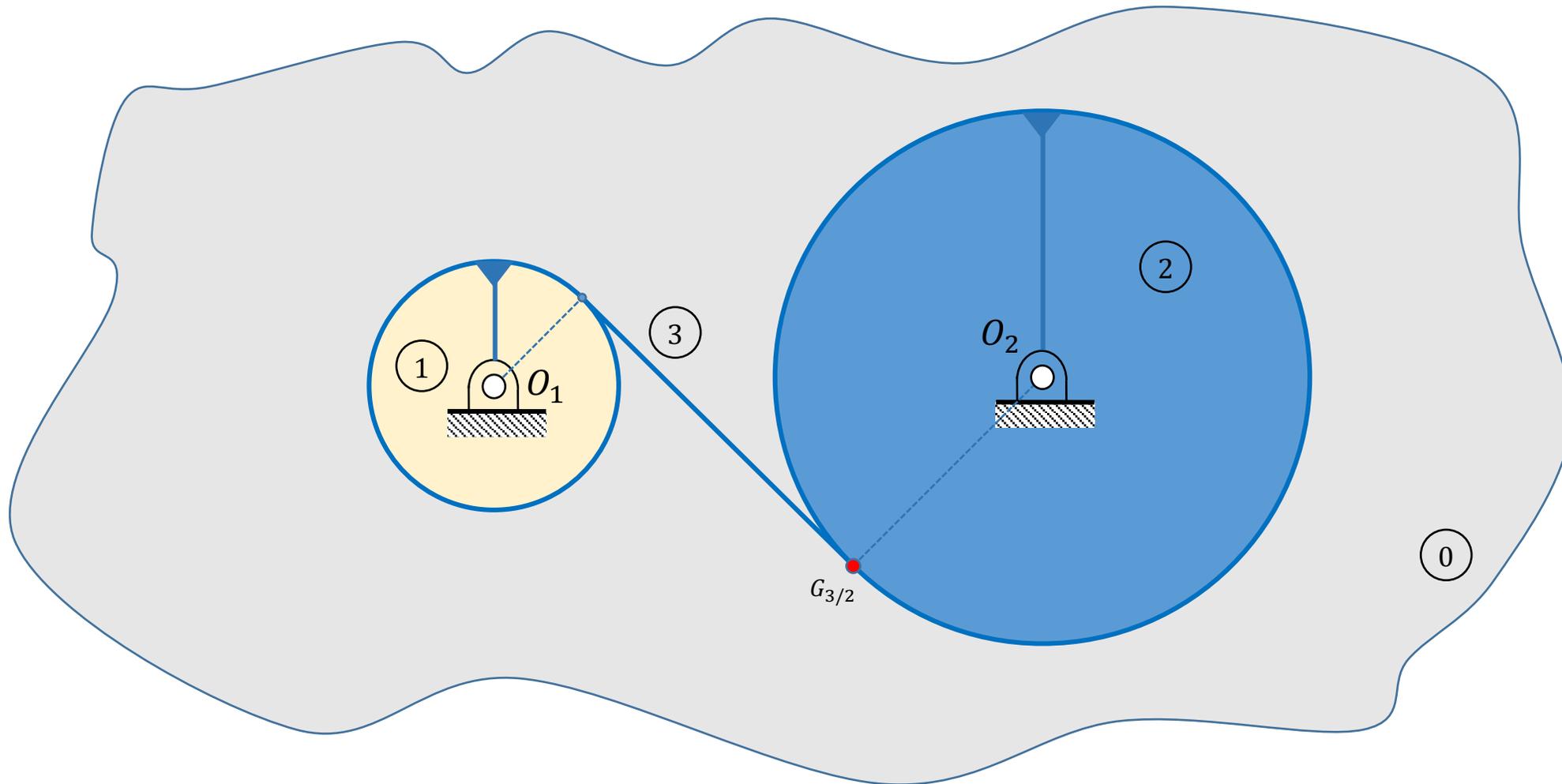
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 1 (piñón).



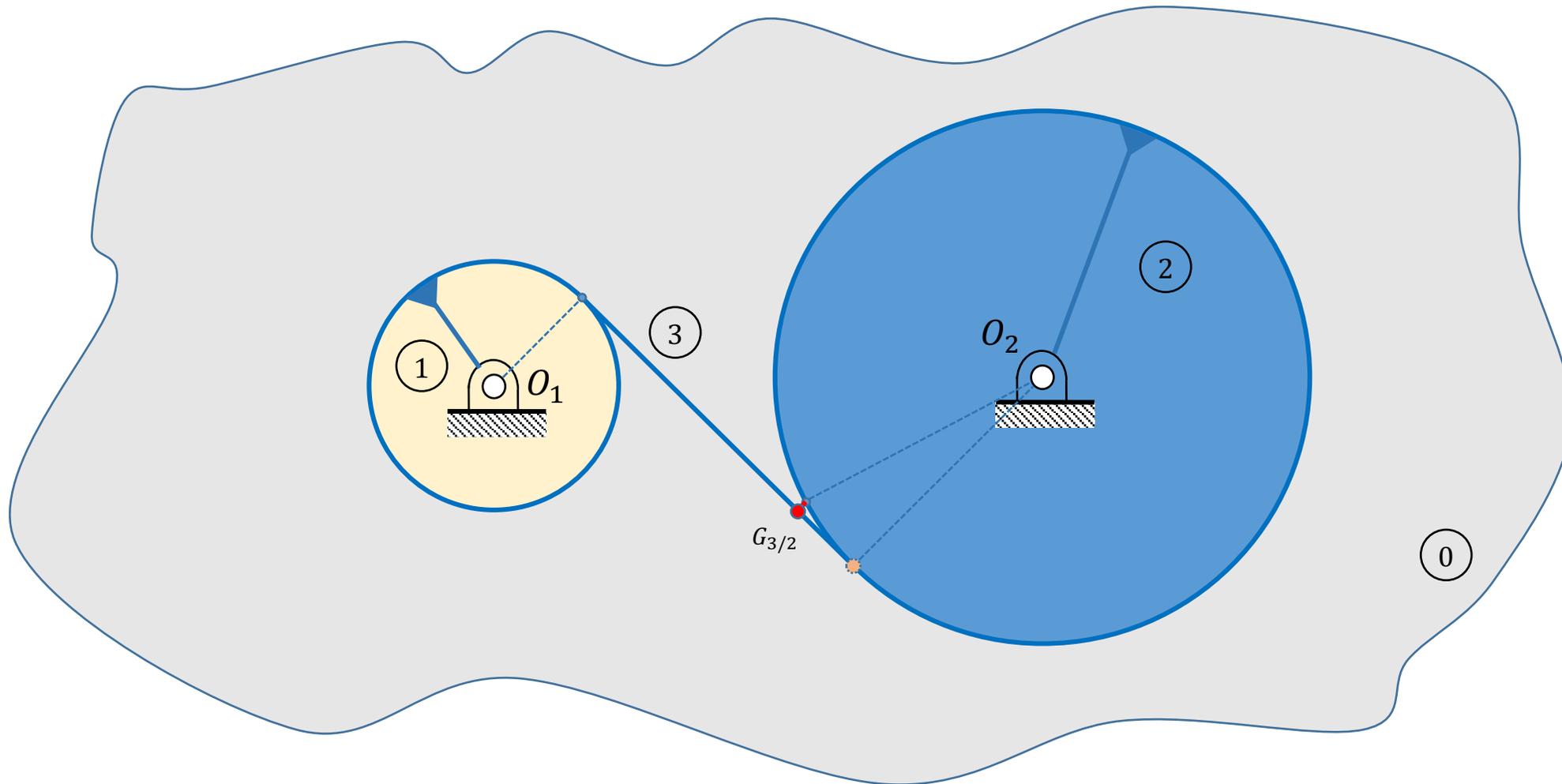
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 1 (piñón).



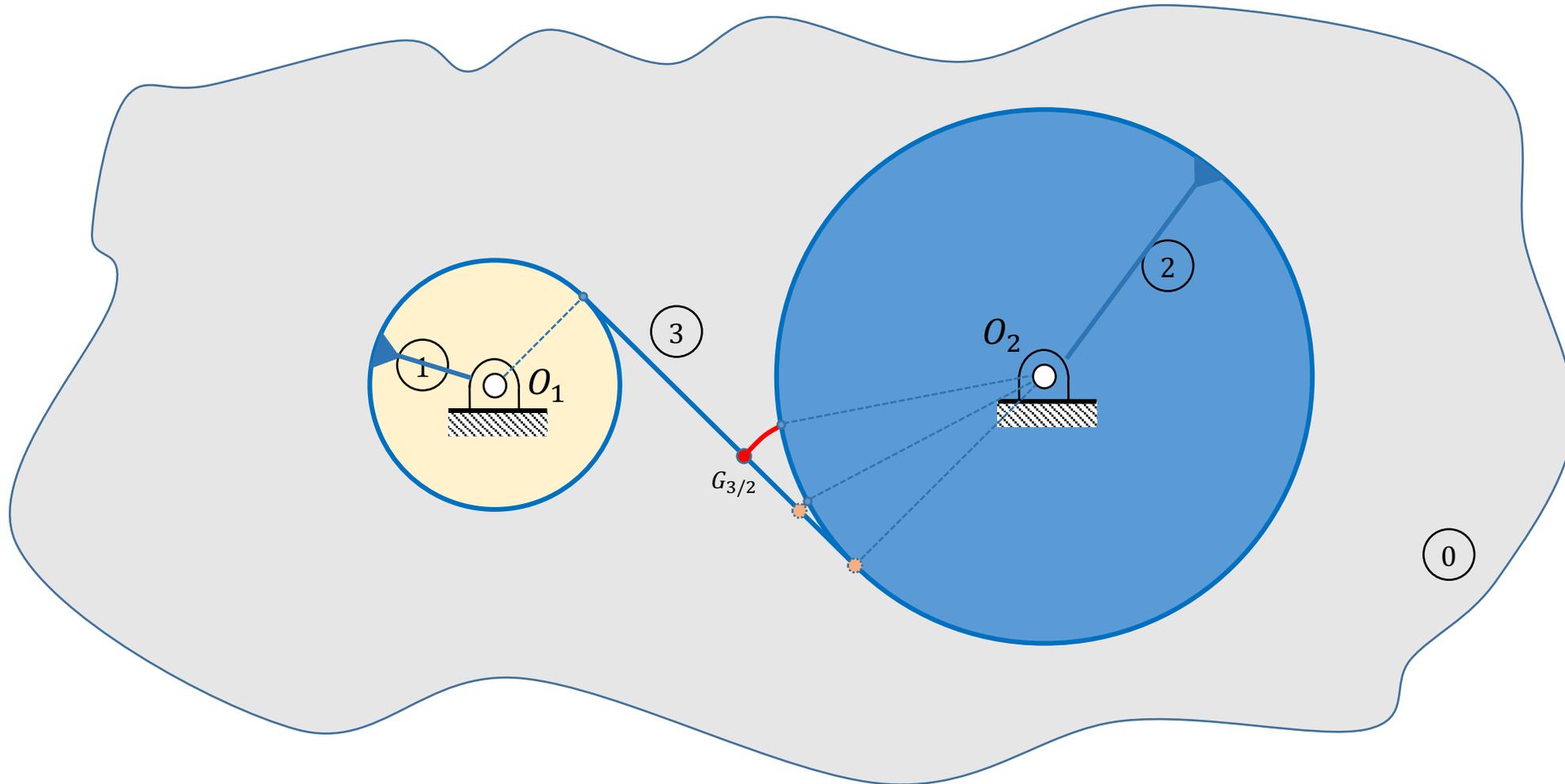
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 2 (Rueda).



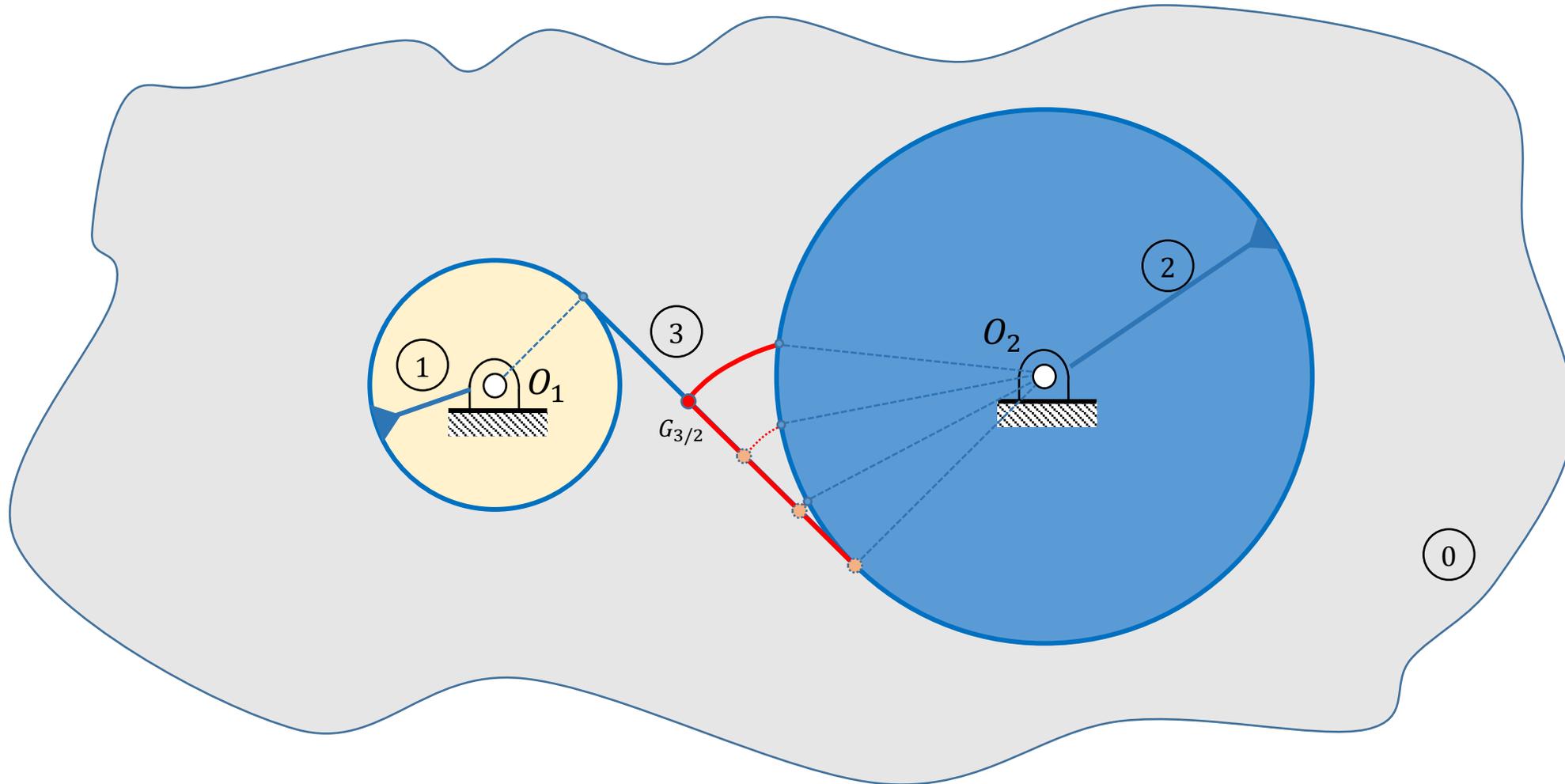
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 2 (Rueda).



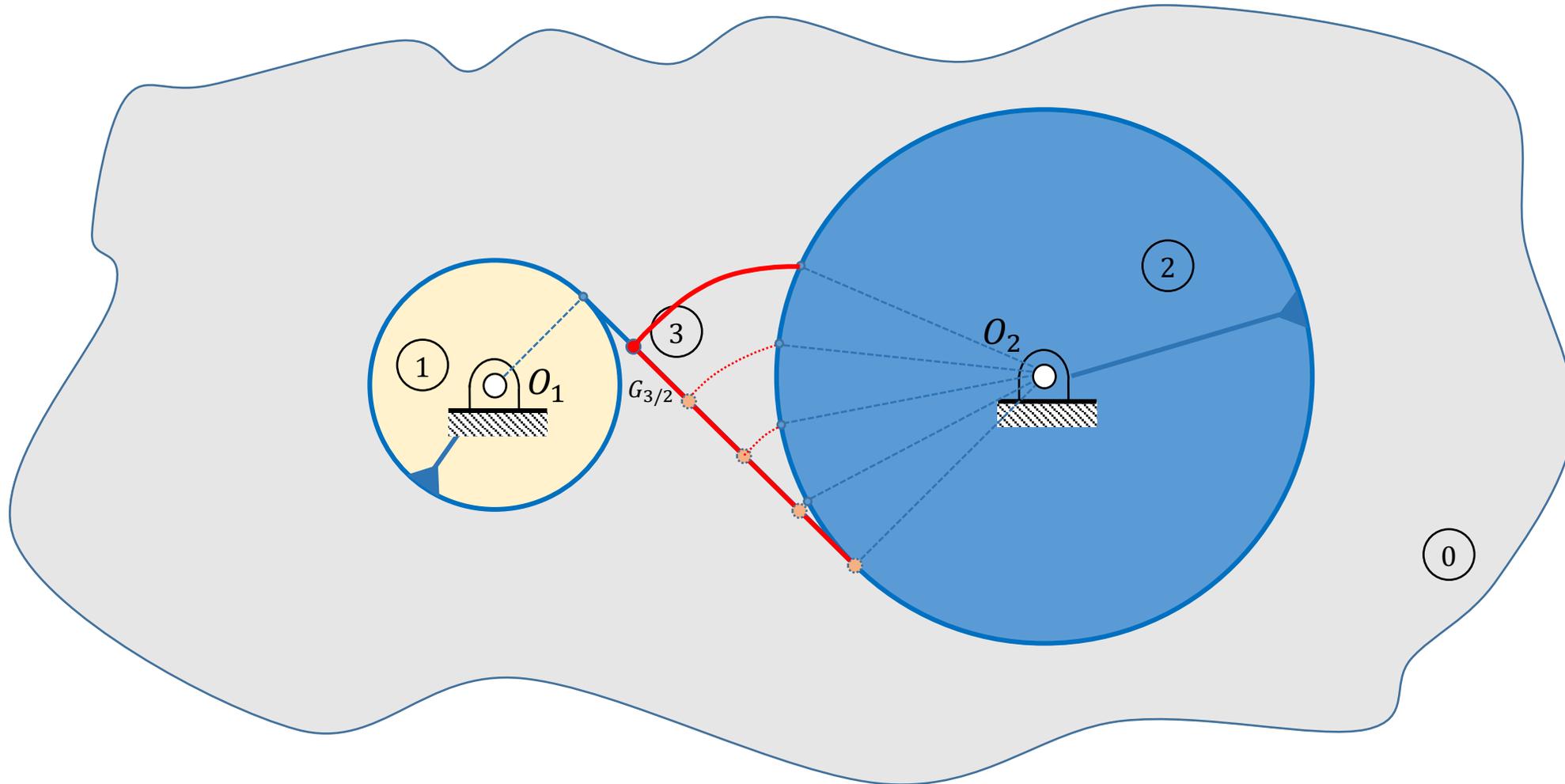
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 2 (Rueda).



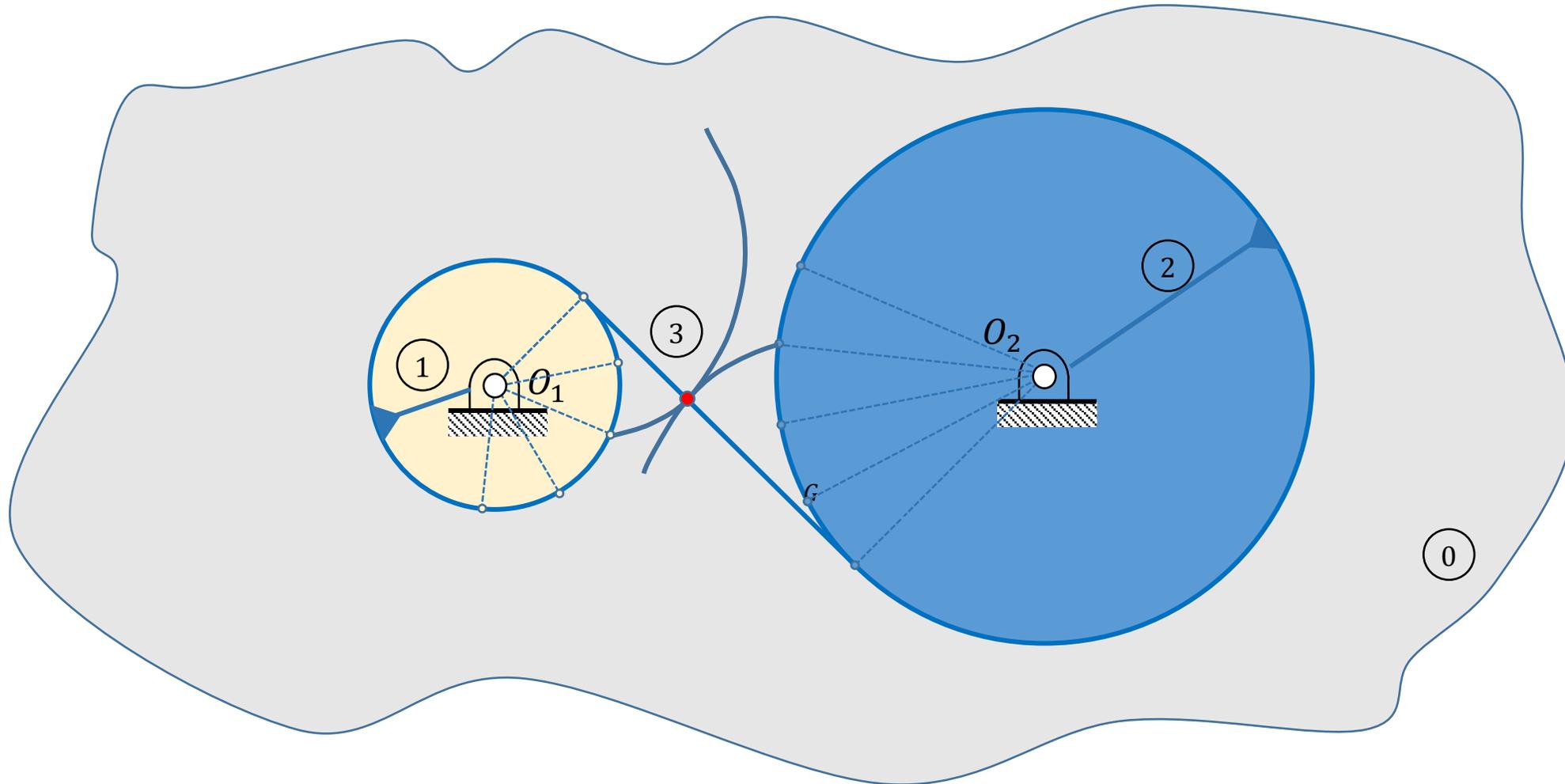
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 2 (Rueda).



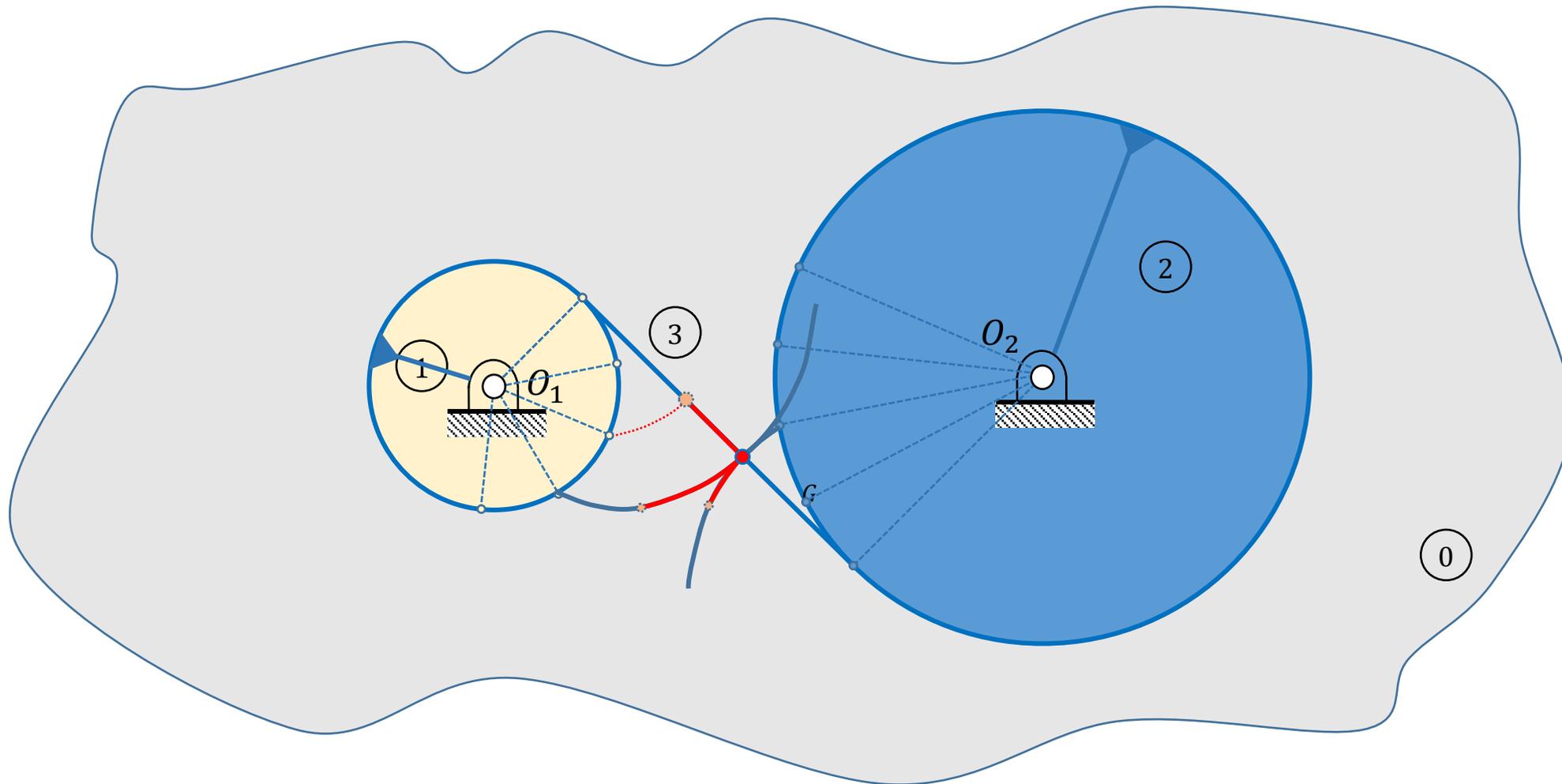
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 2 (Rueda).



Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 0,1 y 2.



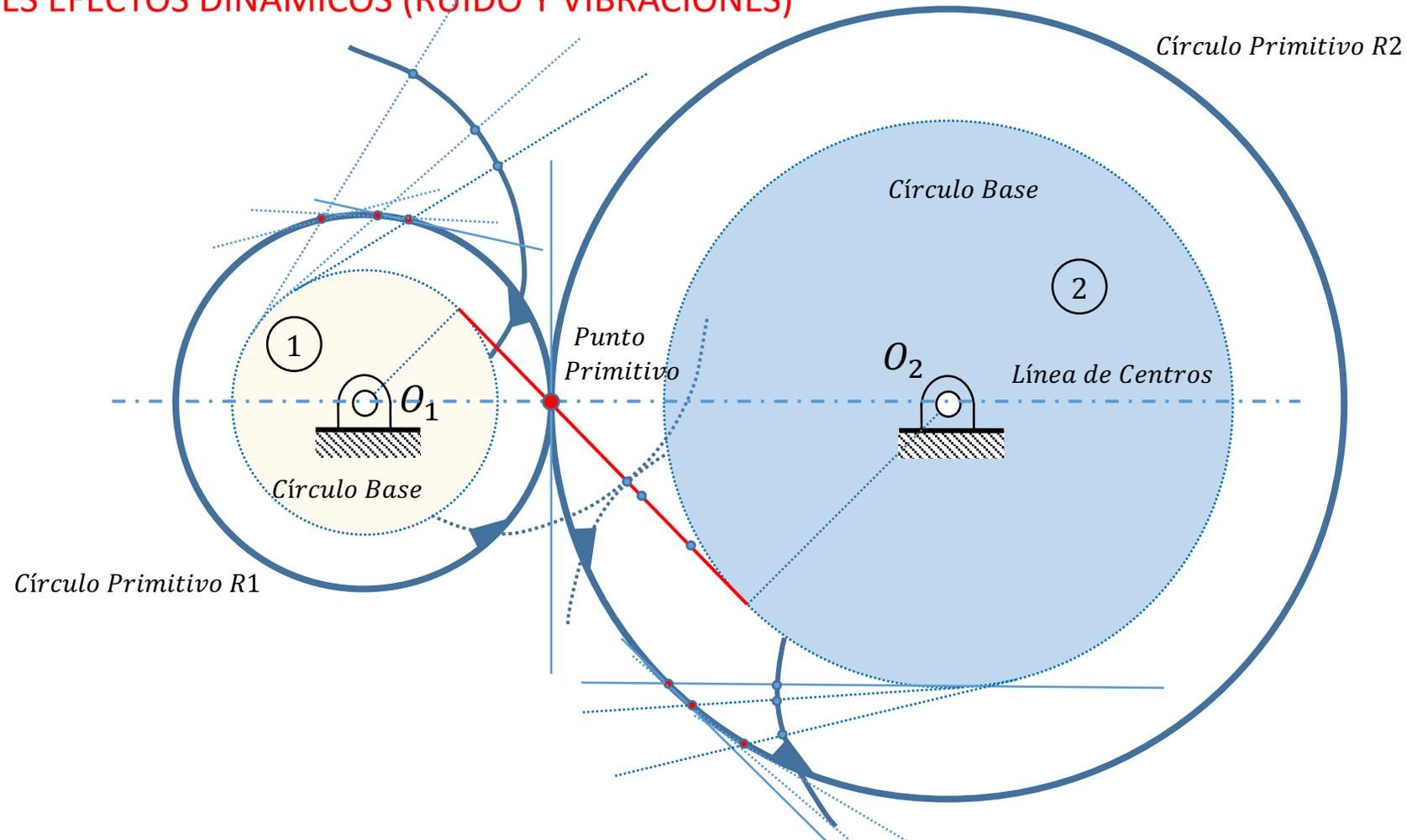
Trayectoria del punto  $G$  del hilo (3) respecto del sistema 0,1 y 2.



## 12.2 Engranajes de perfil de Evolvente: Propiedades Perfil Evolvente

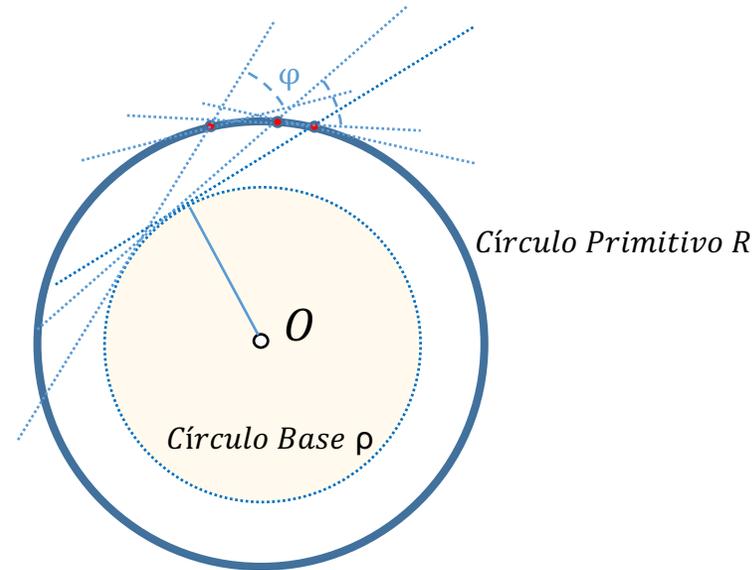
1.- **La Línea de Engrane es una RECTA.** Por lo tanto los esfuerzos de contacto entre dientes siempre tienen la misma dirección. El ángulo de presión es constante. Esta propiedad se deduce de la forma de construcción de los perfiles. El ángulo entre la normal al perfil y la tangente a la circunferencia primitiva es constante.

**MENORES EFECTOS DINAMICOS (RUIDO Y VIBRACIONES)**



## 12.2 Engranajes de perfil de Evolvente: Propiedades Perfil Evolvente

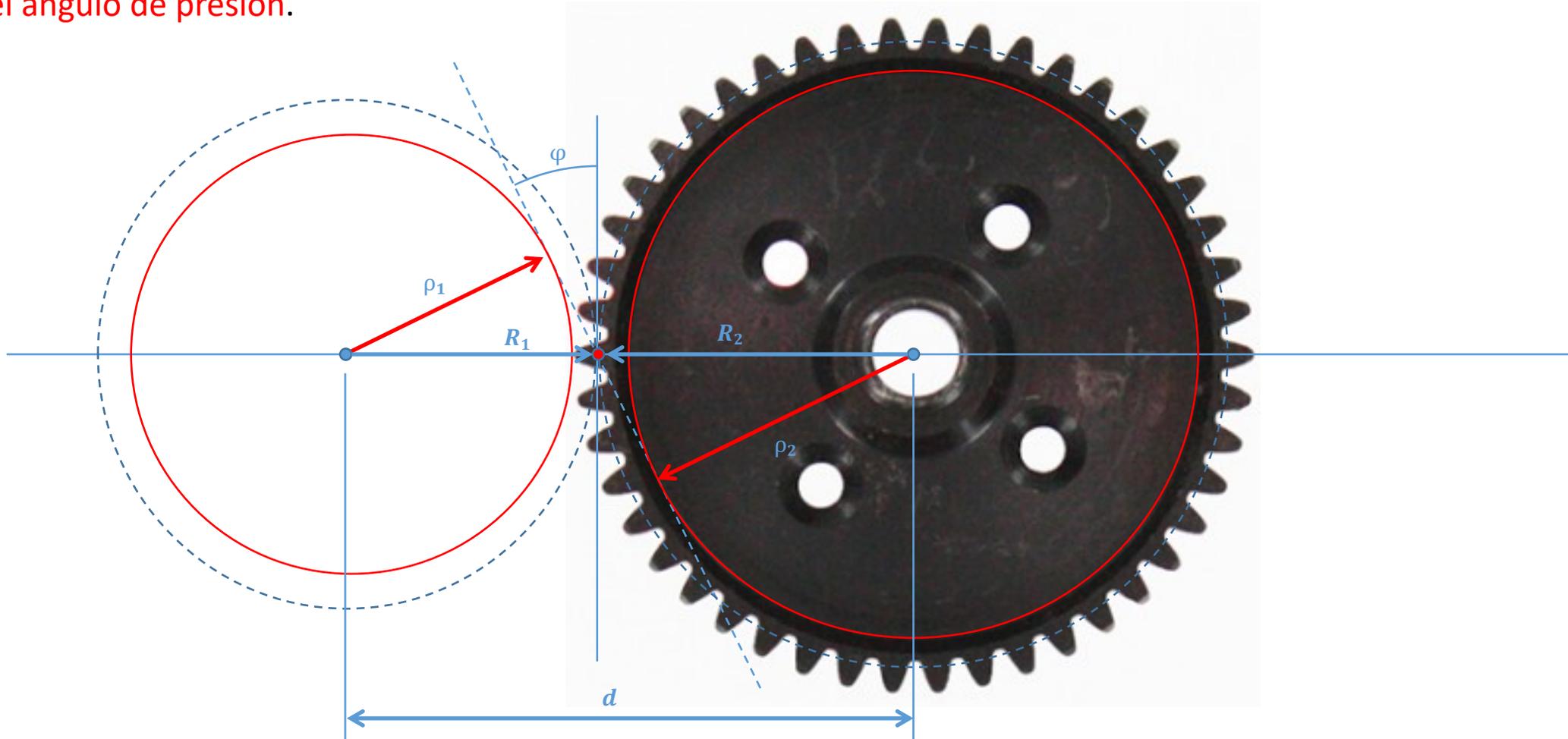
**2.- El conjugado de una Evolvente es otra Evolvente.** Si trazamos rectas secantes a una circunferencia de radio  $R$ , que formen el mismo ángulo ( $\varphi$ ) con la tangente, entonces las distancias de estas rectas al centro de la circunferencia son iguales ( $R\cos\varphi$ ). Por lo tanto estas secantes son tangentes a una circunferencia de radio  $\rho = R\cos\varphi$ , y como dichas secantes son perpendiculares al perfil  $\xi$ , entonces este es una evolvente.



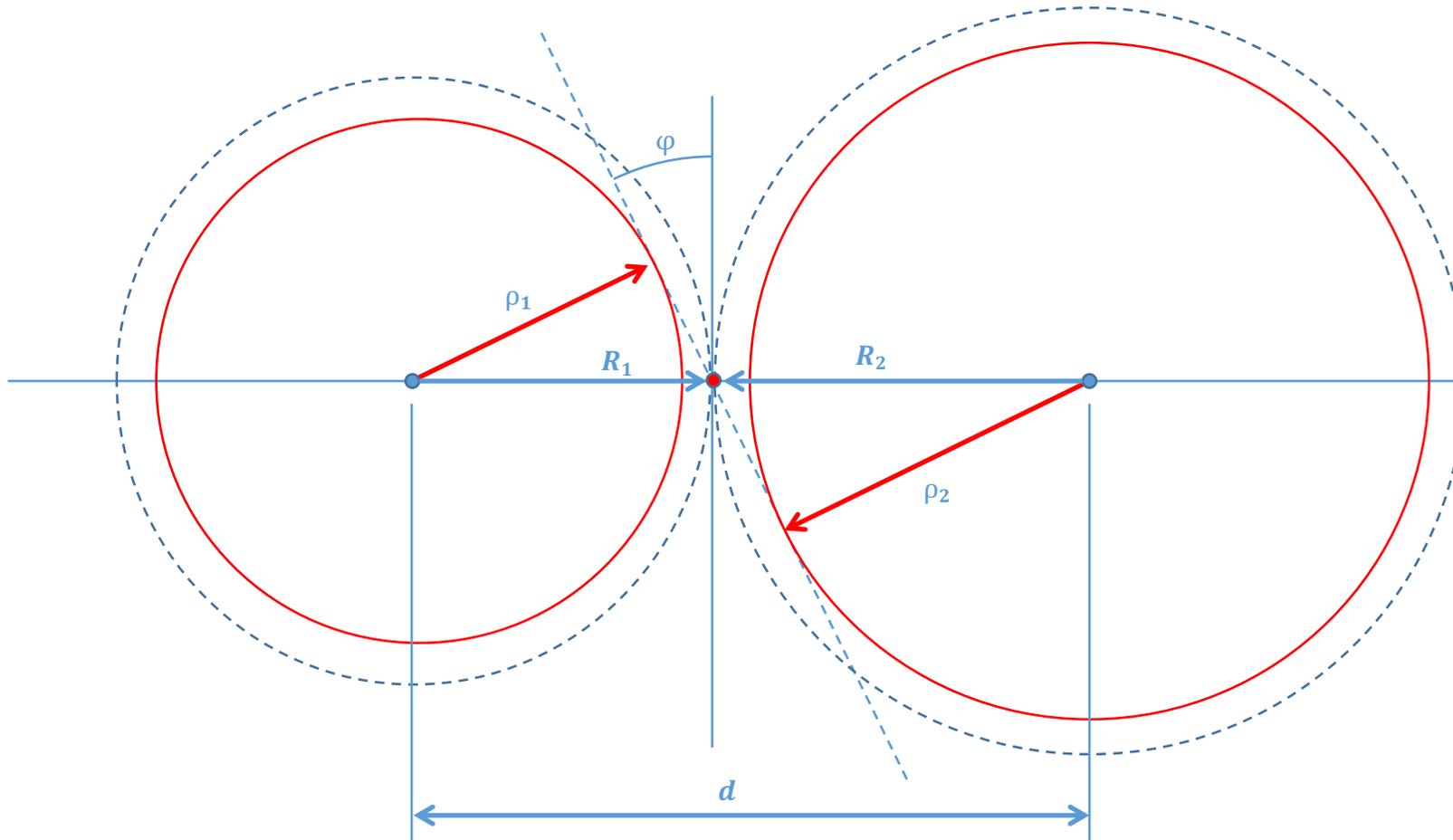
Si disponemos de un procedimiento para “construir” un perfil de evolvente, podremos emplear el mismo procedimiento para cualquier evolvente.

## 12.2 Engranajes de perfil de Evolvente: Propiedades Perfil Evolvente

3.- Los perfiles continúan siendo conjugados si se modifica la distancia de montaje. Además, los perfiles continúan engranando con **idéntica relación de transmisión**. Solo cambian los radios de los círculos primitivos y el ángulo de presión.



3.- Los perfiles continúan siendo conjugados si se modifica la distancia de montaje. Además, los perfiles continúan engranando con **idéntica relación de transmisión**. Solo cambian los radios de los círculos primitivos y el ángulo de presión.



$$\mu = -\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R_2}$$

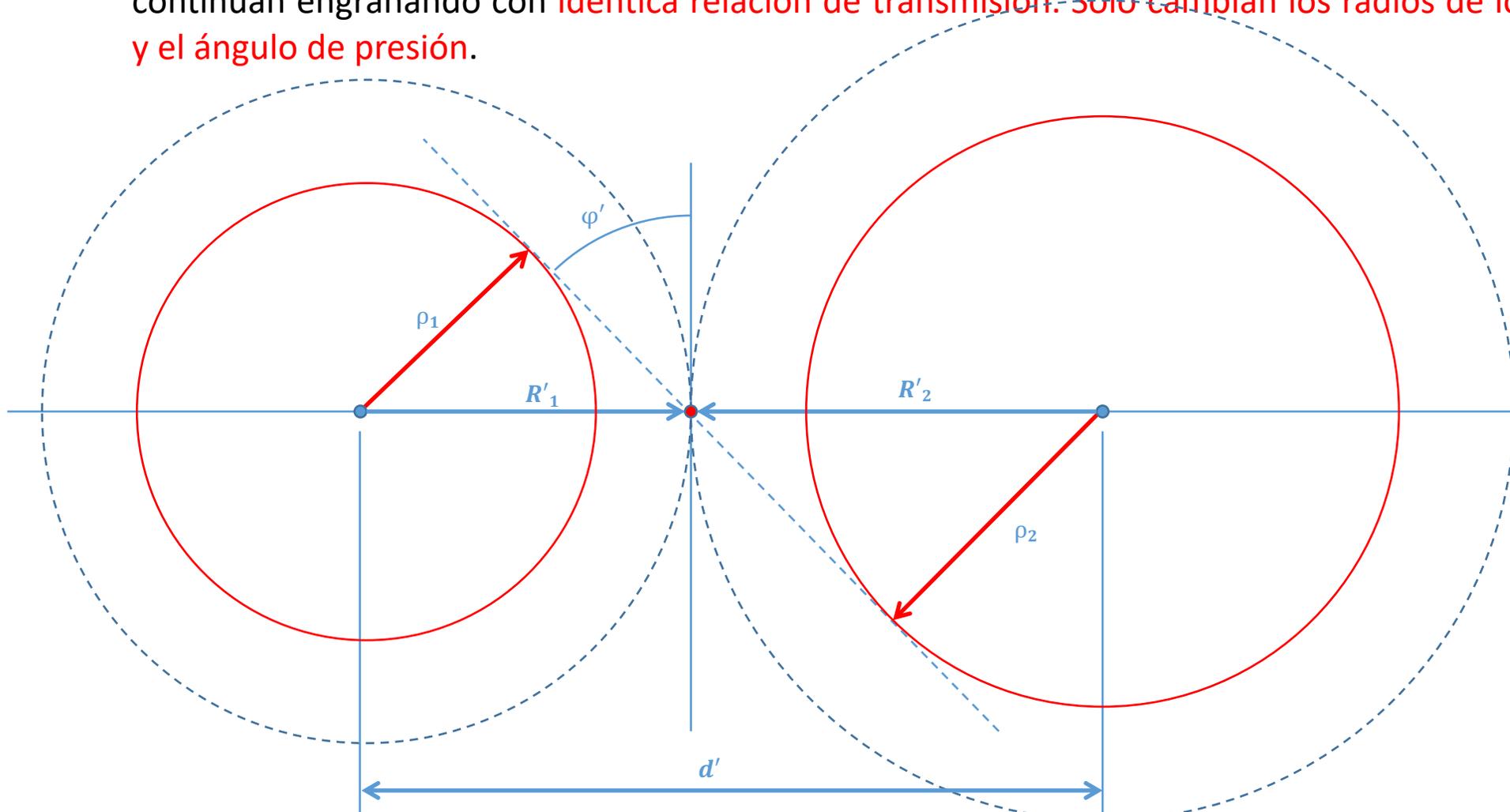
$$\rho_1 = R_1 \cos \varphi$$

$$\rho_2 = R_2 \cos \varphi$$

$$\mu = -\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{\rho_1 / \cos \varphi}{\rho_2 / \cos \varphi}$$

$$\mu = -\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

3.- Los perfiles continúan siendo conjugados si se modifica la distancia de montaje. Además, los perfiles continúan engranando con **idéntica relación de transmisión. Solo cambian los radios de los círculos primitivos y el ángulo de presión.**



$$\mu' = -\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{R'_1}{R'_2}$$

$$\rho_1 = R'_1 \cos \phi'$$

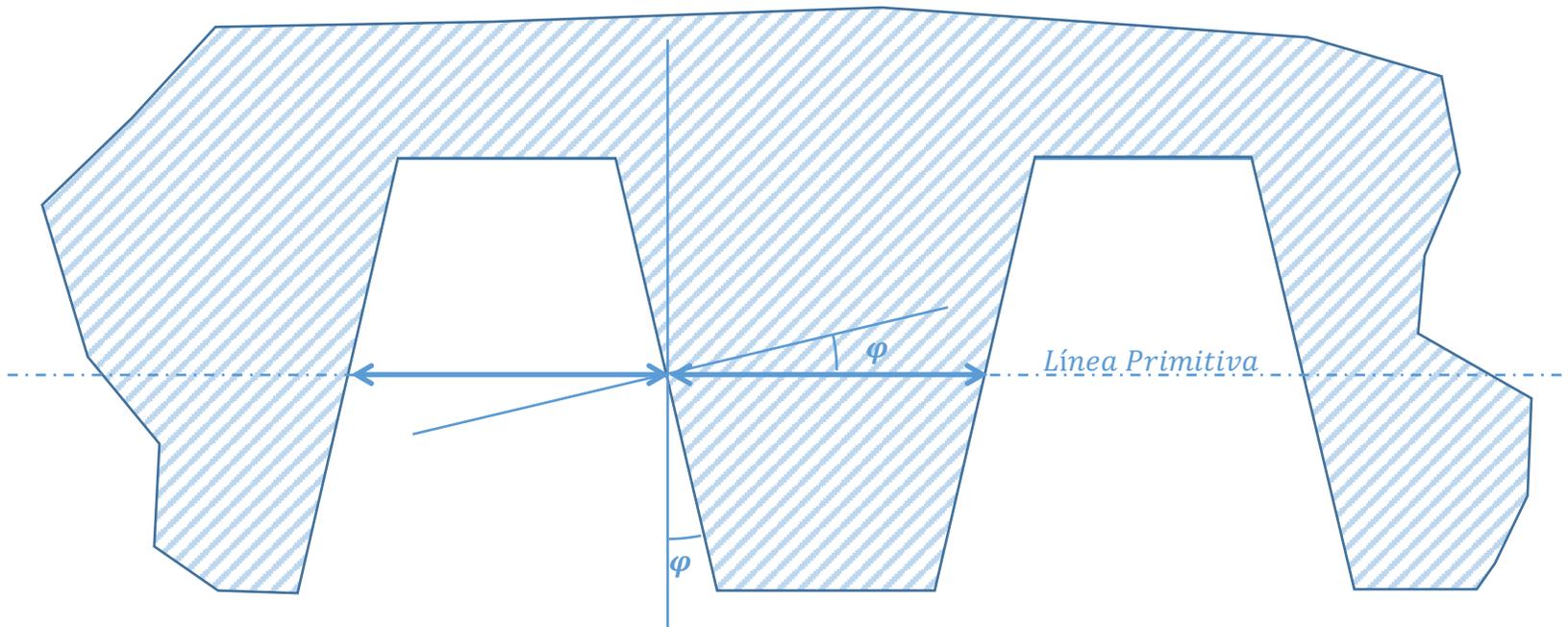
$$\rho_2 = R'_2 \cos \phi'$$

$$\mu' = -\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{\rho_1 / \cos \phi'}{\rho_2 / \cos \phi'}$$

$$\mu' = -\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

## 12.2 Engranajes de perfil de Evolvente: Propiedades Perfil Evolvente

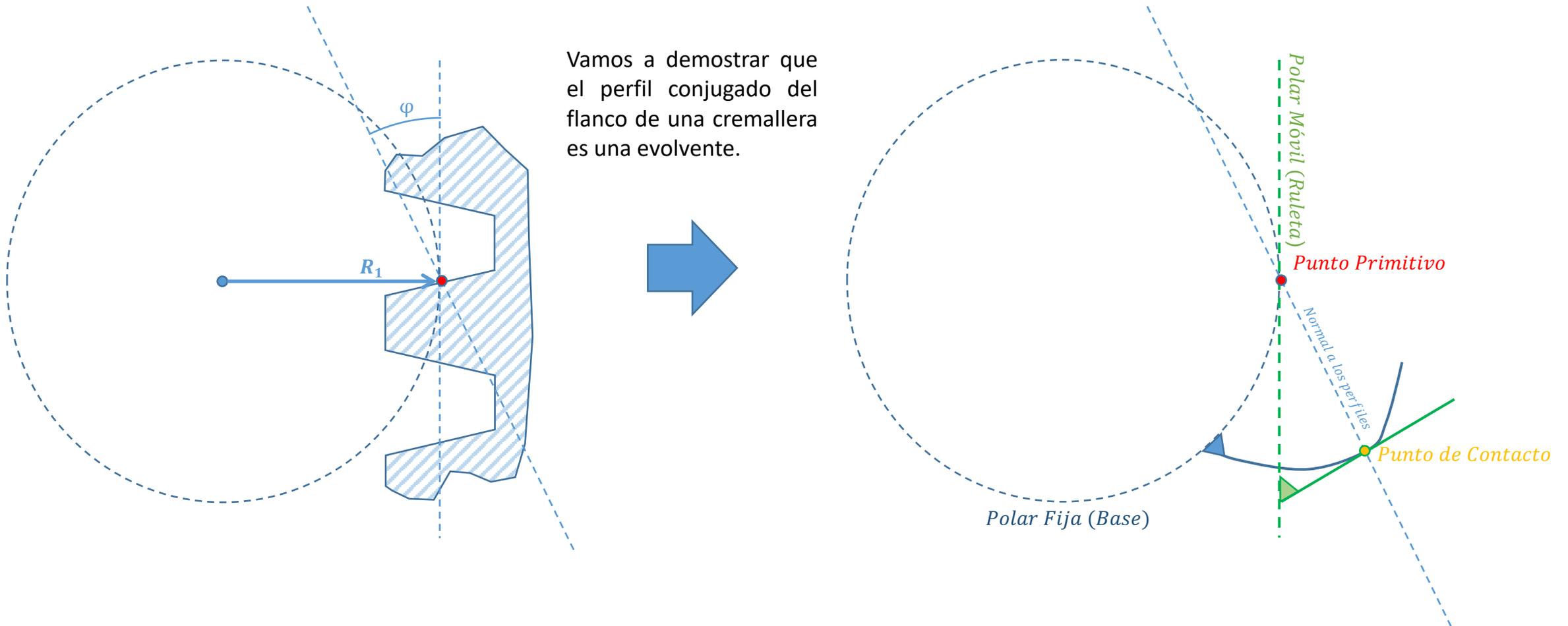
4.- El perfil de evolvente se puede obtener a partir de una “Cremallera”.



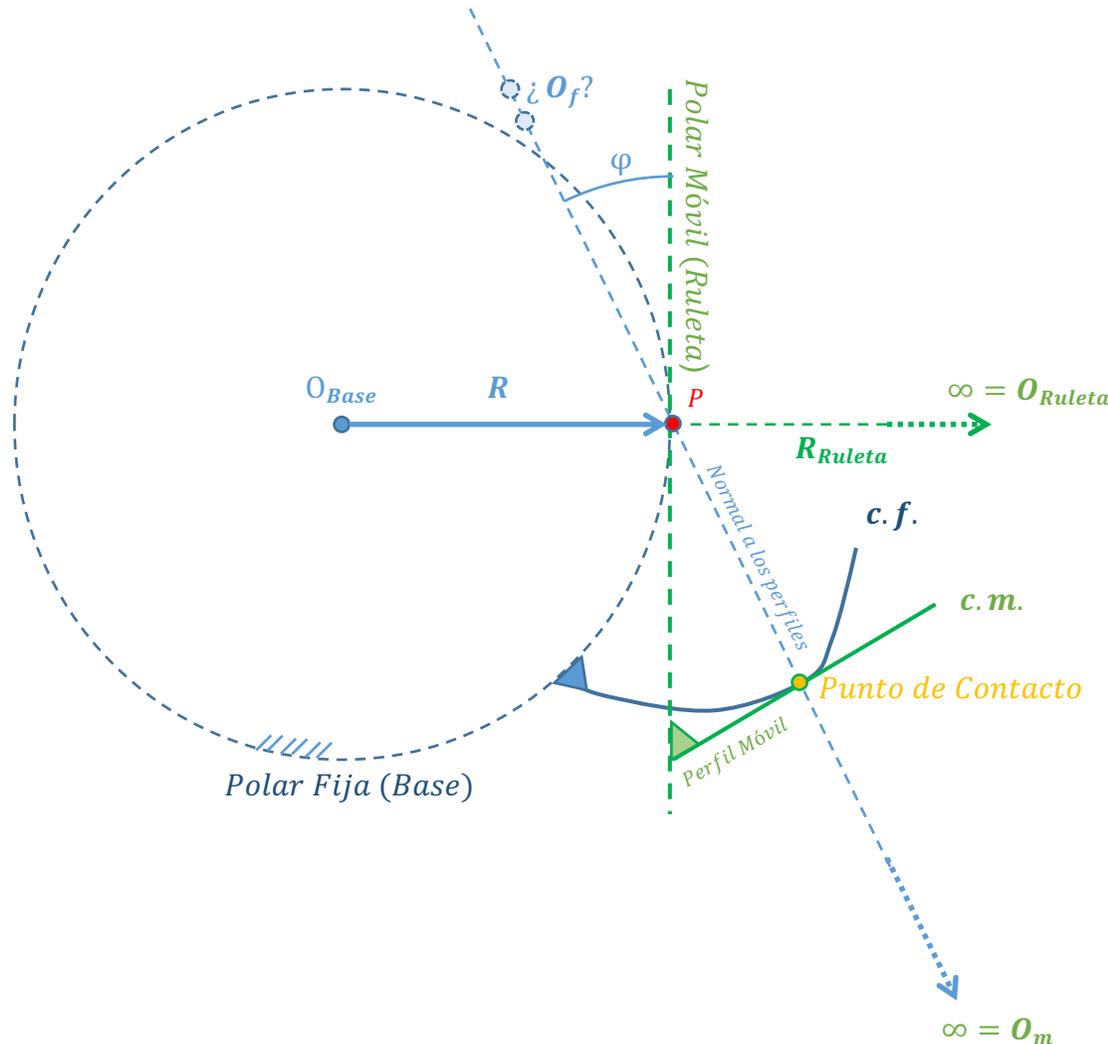
Una cremallera posee flancos rectilíneos (que son “fáciles” de fabricar). Es como una rueda de perfil de evolvente cuyo radio base es infinito.

## 4.- El perfil de evolvente se puede obtener a partir de una "Cremallera".

Vamos a demostrar que el perfil conjugado del flanco de una cremallera es una evolvente.



## 4.- El perfil de evolvente se puede obtener a partir de una “Cremallera”.



Podemos aplicar la Fórmula de Euler-Savary (Generalizada) al movimiento de la curva móvil con respecto a la curva fija. Conocemos:

La “base” (circunferencia primitiva de la rueda de radio R) y la “ruleta” (línea primitiva de la cremallera) del movimiento relativo entre la cremallera y la rueda.

**c.m.** es la “curva móvil” que se mueve solidariamente con la “ruleta” (y cuyo centro de curvatura ( $O_m$ ) se encuentra en el infinito).

**c.f.** es la “curva fija” que está unida solidariamente a la “base”.

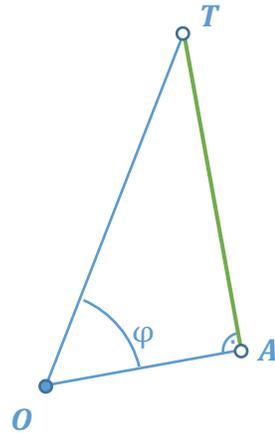
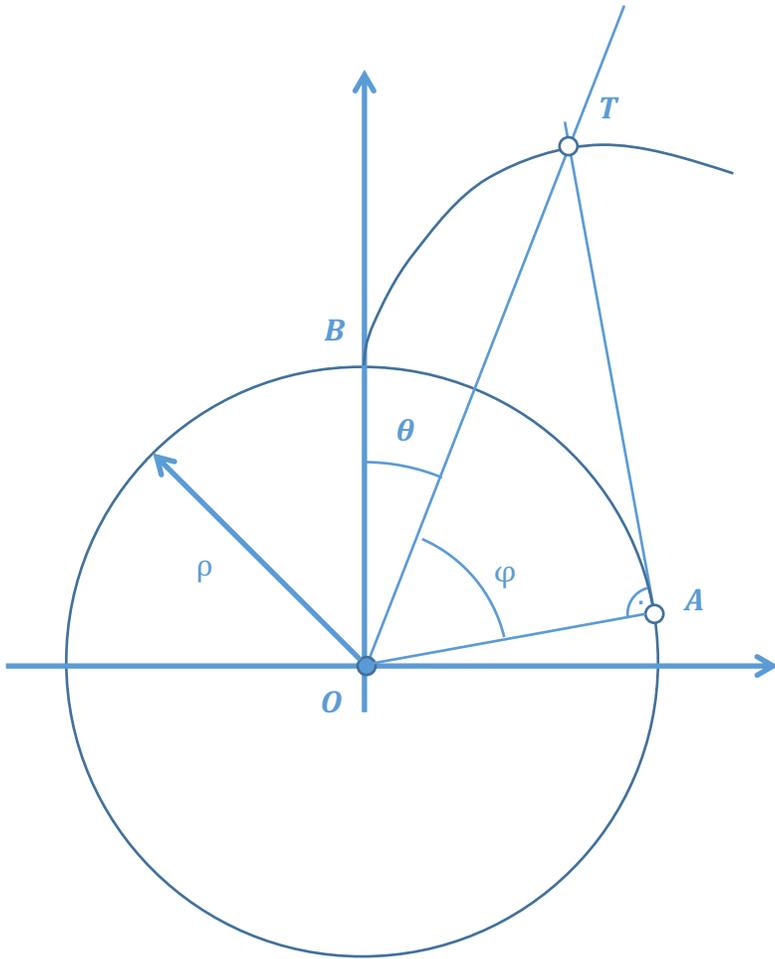
Vamos a obtener el centro de curvatura de la curva fija ( $O_f$ ).

$$\left( \frac{1}{O_f P} + \frac{1}{P O_m} \right) \sin(\varphi) = \frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \Rightarrow \boxed{O_f P = R \sin(\varphi)}$$

Que es la ecuación de una circunferencia

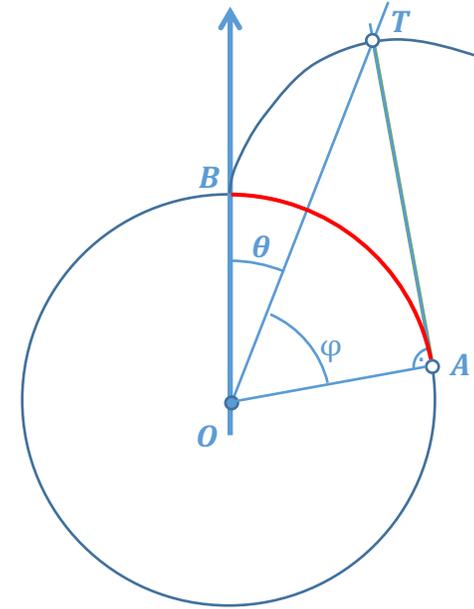
Por lo tanto, el lugar geométrico de los centros de curvatura del perfil conjugado de una recta es una circunferencia. Es decir, que **el perfil conjugado (curva fija) es una Evolvente.**

**Función de evolvente:**



En el triángulo  
rectángulo **OAT**

$$AT = \rho \operatorname{Tg}(\varphi)$$



Por ser una Evolvente

$$BA = AT$$

Podemos expresar **BA**  
en función de los  
ángulos  $\varphi$  y  $\vartheta$

$$BA = \rho(\theta + \varphi)$$

Iguando ambas expresiones

$$\rho(\theta + \varphi) = \rho \operatorname{Tg}(\varphi)$$

Obtenemos la **Función de Evolvente**



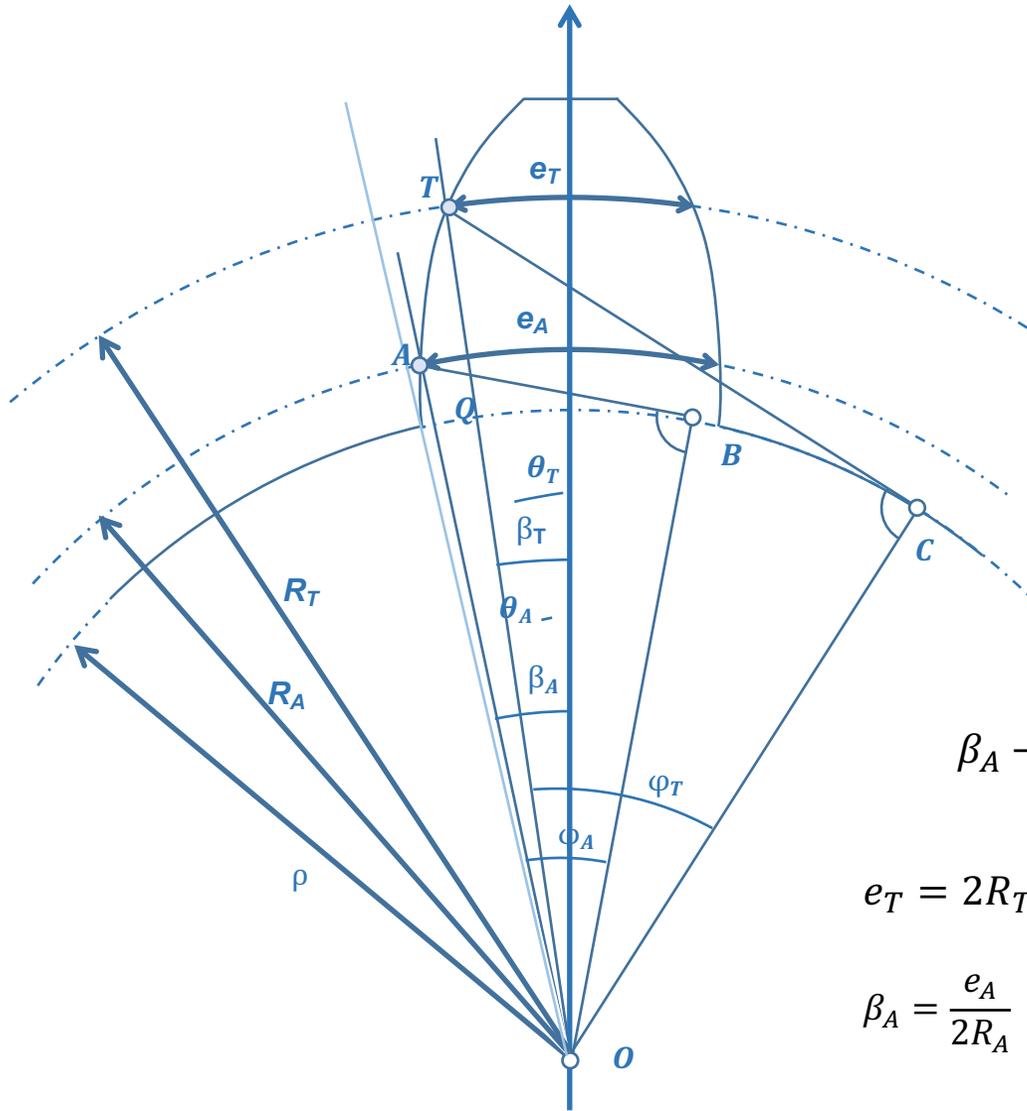
$$\theta = \operatorname{Ev}(\varphi) = \operatorname{Tg}(\varphi) - \varphi$$

Conocido  $\varphi$   $\longrightarrow$  **Ev(phi)** se obtiene directamente

Conocido **Ev(phi)**  $\longrightarrow$   $\varphi$  se obtiene mediante tablas (o empleando un procedimiento numérico)

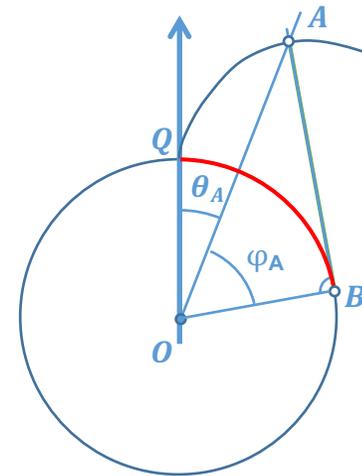
# 12.3 Propiedades Analíticas del Perfil de Evolvente

$\varphi$ (º)	$Ev(\varphi)$																		
10	0,0018	13	0,004	16	0,0075	19	0,0127	22	0,0201	25	0,03	28	0,043	31	0,0598	34	0,0811	37	0,1078
10,1	0,0018	13,1	0,0041	16,1	0,0076	19,1	0,0129	22,1	0,0203	25,1	0,0304	28,1	0,0435	31,1	0,0604	34,1	0,0819	37,1	0,1088
10,2	0,0019	13,2	0,0042	16,2	0,0078	19,2	0,0131	22,2	0,0206	25,2	0,0307	28,2	0,044	31,2	0,0611	34,2	0,0827	37,2	0,1098
10,3	0,002	13,3	0,0043	16,3	0,0079	19,3	0,0133	22,3	0,0209	25,3	0,0311	28,3	0,0445	31,3	0,0617	34,3	0,0835	37,3	0,1108
10,4	0,002	13,4	0,0044	16,4	0,0081	19,4	0,0136	22,4	0,0212	25,4	0,0315	28,4	0,045	31,4	0,0624	34,4	0,0843	37,4	0,1118
10,5	0,0021	13,5	0,0045	16,5	0,0082	19,5	0,0138	22,5	0,0215	25,5	0,0319	28,5	0,0455	31,5	0,063	34,5	0,0851	37,5	0,1128
10,6	0,0021	13,6	0,0046	16,6	0,0084	19,6	0,014	22,6	0,0218	25,6	0,0323	28,6	0,0461	31,6	0,0637	34,6	0,086	37,6	0,1139
10,7	0,0022	13,7	0,0047	16,7	0,0085	19,7	0,0142	22,7	0,0221	25,7	0,0327	28,7	0,0466	31,7	0,0643	34,7	0,0868	37,7	0,1149
10,8	0,0023	13,8	0,0048	16,8	0,0087	19,8	0,0144	22,8	0,0224	25,8	0,0331	28,8	0,0471	31,8	0,065	34,8	0,0876	37,8	0,1159
10,9	0,0023	13,9	0,0049	16,9	0,0089	19,9	0,0147	22,9	0,0227	25,9	0,0335	28,9	0,0476	31,9	0,0657	34,9	0,0885	37,9	0,117
11	0,0024	14	0,005	17	0,009	20	0,0149	23	0,023	26	0,0339	29	0,0482	32	0,0664	35	0,0893	38	0,1181
11,1	0,0025	14,1	0,0051	17,1	0,0092	20,1	0,0151	23,1	0,0234	26,1	0,0344	29,1	0,0487	32,1	0,067	35,1	0,0902	38,1	0,1191
11,2	0,0025	14,2	0,0052	17,2	0,0094	20,2	0,0154	23,2	0,0237	26,2	0,0348	29,2	0,0492	32,2	0,0677	35,2	0,0911	38,2	0,1202
11,3	0,0026	14,3	0,0053	17,3	0,0095	20,3	0,0156	23,3	0,024	26,3	0,0352	29,3	0,0498	32,3	0,0684	35,3	0,0919	38,3	0,1213
11,4	0,0027	14,4	0,0054	17,4	0,0097	20,4	0,0158	23,4	0,0243	26,4	0,0356	29,4	0,0503	32,4	0,0691	35,4	0,0928	38,4	0,1224
11,5	0,0027	14,5	0,0055	17,5	0,0099	20,5	0,0161	23,5	0,0247	26,5	0,0361	29,5	0,0509	32,5	0,0698	35,5	0,0937	38,5	0,1235
11,6	0,0028	14,6	0,0057	17,6	0,01	20,6	0,0163	23,6	0,025	26,6	0,0365	29,6	0,0515	32,6	0,0705	35,6	0,0946	38,6	0,1246
11,7	0,0029	14,7	0,0058	17,7	0,0102	20,7	0,0166	23,7	0,0253	26,7	0,0369	29,7	0,052	32,7	0,0713	35,7	0,0955	38,7	0,1257
11,8	0,003	14,8	0,0059	17,8	0,0104	20,8	0,0168	23,8	0,0257	26,8	0,0374	29,8	0,0526	32,8	0,072	35,8	0,0964	38,8	0,1268
11,9	0,003	14,9	0,006	17,9	0,0106	20,9	0,0171	23,9	0,026	26,9	0,0378	29,9	0,0532	32,9	0,0727	35,9	0,0973	38,9	0,128
12	0,0031	15	0,0061	18	0,0108	21	0,0173	24	0,0263	27	0,0383	30	0,0538	33	0,0734	36	0,0982	39	0,1291
12,1	0,0032	15,1	0,0063	18,1	0,0109	21,1	0,0176	24,1	0,0267	27,1	0,0387	30,1	0,0543	33,1	0,0742	36,1	0,0991	39,1	0,1303
12,2	0,0033	15,2	0,0064	18,2	0,0111	21,2	0,0179	24,2	0,027	27,2	0,0392	30,2	0,0549	33,2	0,0749	36,2	0,1001	39,2	0,1314
12,3	0,0034	15,3	0,0065	18,3	0,0113	21,3	0,0181	24,3	0,0274	27,3	0,0397	30,3	0,0555	33,3	0,0757	36,3	0,101	39,3	0,1326
12,4	0,0034	15,4	0,0067	18,4	0,0115	21,4	0,0184	24,4	0,0278	27,4	0,0401	30,4	0,0561	33,4	0,0764	36,4	0,102	39,4	0,1337
12,5	0,0035	15,5	0,0068	18,5	0,0117	21,5	0,0187	24,5	0,0281	27,5	0,0406	30,5	0,0567	33,5	0,0772	36,5	0,1029	39,5	0,1349
12,6	0,0036	15,6	0,0069	18,6	0,0119	21,6	0,0189	24,6	0,0285	27,6	0,0411	30,6	0,0573	33,6	0,078	36,6	0,1039	39,6	0,1361
12,7	0,0037	15,7	0,0071	18,7	0,0121	21,7	0,0192	24,7	0,0289	27,7	0,0416	30,7	0,0579	33,7	0,0787	36,7	0,1048	39,7	0,1373
12,8	0,0038	15,8	0,0072	18,8	0,0123	21,8	0,0195	24,8	0,0292	27,8	0,042	30,8	0,0586	33,8	0,0795	36,8	0,1058	39,8	0,1385
12,9	0,0039	15,9	0,0074	18,9	0,0125	21,9	0,0198	24,9	0,0296	27,9	0,0425	30,9	0,0592	33,9	0,0803	36,9	0,1068	39,9	0,1397



### Obtención del espesor del diente:

Conocido el espesor del diente  $e_A$  en un punto  $A$  del perfil, se desea obtener el espesor  $e_T$  en otro punto  $T$



En A:  $e_A = 2R_A\beta_A$

En T:  $e_T = 2R_T\beta_T$

Dado que el perfil del diente es una Evolvente

$$\rho = R_A \cos \varphi_A = R_T \cos \varphi_T$$

$$\theta_A = Ev(\varphi_A)$$

$$\beta_A - \beta_T = \theta_T - \theta_A \longrightarrow \beta_T = \beta_A + Ev(\varphi_A) - Ev(\varphi_T) \quad \text{Sustituyendo en } e_T$$

$$e_T = 2R_T[\beta_A + Ev(\varphi_A) - Ev(\varphi_T)]$$

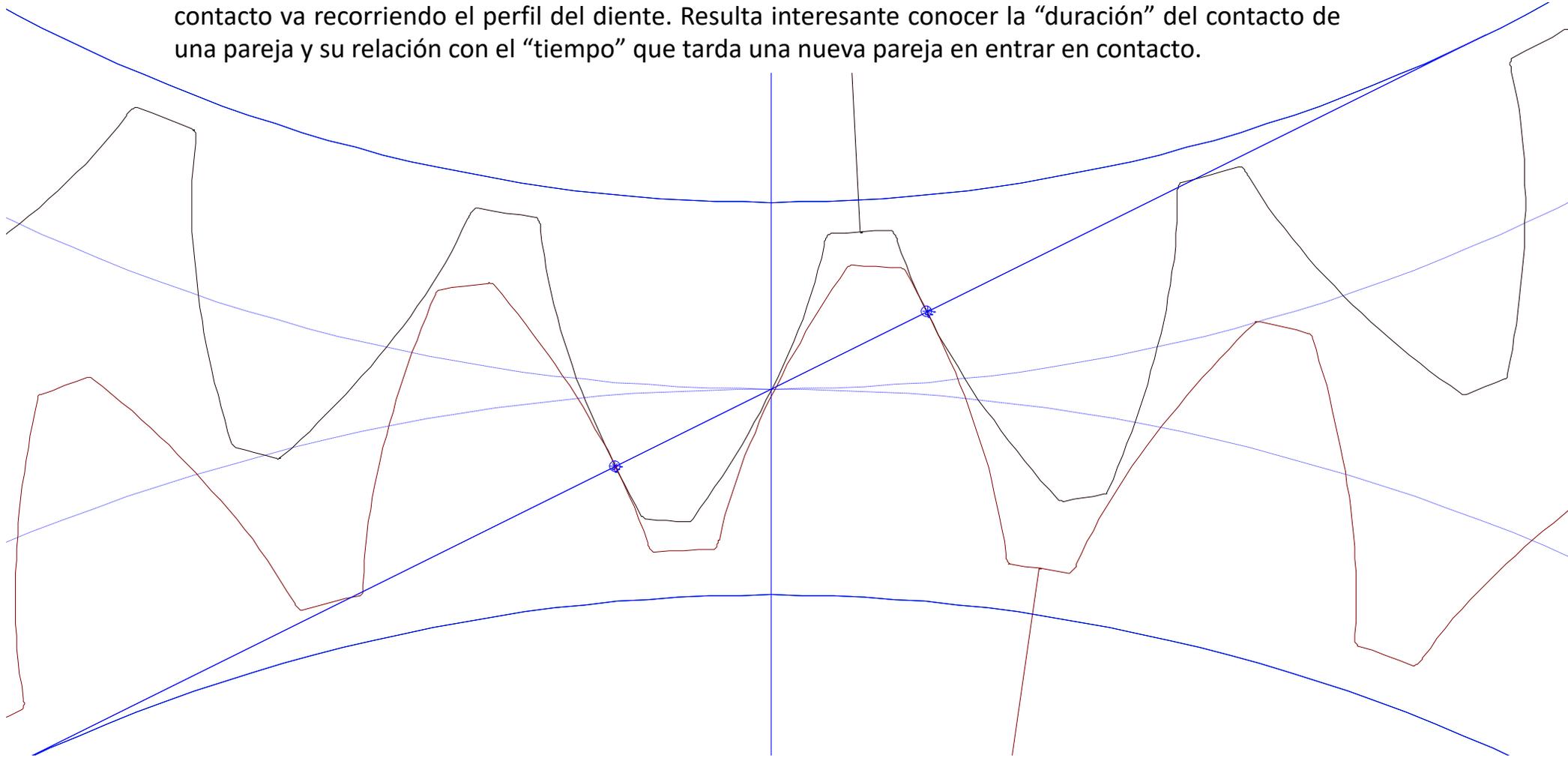
$$\beta_A = \frac{e_A}{2R_A}$$

$$e_T = R_T \left[ \frac{e_A}{R_A} + 2[Ev(\varphi_A) - Ev(\varphi_T)] \right]$$

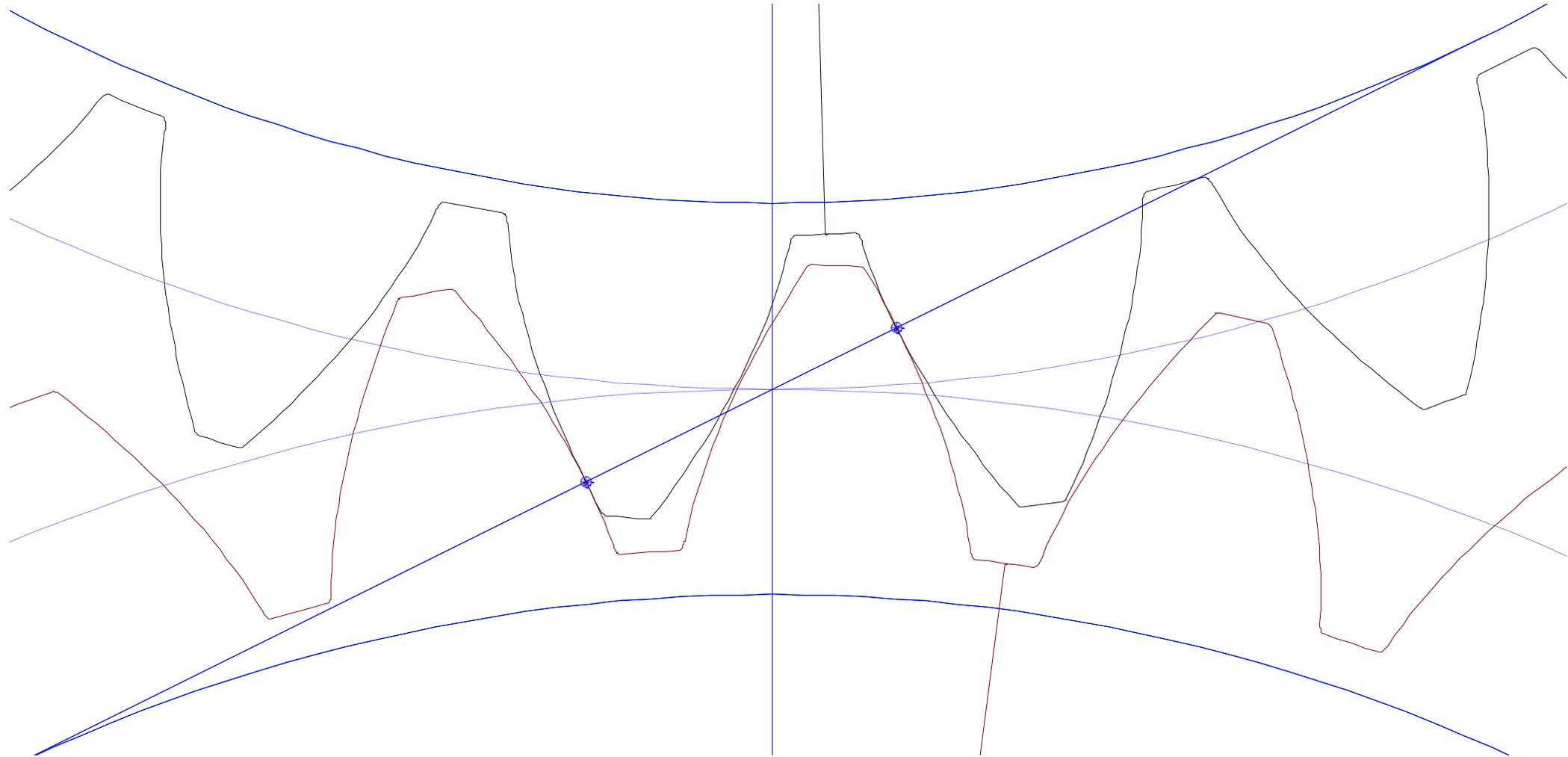
En ruedas normalizadas el espesor del diente en el círculo primitivo es igual al hueco y por lo tanto igual a la mitad del paso. Si  $A$  se encontrara en esta circunferencias  $e_A = m\pi/2$ .

## 12.4 Relación de Contacto (Grado de recubrimiento)

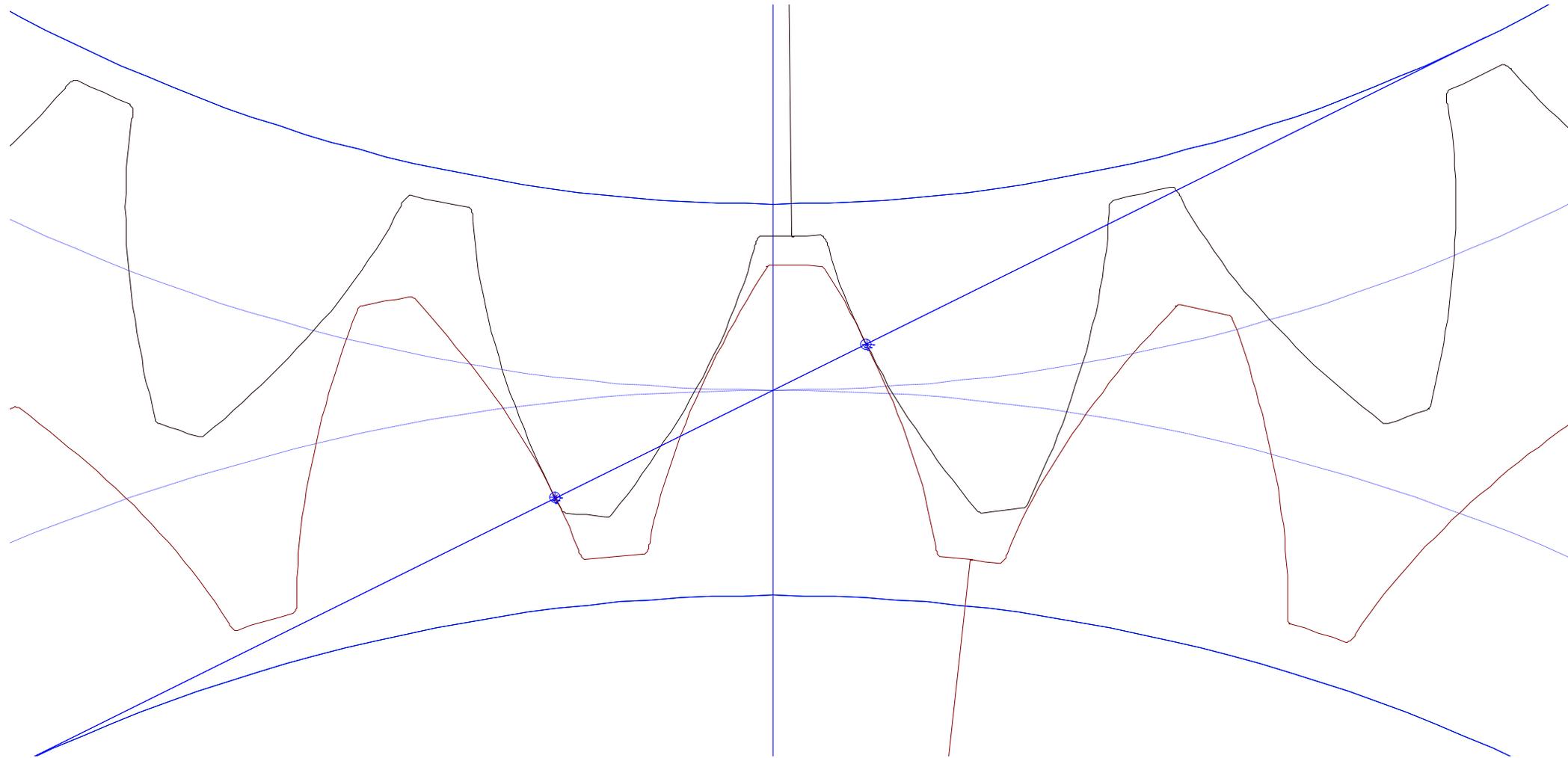
El proceso de engrane implica el contacto en sucesivas parejas de dientes de forma que el punto de contacto va recorriendo el perfil del diente. Resulta interesante conocer la “duración” del contacto de una pareja y su relación con el “tiempo” que tarda una nueva pareja en entrar en contacto.



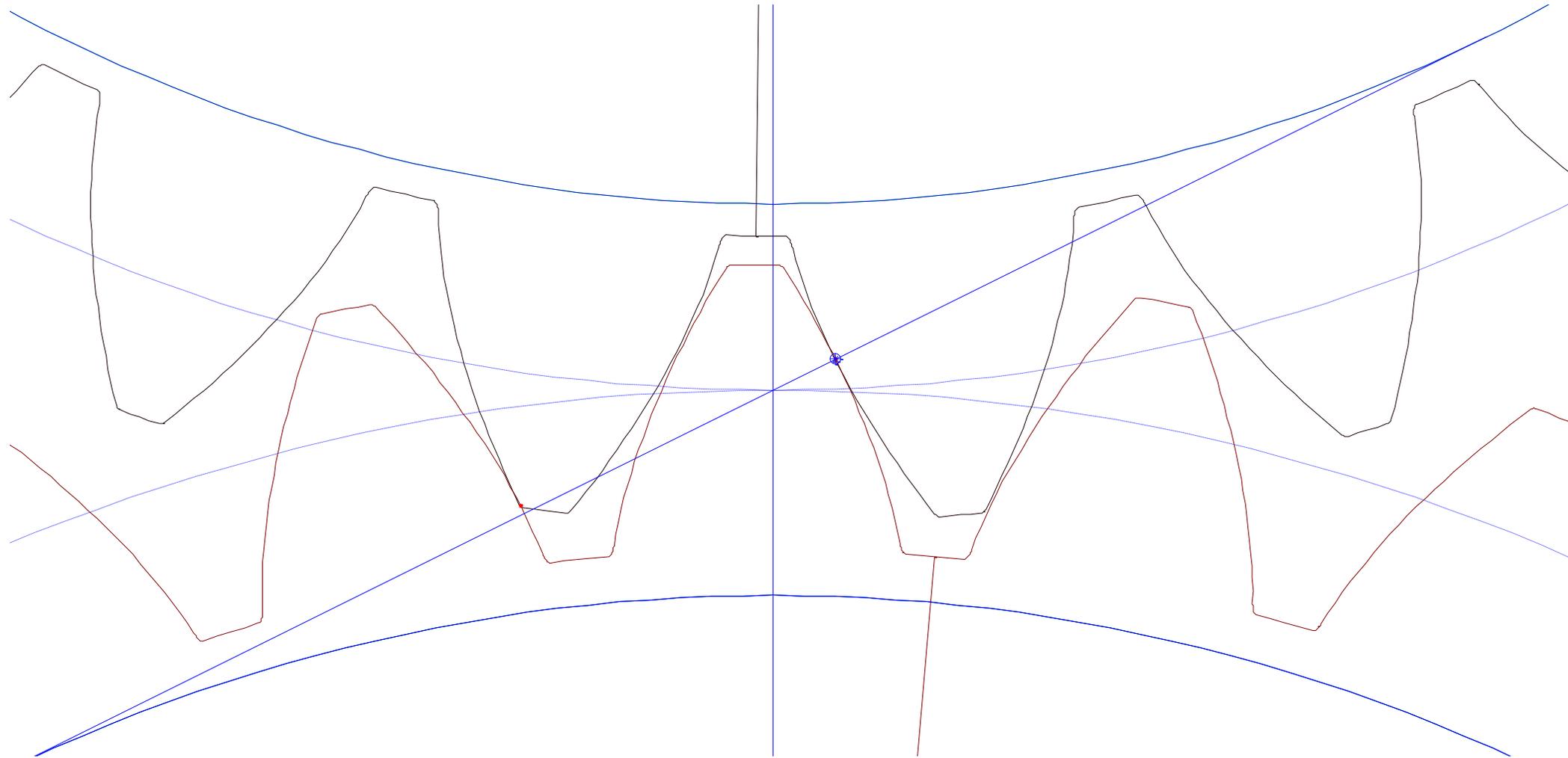
# 12.4 Relación de Contacto (Grado de recubrimiento)



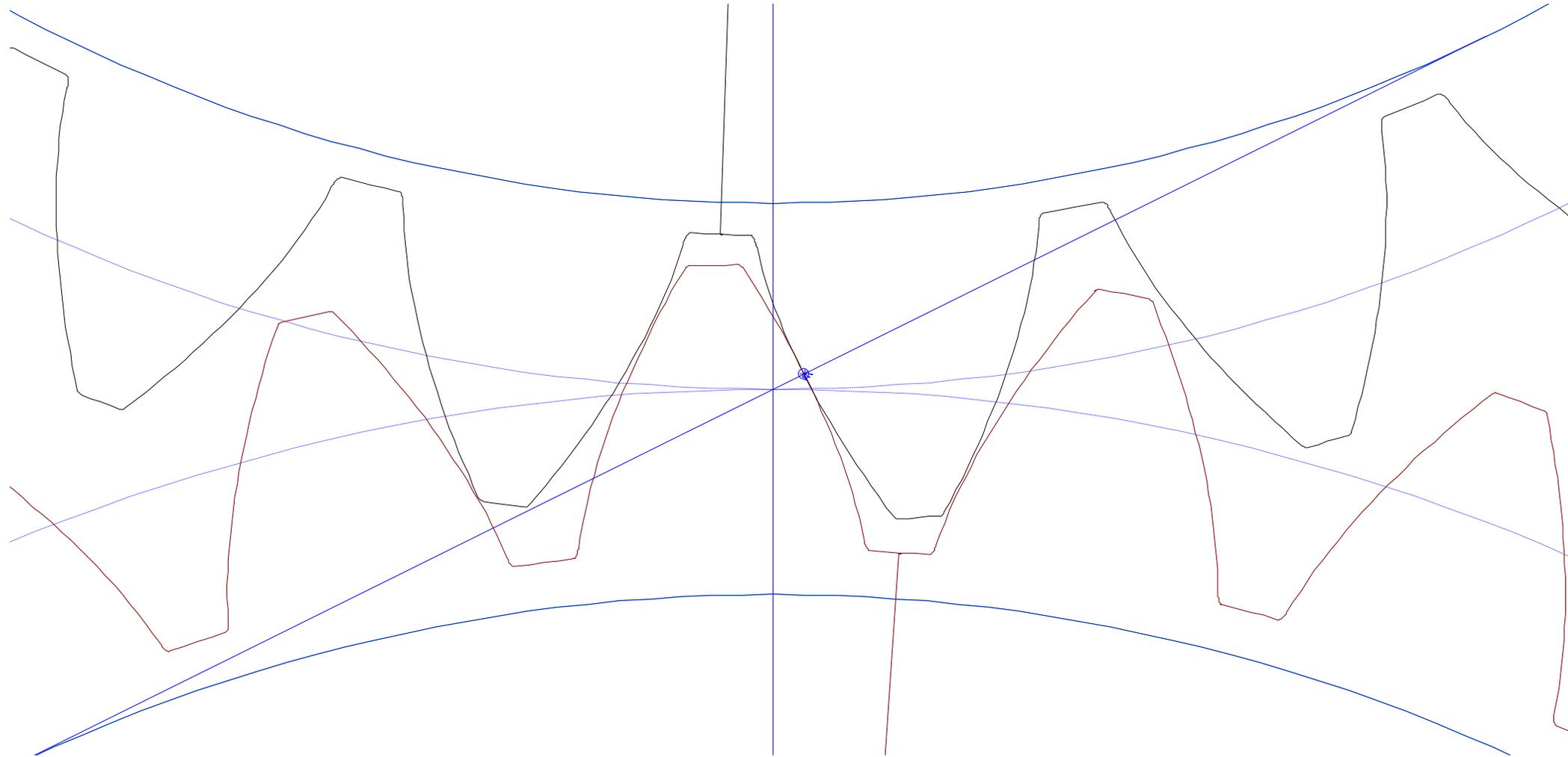
# 12.4 Relación de Contacto (Grado de recubrimiento)



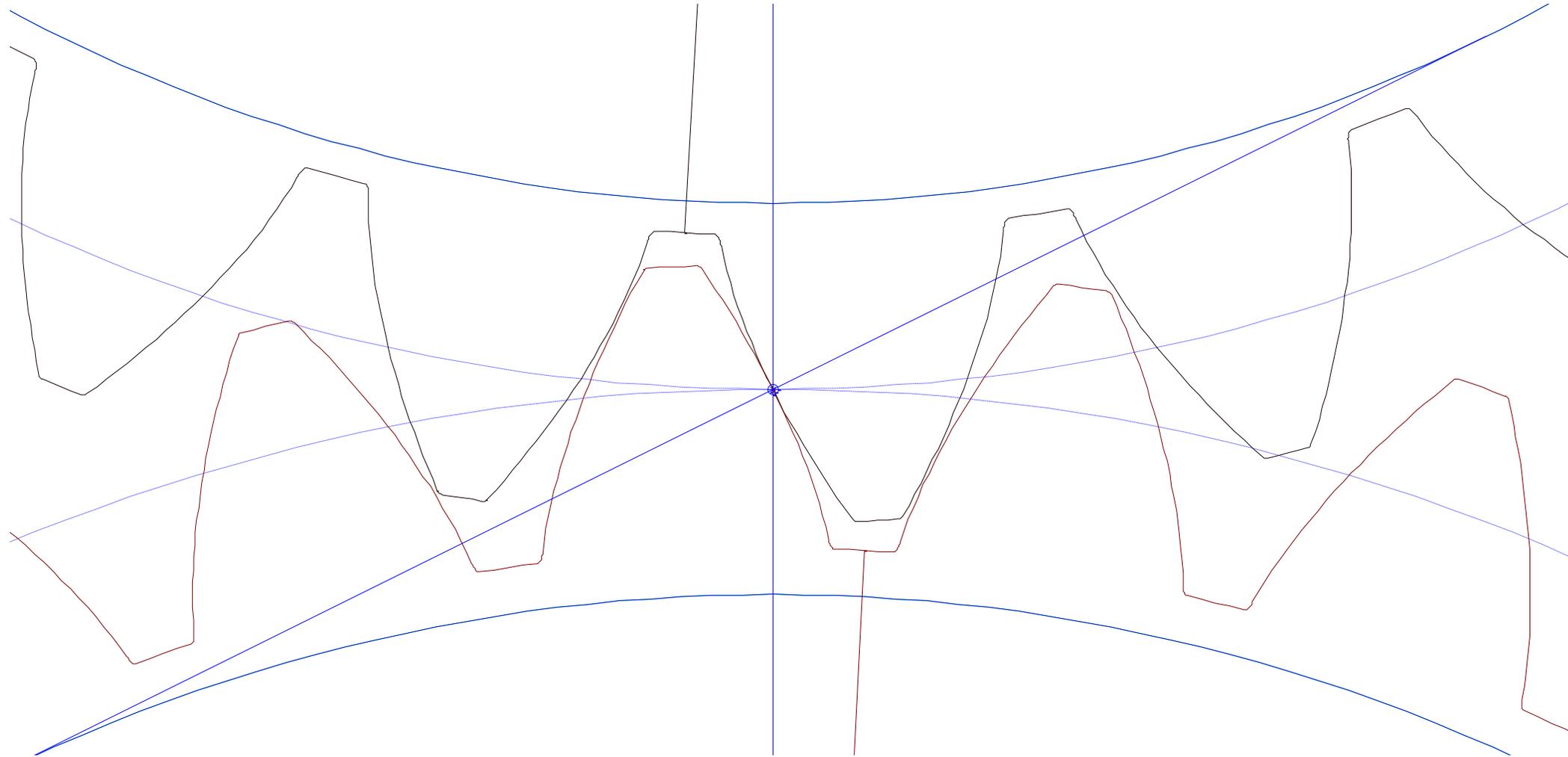
# 12.4 Relación de Contacto (Grado de recubrimiento)



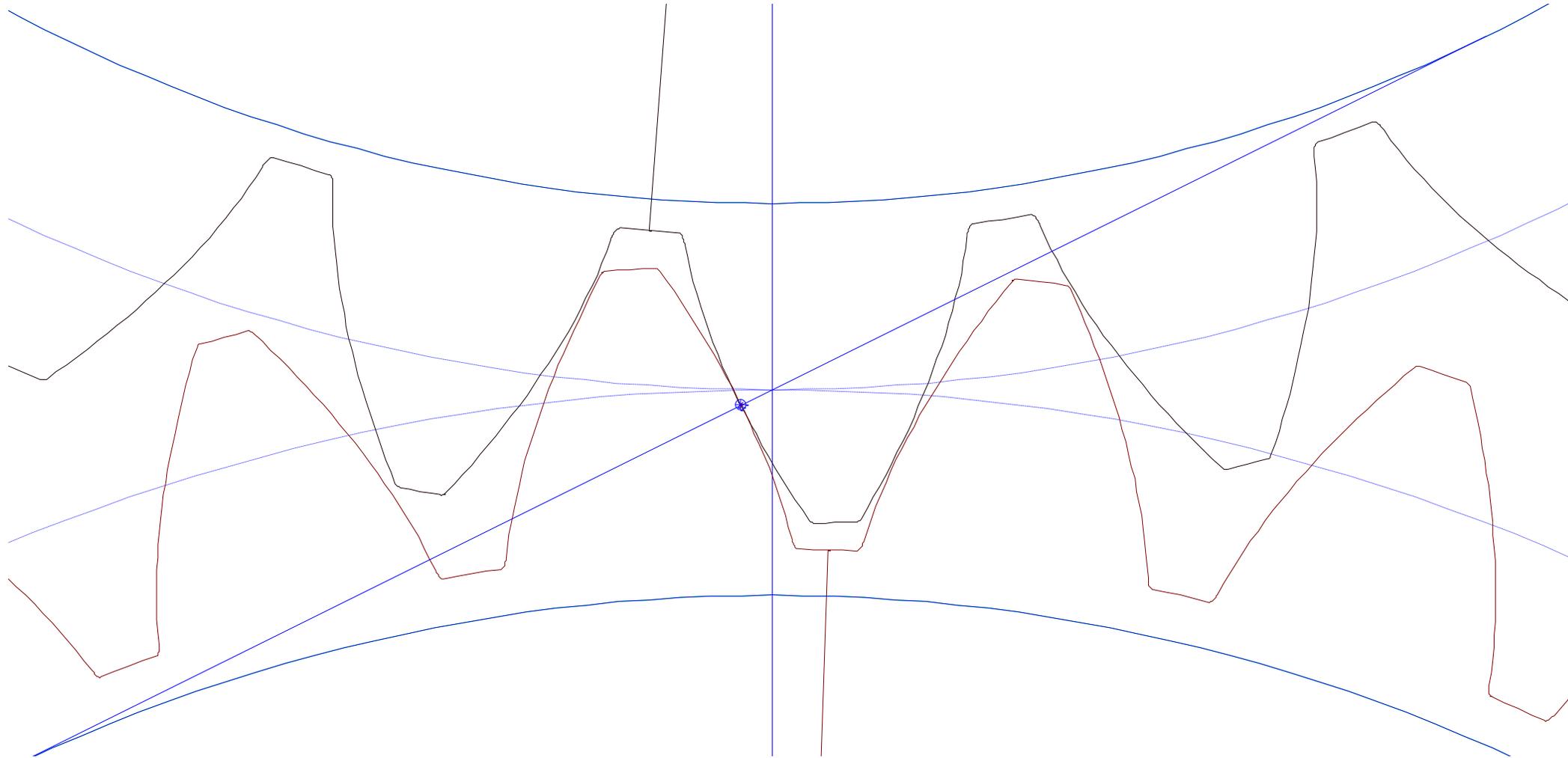
# 12.4 Relación de Contacto (Grado de recubrimiento)



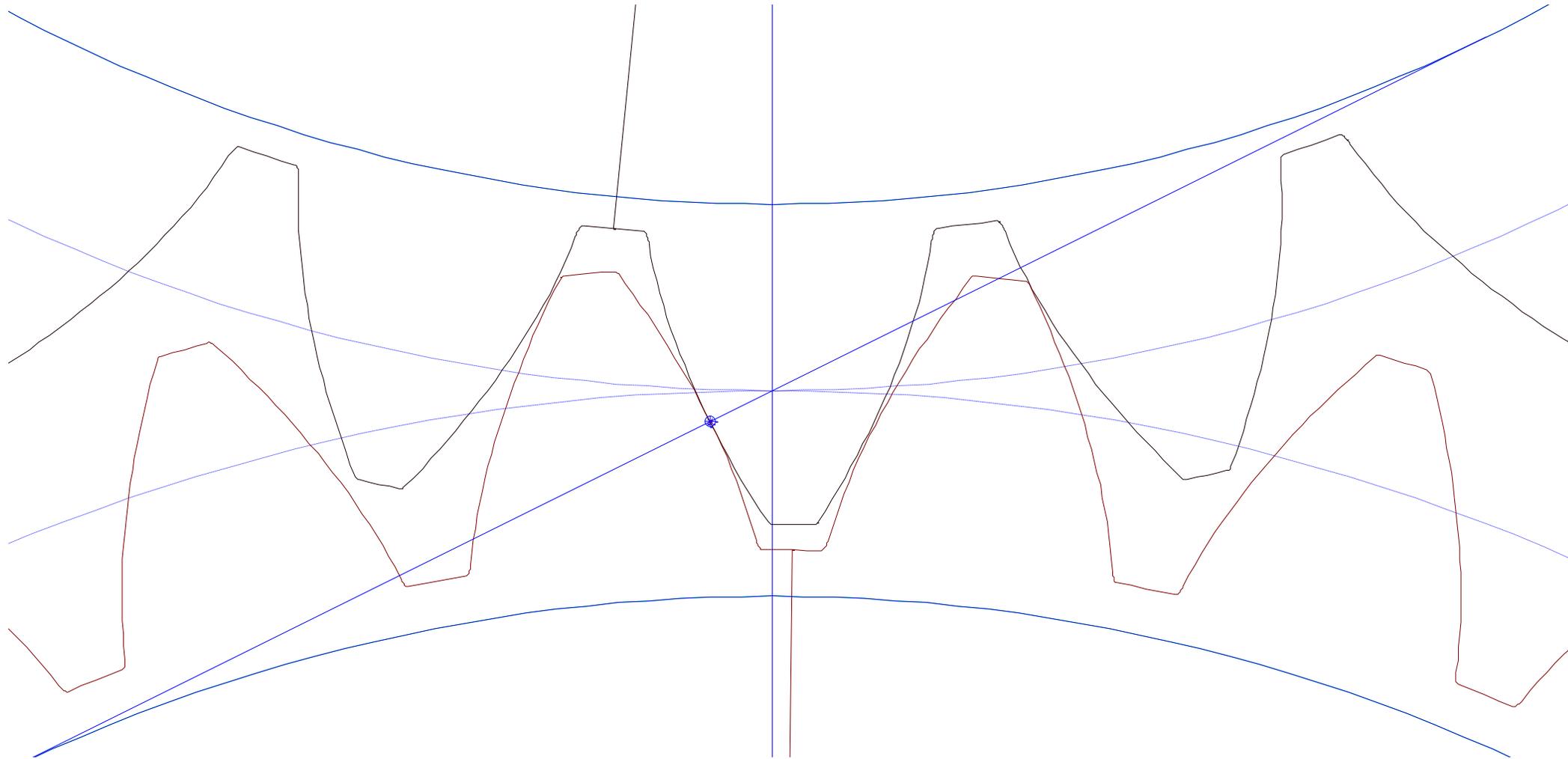
# 12.4 Relación de Contacto (Grado de recubrimiento)



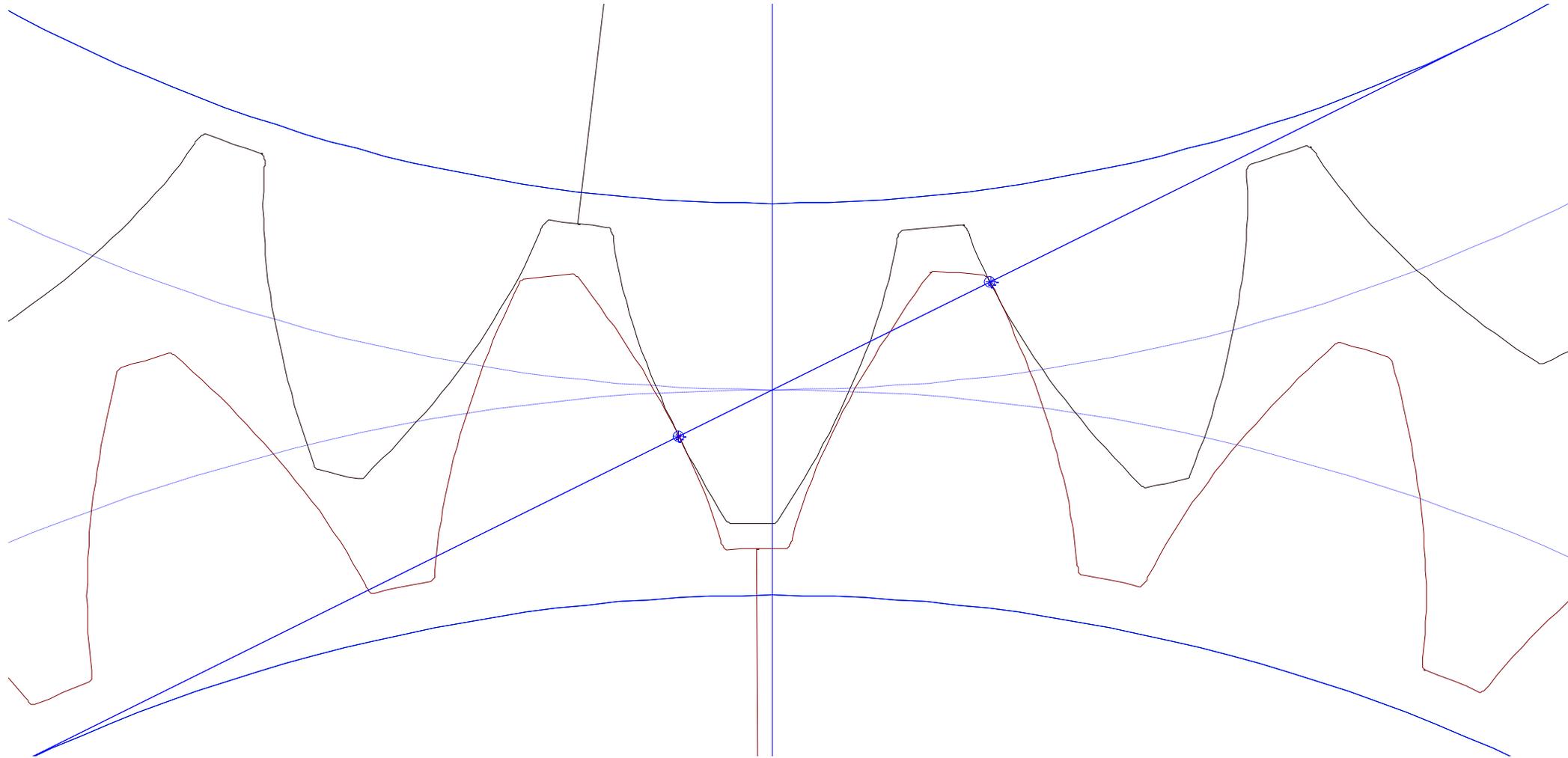
# 12.4 Relación de Contacto (Grado de recubrimiento)



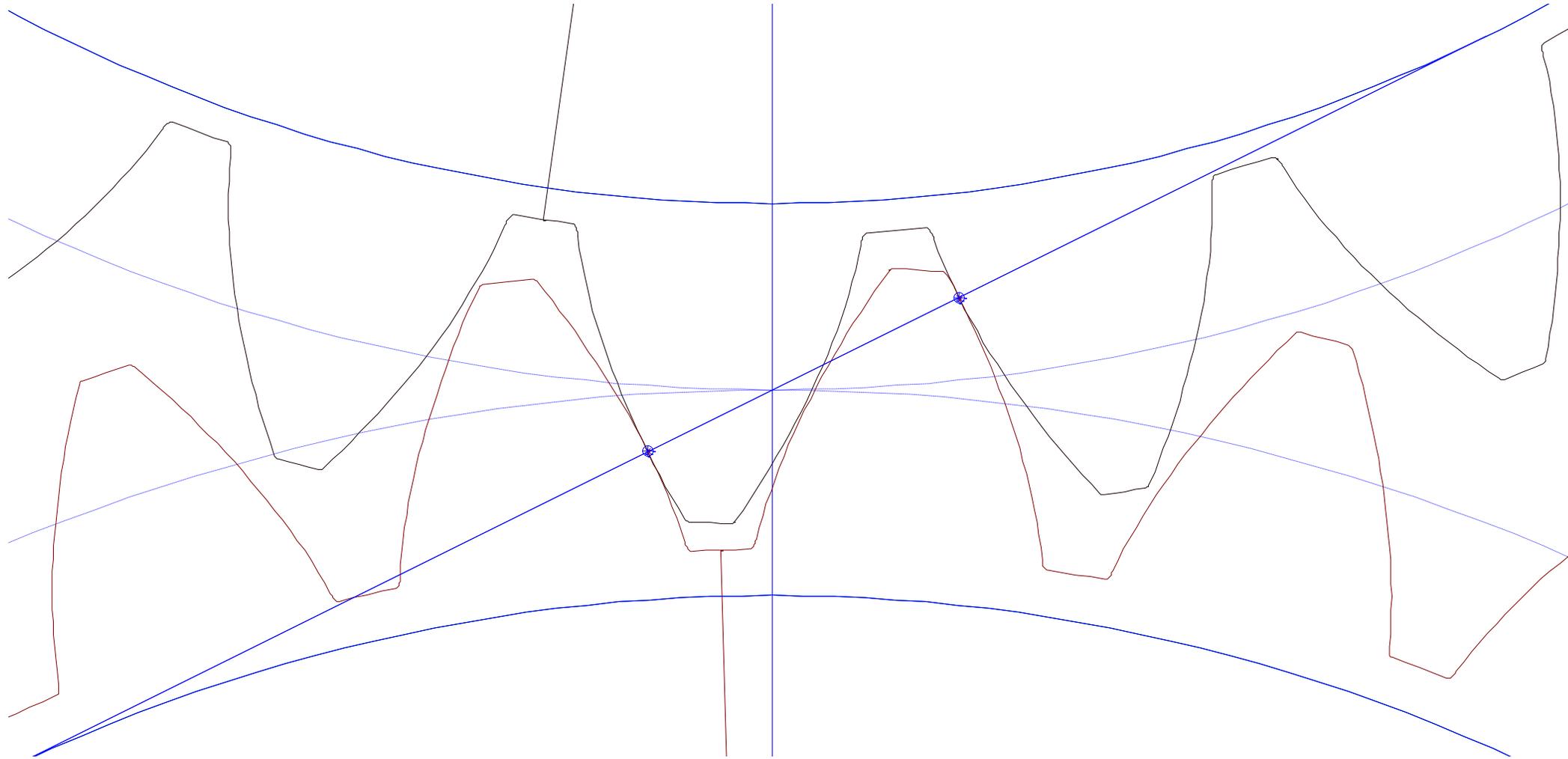
# 12.4 Relación de Contacto (Grado de recubrimiento)



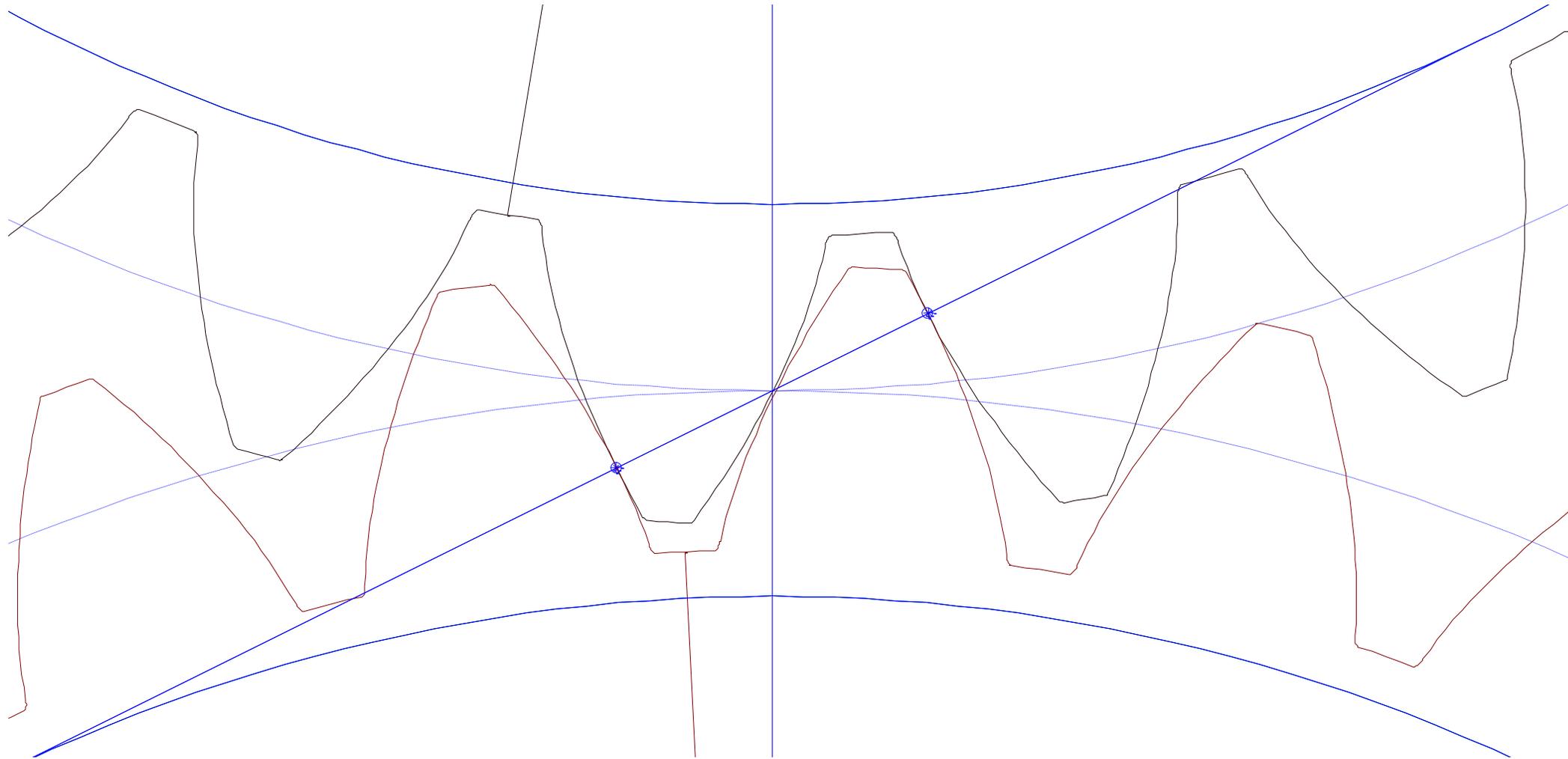
# 12.4 Relación de Contacto (Grado de recubrimiento)

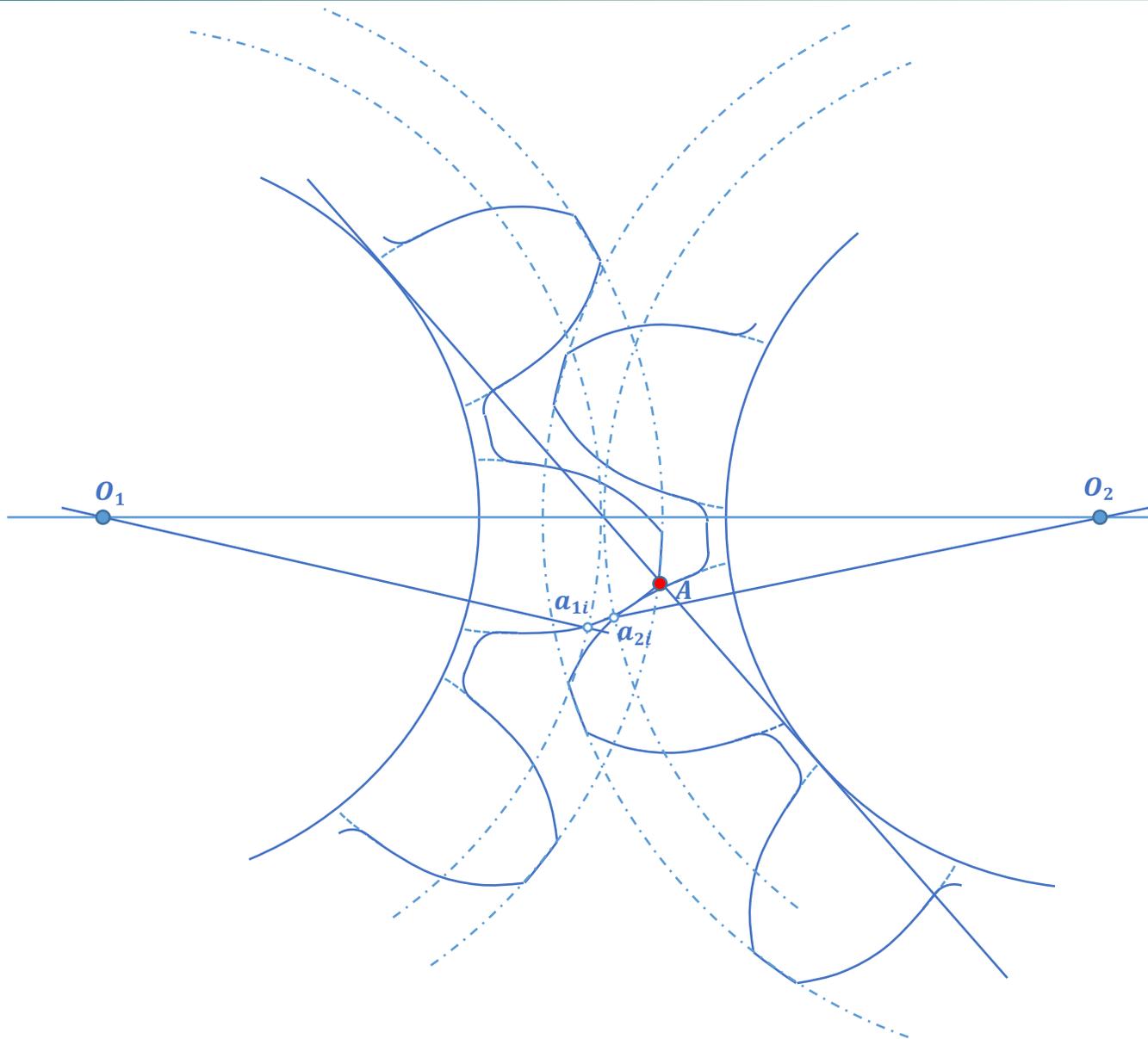


# 12.4 Relación de Contacto (Grado de recubrimiento)



# 12.4 Relación de Contacto (Grado de recubrimiento)





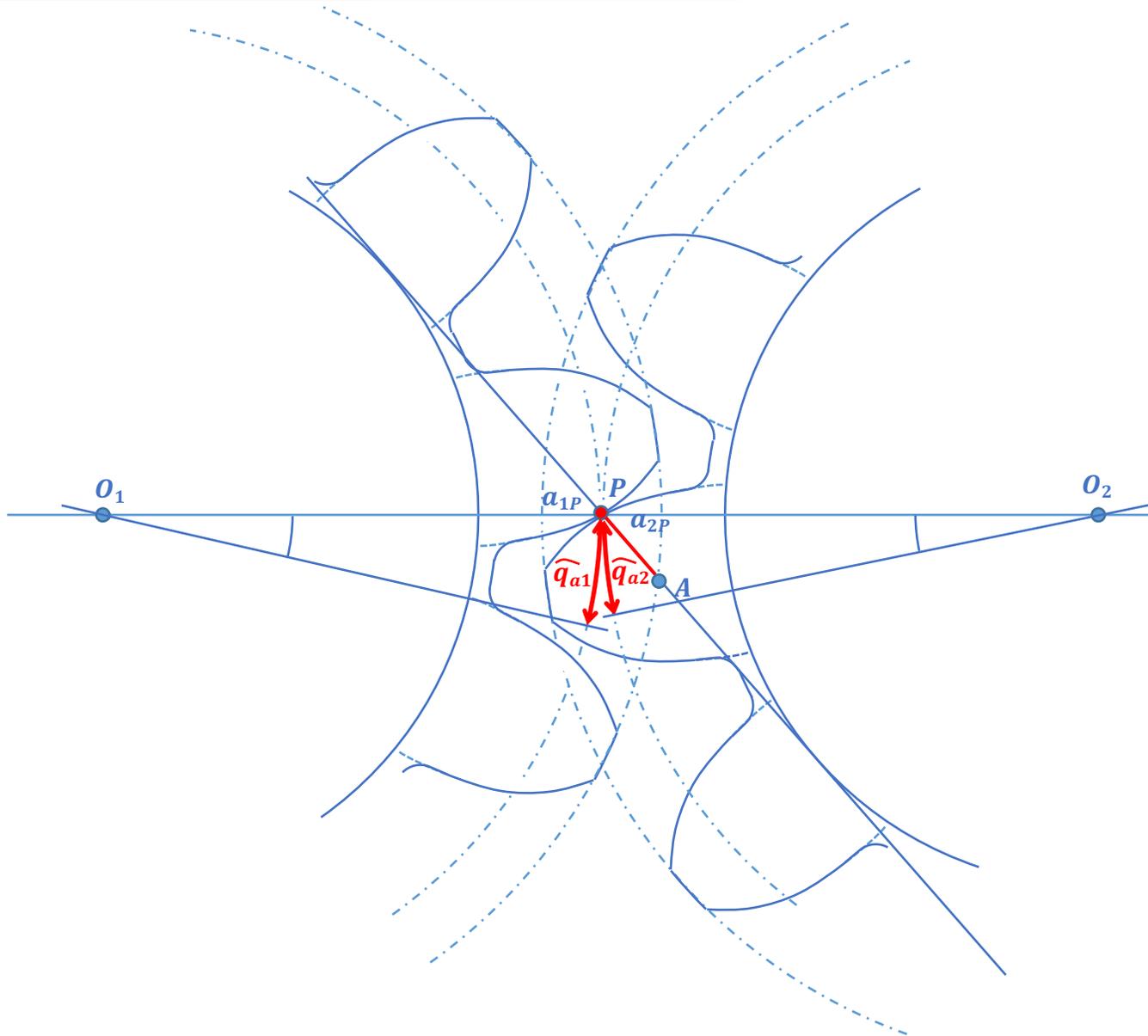
El contacto de una pareja de dientes se inicia cuando la cabeza del diente de la rueda 2 alcanza la línea de engrane (punto **A**).

En ese momento, identificamos los puntos  $a_{1i}$  y  $a_{2i}$  que son los puntos del flanco activo situados sobre la circunferencia primitiva de la rueda.

Una vez iniciado el contacto en el punto **A**, las ruedas giran hasta que el contacto tiene lugar en el punto primitivo o polo (punto **P**). En ese instante, los puntos  $a_{1i}$  y  $a_{2i}$  pasan a ocupar la posición  $a_{1p}$  y  $a_{2p}$  coincidiendo con el polo. Este tramo de movimiento se denomina *Fase de "aproximación"* y se corresponde con el intervalo transcurrido entre el inicio del contacto y el contacto con el punto primitivo.

El arco de circunferencia recorrido por el punto del perfil que se encuentra sobre la circunferencia primitiva desde que se inicia el contacto hasta que éste tiene lugar en el punto primitivo, se denomina "*arco de aproximación*" ( $q_a$ ). Dado que las circunferencias primitivas tienen un movimiento de rodadura pura, éste arco será igual en ambas ruedas  $q_{a1} = q_{a2}$ .

Una vez que el contacto tiene lugar en el punto primitivo, comienza la *Fase de "retroceso"* que concluye cuando se produce contacto en la cabeza del diente de la rueda 1 (punto **B**). El arco recorrido por un punto del perfil del diente situado sobre la circunferencia primitiva se denomina "*arco de retroceso*" ( $q_r$ ).



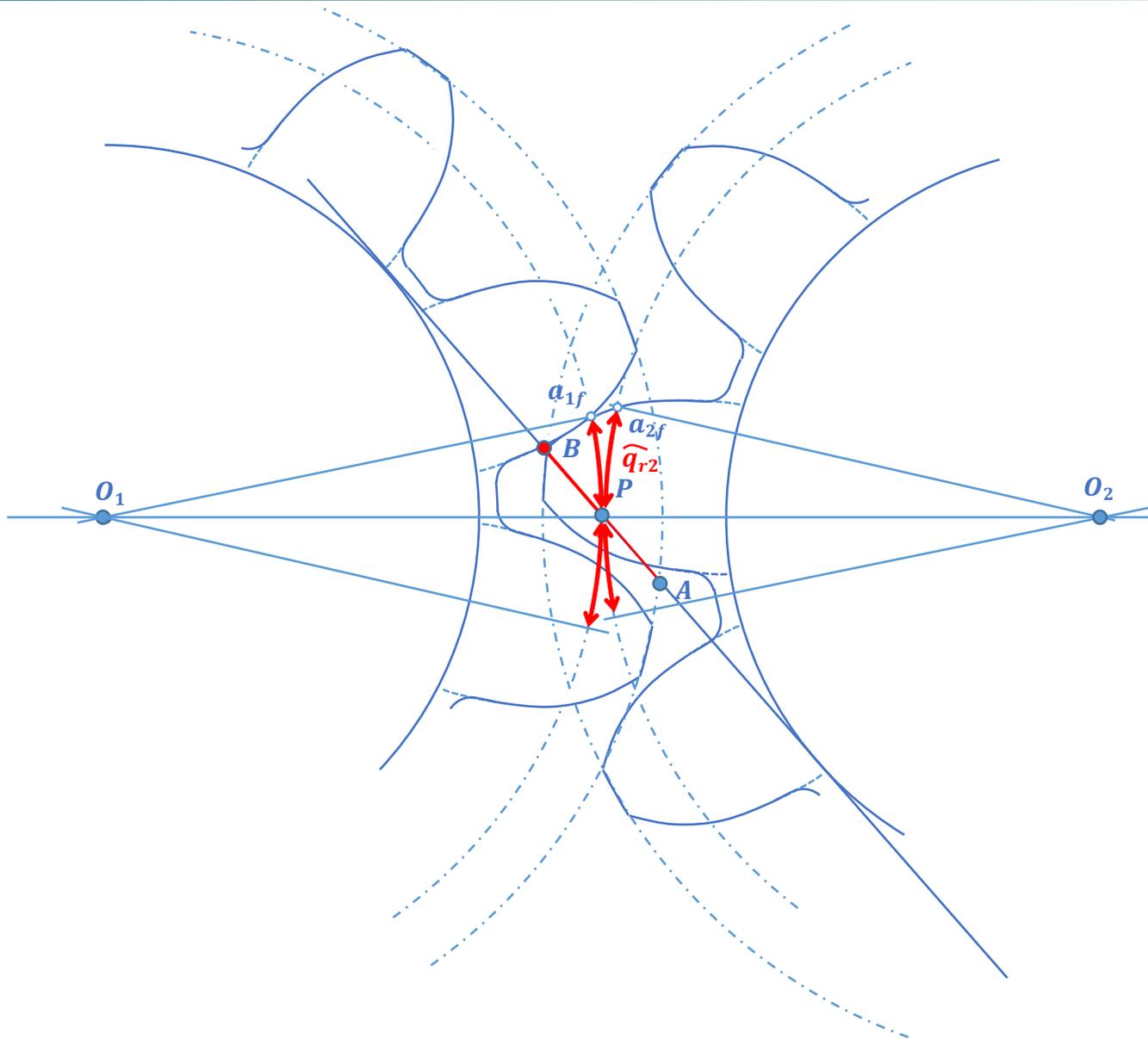
El contacto de una pareja de dientes se inicia cuando la cabeza del diente de la rueda 2 alcanza la línea de engrane (punto **A**).

En ese momento, identificamos los puntos  $a_{1i}$  y  $a_{2i}$  que son los puntos del flanco activo situados sobre la circunferencia primitiva de la rueda.

Una vez iniciado el contacto en el punto **A**, las ruedas giran hasta que el contacto tiene lugar en el punto primitivo o polo (punto **P**). En ese instante, los puntos  $a_{1i}$  y  $a_{2i}$  pasan a ocupar la posición  $a_{1P}$  y  $a_{2P}$  coincidiendo con el polo. Este tramo de movimiento se denomina *Fase de "aproximación"* y se corresponde con el intervalo transcurrido entre el inicio del contacto y el contacto con el punto primitivo.

El arco de circunferencia recorrido por el punto del perfil que se encuentra sobre la circunferencia primitiva desde que se inicia el contacto hasta que éste tiene lugar en el punto primitivo, se denomina "*arco de aproximación*" ( $q_a$ ). Dado que las circunferencias primitivas tienen un movimiento de rodadura pura, éste arco será igual en ambas ruedas  $q_{a1} = q_{a2}$ .

Una vez que el contacto tiene lugar en el punto primitivo, comienza la *Fase de "retroceso"* que concluye cuando se produce contacto en la cabeza del diente de la rueda 1 (punto **B**). El arco recorrido por un punto del perfil del diente situado sobre la circunferencia primitiva se denomina "*arco de retroceso*" ( $q_r$ ).



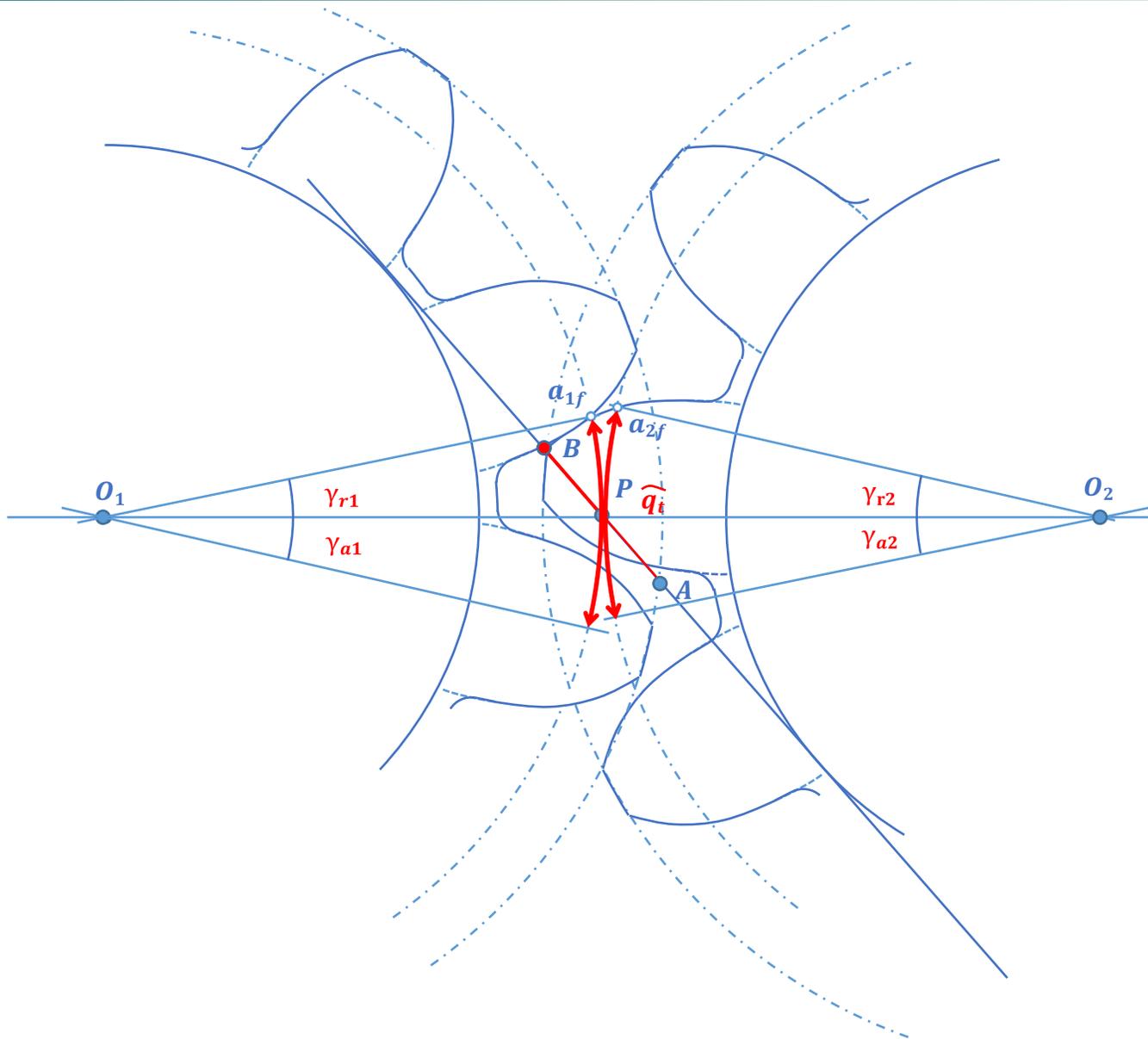
El contacto de una pareja de dientes se inicia cuando la cabeza del diente de la rueda 2 alcanza la línea de engrane (punto **A**).

En ese momento, identificamos los puntos  $a_{1i}$  y  $a_{2i}$  que son los puntos del flanco activo situados sobre la circunferencia primitiva de la rueda.

Una vez iniciado el contacto en el punto **A**, las ruedas giran hasta que el contacto tiene lugar en el punto primitivo o polo (punto **P**). En ese instante, los puntos  $a_{1i}$  y  $a_{2i}$  pasan a ocupar la posición  $a_{1p}$  y  $a_{2p}$  coincidiendo con el polo. Este tramo de movimiento se denomina *Fase de "aproximación"* y se corresponde con el intervalo transcurrido entre el inicio del contacto y el contacto con el punto primitivo.

El arco de circunferencia recorrido por el punto del perfil que se encuentra sobre la circunferencia primitiva desde que se inicia el contacto hasta que éste tiene lugar en el punto primitivo, se denomina "*arco de aproximación*" ( $q_a$ ). Dado que las circunferencias primitivas tienen un movimiento de rodadura pura, éste arco será igual en ambas ruedas  $q_{a1} = q_{a2}$ .

Una vez que el contacto tiene lugar en el punto primitivo, comienza la *Fase de "retroceso"* que concluye cuando se produce contacto en la cabeza del diente de la rueda 1 (punto **B**). El arco recorrido por un punto del perfil del diente situado sobre la circunferencia primitiva se denomina "*arco de retroceso*" ( $q_r$ ).



**Arco de conducción ( $q_t$ ):** arco recorrido por un punto del perfil del diente situado sobre la circunferencia primitiva desde que se inicia hasta que concluye el contacto.

$$q_t = q_a + q_r$$

Cada una de las ruedas girará un ángulo distinto que también puede dividirse en aproximación y retroceso.

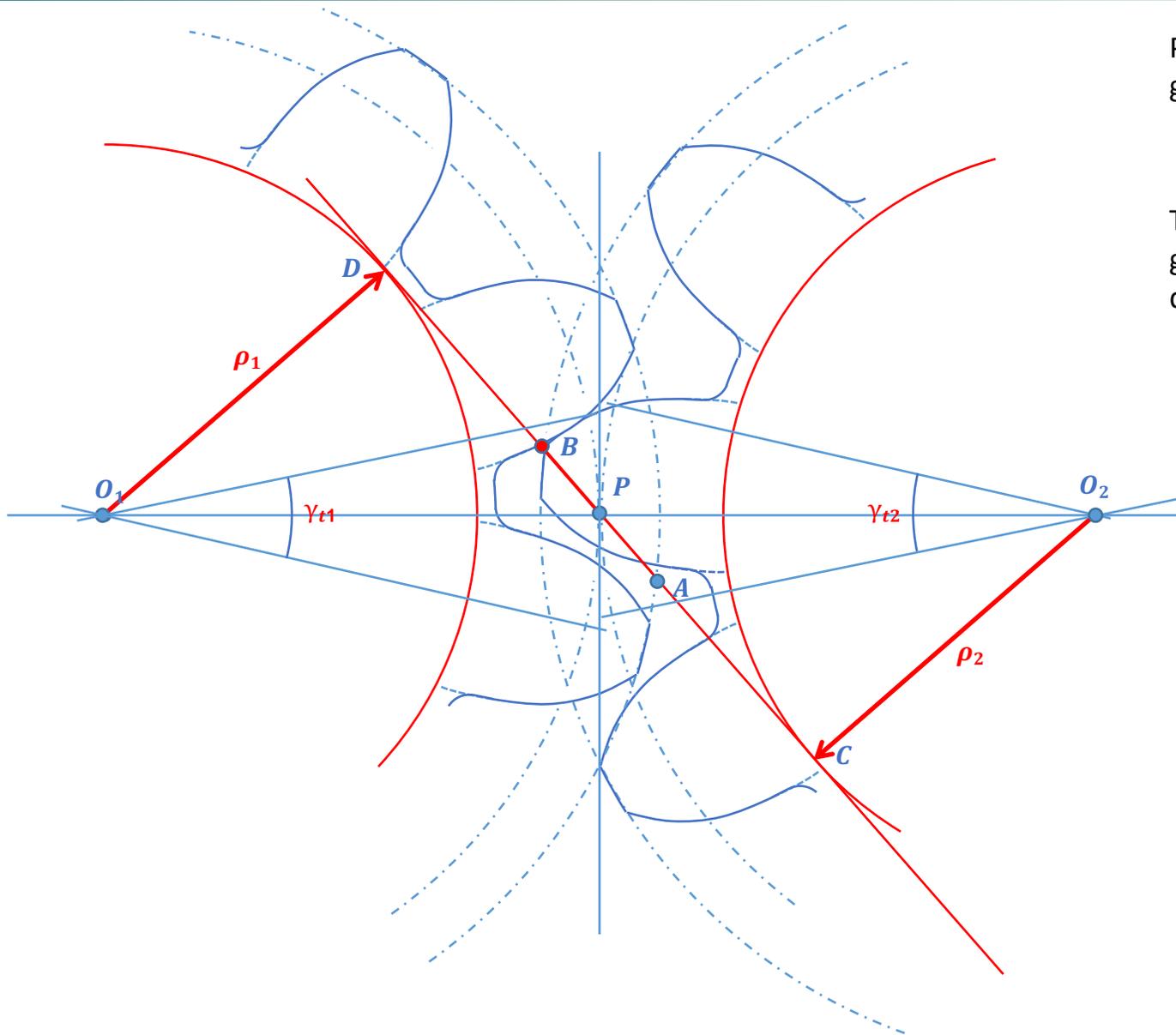
$$\gamma_{t1} = \gamma_{a1} + \gamma_{r1}$$

$$\gamma_{t2} = \gamma_{a2} + \gamma_{r2}$$

Para que la transmisión continúe es necesario que antes de que finalice el contacto de una pareja de dientes, se inicie el contacto de la siguiente. Cómo la separación entre los perfiles de los dientes en la circunferencia primitiva es igual al paso, para que exista continuidad en el engrane es necesario que el arco de conducción sea mayor o igual al paso.

**Relación de contacto (grado de recubrimiento):** Cociente entre la longitud del arco de conducción y el paso circular.

$$\varepsilon = \frac{q_t}{p}$$



Para obtener el arco de conducción, necesitamos conocer los ángulos girados por cada una de las ruedas

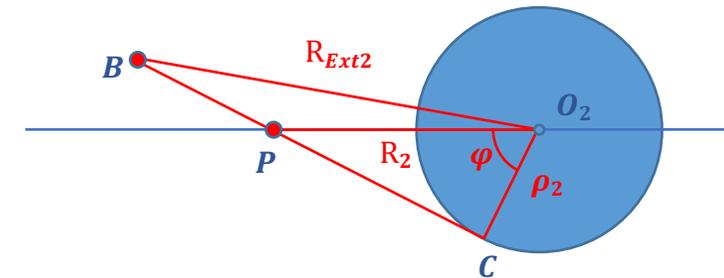
$$q_t = R_1 \gamma_{t1} = R_2 \gamma_{t2}$$

Teniendo en cuenta las propiedades del perfil de evolvente, el ángulo girado por cada una de las ruedas estará relacionado con el segmento de contacto ( $u_t = AB$ ).

$$u_t = \rho_1 \gamma_{t1} = \rho_2 \gamma_{t2} \quad \gamma_{t1} = \frac{u_t}{\rho_1}$$

$$u_t = AP + PB$$

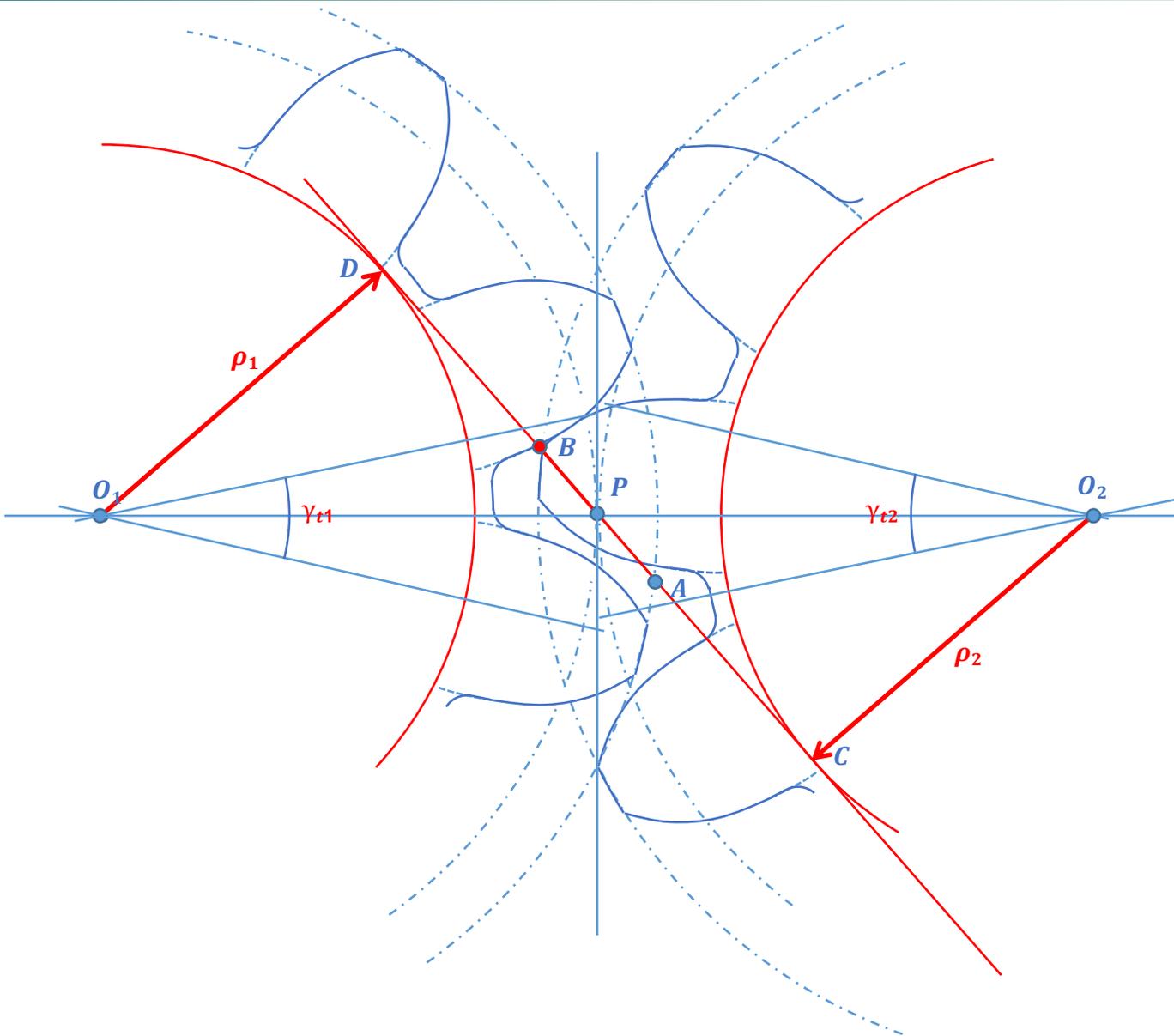
El valor del segmento **PB** puede obtenerse de los triángulos  $O_2BC$  y  $O_2PC$



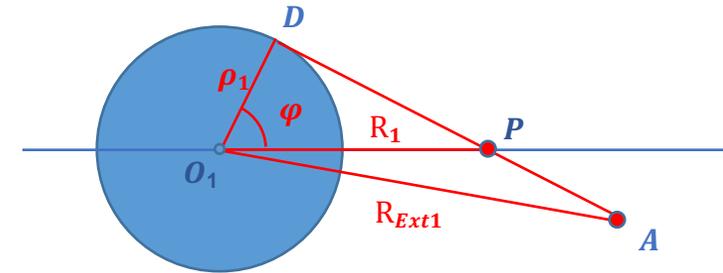
$$PB = \sqrt{R_{Ext2}^2 - \rho_2^2} - R_2 \sin \varphi$$

De modo similar se obtiene el valor del segmento AP empleando los triángulos  $O_1AD$  y  $O_1PD$

# 12.4 Relación de Contacto (Grado de recubrimiento)



De modo similar se obtiene el valor del segmento AP empleando los triángulos  $O_1AD$  y  $O_1PD$



$$PA = \sqrt{R_{Ext1}^2 - \rho_1^2} - R_1 \sin \phi$$

$R_{Ext}$  es el radio exterior de las ruedas que será igual al radio primitivo más el addendum (que en el caso de las ruedas normalizadas es igual al módulo)

$$R_{Ext} = R + add = R + m$$

$$q_t = R_1 \gamma_{t1} \quad \gamma_{t1} = \frac{u_t}{\rho_1} \quad \epsilon = \frac{q_t}{p} \quad \epsilon = \frac{R_1 \frac{u_t}{\rho_1}}{p} \quad \epsilon = \frac{R_1 \frac{u_t}{\rho_1}}{p}$$

La relación de contacto debe ser superior a la unidad. En engranajes rectos suele estar situada entre 1 y 2, mientras que en engranajes helicoidales suele ser superior a 2.