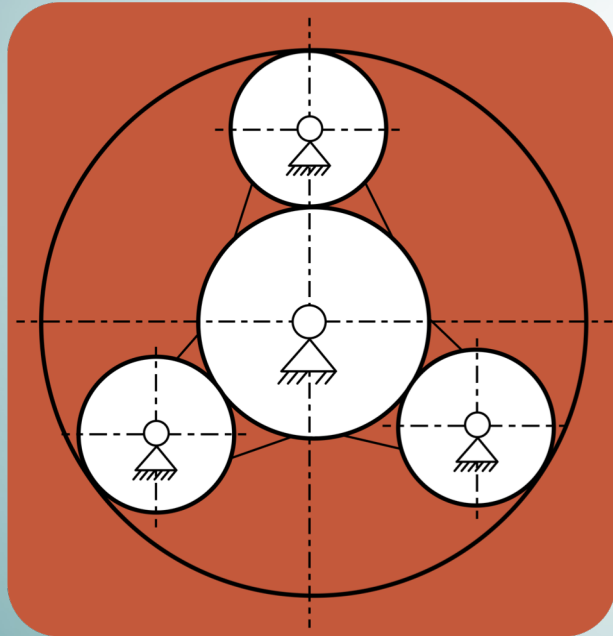


Máquinas y Mecanismos

3. Estudio del Movimiento Plano



Alfonso Fernández del Rincón
Pablo García Fernández

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

Este material se publica bajo licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



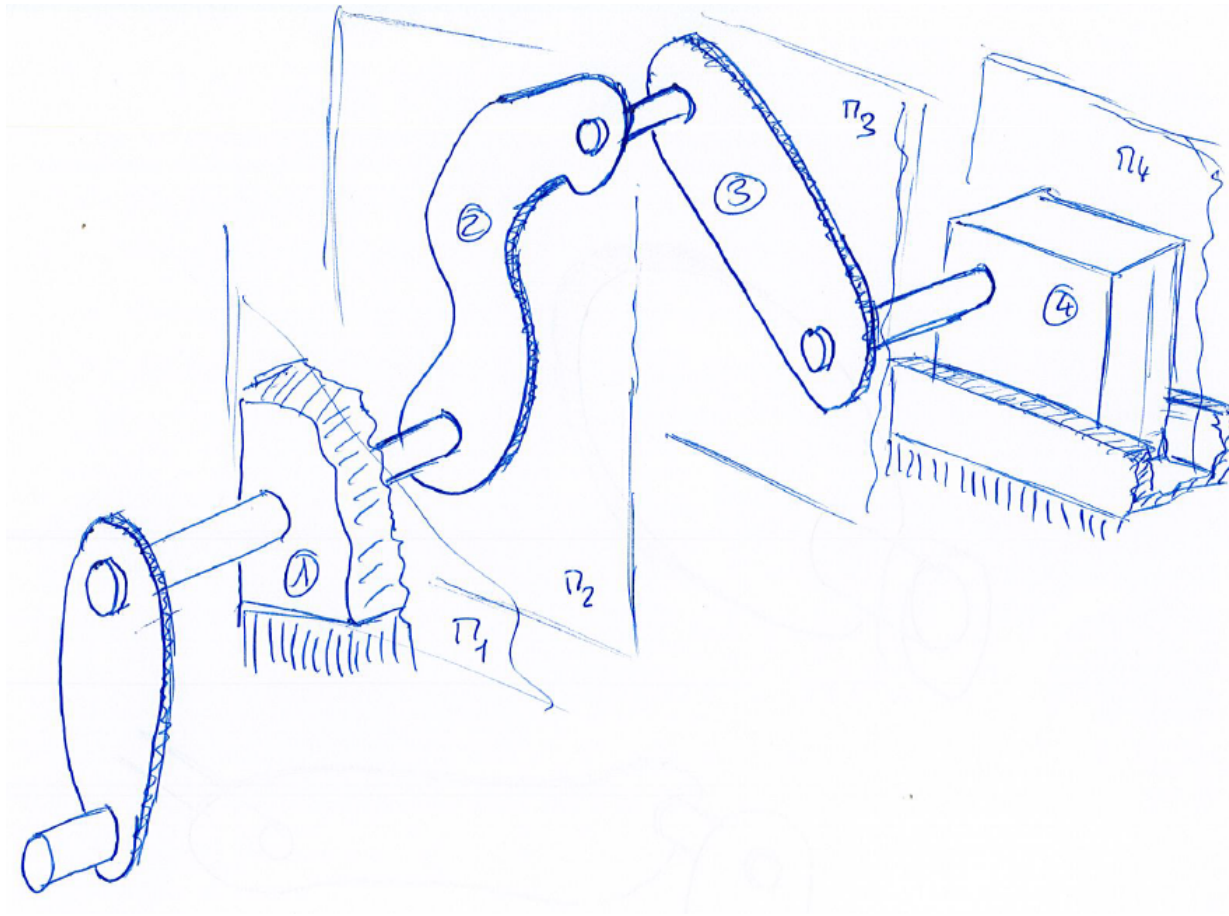
Epígrafes del tema

- 3.1 Movimiento continuo de una figura plana en su plano: centro instantáneo de rotación.
- 3.2 Campo de velocidades en el movimiento plano.
- 3.3 Teorema de Aronhold-Kennedy.
- 3.4 Campo de aceleraciones en el movimiento plano.

3.1. Movimiento continuo de una figura plana en su plano: CIR

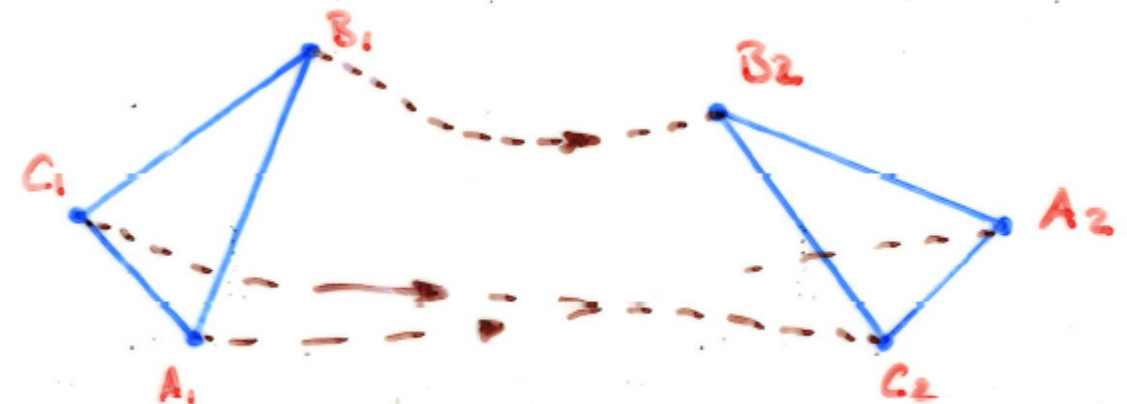
Una gran parte de los mecanismos utilizados en las aplicaciones prácticas poseen movimiento plano. De ahí el interés por el estudio de este tipo de movimiento.

Movimiento plano: Se dice que un mecanismo tiene movimiento plano cuando las velocidades de todos los puntos son paralelas a un plano fijo determinado. Esto no implica que el mecanismo deba estar contenido en el plano.



Para estudiar el movimiento de la figura basta con estudiar el movimiento de un segmento AB .

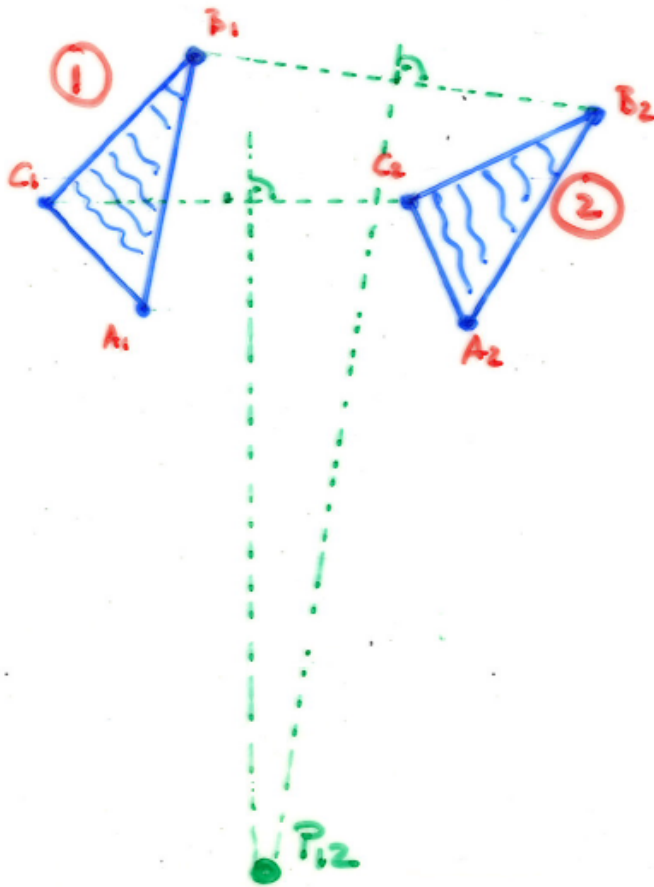
Conocido el movimiento de este segmento se puede determinar el movimiento de cualquier punto de la figura.



3.1. Movimiento continuo de una figura plana en su plano: CIR

Centro de rotación: Si existe un plano unido al segmento **AB** y que se mueve solidariamente con el mismo, existe un punto en ese plano tal que su posición inicial y final no habrá variado. Este punto se denomina **Centro de Rotación** o **Polo**.

Para determinar su posición:



$$P_{12} \rightarrow \text{Mediatrix } \overline{A_1A_2} \cap \text{Mediatrix } \overline{B_1B_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} \\ \overline{A_1P_{12}} = \overline{A_2P_{12}} \\ \overline{B_1P_{12}} = \overline{B_2P_{12}} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle A_1P_{12}B_1 = \triangle A_2P_{12}B_2$$

Para otras posiciones:

$$\textcircled{1} \text{ y } \textcircled{3} \rightarrow P_{13}$$

$$\textcircled{1} \text{ y } \textcircled{4} \rightarrow P_{14}$$

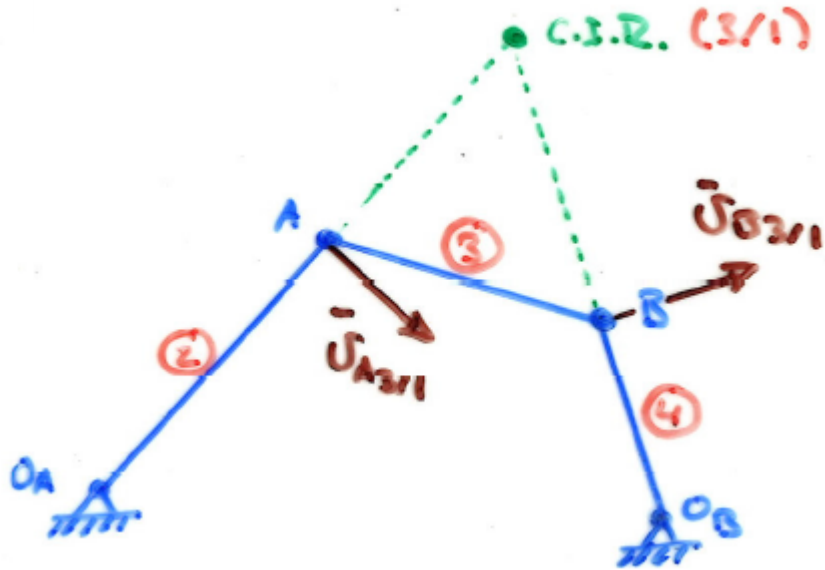
$$P_{14} \neq P_{13} \neq P_{12}$$

Cuando las posiciones ① y ② están muy próximas:

$\overline{A_1A_2}$ es tangente a la trayectoria del punto A, por lo que tiene la dirección de la \mathbf{v}_A

$\overline{B_1B_2}$ es tangente a la trayectoria del punto B, por lo que tiene la dirección de la \mathbf{v}_B

En un movimiento infinitesimal, se habla de **Centro Instantáneo de Rotación (CIR)**

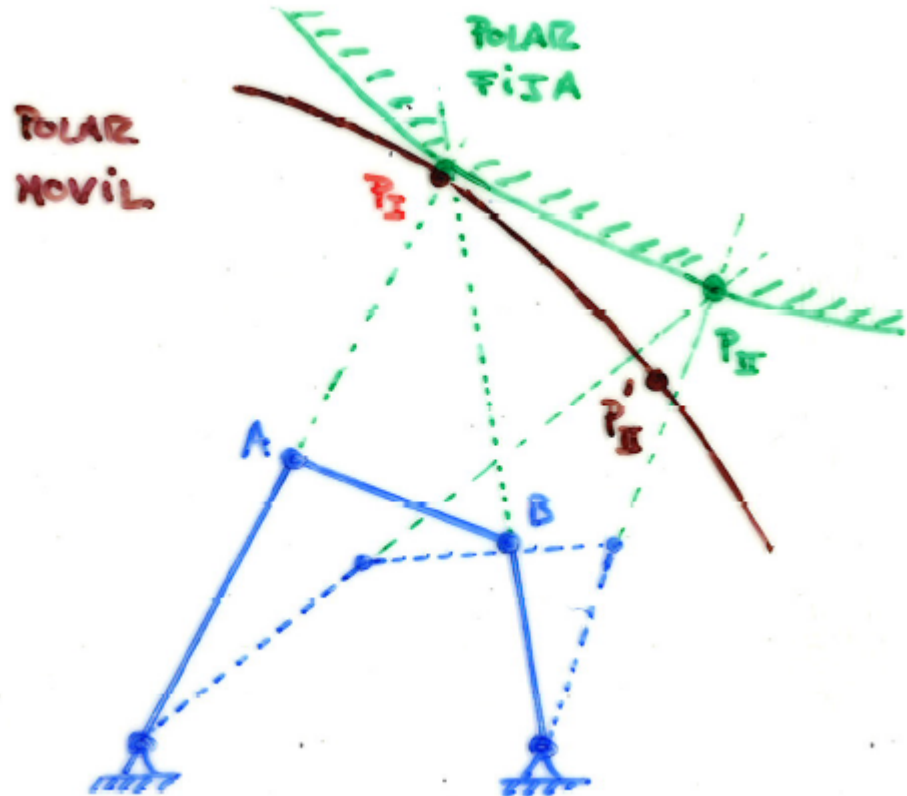


$$CIR_{31} \rightarrow \perp \mathbf{v}_{A3/1} \cap \perp \mathbf{v}_{B3/1}$$

Propiedades:

1. Dado que en un instante determinado, la posición del CIR no varía, $\mathbf{v}_{CIR} = 0$
2. La dirección de la velocidad de cualquier punto del plano móvil es \perp al segmento que une ese punto con el CIR y la magnitud es proporcional a su distancia al CIR.
3. $\omega = \frac{v_{punto/1}}{\|CIR - Punto\|}$
4. Caso particular: en una traslación, el CIR está en ∞

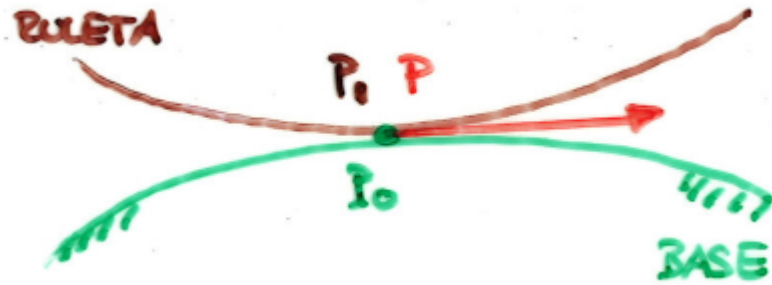
Dado que el CIR es un punto característico de una determinada posición (o instante), se puede definir:



Curva polar fija (**Base** o polodia): Lugar geométrico de los puntos del **plano fijo** que han coincidido con el CIR.

Curva polar móvil (**Ruleta** o herpolodia): Lugar geométrico de los puntos del **plano móvil** que han sido CIR.

Por tanto, la base es la **trayectoria** del CIR en el **plano fijo** y la ruleta es la **trayectoria** del CIR en el **plano móvil**.



El CIR es el punto móvil que recorre ambas trayectorias
P: Punto matemático que se mueve sobre la base y la ruleta

P₁, **P₀**: Puntos del plano móvil y fijo que coinciden con **P** en un instante

$$\mathbf{v}_{P_0} = \mathbf{v}_{P_1} = 0 \Rightarrow P \text{ se mueve con la misma velocidad respecto a ambos} \Rightarrow \mathbf{v}_{P/Base} = \mathbf{v}_{P/Ruleta}$$

$\mathbf{v}_{P/Base} \parallel \text{tangente a la base}$
 $\mathbf{v}_{P/Ruleta} \parallel \text{tangente a la ruleta}$

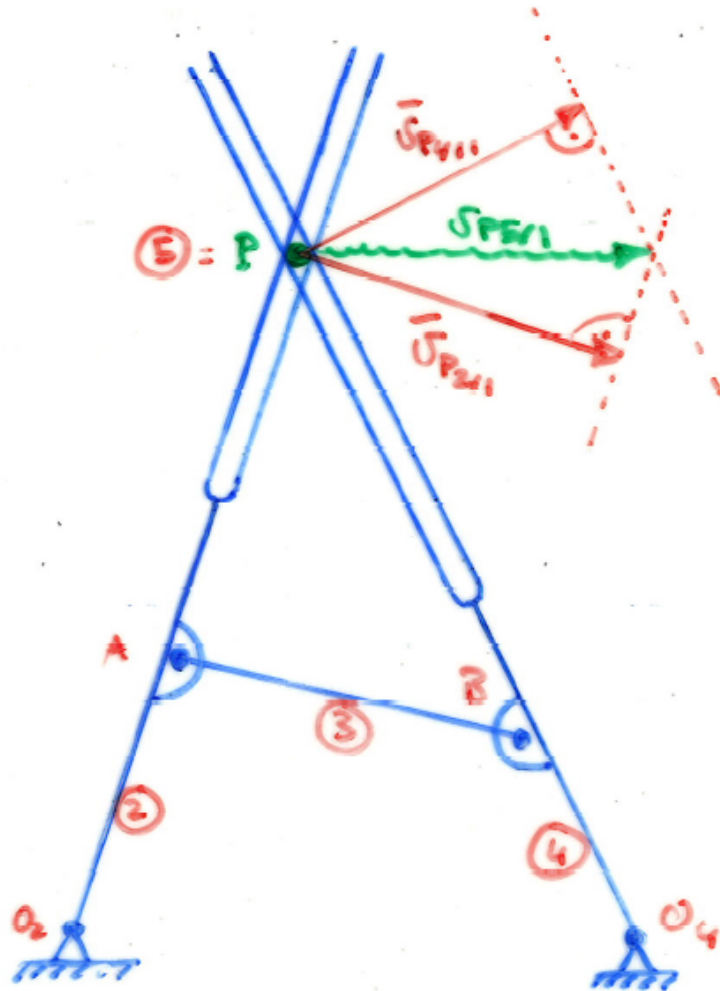
} Base y ruleta tangentes entre sí

- La base y la ruleta son tangentes
 - No existe velocidad relativa entre los puntos de contacto
- } La ruleta se mueve sobre la base con **rodadura pura**

El movimiento de la ruleta sobre la base es equivalente al movimiento de la figura

3.1. Movimiento continuo de una figura plana en su plano: Base y ruleta

Para definir totalmente el movimiento de la **ruleta** sobre la **base** es preciso conocer ambas curvas y la **velocidad de cambio de polo**.



$$\begin{array}{lll}
 ? & ? & |\omega_{2/1}| |O_2P| \\
 \mathbf{V}_{P5/1} = \mathbf{V}_{P5/2} + \mathbf{V}_{P2/1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 ? & \parallel O_2A & \perp O_2A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 ? & ? & |\omega_{4/1}| |O_4P| \\
 \mathbf{V}_{P5/1} = \mathbf{V}_{P5/4} + \mathbf{V}_{P4/1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 ? & \parallel O_4B & \perp O_4B
 \end{array}$$

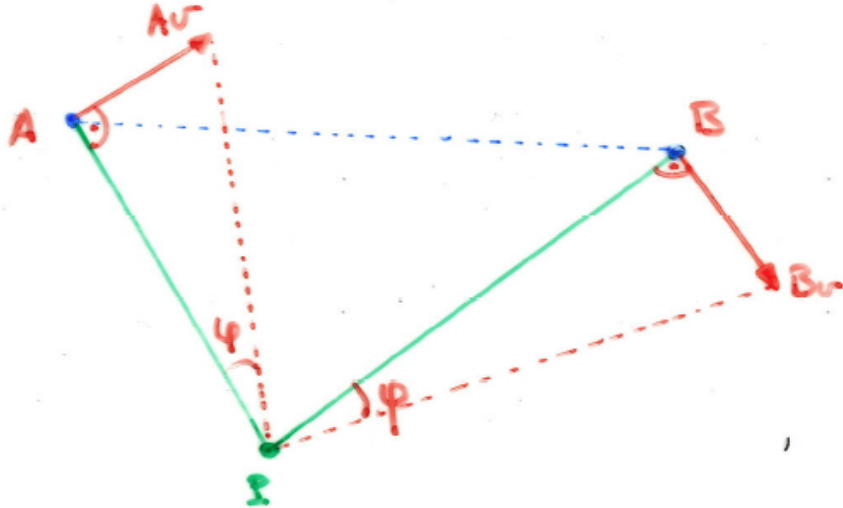
$\mathbf{V}_{P5/1}$

Epígrafes del tema

- 3.1 Movimiento continuo de una figura plana en su plano: centro instantáneo de rotación.
- 3.2 Campo de velocidades en el movimiento plano.
- 3.3 Teorema de Aronhold-Kennedy.
- 3.4 Campo de aceleraciones en el movimiento plano.

Conocido el CIR y la velocidad de un punto, es posible determinar gráficamente la velocidad de otro punto cualquiera del plano móvil, mediante 6 opciones

Opción 1: ángulos



$$\left. \begin{aligned} AA_v &= \omega \cdot AP \\ BB_v &= \omega \cdot BP \end{aligned} \right\} \omega = \frac{AA_v}{AP} = \frac{BB_v}{BP} = \tan \varphi$$

Como AA_v es conocido y como los triángulos PAA_v y PBB_v son semejantes, trazando por P una recta que forme un ángulo φ con BP se obtiene B_v

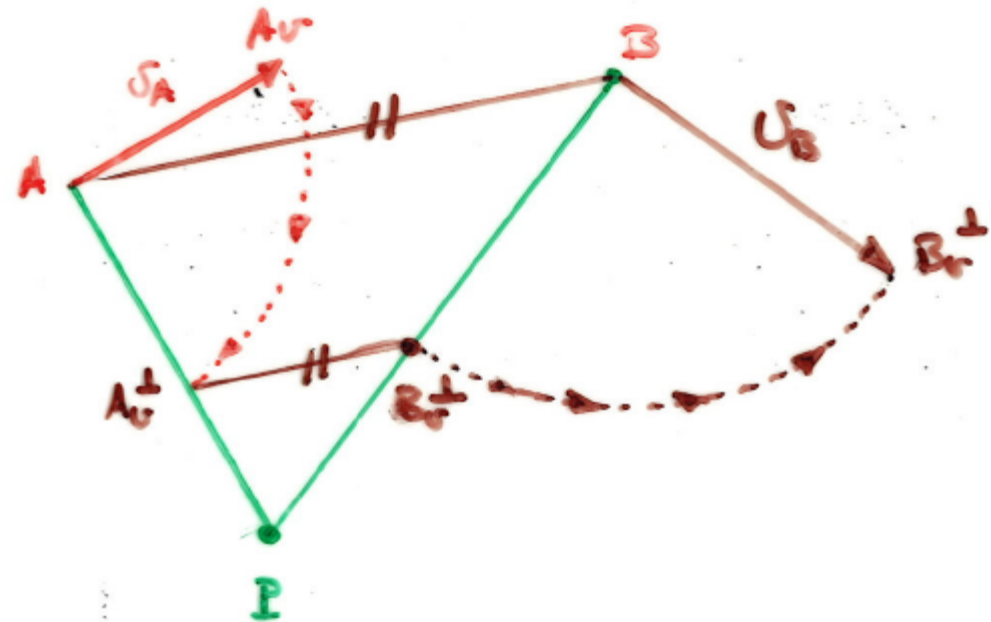
Opción 2: Construcción de velocidades perpendiculares

Datos: A, B, P, $AA_v = \mathbf{v}_A$

Incógnitas: \mathbf{v}_B

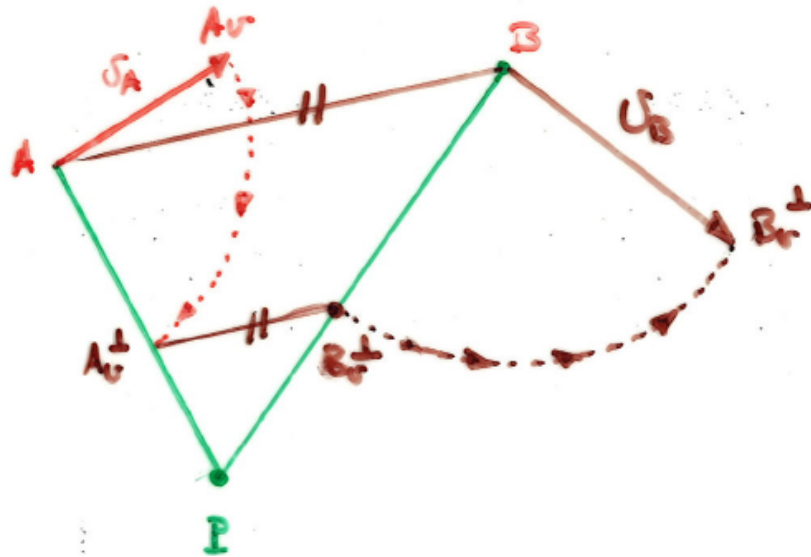
Pasos:

1. Abatir $A_v \rightarrow A_v^\perp$
2. Trazar $\parallel AB$ por $A_v^\perp \rightarrow B_v^\perp$
3. Desabatir $B_v^\perp \rightarrow B_v \rightarrow \mathbf{v}_B$



Conocido el CIR y la velocidad de un punto, es posible determinar gráficamente la velocidad de otro punto cualquiera del plano móvil, mediante 6 opciones

Opción 2: Construcción de velocidades perpendiculares. Demostración



Dirección de v_B es \perp a BP (es correcta)

Para determinar la magnitud, se aplica el Teorema de Tales:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AA_v^\perp}{BB_v^\perp} = \frac{PA}{PB} \Rightarrow \frac{AA_v^\perp}{PA} = \frac{BB_v^\perp}{PB} = \omega \Rightarrow BB_v^\perp = \omega PB = v_B$$

Opción 3: Por semejanza de triángulos

$$\triangle PAB \sim \triangle PA_v^\perp B_v^\perp \Rightarrow \frac{A_v^\perp B_v^\perp}{AB} = \frac{PA_v^\perp}{PA} = \frac{PA - AA_v^\perp}{PA} = 1 - \omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_v^\perp B_v^\perp}{AB} = \frac{A_v^\perp C_v^\perp}{AC} = \frac{C_v^\perp B_v^\perp}{CB} = 1 - \omega$$

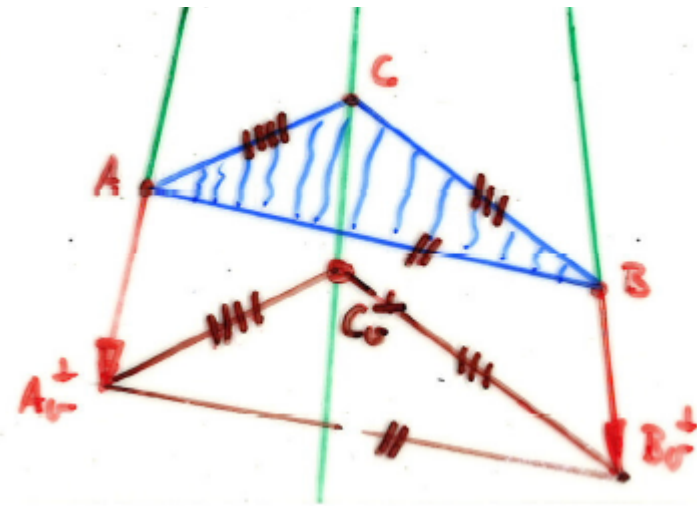
Teorema de Mehmcke: La figura formada por los extremos de las velocidades ortogonales de un elemento rígido es proporcional a la figura original y las dimensiones lineales tienen una relación de semejanza $(1 - \omega)$, siendo ω la velocidad angular del elemento. Es decir:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_v^\perp B_v^\perp C_v^\perp$$

Conocido el CIR y la velocidad de un punto, es posible determinar gráficamente la velocidad de otro punto cualquiera del plano móvil, mediante 6 opciones

Opción 3: Aplicación del Teorema de Mehmcke: Cuando el polo se encuentra fuera de la hoja del dibujo, pero se conocen las velocidades de dos puntos (o la velocidad de uno y la dirección de otro) y se quiere determinar la velocidad de un tercero, se procede de la siguiente manera:

1. Por $A_v^\perp \parallel AB \rightarrow B_v^\perp$
2. $\left. \begin{array}{l} A_v^\perp \parallel AC \\ B_v^\perp \parallel CB \end{array} \right\} \rightarrow C_v^\perp$



Conocido el CIR y la velocidad de un punto, es posible determinar gráficamente la velocidad de otro punto cualquiera del plano móvil, mediante 6 opciones

Opción 4: Teorema de Burmester: La figura formada por los extremos de las velocidades de un sólido rígido es semejante a la figura original con razón $\sqrt{1 + \omega^2}$, encontrándose girada un ángulo φ respecto de la figura original

Datos: A, B, C, pertenecientes al plano móvil, sus velocidades $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ y \mathbf{v}_C y el polo P.

$\frac{AA_v^\perp}{PA} = \frac{BB_v^\perp}{PB} = \frac{CC_v^\perp}{PC}$ según el Teorema de Mehmcke, como $AA_v^\perp = AA_v = \dots$ entonces

$$\frac{AA_v^\perp}{PA} = \frac{BB_v^\perp}{PB} = \frac{CC_v^\perp}{PC} \Rightarrow \triangle APA_v \sim \triangle BPB_v \sim \triangle CPC_v$$

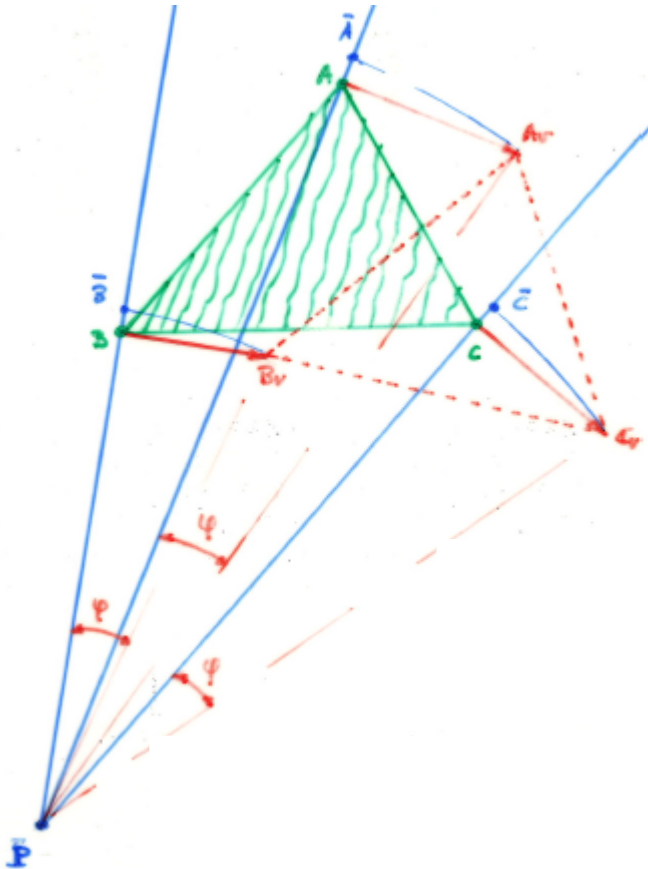
Por lo tanto:

$$\frac{PA_v}{PA} = \frac{\sqrt{PA^2 + AA_v^2}}{PA} = \sqrt{1 + \omega^2} \Rightarrow \frac{PA_v}{PA} = \frac{PB_v}{PB} = \frac{PC_v}{PC} = \sqrt{1 + \omega^2}$$

Entonces, para pasar de A a A_v :

1. Incrementar PA en $\sqrt{1 + \omega^2}$ para obtener \bar{A}
2. Girar φ

$\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} \sim \triangle ABC \Rightarrow \bar{A}\bar{B}\bar{C} = A_v B_v C_v$ (girado φ) $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_v B_v C_v$ con razón $\sqrt{1 + \omega^2}$ y girado φ . (Transformación o semejanza en espiral).



Conocido el CIR y la velocidad de un punto, es posible determinar gráficamente la velocidad de otro punto cualquiera del plano móvil, mediante 6 opciones

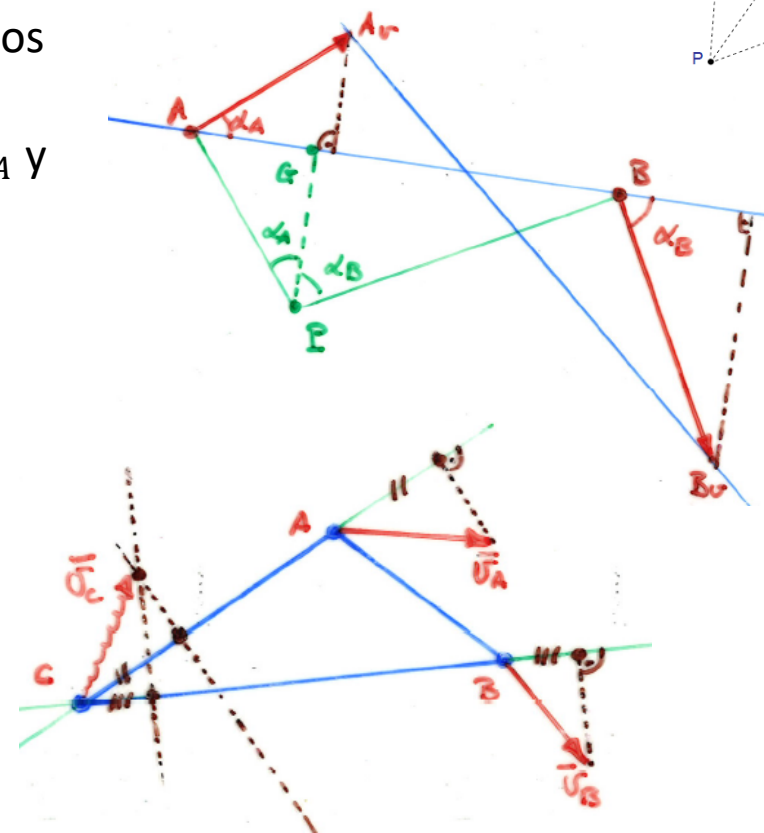
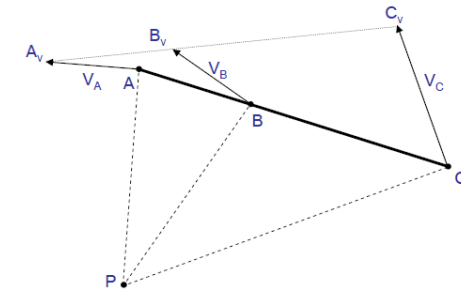
Opción 4: Teorema de Burmester: Casos particulares:

- Tres puntos alineados tendrán los extremos de sus velocidades alineados (figura semejante).
- En una línea recta cualquiera del plano móvil, todos sus puntos tienen idéntica componente de velocidad según esa recta. Conocido el polo P y \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B

$$AA_v \cos(\alpha_A) = \omega PA \cos(\alpha_A) = \omega PG$$

$$BB_v \cos(\alpha_B) = \omega PB \cos(\alpha_B) = \omega PG$$

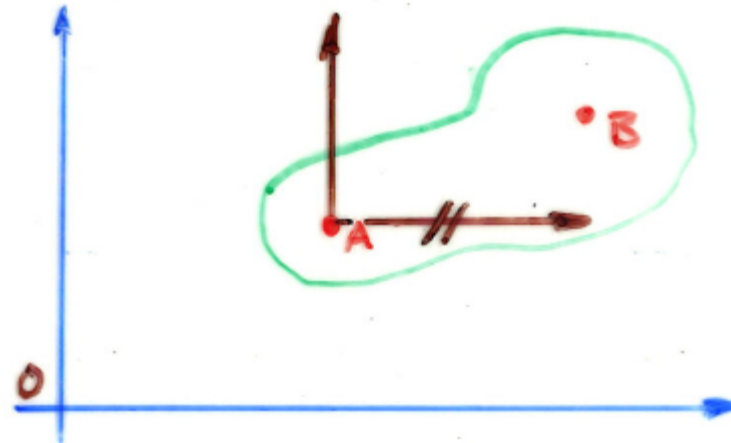
- Tomando como base la propiedad anterior, es posible determinar la velocidad de un punto conocida la de otros dos sin tener que recurrir al polo.



Conocido el CIR y la velocidad de un punto, es posible determinar gráficamente la velocidad de otro punto cualquiera del plano móvil, mediante 6 opciones

Opción 5: Formulación analítica del campo de velocidades

$$\mathbf{OB} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB} \Rightarrow \frac{d\mathbf{OB}}{dt} = \mathbf{v}_{B/0} = \mathbf{v}_{A/0} + \frac{d\mathbf{AB}}{dt} \Rightarrow \mathbf{v}_{B/0} = \mathbf{v}_{A/0} + \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_{B/0} = \mathbf{v}_{A/0} + \boldsymbol{\omega}\mathbf{AB}$$



Conocido el CIR y la velocidad de un punto, es posible determinar gráficamente la velocidad de otro punto cualquiera del plano móvil, mediante 6 opciones

Opción 6: Imagen de velocidades

Datos: $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C$

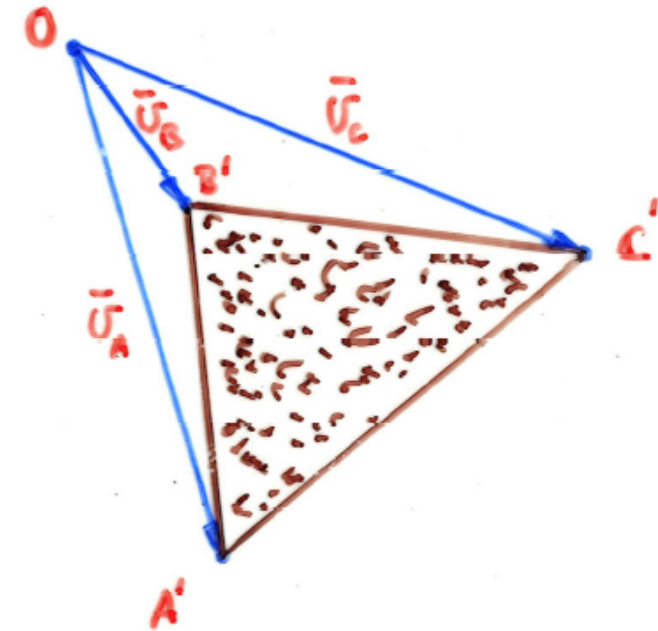
1. Se llevan los vectores velocidad a un origen común.
2. Se unen los extremos de los vectores, obteniendo el triángulo $A'B'C'$, denominado **imagen de velocidades**, que es semejante al ABC .

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \overbrace{\mathbf{v}_{AB}}^{\perp AB} \\ \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_B + \overbrace{\mathbf{v}_{CB}}^{\perp CB} \\ \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_C + \overbrace{\mathbf{v}_{AC}}^{\perp AC} \end{aligned} \right\} \mathbf{v}_{AB}, \mathbf{v}_{CB}, \mathbf{v}_{AC} \text{ son los lados del triángulo } A'B'C'.$$

Por lo tanto,

$$\left. \begin{aligned} A'B' &\perp AB \\ C'B' &\perp CB \\ A'C' &\perp AC \end{aligned} \right\} \text{ y además las longitudes son proporcionales } (|\mathbf{v}_{BA}| = |A'B'| = \omega |AB|), \text{ siendo } \omega \text{ la razón de proporcionalidad.}$$

Esta propiedad es muy útil a la hora de determinar la velocidad de un punto conocida la de otros dos.



Epígrafes del tema

- 3.1 Movimiento continuo de una figura plana en su plano: centro instantáneo de rotación.
- 3.2 Campo de velocidades en el movimiento plano.
- 3.3 Teorema de Aronhold-Kennedy.
- 3.4 Campo de aceleraciones en el movimiento plano.

Hasta ahora se ha considerado que el polo era el punto perteneciente al plano móvil cuya velocidad era nula. Por lo tanto, es el único punto que posee la misma velocidad como perteneciente a ambos planos (con valor nulo).

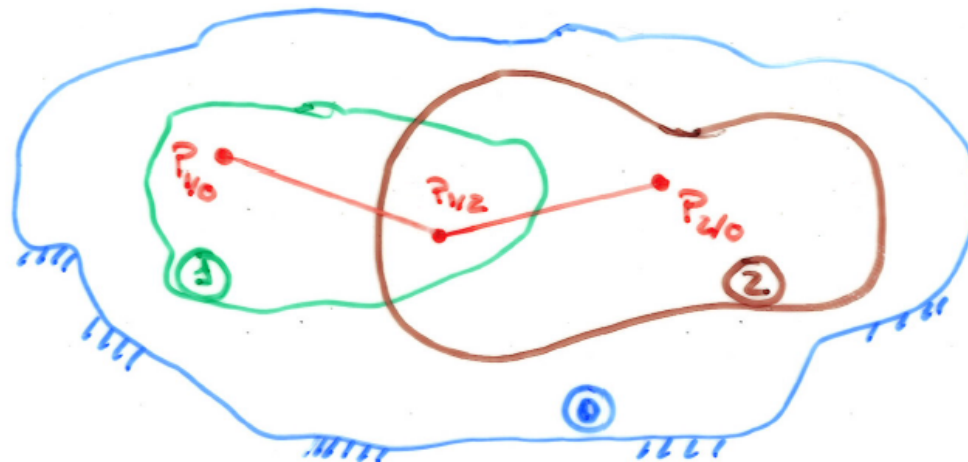
En el **caso general**, ambos planos son móviles, por lo que:

1. El CIR es el punto que tiene la misma velocidad como perteneciente a cualquiera de los dos planos.
2. El CIR es el punto en el que la velocidad relativa entre ambos planos es nula.

En este caso, continúa siendo válido el concepto de **base y ruleta**, aunque ambas sean móviles y se denominan **polodias** o **curvas polares**, pudiendo estudiarse el **movimiento** como la **rodadura** entre ellas.

Se suponen ahora tres planos.

Enunciado del Teorema de Aronhold-Kennedy: El polo P_{12} está alineado con los otros dos polos P_{10} y P_{20} .



Demostración del Teorema de Aronhold-Kennedy: Si se parte de la suposición de que los polos no están alineados, su velocidad sería:

$$\left. \begin{array}{l} \perp P_{10}P_{12} \\ \perp P_{20}P_{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Imposible, pues } P_{12} \text{ tiene que tener la misma velocidad como perteneciente a ambos planos.}$$

Por lo tanto, P_{12} debe estar alineado con P_{10} y P_{20} .

Además, para que el módulo de la velocidad sea correcto se debe verificar que:

$$\omega_1 \overline{P_{10}P_{12}} = \omega_2 \overline{P_{20}P_{12}} \Rightarrow \frac{\overline{P_{10}P_{12}}}{\overline{P_{20}P_{12}}} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Y, por lo tanto, en un mecanismo existen tantos polos como combinaciones de elementos tomados de dos en dos:

$$\text{número de polos} = \frac{n(n-1)}{2}$$

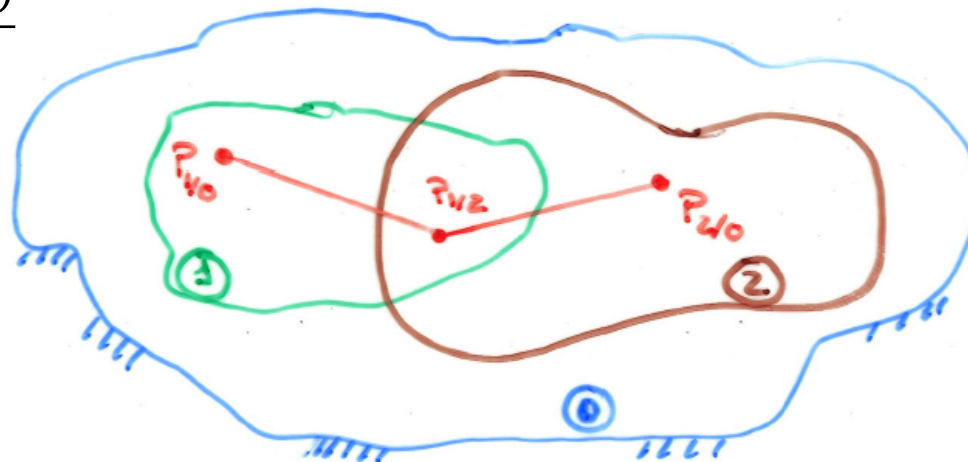
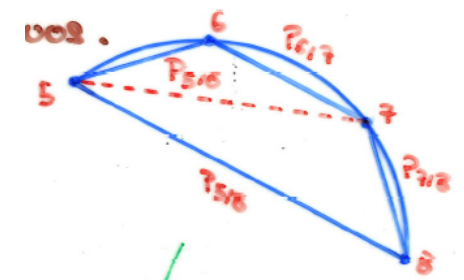
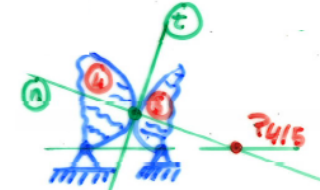
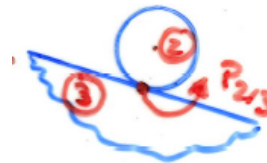
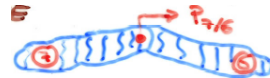
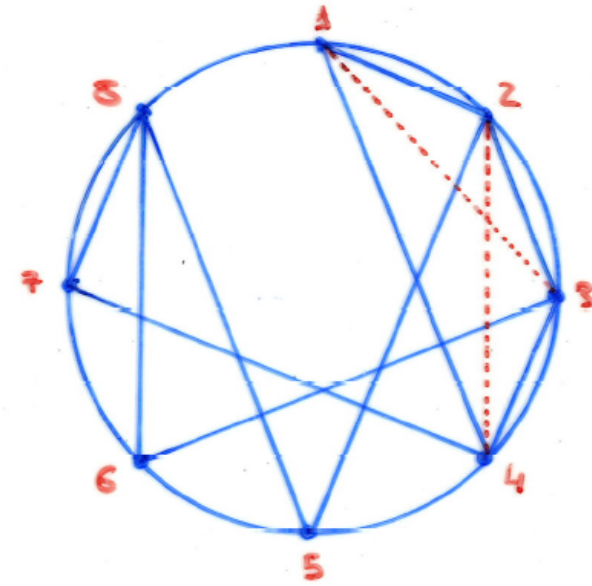
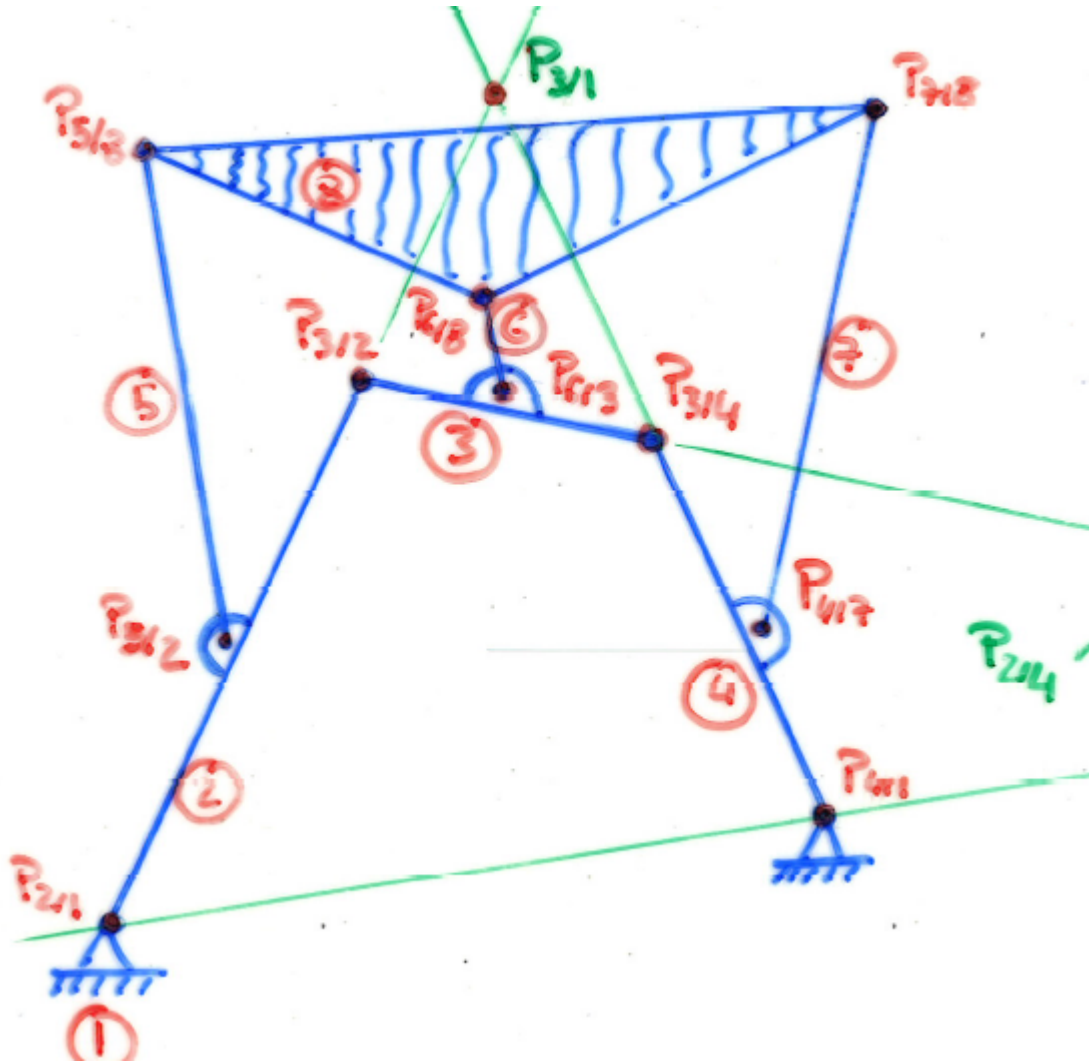


Diagrama del Círculo: Se deriva del Teorema de Aronhold-Kennedy y permite obtener todos los polos de velocidad de un mecanismo, sin resolverlo en velocidades.

Procedimiento:

1. Dibujar una circunferencia y dividirla en tantas partes iguales como elementos posee el mecanismo.
2. Se determinan los polos primarios (aquellos que se identifican inmediatamente):
 - a. Todos los pares R .
 - b. El punto del ∞ para los mecanismos que se trasladan.
 - c. El punto de contacto de un par de rodadura.
 - d. En un par L , la intersección de la línea de centros con la normal a los perfiles en el punto de contacto.
3. Se numeran del 1 a N (Número de elementos) las divisiones de la circunferencia: Todas las posibles cuerdas entre estos puntos representan los polos del mecanismo.
4. Se dibujan con línea continua las cuerdas que se corresponden con los polos primarios, y en línea discontinua los polos desconocidos.
5. Para buscar los polos desconocidos se localizan aquellas líneas discontinuas que pertenecen a dos triángulos con el resto de los lados continuos. El polo se hallará como intersección de las rectas que unen los polos correspondientes a las líneas continuas.





Polos primarios:

$P_{21}; P_{52}; P_{32}; P_{63}; P_{34}; P_{47}; P_{41}; P_{78}; P_{68}; P_{58}$

Polos secundarios:

$$\frac{P_{12}P_{32}}{P_{12}P_{41}} \cap \frac{P_{41}P_{34}}{P_{32}P_{34}} \rightarrow P_{31}$$

$$\frac{P_{12}P_{32}}{P_{12}P_{41}} \cap \frac{P_{32}P_{34}}{P_{32}P_{34}} \rightarrow P_{24}$$

Epígrafes del tema

- 3.1 Movimiento continuo de una figura plana en su plano: centro instantáneo de rotación.
- 3.2 Campo de velocidades en el movimiento plano.
- 3.3 Teorema de Aronhold-Kennedy.
- 3.4 Campo de aceleraciones en el movimiento plano.

Para el cálculo del campo de aceleraciones, como ya se hizo en el de velocidades, se toma un sistema de referencia que siempre permanezca paralelo al fijo, con lo que se cumple que $\omega_{2/1} = 0$ y $\alpha_{2/1} = 0$.

$$\mathbf{a}_{B3/1} = \mathbf{a}_{B3/2} + \mathbf{a}_{B2/1} + 2\boldsymbol{\omega}_{2/1} \times \mathbf{v}_{B3/2} \rightarrow \{\boldsymbol{\omega}_{2/1} = 0\} \rightarrow \mathbf{a}_{B3/1} = \mathbf{a}_{B3/2} + \mathbf{a}_{B2/1}$$

De la ecuación anterior, se pueden desarrollar los siguientes términos:

$$\mathbf{a}_{B3/2} = \mathbf{a}_{A3/2} + \boldsymbol{\alpha}_{3/2} \times \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{3/2} \times \boldsymbol{\omega}_{3/2} \times \mathbf{AB}$$

$$\mathbf{a}_{B2/1} = \mathbf{a}_{A2/1} + \boldsymbol{\alpha}_{2/1} \times \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{2/1} \times \boldsymbol{\omega}_{2/1} \times \mathbf{AB}$$

Como, además:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\omega}_{3/1} = \boldsymbol{\omega}_{3/2} + \boldsymbol{\omega}_{2/1} = \boldsymbol{\omega}_{3/2} \\ \boldsymbol{\alpha}_{3/1} = \boldsymbol{\alpha}_{3/2} + \boldsymbol{\alpha}_{2/1} + \boldsymbol{\omega}_{2/1} \times \boldsymbol{\omega}_{3/2} = \boldsymbol{\alpha}_{3/2} \\ \mathbf{a}_{A3/2} = 0, \in 2 \text{ y } 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{a}_{B3/2} = \boldsymbol{\alpha}_{3/1} \times \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{3/1} \times \boldsymbol{\omega}_{3/1} \times \mathbf{AB} \\ \mathbf{a}_{B2/1} = \mathbf{a}_{A2/1} \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{a}_{B3/1} = \mathbf{a}_{B3/2} + \mathbf{a}_{B2/1} = \mathbf{a}_{A2/1} + \boldsymbol{\alpha}_{3/1} \times \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{3/1} \times \boldsymbol{\omega}_{3/1} \times \mathbf{AB} = \mathbf{a}_{A2/1} + \mathbf{a}_{BA}^t + \mathbf{a}_{BA}^n$$

Siendo las componentes \mathbf{a}_{BA}^t y \mathbf{a}_{BA}^n , las que componen el movimiento de rotación del punto B respecto de A.

Imagen de aceleraciones

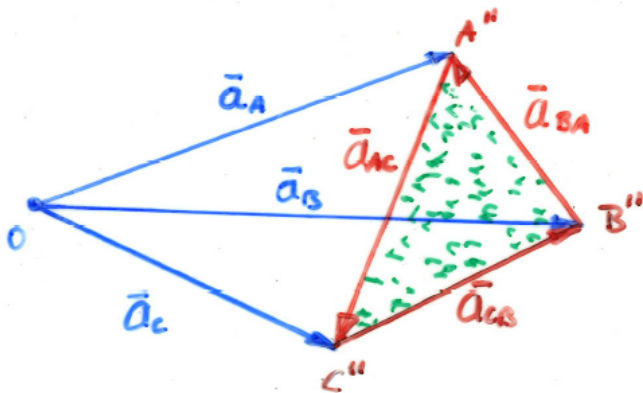
En el movimiento circular, el ángulo que forma la aceleración de un punto con su radio vector es constante e igual a:

$$\tan \gamma = \frac{a^t}{a^n} = \frac{\alpha AB}{\omega^2 AB} = \frac{\alpha}{\omega^2} = cte$$

Por lo tanto, en general, se puede escribir para tres puntos:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} \\ \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB} \\ \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{AC} \end{aligned}$$

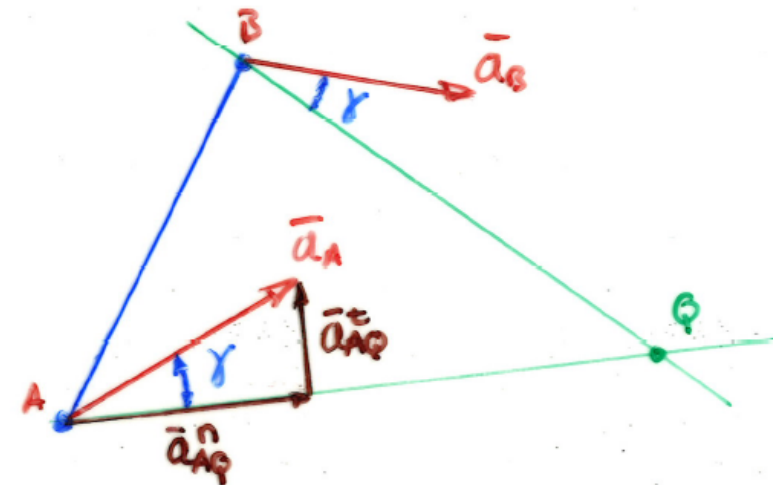
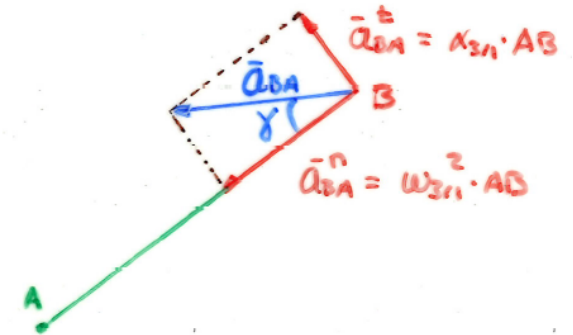
De forma que \mathbf{a}_{BA} , \mathbf{a}_{CB} y \mathbf{a}_{AC} son las componentes relativas (rotación pura) y forman un ángulo constante con los segmentos **AB**, **CB** y **AC**. Existe también una **imagen de aceleraciones** similar a la de velocidades. Llevando los tres vectores de aceleración a un origen común:



Los triángulos $\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC$ son semejantes porque los lados homólogos forman un ángulo constante.

Esta propiedad sirve para calcular la posición del polo de aceleraciones:

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{QA} = 0$$



Teorema de Burmester para aceleraciones

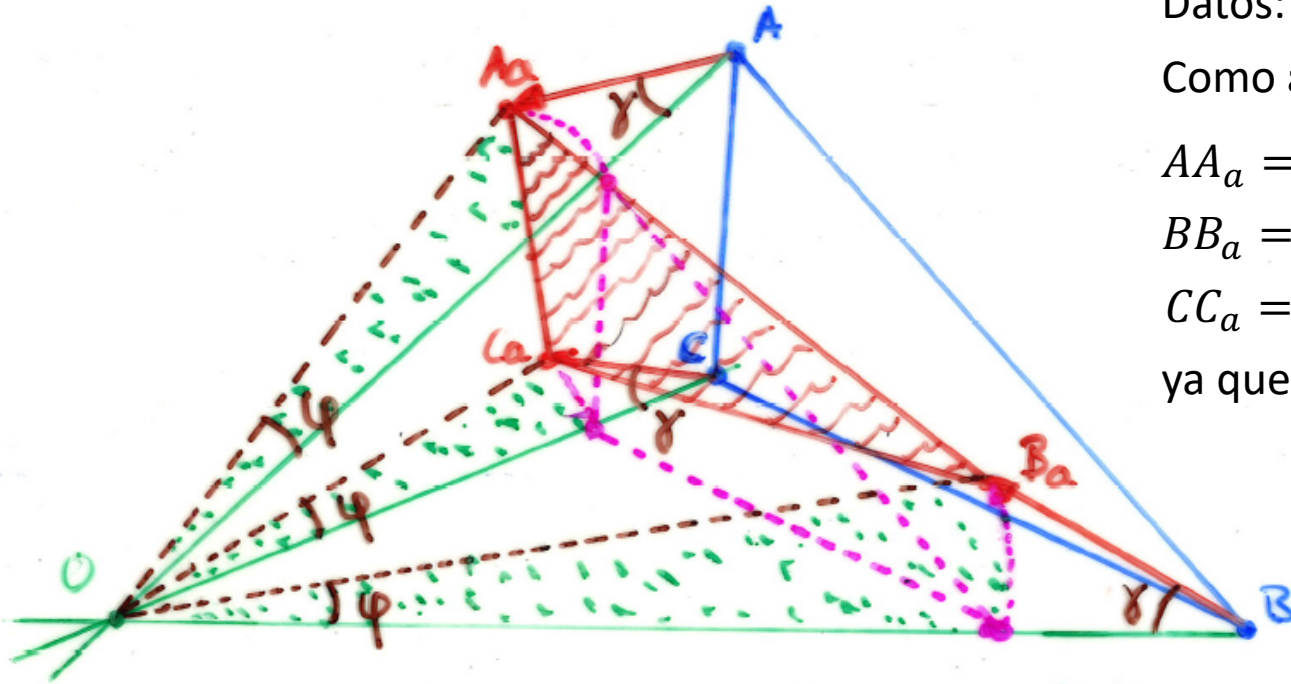
Si se unen los extremos de los vectores aceleración de un determinado número de puntos de una figura plana, se obtiene otra figura semejante a la formada por los puntos seleccionados

Datos: $O, \triangle ABC, \mathbf{a}_A, \mathbf{a}_B$ y \mathbf{a}_C

Como $\mathbf{a}_A \Rightarrow AA_a^2 = (OA\omega^2)^2 + (OA\alpha)^2$

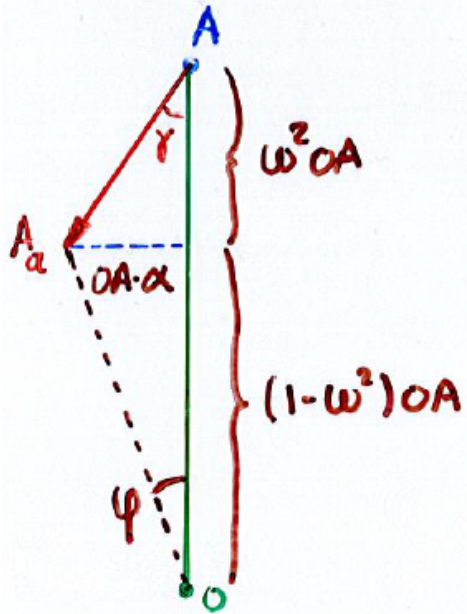
$$\left. \begin{aligned} AA_a &= OA\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \\ BB_a &= OB\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \\ CC_a &= OC\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle OAA_a \sim \triangle OBB_a \sim \triangle OCC_a,$$

ya que tienen dos lados proporcionales y el ángulo γ .



NOTA: Las componentes normal y tangencial de la aceleración respecto al polo de aceleraciones son distintas de las componentes respecto al centro de curvatura de la trayectoria. Pueden coincidir en algún caso, como en el de la manivela

Teorema de Burmester para aceleraciones



También el ángulo φ es el mismo.

$$\begin{cases} OA_a \sin \varphi = AA_a \sin \gamma \\ OA_a \cos \varphi + AA_a \cos \gamma = OA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA_a \sin \varphi = OA \sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \sin \gamma = OA \alpha \\ OA_a \cos \varphi = OA (1 - \sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \cos \gamma) = OA(1 - \omega^2) \end{cases}$$

$$\frac{OA_a \sin \varphi}{OA_a \cos \varphi} = \tan \varphi = \frac{OA \alpha}{OA(1 - \omega^2)} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{\alpha}{(1 - \omega^2)}$$

Por tanto:

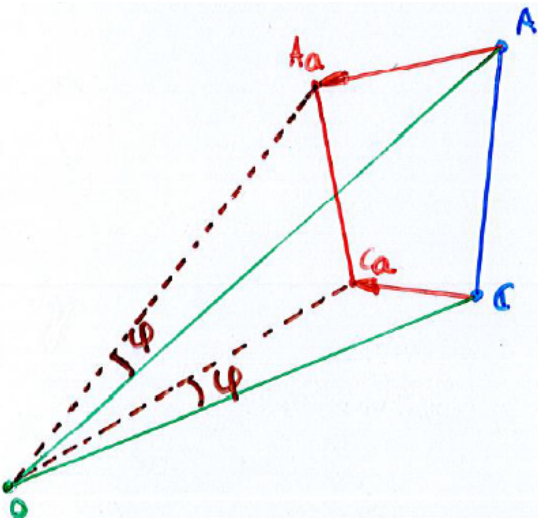
$$\frac{OA_a}{OA} = \frac{OB_a}{OB} = \frac{OC_a}{OC} = cte$$

Y los triángulos semejantes $\triangle OA_a C_a \sim \triangle OAC$.

$$\underbrace{\widehat{A_a O C_a}}_{\varphi} = \underbrace{\widehat{A_a O A}}_{\varphi} + \underbrace{\widehat{A O C}}_{\varphi} - \underbrace{\widehat{C_a O C}}_{\varphi} \Rightarrow \widehat{A_a O C_a} = \widehat{A O C}$$

Por lo tanto, $\triangle OA_a C_a$ y $\triangle OAC$ poseen dos lados proporcionales $\frac{OA_a}{OA} = \frac{OC_a}{OC}$ y el mismo ángulo $\widehat{A O C}$ entre ellos, por lo que son semejantes.

Del mismo modo se puede concluir que $\triangle OA_a B_a \sim \triangle OAB$ y $\triangle OB_a C_a \sim \triangle OBC$, con lo que se verifica que $\frac{AB}{A_a B_a} = \frac{AC}{A_a C_a} = \frac{BC}{B_a C_a}$, con lo que se demuestra que $\triangle A_a B_a C_a \sim \triangle ABC$



Es posible fijar:

- Una escala geométrica para el dibujo (E_d).
- Una escala para representar las velocidades (E_v).

Una vez fijadas estas, la escala de aceleraciones queda definida mediante la relación siguiente:

$$E_a = \frac{E_v^2}{E_d}$$

Esta escala deberá ser utilizada cuando en una construcción gráfica participen velocidades y aceleraciones conjuntamente con dimensiones. Por ejemplo, cuando se quiere determinar $a_A^n = \frac{v_A^2}{\rho_A}$