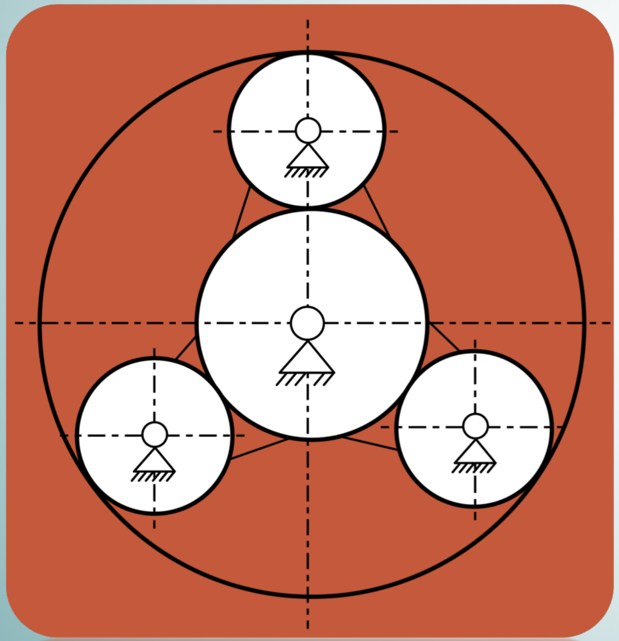
Máquinas y Mecanismos

2. Análisis y Síntesis Estructural (II)



Alfonso Fernández del Rincón

Pablo García Fernández

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

Epígrafes del tema

2.1. Criterio de Grübler: Aplicaciones, limitaciones y ejemplos.

2.2. Obtención de nuevos mecanismos por adición de elementos. Grupos de Assur.

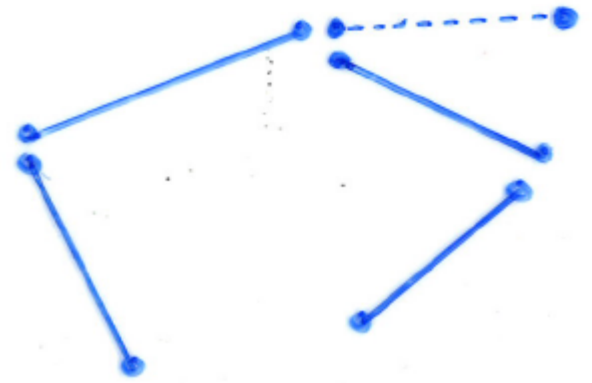
2.3. Obtención de nuevos mecanismos por equivalencia, degeneración e inversión.

2.4. Leyes de Grübler-Chebyshev.

2.5. Leyes generales de formación de las cadenas cinemáticas planas con pares R.

Criterio de Grübler: Sirve para determinar el número de g.d.l. de un mecanismo

En el plano: Antes de conectar los N elementos el nº de g.d.l. será $G = 3 \times N$



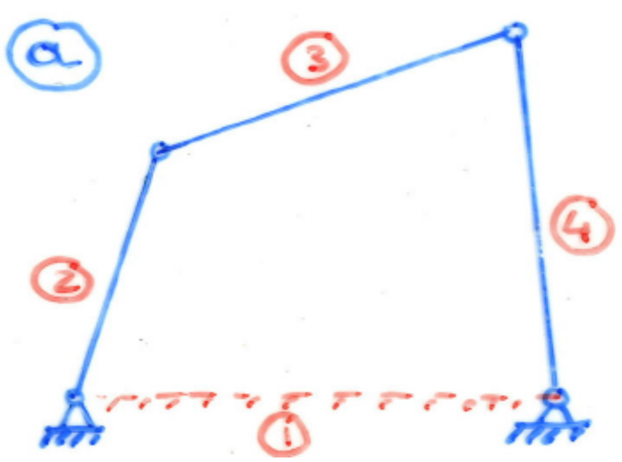
Un par de clase I permite 1 g.d.l., por lo que restringe 2. Por lo tanto, con P_I pares de clase I se restringen $2 \times P_I$ g.d.l.

Un par de clase II permite 2 g.d.l., por lo que restringe 1. Por lo tanto, con P_{II} pares de clase II se restringen $1 \times P_{II}$ g.d.l.

Un mecanismo siempre tiene un elemento fijo, por lo que se restringen 3 g.d.l. adicionales.

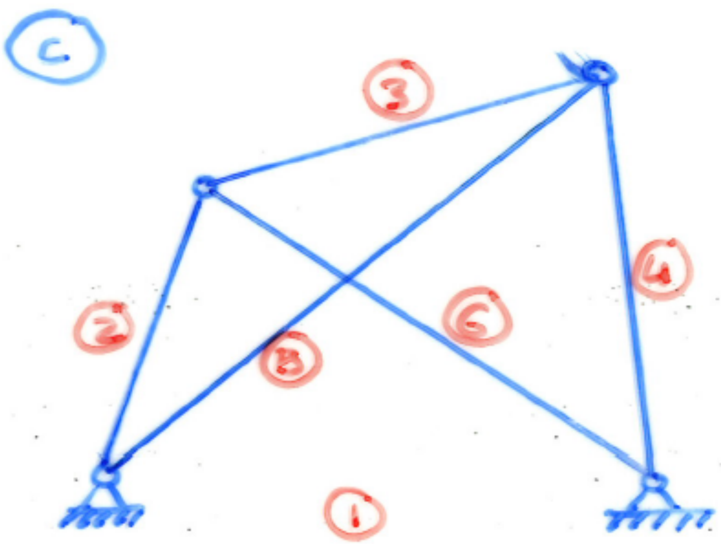
Criterio de Grübler en el plano: $\boxed{G = 3\,(N - 1) - 2 \times P_I - 1 \times P_{II}}$

2.1. Criterio de Grübler en el plano. Ejemplos

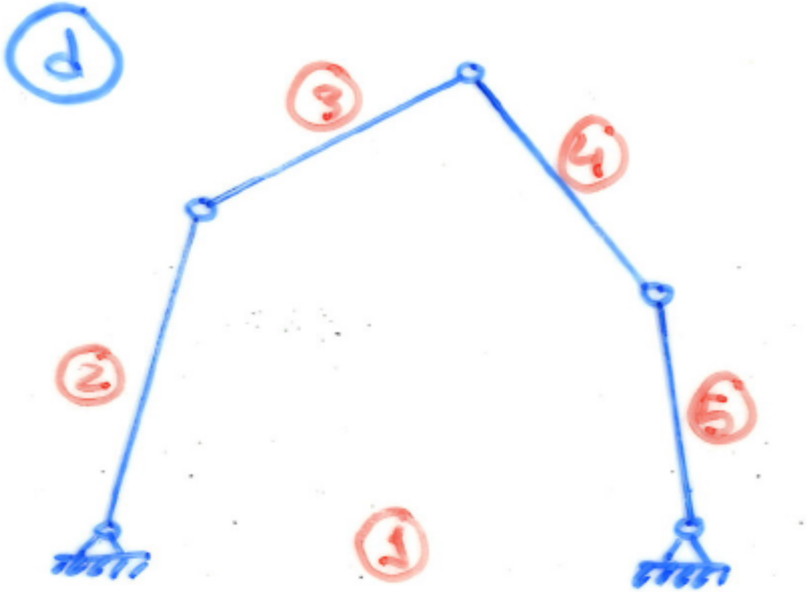


$$G = 3\,(4 - 1) - 2 \times 4 - 1 \times 0 = 1$$

$$G = 3\,(3 - 1) - 2 \times 3 - 1 \times 0 = 0$$

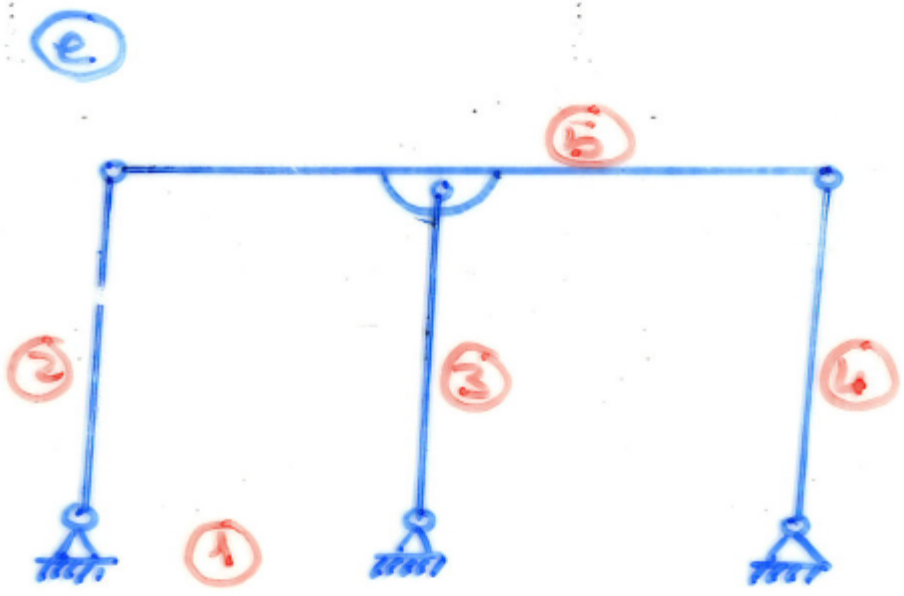


$$G = 3\,(6 - 1) - 2 \times (2 \times 4) - 1 \times 0 = -1$$

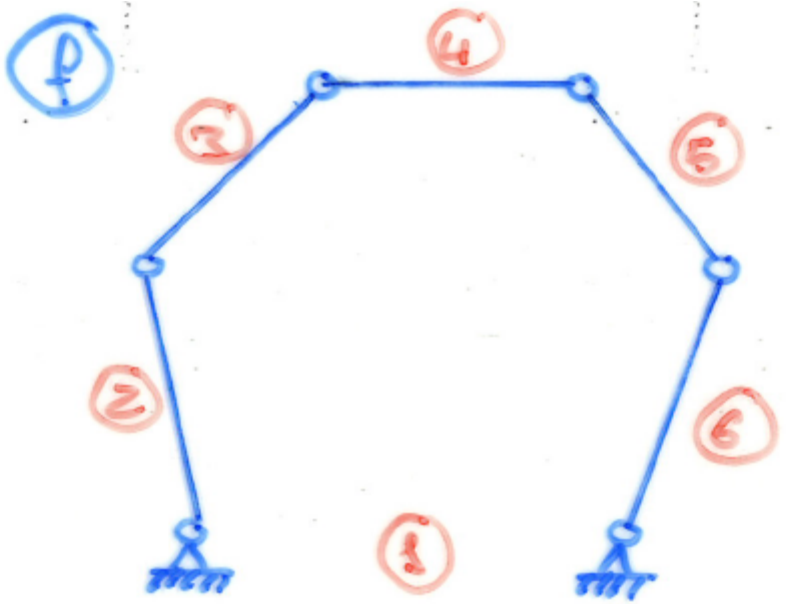


$$G = 3\,(5 - 1) - 2 \times 5 - 1 \times 0 = 2$$

2.1. Criterio de Grübler en el plano. Ejemplos

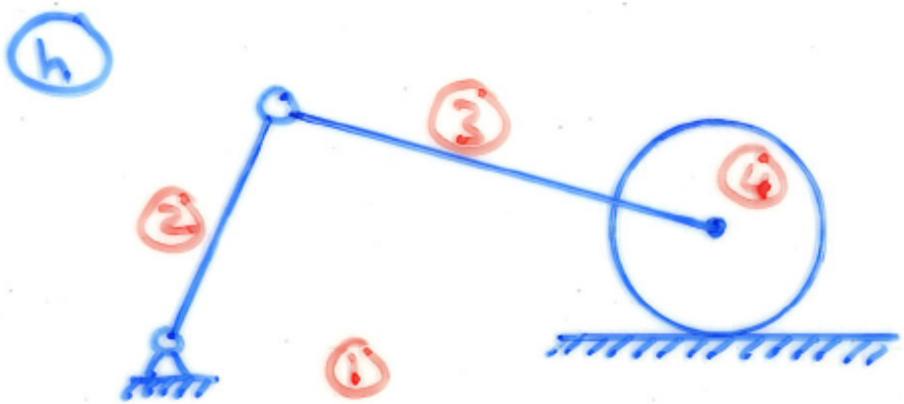


G = 3 (5 – 1) – 2 x 6 – 1 x 0 = 0



G = 3 (6 – 1) – 2 x 6 – 1 x 0 = 3

G = 3 (3 – 1) – 2 x 2 – 1 x 1 = 1



G = 3 (4 – 1) – 2 x 3 – 1 x 1 = 2 (rod + desl)

G < 0 Estructura hiperestática.

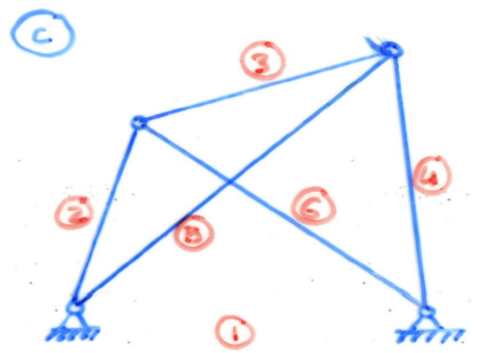
G = 0 Estructura isostática.

G = 1 Mecanismo desmodrómico. Dada la posición de un elemento, se conoce la del resto

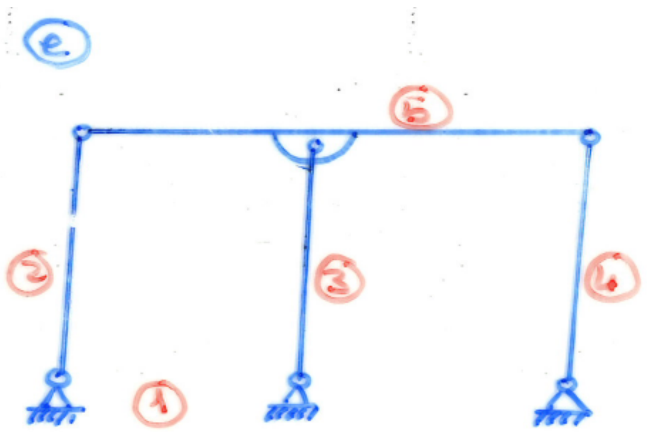
G = 2 Mecanismo diferencial.

G > 2 Mecanismo con N g.d.l.

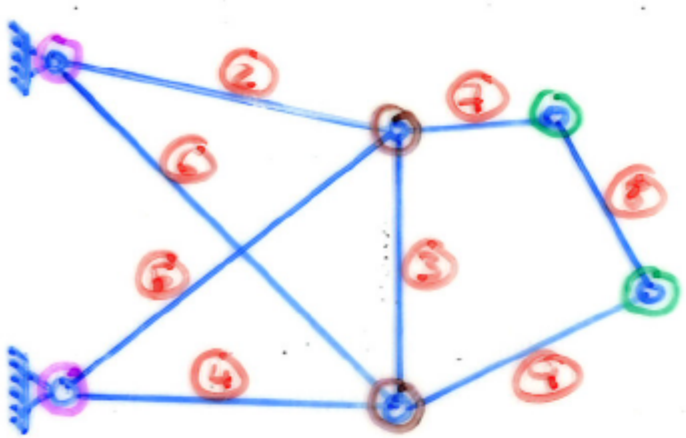
Limitaciones:



Los pares terciarios se consideran binarios
y se introducen dos veces:
G = 3 (6 – 1) – 2 x 8 = -1



La aplicación del criterio indica que se trata de una estructura isostática, pero en realidad se mueve
G = 3 (5 – 1) – 2 x 6 – 1 x 0 = 0



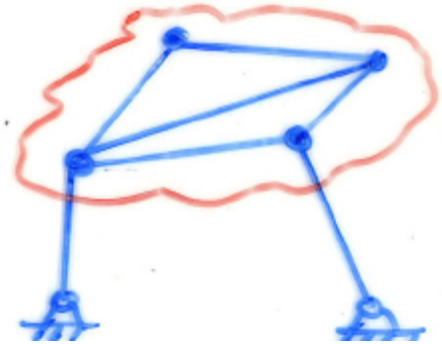
G = 3 (9 – 1) – 2 x (2 + 2x3 + 2x2) = 0

Pero los elementos 7, 8 y 9 sí se mueven

2.1. Criterio de Grübler en el plano. Limitaciones

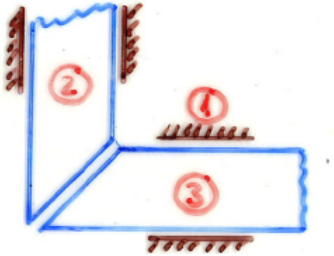
Reglas prácticas para aplicar el criterio de Grübler:

- Evitar el empleo de barras de la misma longitud.
- Establecer qué partes del mecanismo actúan como sólido rígido y tratarlos como elementos n-arios.

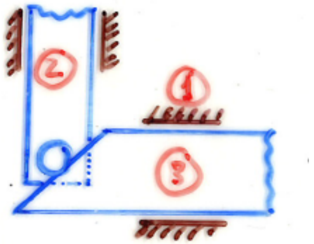


Hirschorn clasificó el origen de las inconsistencias del criterio:

El mecanismo posee un par inferior que puede ser sustituido por uno superior sin alterar el movimiento.

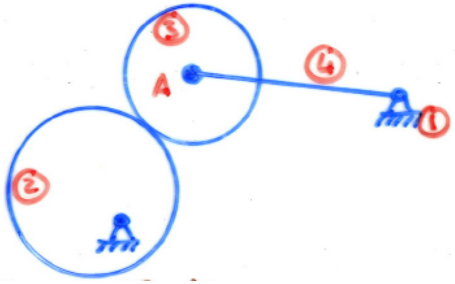


G = 3 (3 – 1) – 2 x 3 = 0



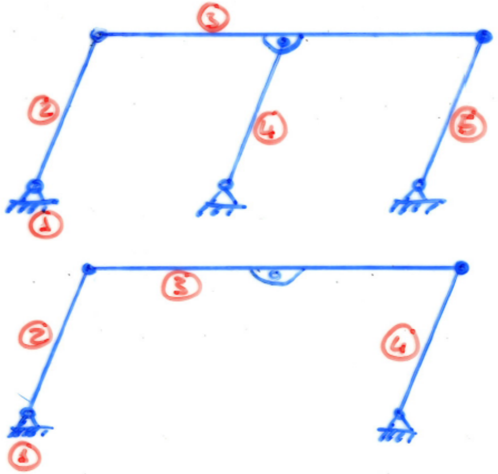
G = 3 (3 – 1) – 2 x 2 – 1 = 1

El mecanismo posee un par cinemáticamente redundante. Si se elimina la articulación A, el sistema se moverá exactamente igual.



G = 3 (4 – 1) – 2 x 3 – 1 = 1

El mecanismo posee una restricción redundante.



$$\boxed{G = 6\,(N - 1) - 5 \times P_I - 4 \times P_{II} - 3 \times P_{III} - 2 \times P_{IV} - 1 \times P_V}$$

Si se emplean únicamente pares de tipo I, el número mínimo de elementos para tener un mecanismo desmodrómico (1 g.d.l.) de cadena cerrada es el siguiente:

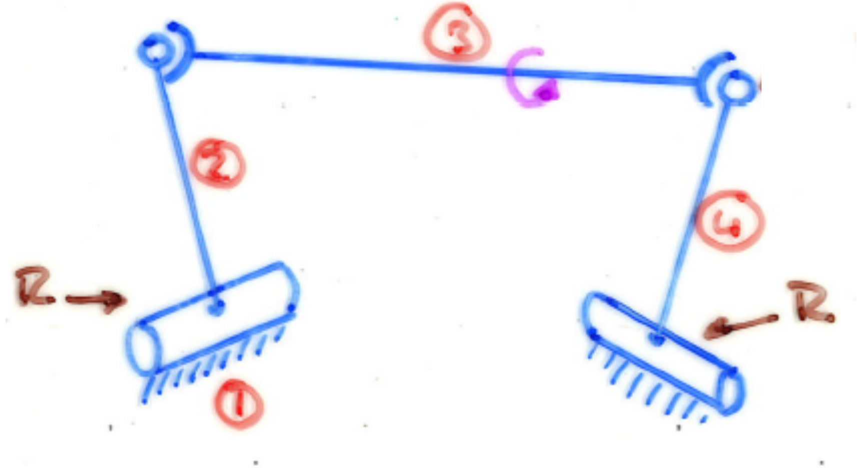
- En el plano: $G = 1 = 3 \times (N - 1) - 2 \times N \rightarrow N = 4$
- En el espacio: $G = 1 = 6 \times (N - 1) - 5 \times N \rightarrow N = 7$

Limitaciones:

En el espacio también existe un gran número de casos en los que no se verifica el criterio. Por ejemplo, el biela manivela: $G = 6 \times (4 - 1) - 5 \times 4 = -2$.

Para que exista movimiento, los ejes de los pares R del cuadrilátero articulado deben ser paralelos entre sí y perpendiculares al plano del movimiento.

Existen otros casos en los que la interpretación del criterio no puede hacerse rápidamente:



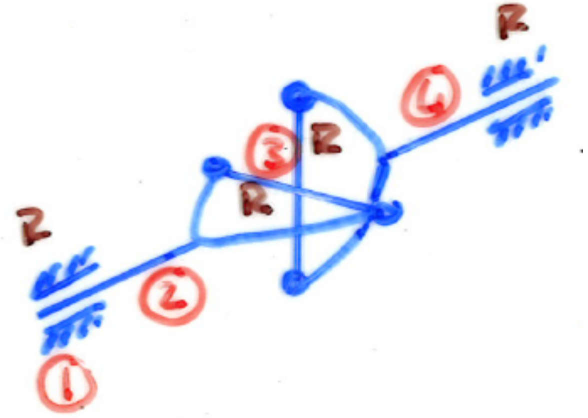
Mecanismo de Reer

G = 6 x (4 – 1) – 5 x 2 – 3 x 2 = 2

El g.d.l. extra corresponde al giro del elemento 3 respecto a sí mimo.

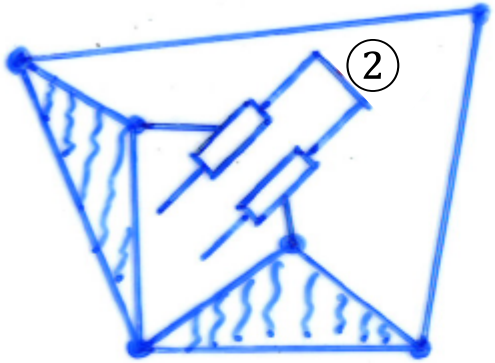
La junta Cardan tampoco verifica el criterio de Grübler:

G = 6 x (4 – 1) – 5 x 4 = -2

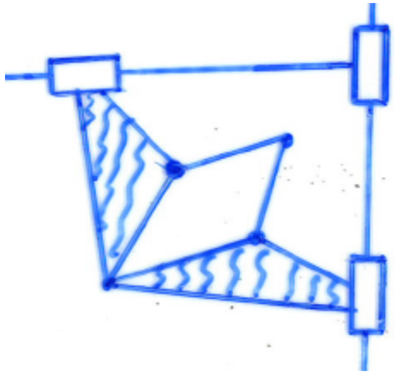


Cuando se emplean pares prismáticos hay que tener en cuenta las siguientes restricciones:

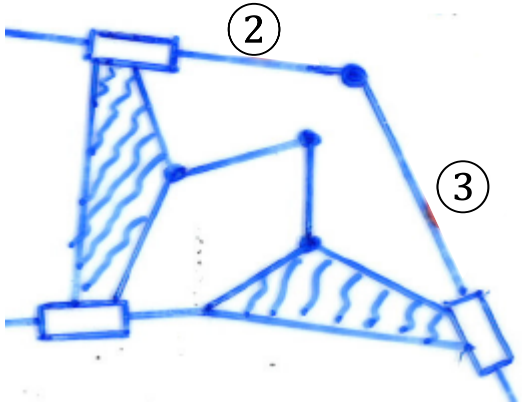
- No debe existir ningún elemento que posea únicamente pares P. (La posición de 2 está indeterminada).



- Los elementos binarios que contengan únicamente pares P no pueden conectarse directamente porque no existiría movimiento.



- Ningún circuito cerrado de una cadena puede tener menos de 2 pares R.
  (No existe movimiento relativo entre 2 y 3)



Epígrafes del tema

2.1. Criterio de Grübler: Aplicaciones, limitaciones y ejemplos.

2.2. Obtención de nuevos mecanismos por adición de elementos. Grupos de Assur.

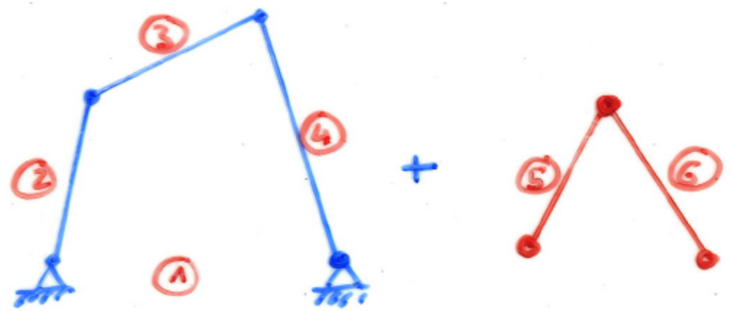
2.3. Obtención de nuevos mecanismos por equivalencia, degeneración e inversión.

2.4. Leyes de Grübler-Chebyshev.

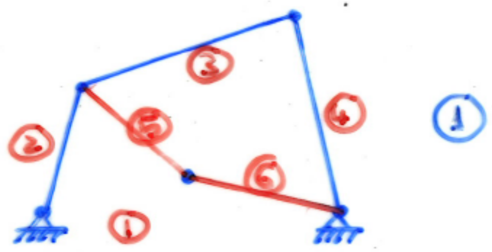
2.5. Leyes generales de formación de las cadenas cinemáticas planas con pares R.

Diada: Pareja de elementos unidos mediante pares R, P, H, C, L.

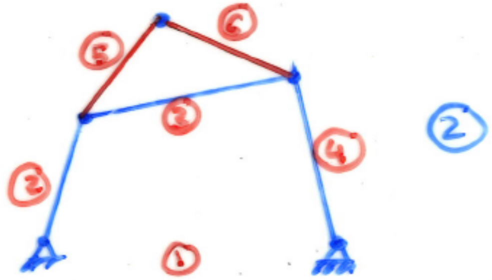
Se pueden añadir diadas (empleando generalmente pares R para su unión con el mecanismo) de tres formas distintas:



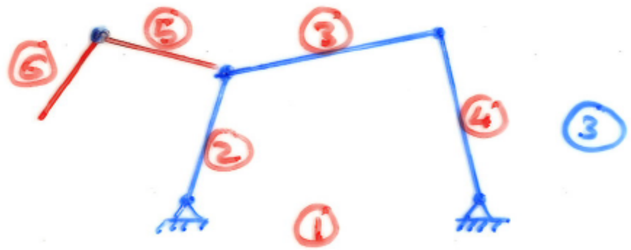
$G = 3\cdot(4-1) - 2\cdot 4 = \underline{\underline{1}}$



que exista movimiento relativo entre los elementos de la diada sin modificar el nº de g.d.l. del mecanismo.



que no exista movimiento relativo entre los elementos de la diada sin modificar el nº de g.d.l. del mecanismo. (Carece de interés cinemático).

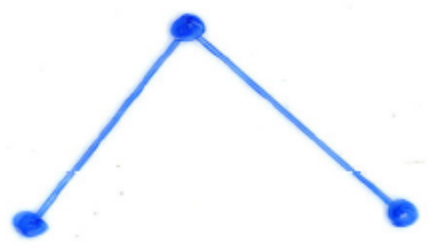


que exista movimiento relativo entre los elementos de la diada incrementando el nº de g.d.l. del mecanismo.

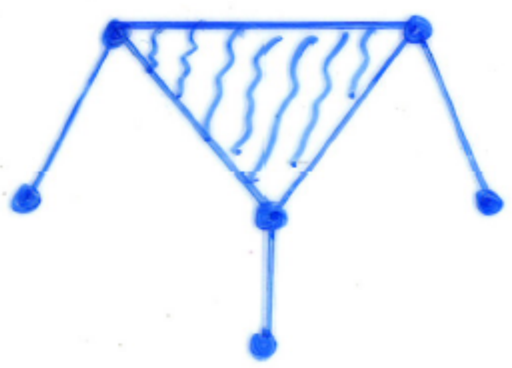
Se añaden a un mecanismo dado **n** elementos y **p** pares **R** (se incluyen los pares libres). Para no modificar el nº total de g.d.l. deberá verificarse que:

$G = 3 \times (N - 1) - 2 \times P = 3 \times ((N+n) - 1) - 2 \times (P+p) \quad \rightarrow \quad 3n - 2p = 0$

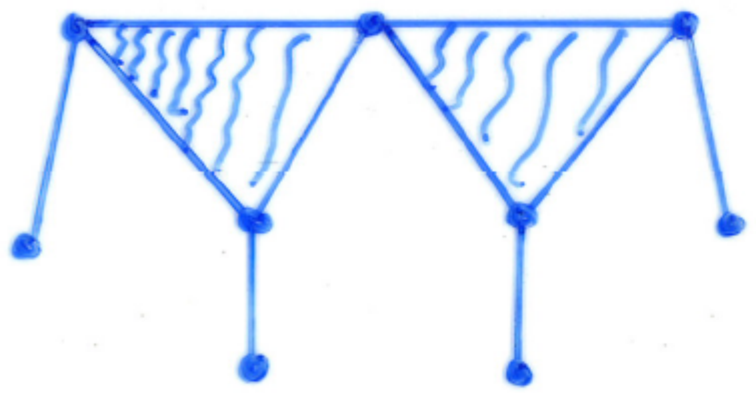
Las posibles soluciones son:



n = 2; p = 3



n = 4; p = 6



n = 6; p = 9

Conclusiones:

- El número de elementos añadidos debe ser par.
- La conexión al mecanismo debe hacerse a través de los pares libres exclusivamente.

Epígrafes del tema

2.1. Criterio de Grübler: Aplicaciones, limitaciones y ejemplos.

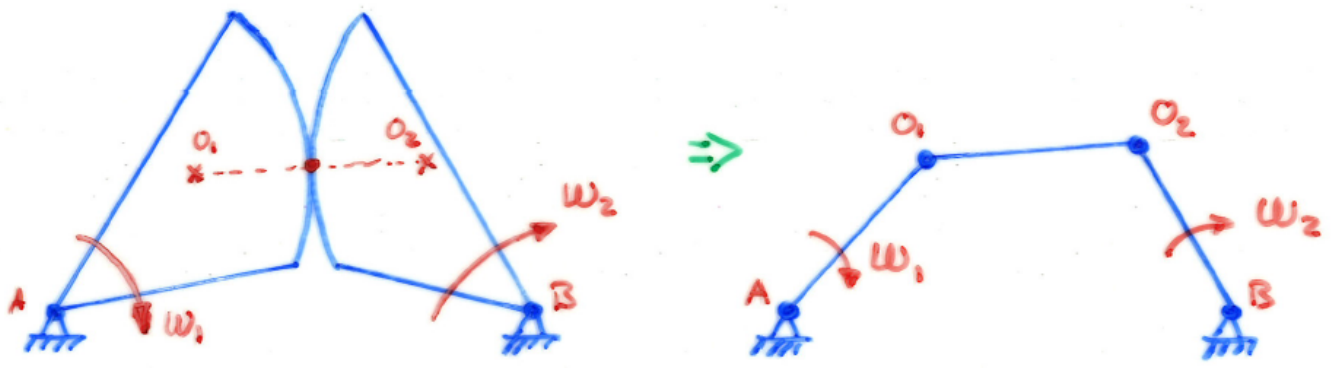
2.2. Obtención de nuevos mecanismos por adición de elementos. Grupos de Assur.

2.3. Obtención de nuevos mecanismos por equivalencia, degeneración e inversión.

2.4. Leyes de Grübler-Chebyshev.

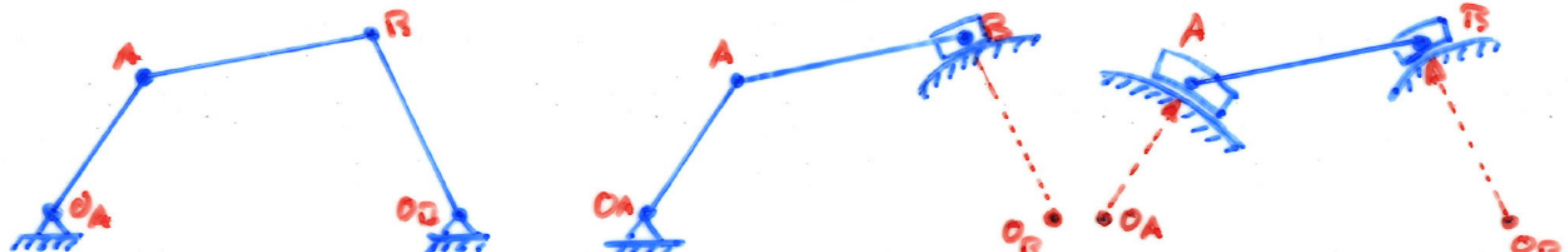
2.5. Leyes generales de formación de las cadenas cinemáticas planas con pares R.

Equivalencia: Este método es especialmente útil en análisis cinemático de mecanismos con pares **L**.

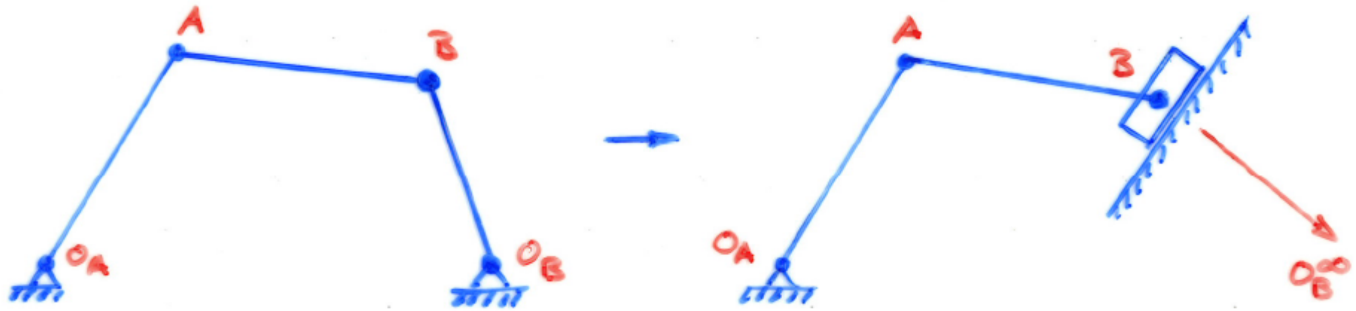


Procedimiento: Sustituir el par L por el mecanismo equivalente asociado (cuadrilátero articulado) A O1 O2 B

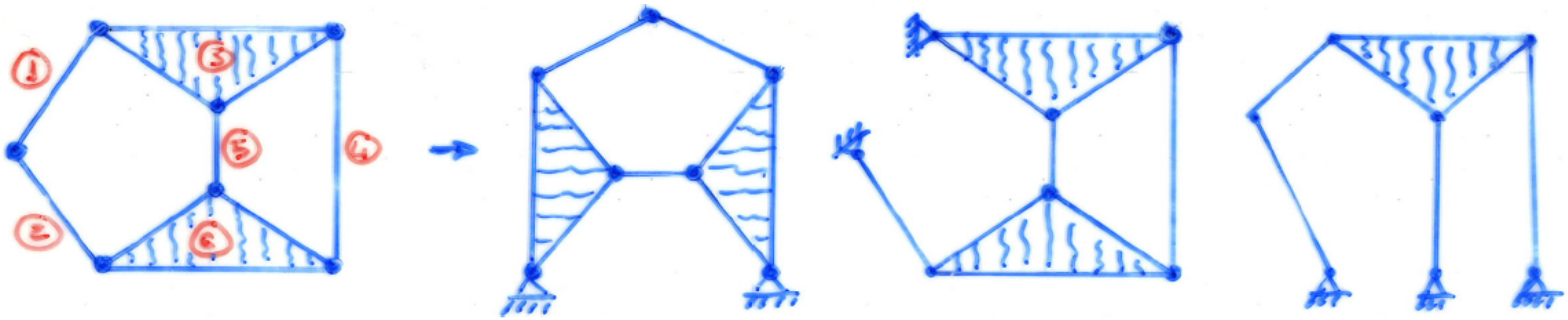
- Este mecanismo únicamente es equivalente en la posición dada.
- No es válido para el cálculo de sobreaceleraciones.
- No es único, existe más de uno



Degeneración: Consecuencia de la modificación sustancial de longitudes u otras características de los elementos de un mecanismo, de tal forma que se obtienen mecanismos denominados degenerados del inicial.



Inversión: Intercambio de funciones entre los elementos del mecanismo: En un mecanismo con N elementos hay, a priori, N – 1 inversiones. Para obtenerlas se va modificando el que actúa como fijo. Tiene que haber diferencia topológica entre inversiones para considerarlas distintas.



Epígrafes del tema

Objetivos del análisis estructural:

- ¿Cuántas cadenas cinemáticas de movilidad **M** pueden formarse con un número **N** de elementos?
- ¿Cuántas **cadenas isomorfas** (misma configuración estructural) existen para cada número de barras y pares?

Aunque no existen soluciones generales, sí se han resuelto casos particulares, por ejemplo, aplicando las Leyes de Grübler-Chebyshev.

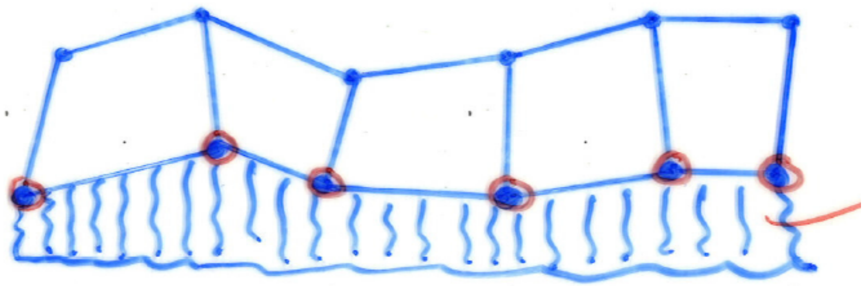
Son de aplicación en el caso plano con pares **R**, **P**, **H** y **L**:

$$G = 3 \times (N - 1) - 2 \times P - L \qquad \text{(Mecanismos)}$$

$$M = G + 3 = 3 \times N - 2 \times P - L \qquad \text{(Cadenas cinemáticas)}$$

Consecuencias (para mecanismos con pares de clase I):

1. Todos los mecanismos desmodrómicos con pares de clase I tienen que cumplir:
   $G = 1 = 3 \times (N - 1) - 2 \times P \rightarrow \quad 3N - 2P = 4$
2. Despejando N de la ecuación anterior: $N = \frac{2}{3}(P + 2)$. Es decir, que el número de barras de un mecanismo con pares de clase I y 1 g.d.l. debe ser par.
3. El mínimo número de barras N en una cadena cinemática cerrada con pares de clase I en el plano debe ser: $G = 1 = 3 \times (N - 1) - 2 \times P \rightarrow P = N \rightarrow N = 4$
4. El mínimo número de barras N en una cadena cinemática cerrada con pares de clase I en el espacio debe ser: $G = 1 = 6 \times (N - 1) - 5 \times P \rightarrow P = N \rightarrow N = 7$
5. El mayor número de pares de clase I que puede contener un elemento en una cadena cinemática cerrada es N/2



N = 12
6 pares → N/2

2.4. Leyes de Grübler-Chebyshev.

Consecuencias (para mecanismos con pares de clase I):

6. El número de elementos binarios en una cadena cinemática con pares de clase I es independiente del número de elementos ternarios.
   Número total de barras: $N = n_2 + n_3 + \ldots$ (elem. binarios, ternarios…)
   Número de pares: $P = ½\,(2n_2 + 3n_3 + \ldots)$
   2 pares por cada barra binaria + 3 pares por cada ternaria…
   Se divide entre 2 porque cada par se está contando 2 veces, una por cada elemento que une.
   Sustituyendo N y P en la fórmula de la movilidad **M**:
   $M = 3 \times N - 2 \times P = 3 \times (n_2 + n_3 + \ldots) - 2 \times (½\,(2n_2 + 3n_3 + \ldots)) =$
   $= n_2 + 0n_3 - n_4 - 2n_5 - \ldots$

$$n_2 = M + \sum_{i=4}^{N/2} (i-3)n_i$$

7. Existen mecanismos que por sus dimensiones o por su disposición no verifican las leyes de Grübler

Epígrafes del tema

2.1. Criterio de Grübler: Aplicaciones, limitaciones y ejemplos.

2.2. Obtención de nuevos mecanismos por adición de elementos. Grupos de Assur.

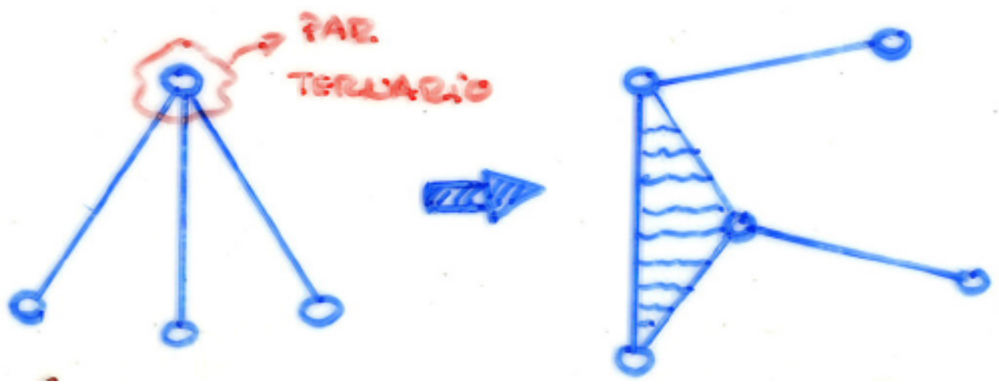
2.3. Obtención de nuevos mecanismos por equivalencia, degeneración e inversión.

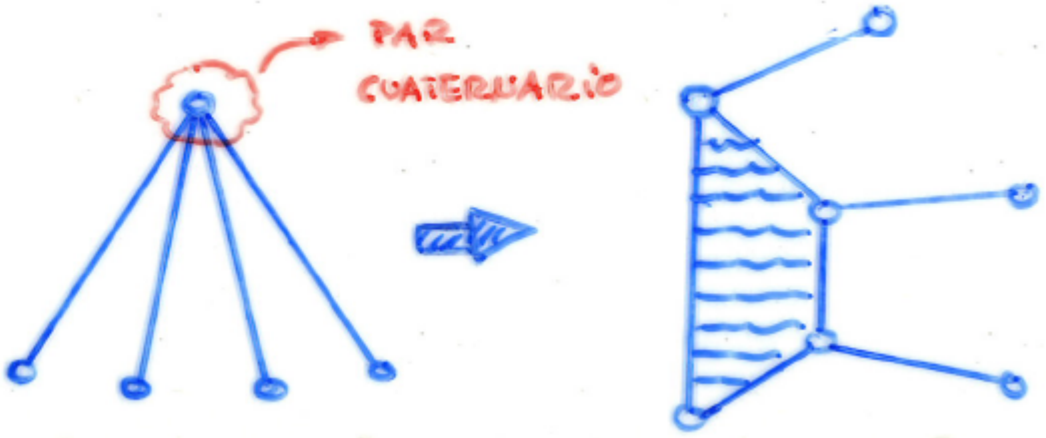
2.4. Leyes de Grübler-Chebyshev.

2.5. Leyes generales de formación de las cadenas cinemáticas planas con pares R.

2.5. Leyes generales de formación de las cadenas cinemáticas planas con pares R

Dada una configuración cualquiera $(n_2,p_2,n_3,p_3,\ldots,n_i,p_i,\ldots)$, se va a transformar esta cadena en otra con el mismo número de elementos pero que posea únicamente pares binarios





(3,3,0,1) (2,5,1,0) (4,4,0,0,0,1) (3,7,0,0,1,0)

Antes	n_2	p_2	n_3	p_3
Después	$n_2 - 1$	$p_2 + 2$	$n_3 + 1$	$p_3 - 1$

Antes	n_2	p_2	n_4	p_4
Después	$n_2 - 1$	$p_2 + 3$	$n_4 + 1$	$p_4 - 1$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{lccccccccccccccr}
(& n_2^0 & , & p_2^0 & , & n_3^0 & , & p_3^0 & , & n_4^0 & , & p_4^0 & , & \ldots &) \\
(& n_2^0 - (p_3^0 + p_4^0 + p_5^0 + \ldots) & , & p_2^0 + 2p_3^0 + 3p_4^0 + \ldots & , & n_3^0 + p_3^0 & , & 0 & , & n_4^0 + p_4^0 & , & 0 & , & \ldots &) \\
(& n_2^1 & , & p_2^1 & , & n_3^1 & , & p_3^1 & , & n_4^1 & , & p_4^1 & , & \ldots &)
\end{array}$$

Como con esta configuración, únicamente aparecen pares binarios, se puede aplicar la expresión $P = \frac{1}{2}\,(2n_2^1 + 3n_3^1 + \ldots)$

Por otro lado, se conoce el número total de pares, que son todos binarios:
$P = p_2^1 = p_2^0 + 2p_3^0 + 3p_4^0 + \ldots$

Igualando las dos expresiones anteriores, se obtiene:

$$\tfrac{1}{2}\,(2n_2^1 + 3n_3^1 + \ldots) = \tfrac{1}{2}\,(2(n_2^0 - (p_3^0 + p_4^0 + p_5^0 + \ldots)) + 3(n_3^0 + p_3^0) + \ldots) = p_2^0 + 2p_3^0 + 3p_4^0 + \ldots \rightarrow$$

$$2n_2^0 - 2p_3^0 - 2p_4^0 - \ldots + 3n_3^0 + 3p_3^0 + \ldots = 2p_2^0 + 4p_3^0 + 6p_4^0 + \ldots \rightarrow$$

$$\boxed{2n_2^0 + 3n_3^0 + 4n_4^0 + \ldots = 2p_2^0 + 3p_3^0 + 4p_4^0 + \ldots}$$

Esta relación se verifica en cualquier configuración plana de nudos y barras, independientemente de la movilidad que posea y solamente por el hecho de estar conexionados.