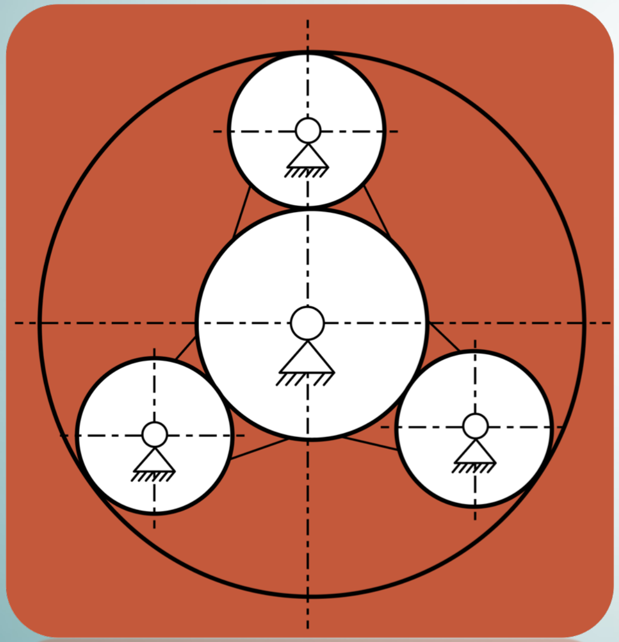
Máquinas y Mecanismos

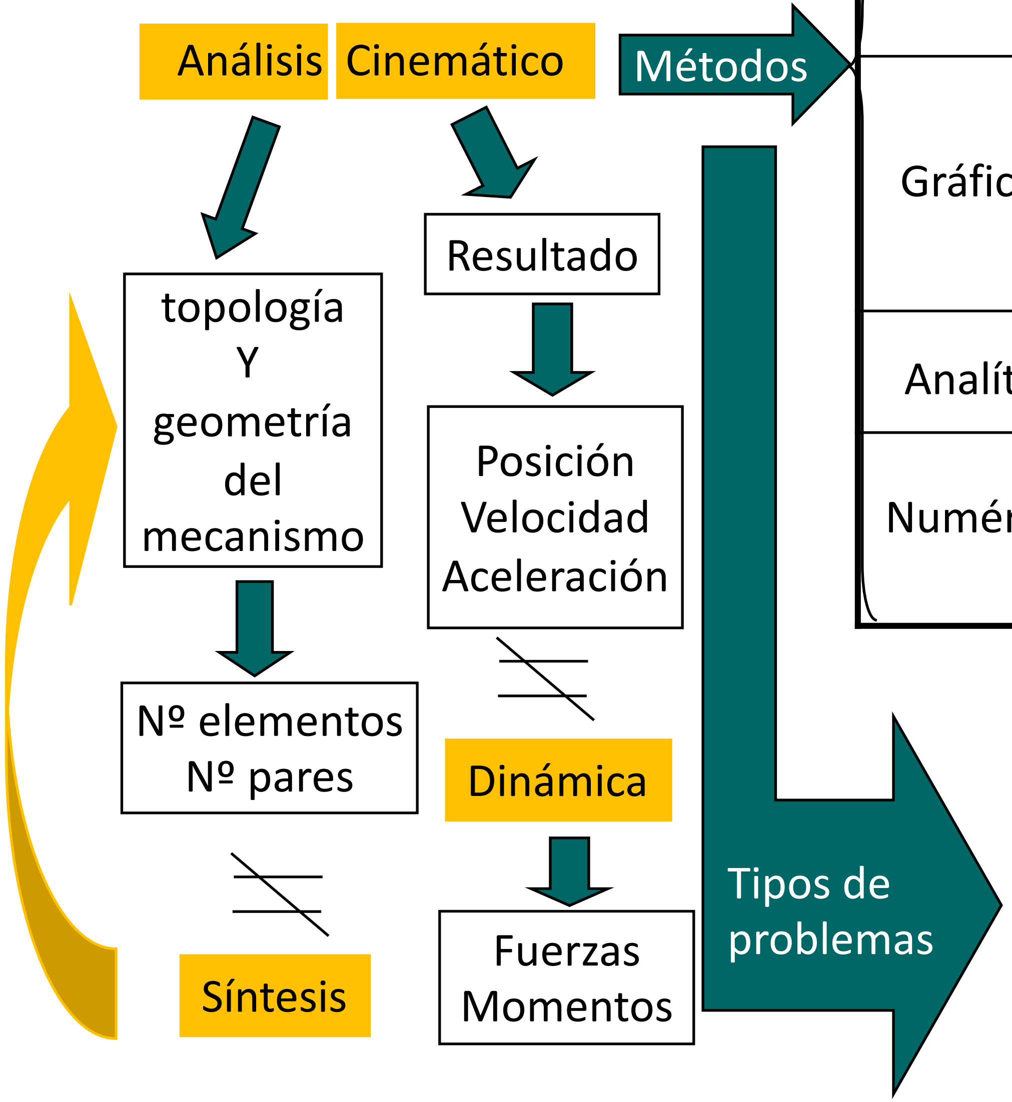
6. Métodos Analíticos de Análisis Cinemático



Alfonso Fernández del Rincón

Pablo García Fernández

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA



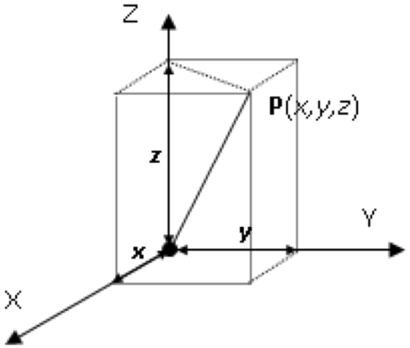
	Ventajas	Inconvenientes
Gráficos (T5)	• Sencillez • Docencia	• Falta de precisión • No sistemáticos • No mecs. Complejos • Una posición
Analíticos (T6)	Implement. ordenador	Falta de generalidad
Numéricos (T7)	• Software • Rapidez • Precisión	• Hardware

- Posición: inicial, sucesivas, equilibrio
- Velocidad y aceleración

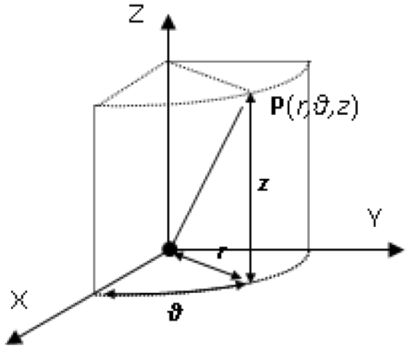
Epígrafes del tema

6.1 Posición de un punto

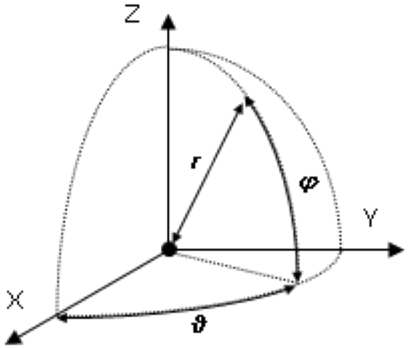
Para expresar la posición de un punto es necesario disponer de un sistema de coordenadas el cual vendrá definido por un origen, unos ejes y una unidad de medida (cartesianas, cilíndricas o esféricas).



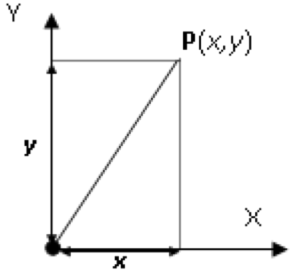
Cartesianas



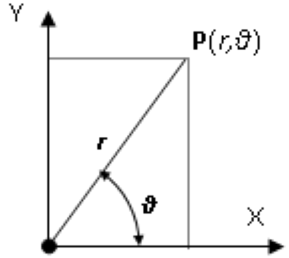
Cilíndricas



Esféricas



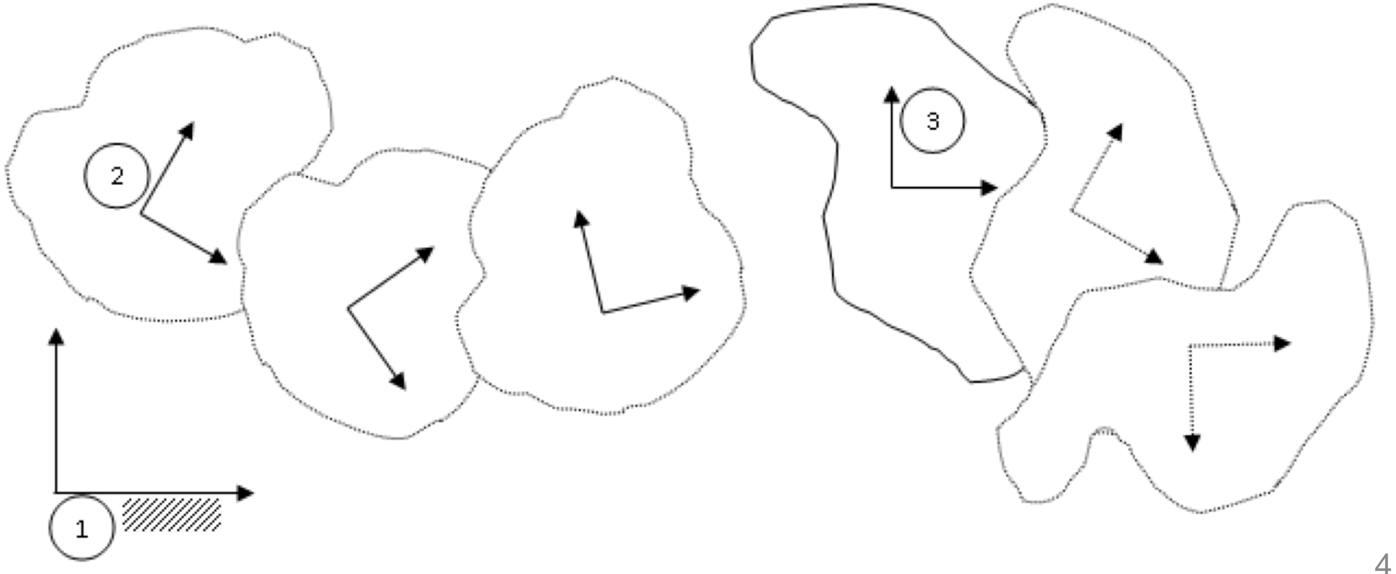
Cartesianas (plano)



Polares (plano)

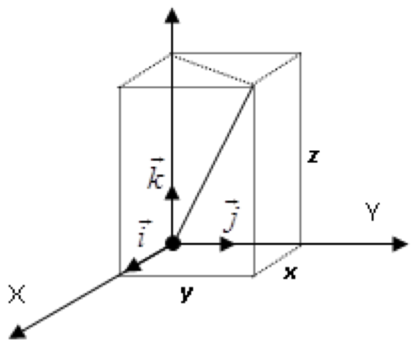
Cada partícula en un sólido rígido puede localizarse mediante su vector de posición expresado en un sistema de coordenadas asociado al propio sólido y que se mueve con el. Cada uno de los sistemas de coordenadas así definidos es un sistema de referencia.

La posición de un punto perteneciente a un sólido expresada en la referencia asociada a dicho sólido es constante.



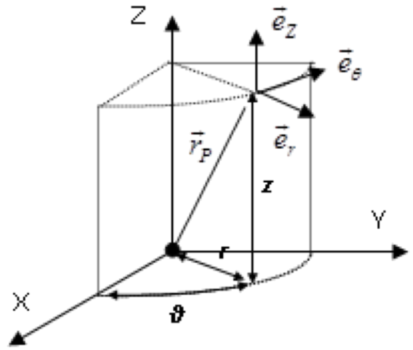
POSICIÓN DE UN PUNTO MEDIANTE ÁLGEBRA VECTORIAL

Cartesianas



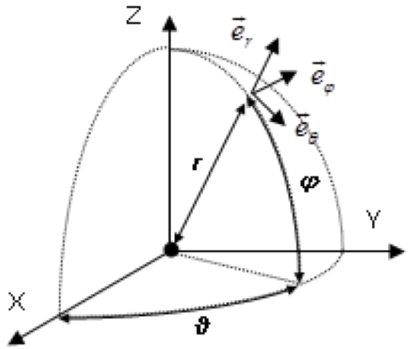
$$\vec{r}_P = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$$

Cilíndricas



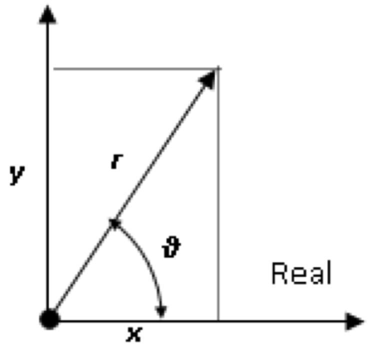
$$\vec{r}_P = r \cdot \vec{e}_r + z \cdot \vec{e}_Z$$

Esféricas



$$\vec{r}_P = r \cdot \vec{e}_r$$

POSICIÓN DE UN PUNTO MEDIANTE ÁLGEBRA COMPLEJA (MOV. PLANO)



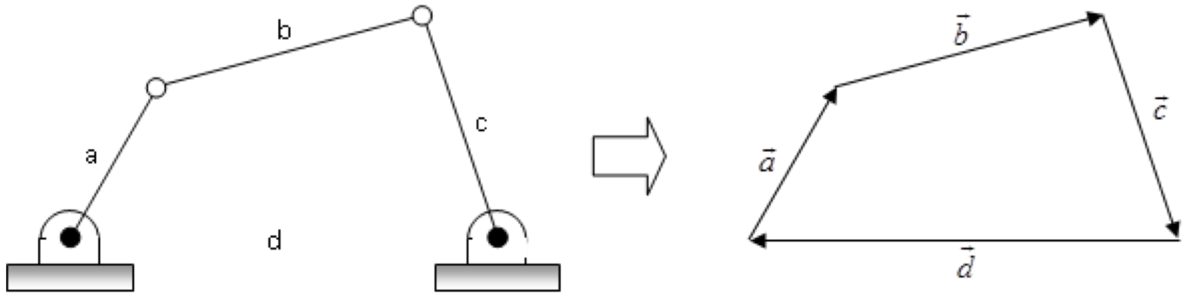
$$\vec{r}_P = x + j \cdot y = r \cdot \cos\theta + j \cdot (r \cdot sen\theta) \rightarrow \{e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j \cdot sen\theta\} \rightarrow \boxed{\vec{r}_P = r \cdot e^{\pm j\theta}}$$

6.1 Ecuación de cierre del circuito

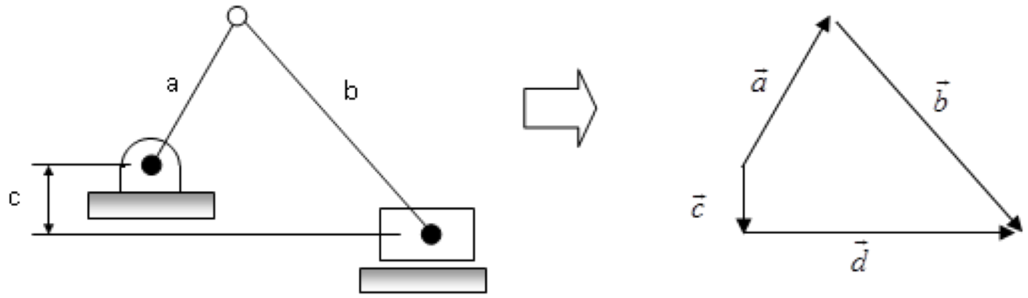
Para obtener la **ecuación de cierre** se deben sustituir las barras por vectores.

La posición absoluta de cada punto se puede determinar por su vector de posición en relación con un segundo punto con el que esta relacionado por medio de las restricciones propias de su enlace.

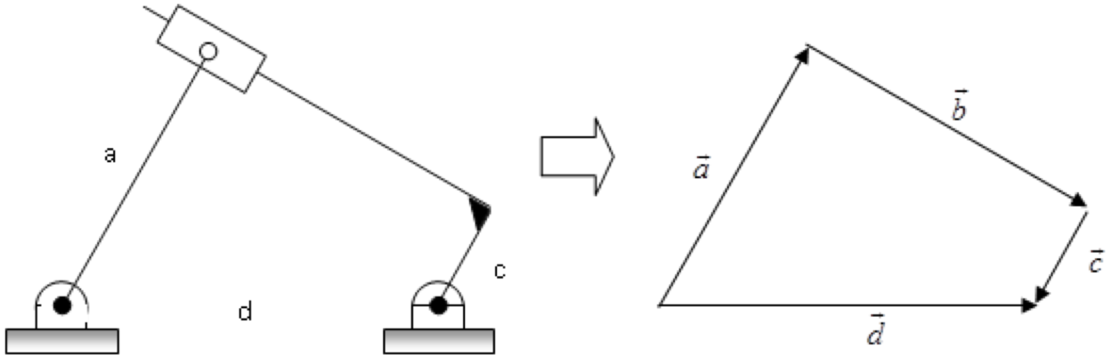
Se obtienen polígonos cerrados. (Existen varias alternativas)



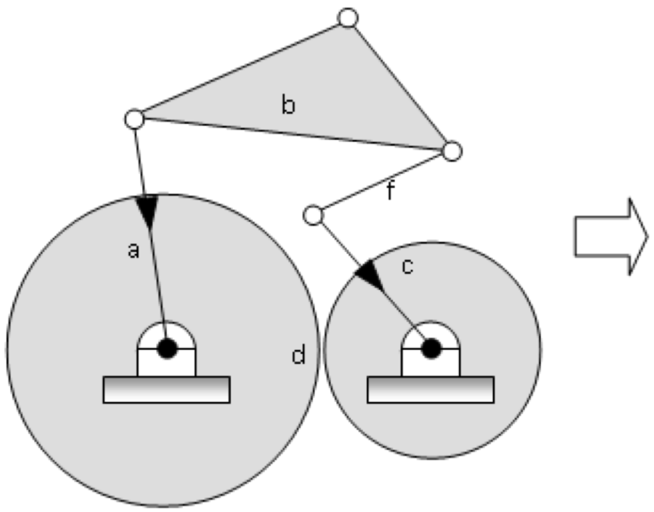
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$$

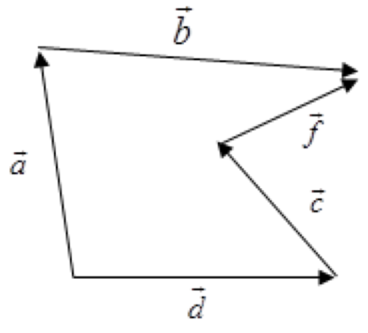


$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$$

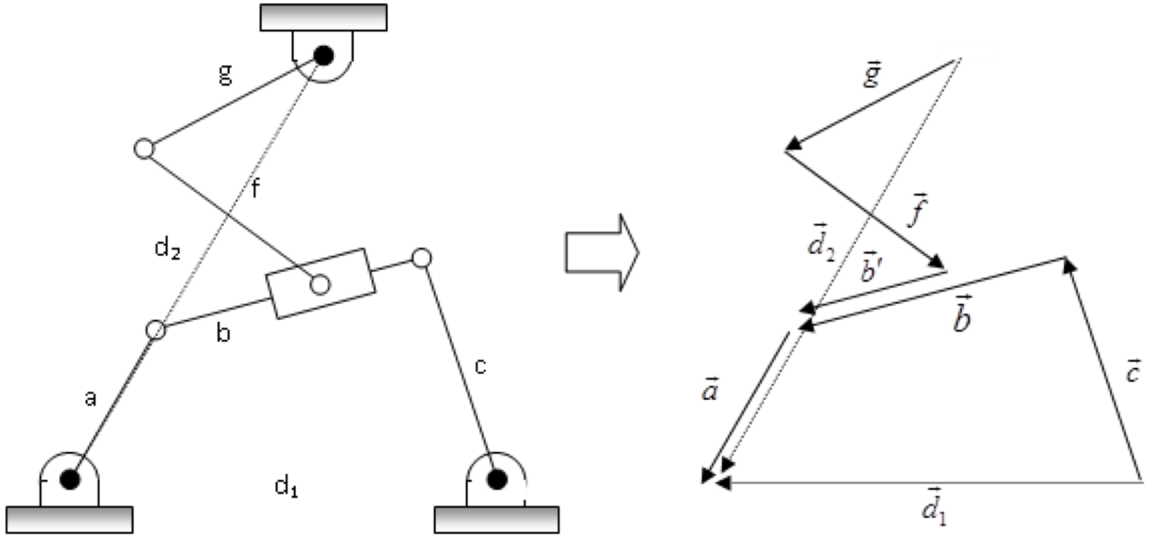


$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$





$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{d} + \vec{c} + \vec{f}$$



$$\left.\begin{aligned} \vec{g} + \vec{f} + \vec{b}' + \vec{a} &= \vec{d}_2 \\ \vec{c} + \vec{b} + \vec{a} &= \vec{d}_1 \end{aligned}\right\}$$

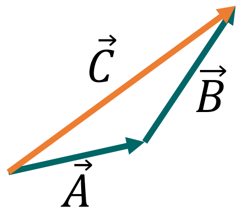
6.1 Ecuación de cierre del circuito

Soluciones a la ecuación de cierre: Si puede resolverse la ecuación de cierre puede reducirse a $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$. Como máximo, se tendrán dos incógnitas y habrá cuatro casos posibles, independientemente del método de resolución:

Caso 1

Magnitud y dirección del mismo vector $\overbrace{\underbrace{\vec{C}}_{?}}^{?} = \overbrace{\underbrace{\vec{A}}_{c}}^{c} + \overbrace{\underbrace{\vec{B}}_{c}}^{c}$

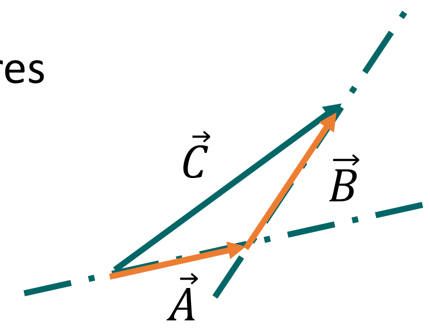
(1 solución)



Caso 2

Magnitud de dos vectores diferentes $\overbrace{\underbrace{\vec{C}}_{c}}^{c} = \overbrace{\underbrace{\vec{A}}_{c}}^{?} + \overbrace{\underbrace{\vec{B}}_{c}}^{?}$

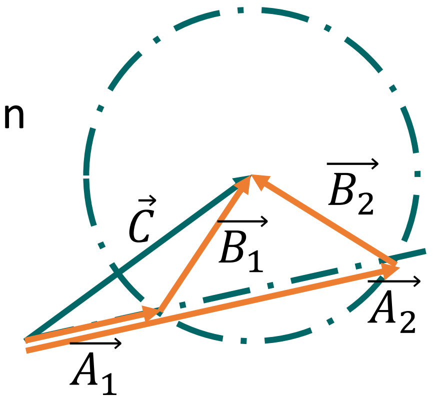
(1 solución)



Caso 3

Magnitud de un vector y dirección de otro $\overbrace{\underbrace{\vec{C}}_{c}}^{c} = \overbrace{\underbrace{\vec{A}}_{c}}^{?} + \overbrace{\underbrace{\vec{B}}_{?}}^{c}$

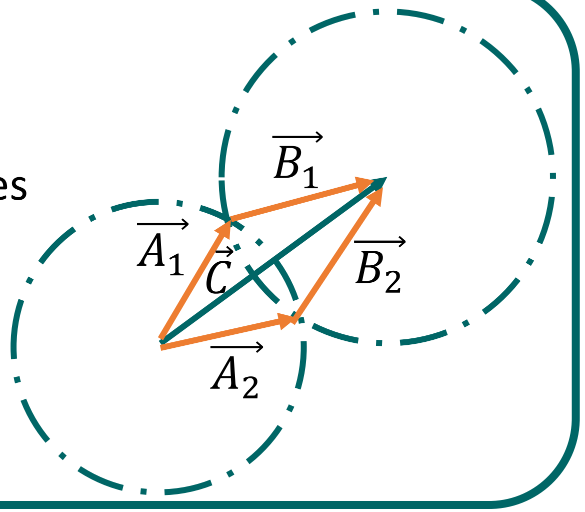
(2 soluciones)



Caso 4

Direcciones de dos vectores diferentes $\overbrace{\underbrace{\vec{C}}_{c}}^{c} = \overbrace{\underbrace{\vec{A}}_{?}}^{c} + \overbrace{\underbrace{\vec{B}}_{?}}^{c}$

(2 soluciones)



6.1 Solución mediante álgebra compleja

$$\underbrace{\overbrace{\vec{C}}^{?}}_{?} = \underbrace{\overbrace{\vec{A}}^{c}}_{c} + \underbrace{\overbrace{\vec{B}}^{c}}_{c}$$

Las incógnitas son C y θ_C

Separar en parte real e imaginaria. Elevar al cuadrado y sumar despejando C.

$$C(\cos\theta_C + j\sin\theta_C) = A(\cos\theta_A + j\sin\theta_A) + B(\cos\theta_B + j\sin\theta_B) \rightarrow \begin{Bmatrix} C\cos\theta_C = A\cos\theta_A + B\cos\theta_B \\ C\sin\theta_C = A\sin\theta_A + B\sin\theta_B \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\theta_B - \theta_A)}}$$

$$\boxed{\theta_C = arctan\frac{A\sin\theta_A + B\sin\theta_B}{A\cos\theta_A + B\cos\theta_B}}$$

$$\underbrace{\overbrace{\vec{C}}^{c}}_{c} = \underbrace{\overbrace{\vec{A}}^{?}}_{c} + \underbrace{\overbrace{\vec{B}}^{?}}_{c}$$

Las incógnitas son A y B

Dividir la ecuación en forma compleja por $e^{j\theta_A}$.
Separar parte real e imaginaria y despejar

$$Ce^{j(\theta_C - \theta_A)} = A + Be^{j(\theta_B - \theta_A)} \rightarrow \begin{Bmatrix} C\cos(\theta_C - \theta_A) = A + B\cos(\theta_B - \theta_A) \\ C\sin(\theta_C - \theta_A) = B\sin(\theta_B - \theta_A) \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{B = C\frac{\sin(\theta_C - \theta_A)}{\sin(\theta_B - \theta_A)}}$$

$$\boxed{A = C\frac{\sin(\theta_C - \theta_B)}{\sin(\theta_B - \theta_A)}}$$

6.1 Solución mediante álgebra compleja

$$\overbrace{\underbrace{\vec{C}}_{c}}^{c} = \overbrace{\underbrace{\vec{A}}_{c}}^{?} + \overbrace{\underbrace{\vec{B}}_{?}}^{c}$$

Las incógnitas son A y θ_B

Dividir la ecuación en forma compleja por $e^{j\theta_A}$.
Separar parte real e imaginaria y despejar.

$$Ce^{j(\theta_C-\theta_A)} = A + Be^{j(\theta_B-\theta_A)} \rightarrow \begin{Bmatrix} C\cos(\theta_C-\theta_A) = A + B\cos(\theta_B-\theta_A) \\ C\sin(\theta_C-\theta_A) = B\sin(\theta_B-\theta_A) \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\theta_B = \theta_A \pm \arcsin\frac{C\sin(\theta_C-\theta_A)}{B}}$$

$$\boxed{A = C\sin(\theta_C-\theta_B) - B\cos(\theta_B-\theta_A)}$$

$$\overbrace{\underbrace{\vec{C}}_{c}}^{c} = \overbrace{\underbrace{\vec{A}}_{?}}^{c} + \overbrace{\underbrace{\vec{B}}_{?}}^{c}$$

Las incógnitas son θ_A y θ_B

Dividir la ecuación en forma compleja por $e^{j\theta_C}$, separar parte real e imaginaria, elevar al cuadrado y sumar.

$$C = Ae^{j(\theta_A-\theta_C)} + Be^{j(\theta_B-\theta_C)} \rightarrow \begin{Bmatrix} A\cos(\theta_A-\theta_C) = C - B\cos(\theta_B-\theta_C) \\ A\sin(\theta_A-\theta_C) = -B\sin(\theta_B-\theta_C) \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\theta_B = \theta_C \pm \arccos\frac{C^2+B^2-A^2}{2CB}}$$

$$\boxed{\theta_A = \theta_C \pm \arccos\frac{C^2+A^2-B^2}{2CA}}$$

6.1 Solución mediante álgebra vectorial

$$\underbrace{\overbrace{\vec{C}}^{?}}_{?} = \underbrace{\overbrace{\vec{A}}^{c}}_{c} + \underbrace{\overbrace{\vec{B}}^{c}}_{c}$$

Las incógnitas son C y θ_C ➡ Solución inmediata.

$$\underbrace{\overbrace{\vec{C}}^{c}}_{c} = \underbrace{\overbrace{\vec{A}}^{?}}_{c} + \underbrace{\overbrace{\vec{B}}^{?}}_{c}$$

Las incógnitas son A y B ➡ Multiplicar escalarmente cada vector con uno nuevo que elimine alguna de las incógnitas.

$$C\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{k}) = A\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{k}) + B\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{k})$$

$$\boxed{A = \frac{C\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{k})}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{k})}} \qquad \boxed{B = \frac{C\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{k})}{\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{k})}}$$

$$\underbrace{\overbrace{\vec{C}}^{c}}_{c} = \underbrace{\overbrace{\vec{A}}^{?}}_{c} + \underbrace{\overbrace{\vec{B}}^{c}}_{?}$$

Las incógnitas son A y $\vec{b}$ ➡ Eliminar A de la ecuación y sustituir $B\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{k}) = |B\vec{b}|\cdot|(\vec{a}\times\vec{k})|\cdot\cos(\widehat{\vec{b}(\vec{a}\times\vec{k})}) = B\cdot\cos(\phi)$

Descomponer el vector $\vec{b}$ en la base $\vec{a}$ y $(\vec{a}\times\vec{k})$

$$C\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{k}) = A\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{k}) + B\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{k}) \Rightarrow \cos\phi = \frac{C\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{k})}{B} \qquad \sin\phi = \pm\sqrt{1-\cos^2\phi} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{C\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{k})}{B}\right)^2}$$

6.1 Solución mediante álgebra vectorial

$$\vec{b} = \cos\phi \cdot (\vec{a}\times\vec{k}) + \sin\phi \cdot \vec{a}$$

$$\boxed{\vec{b} = \frac{1}{B}\cdot\left(C\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{k})\right)\cdot(\vec{a}\times\vec{k}) \pm \frac{1}{B}\cdot\sqrt{B^2-\left(C\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{k})\right)^2}\cdot\vec{a}}$$

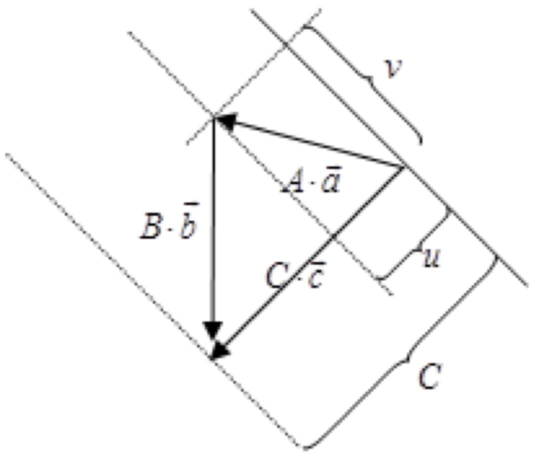
$$A\vec{a} = C\vec{c} - B\vec{b}$$

$$\boxed{A\vec{a} = C\vec{c} - \left(C\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{k})\right)\cdot(\vec{a}\times\vec{k}) \mp \sqrt{B^2-\left(C\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{k})\right)^2}\cdot\vec{a}}$$

$$\underbrace{\overbrace{\vec{C}}^{c}}_{c} = \underbrace{\overbrace{\vec{A}}^{c}}_{?} + \underbrace{\overbrace{\vec{B}}^{c}}_{?}$$

Las incógnitas son $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Definir un nuevo sistema de coordenadas $\vec{c}$ y $(\vec{c}\times\vec{k})$.
Descomponer los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en estas direcciones
$A\vec{a} = u\cdot\vec{c} + v\cdot(\vec{c}\times\vec{k})\,;\, B\vec{b} = (C-u)\cdot\vec{c} - v\cdot(\vec{c}\times\vec{k})$



$$\left.\begin{aligned} A^2 &= u^2+v^2 \\ B^2 &= (\mathrm{C}-\mathrm{u})^2+v^2 \end{aligned}\right\} \quad u = \frac{A^2+C^2-B^2}{2\cdot C} \qquad v = \pm\sqrt{A^2-\left(\frac{A^2+C^2-B^2}{2\cdot C}\right)^2}$$

$$\boxed{A\cdot\vec{a} = \frac{A^2+C^2-B^2}{2\cdot C}\vec{c} \pm \sqrt{A^2-\left(\frac{A^2+C^2-B^2}{2\cdot C}\right)^2}\cdot(\vec{c}\times\vec{k})}$$

$$\boxed{B\cdot\vec{b} = \left(C-\frac{A^2+C^2-B^2}{2\cdot C}\right)\vec{c} \mp \sqrt{A^2-\left(\frac{A^2+C^2-B^2}{2\cdot C}\right)^2}\cdot(\vec{c}\times\vec{k})}$$

Epígrafes del tema

6.1 Posición de un punto. Ecuación de cierre.

6.3 Análisis de velocidad y aceleración.

6.4 Posición, velocidad y aceleración de un punto.

6.5 Ejemplo de aplicación: Cuadrilátero articulado.

- Problema de posición mediante trigonometría.
- Problemas de posición, velocidad y aceleración mediante álgebra compleja.
- Problemas de posición, velocidad y aceleración mediante álgebra vectorial.

La derivada de un vector $\vec{R}$ es:

$$\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{d(R\vec{r})}{dt}=\frac{dR}{dt}\vec{r}+R\frac{d\vec{r}}{dt}\rightarrow\left\{\frac{d\vec{r}}{dt}=\omega(\vec{k}\times\vec{r})\right\}\rightarrow\boxed{\dot{\vec{R}}=\dot{R}\vec{r}+R\omega(\vec{k}\times\vec{r})}$$

Derivando de nuevo:

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=\ddot{R}\vec{r}+\dot{R}\dot{\vec{r}}+\dot{R}\omega(\vec{k}\times\vec{r})+R\dot{\omega}(\vec{k}\times\vec{r})+R\omega(\vec{k}\times\dot{\vec{r}})\rightarrow\ddot{\vec{R}}=\ddot{R}\vec{r}+2\dot{R}\omega(\vec{k}\times\vec{r})+R\dot{\omega}(\vec{k}\times\vec{r})+R\omega\left(\vec{k}\times\omega(\vec{k}\times\vec{r})\right)$$

$$\boxed{\ddot{\vec{R}}=\ddot{R}\vec{r}+2\dot{R}\omega(\vec{k}\times\vec{r})+R\dot{\omega}(\vec{k}\times\vec{r})-R\omega^2\vec{r}}$$

Álgebra vectorial

Álgebra compleja

La derivada de un vector $\vec{R}$ expresado en forma polar es:

$$\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{d(\mathrm{R}e^{j\theta})}{dt}=\frac{dR}{dt}e^{j\theta}+R\frac{d\theta}{dt}je^{j\theta}\rightarrow\boxed{\dot{\vec{R}}=\dot{R}e^{j\theta}+R\dot{\theta}je^{j\theta}}$$

Derivando de nuevo:

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=\frac{d^2R}{dt^2}e^{j\theta}+\frac{dR}{dt}\frac{d\theta}{dt}je^{j\theta}+\frac{dR}{dt}\frac{d\theta}{dt}je^{j\theta}+R\frac{d^2\theta}{dt^2}je^{j\theta}+R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2j^2e^{j\theta}\rightarrow\boxed{\ddot{\vec{R}}=\ddot{R}e^{j\theta}+2\dot{R}\dot{\theta}je^{j\theta}+R\ddot{\theta}je^{j\theta}-R\dot{\theta}^2e^{j\theta}}$$

Epígrafes del tema

6.1 Posición de un punto. Ecuación de cierre.

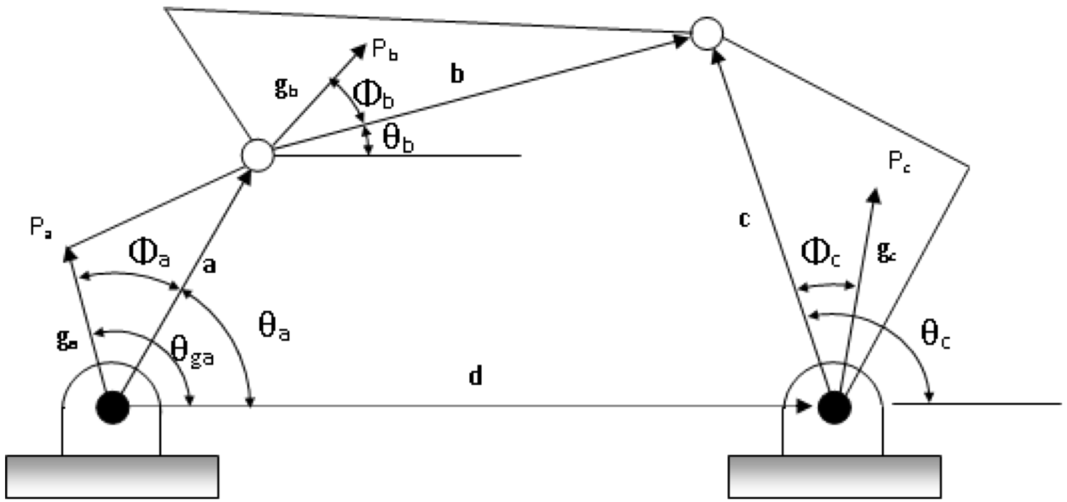
6.3 Análisis de velocidad y aceleración.

6.4 Posición, velocidad y aceleración de un punto.

6.5 Ejemplo de aplicación: Cuadrilátero articulado.

- Problema de posición mediante trigonometría.
- Problemas de posición, velocidad y aceleración mediante álgebra compleja.
- Problemas de posición, velocidad y aceleración mediante álgebra vectorial.

La posición de un punto perteneciente a un elemento cualquiera se puede expresar mediante un vector $\vec{g}$ ligado a la barra. Dicho vector tendrá un módulo $|\vec{g}| = \vec{g}$ constante y un ángulo θ_g variable. Dicho ángulo puede expresarse como la suma del ángulo correspondiente a la barra a la que pertenece el punto, más un ángulo que será constante y que define la posición del punto respecto a la barra.



Posiciones:

$$\vec{P}_a = g_a e^{j(\theta_a + \Phi_a)}$$
$$\vec{P}_b = \vec{a} + \vec{g}_b = a e^{j\theta_a} + g_b e^{j(\theta_b + \Phi_b)}$$
$$\vec{P}_c = \vec{d} + \vec{g}_c = d + g_c e^{j(\theta_c + \Phi_c)}$$

Velocidades:

$$\vec{v}_{P_a} = \dot{\vec{P}}_a = g_a j\dot{\theta}_a e^{j(\theta_a + \Phi_a)}$$
$$\vec{v}_{P_b} = \dot{\vec{P}}_b = a j\dot{\theta}_a e^{j\theta_a} + g_b j\dot{\theta}_b e^{j(\theta_b + \Phi_b)}$$
$$\vec{v}_{P_c} = \dot{\vec{P}}_c = g_c j\dot{\theta}_c e^{j(\theta_c + \Phi_c)}$$

Aceleraciones:

$$\vec{a}_{P_a} = g_a j\ddot{\theta}_a e^{j(\theta_a + \Phi_a)} - g_a \dot{\theta}_a^2 e^{j(\theta_a + \Phi_a)}$$
$$\vec{a}_{P_b} = a j\ddot{\theta}_a e^{j\theta_a} - a\dot{\theta}_a^2 e^{j\theta_a} + g_b j\ddot{\theta}_b e^{j(\theta_b + \Phi_b)} - g_b \dot{\theta}_b^2 e^{j(\theta_b + \Phi_b)}$$
$$\vec{a}_{P_c} = g_c j\ddot{\theta}_c e^{j(\theta_c + \Phi_c)} - g_c \dot{\theta}_c^2 e^{j(\theta_c + \Phi_c)}$$

Epígrafes del tema

6.1 Posición de un punto. Ecuación de cierre.

6.3 Análisis de velocidad y aceleración.

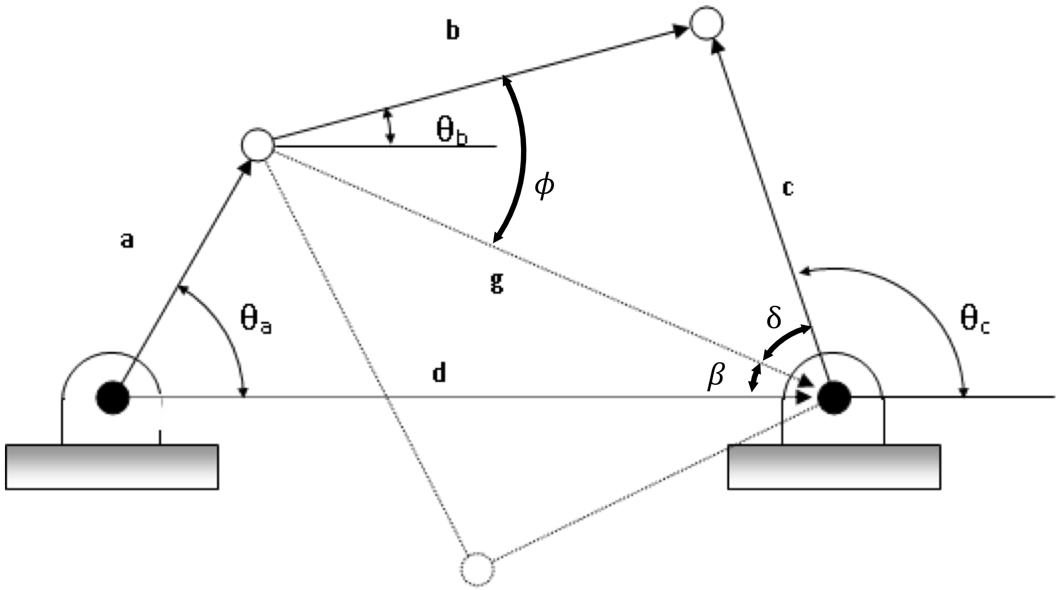
6.4 Posición, velocidad y aceleración de un punto.

6.5 Ejemplo de aplicación: Cuadrilátero articulado.

- Problema de posición mediante trigonometría.
- Problemas de posición, velocidad y aceleración mediante álgebra compleja.
- Problemas de posición, velocidad y aceleración mediante álgebra vectorial.

Problema de posición:

DATOS: a, b, c, d, θ_a



Triángulo agd

$$g = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta_a}$$

$$g\sin\beta = a\sin\theta_a \Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{a\sin\theta_a}{g}\right)$$

Triángulo gbc

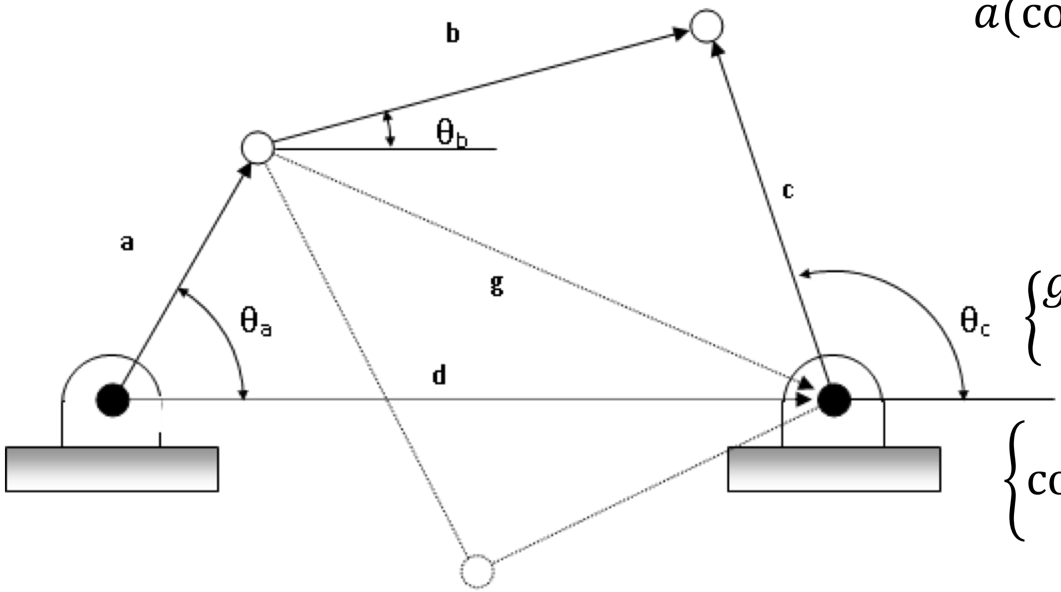
$$c^2 = b^2 + g^2 - 2bg\cos\phi \Rightarrow \phi = \pm\arccos\left(\frac{b^2 + g^2 - c^2}{2bg}\right)$$

$$c\sin\delta = b\sin\phi \Rightarrow \delta = \pm\arcsin\left(\frac{b\sin\phi}{c}\right)$$

$$\left.\begin{array}{c}\theta_b = \phi - \beta \\ \theta_c = 180 - (\delta + \beta)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\theta_b = \phi - \beta \\ \theta_c = 180 - \delta - \beta\end{array}}$$

Problema de posición:

DATOS: a, b, c, d, θ_a



$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}+\vec{c}\Rightarrow ae^{j\theta_a}+be^{j\theta_b}=d+ce^{j\theta_c}$$

$$a(\cos\theta_a+j\sin\theta_a)+b(\cos\theta_b+j\sin\theta_b)=d+c(\cos\theta_c+j\sin\theta_c)$$

$$\left.\begin{aligned} b\cos\theta_b&=+d+c\cos\theta_c-a\cos\theta_a \\ b\sin\theta_b&=c\sin\theta_c-a\sin\theta_a \end{aligned}\right\}$$

$$b^2=a^2+c^2+d^2-2ac\cos(\theta_c-\theta_\mathrm{a})+2dc\cos\theta_c-2da\cos\theta_\mathrm{a}$$

$$\left\{\begin{aligned} g_x&=d-a\cos\theta_a \\ g_y&=-a\sin\theta_a \end{aligned}\right\}\Rightarrow b^2=g^2+c^2-2ac\cos(\theta_c-\theta_\mathrm{a})+2dc\cos\theta_c$$

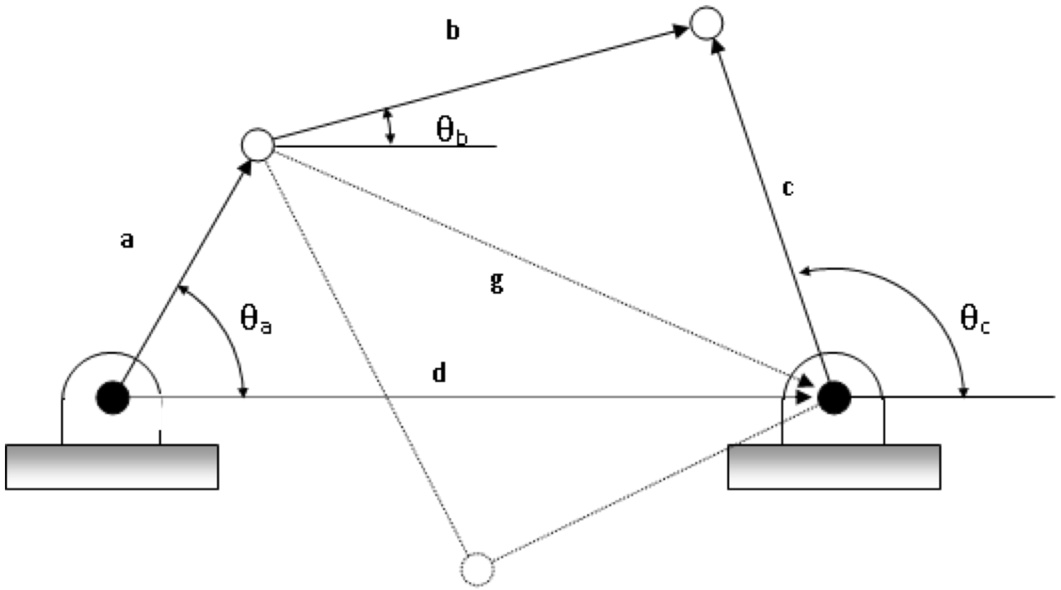
$$\left\{\cos\gamma=\frac{-g^2+b^2+c^2}{2bc}\right\}\Rightarrow \cos\gamma=\frac{2c^2-2ac\cos(\theta_c-\theta_\mathrm{a})+2dc\cos\theta_c}{2bc}$$

$$\cos\gamma=\frac{c-a\cos\theta_\mathrm{a}\cos\theta_c-a\sin\theta_\mathrm{a}\sin\theta_c+d\cos\theta_c}{b}\Rightarrow b\cos\gamma=c+g_x\cos\theta_c+g_y\sin\theta_c$$

$$\left\{\begin{aligned} \cos\theta&=\frac{1-tg^2\,\theta/2}{1+tg^2\,\theta/2} \\ \sin\theta&=\frac{2tg\,\theta/2}{1+tg^2\,\theta/2} \end{aligned}\right\}\Rightarrow b\cos\gamma=c+g_x\frac{1-tg^2\,\theta_\mathrm{c}/2}{1+tg^2\,\theta_\mathrm{c}/2}-g_y\frac{2tg\,\theta_\mathrm{c}/2}{1+tg^2\,\theta_\mathrm{c}/2}\Rightarrow\left\{\begin{aligned} &\boxed{tg\,\frac{\theta_\mathrm{c}}{2}=\frac{-g_y\pm b\sqrt{1-\cos^2\gamma}}{c-b\cos\gamma-g_x}} \\ &\boxed{tg\,\frac{\theta_\mathrm{b}}{2}=\frac{g_y\pm c\sqrt{1-\cos^2\gamma}}{b-c\cos\gamma+g_x}} \end{aligned}\right.$$

Problema de velocidad:

DATOS: a, b, c, d, θ_a, ω_a



Teniendo en cuenta la expresión de la derivada de un vector es:

$$\dot{\vec{R}} = \dot{R}e^{j\theta} + R\dot{\theta}je^{j\theta}$$

Derivando la Ecuación de cierre

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{d} + \vec{c}$$
$$ae^{j\theta_a} + be^{j\theta_b} = d + ce^{j\theta_c}$$
$$ai\dot{\theta}_a e^{j\theta_a} + bj\dot{\theta}_b e^{j\theta_b} = cj\dot{\theta}_c e^{j\theta_c}$$

Las incógnitas serán $\dot{\theta}_b$ y $\dot{\theta}_c$

$$aj\dot{\theta}_a e^{j(\theta_a-\theta_b)} + bj\dot{\theta}_b = cj\dot{\theta}_c e^{j(\theta_c-\theta_b)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -a\dot{\theta}_a \sin(\theta_a-\theta_b) = -c\dot{\theta}_c \sin(\theta_c-\theta_b) \\ a\dot{\theta}_a \cos(\theta_a-\theta_b) + b\dot{\theta}_b = c\dot{\theta}_c \cos(\theta_c-\theta_b) \end{cases}$$

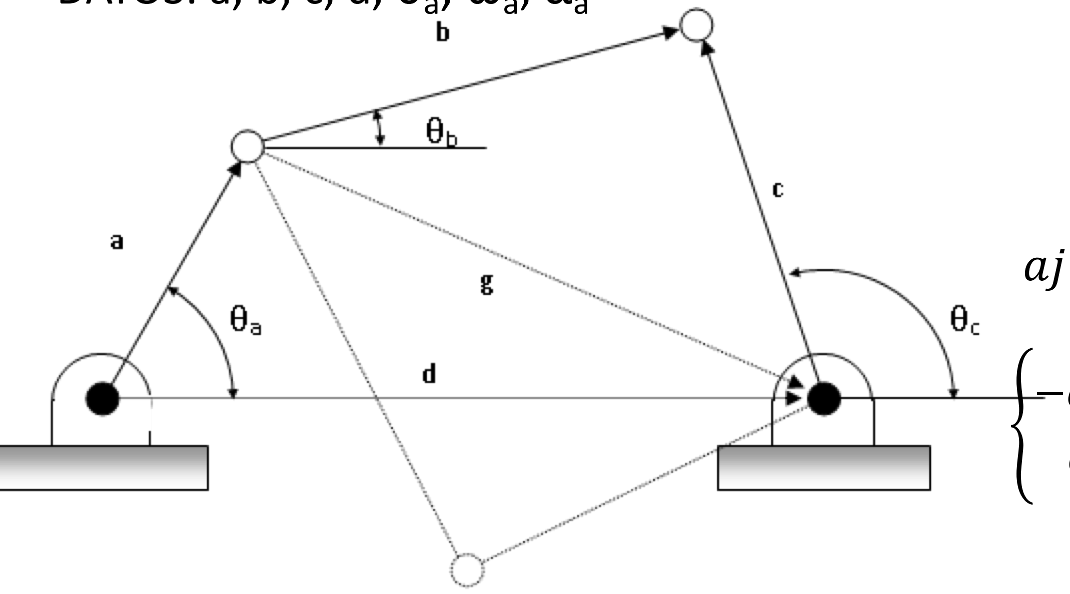
$$\boxed{\dot{\theta}_c = \frac{a\sin(\theta_a-\theta_b)}{c\sin(\theta_c-\theta_b)}\dot{\theta}_a}$$

$$\boxed{\dot{\theta}_b = \frac{-a\sin(\theta_a-\theta_c)}{b\sin(\theta_b-\theta_c)}\dot{\theta}_a}$$

6.4 Cinemática mediante álgebra compleja

Problema de aceleración:

DATOS: a, b, c, d, θ_a, ω_a, α_a



Derivando la Ecuación de velocidad

$$aj\dot{\theta}_a e^{j\theta_a} + bj\dot{\theta}_b e^{j\theta_b} = cj\dot{\theta}_c e^{j\theta_c}$$

$$aj\ddot{\theta}_a e^{j\theta_a} + aj^2\dot{\theta}_a^2 e^{j\theta_a} + bj\ddot{\theta}_b e^{j\theta_b} + bj^2\dot{\theta}_b^2 e^{j\theta_b} = cj\ddot{\theta}_c e^{j\theta_c} + cj^2\dot{\theta}_c^2 e^{j\theta_c}$$

Las incógnitas serán $\ddot{\theta}_b$ y $\ddot{\theta}_c$

$$aj\ddot{\theta}_a e^{j(\theta_a-\theta_b)} - a\dot{\theta}_a^2 e^{j(\theta_a-\theta_b)} + bj\ddot{\theta}_b - b\dot{\theta}_b^2 = cj\ddot{\theta}_c e^{j(\theta_c-\theta_b)} - c\dot{\theta}_c^2 e^{j(\theta_c-\theta_b)}$$

$$\begin{cases} -a\ddot{\theta}_a\sin(\theta_a-\theta_b) - a\dot{\theta}_a^2\cos(\theta_a-\theta_b) - b\dot{\theta}_b^2 = -c\ddot{\theta}_c\sin(\theta_c-\theta_b) - c\dot{\theta}_c^2\cos(\theta_c-\theta_b) \\ a\ddot{\theta}_a\cos(\theta_a-\theta_b) - a\dot{\theta}_a^2\sin(\theta_a-\theta_b) + b\ddot{\theta}_b = c\ddot{\theta}_c\cos(\theta_c-\theta_b) - c\dot{\theta}_c^2\sin(\theta_c-\theta_b) \end{cases}$$

$$\ddot{\theta}_c = \frac{a\ddot{\theta}_a\sin(\theta_a-\theta_b)}{c\sin(\theta_c-\theta_b)} + \frac{a\dot{\theta}_a^2\cos(\theta_a-\theta_b) + b\dot{\theta}_b^2 - c\dot{\theta}_c^2\cos(\theta_c-\theta_b)}{c\sin(\theta_c-\theta_b)} = \boxed{\ddot{\theta}_a\frac{\dot{\theta}_c}{\dot{\theta}_a} + \frac{a\dot{\theta}_a^2\cos(\theta_a-\theta_b) + b\dot{\theta}_b^2 - c\dot{\theta}_c^2\cos(\theta_c-\theta_b)}{c\sin(\theta_c-\theta_b)}}$$

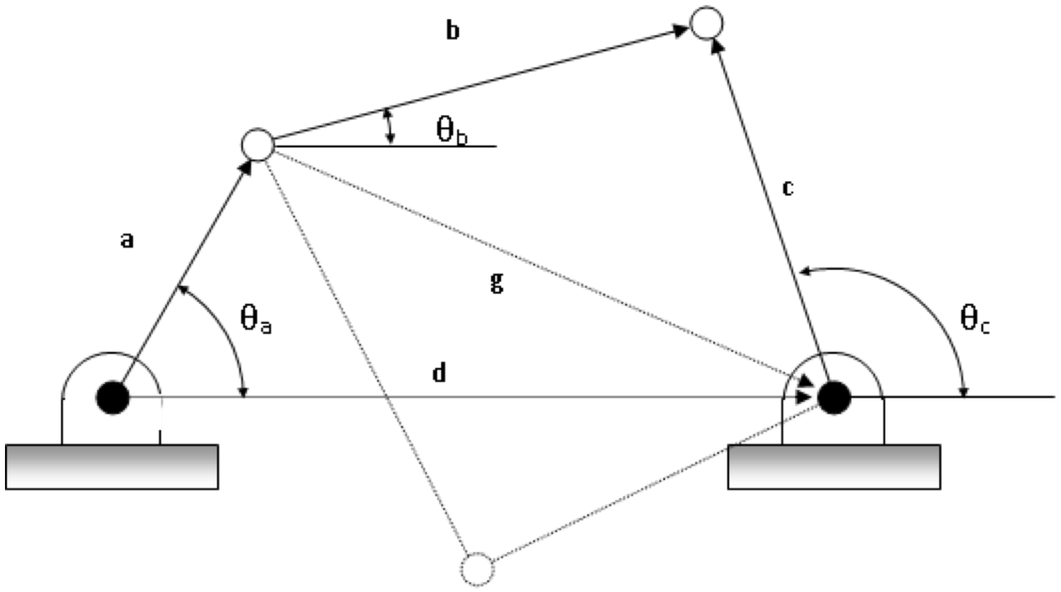
$$ai\ddot{\theta}_a e^{i(\theta_a-\theta_c)} - a\dot{\theta}_a^2 e^{i(\theta_a-\theta_c)} + bi\ddot{\theta}_b e^{i(\theta_b-\theta_c)} - b\dot{\theta}_b^2 e^{i(\theta_b-\theta_c)} = ci\ddot{\theta}_c - c\dot{\theta}_c^2$$

$$\begin{cases} -a\ddot{\theta}_a\sin(\theta_a-\theta_c) - a\dot{\theta}_a^2\cos(\theta_a-\theta_c) - b\dot{\theta}_b^2\cos(\theta_b-\theta_c) - b\ddot{\theta}_b\sin(\theta_b-\theta_c) = -c\dot{\theta}_c^2 \\ a\ddot{\theta}_a\cos(\theta_a-\theta_c) - a\dot{\theta}_a^2\sin(\theta_a-\theta_c) - b\dot{\theta}_b^2\sin(\theta_b-\theta_c) + b\ddot{\theta}_b\cos(\theta_b-\theta_c) = c\ddot{\theta}_c \end{cases}$$

$$\boxed{\ddot{\theta}_b = \ddot{\theta}_a\frac{\dot{\theta}_b}{\dot{\theta}_a} - \frac{a\dot{\theta}_a^2\cos(\theta_a-\theta_c) + b\dot{\theta}_b^2\cos(\theta_b-\theta_c) - c\dot{\theta}_c^2}{b\sin(\theta_b-\theta_c)}}$$

Problema de posición:

DATOS: a, b, c, d, θ_a



Ecuación de cierre: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}+\vec{c} \Rightarrow \vec{b}-\vec{c}=\vec{d}-\vec{a}=\vec{g}$ (Caso 4)

$$b\cdot\vec{b}=\frac{b^2+g^2-c^2}{2\cdot g}\vec{g}\pm\sqrt{b^2-\left(\frac{b^2+g^2-c^2}{2\cdot g}\right)^2}\cdot(\vec{g}\times\vec{k})$$

$$c\cdot\vec{c}=\left(g-\frac{b^2+g^2-c^2}{2\cdot g}\right)\vec{g}\mp\sqrt{b^2-\left(\frac{b^2+g^2-c^2}{2\cdot g}\right)^2}\cdot(\vec{g}\times\vec{k})$$

Problema de velocidad:

DATOS: a, b, c, d, θ_a, ω_a

Derivando la ecuación de cierre:

$$\vec{b}-\vec{c}=\vec{d}-\vec{a} \quad \Rightarrow \quad b\omega_b(\vec{k}\times\vec{b})-c\omega_c(\vec{k}\times\vec{c})=-a\omega_a(\vec{k}\times\vec{a})$$

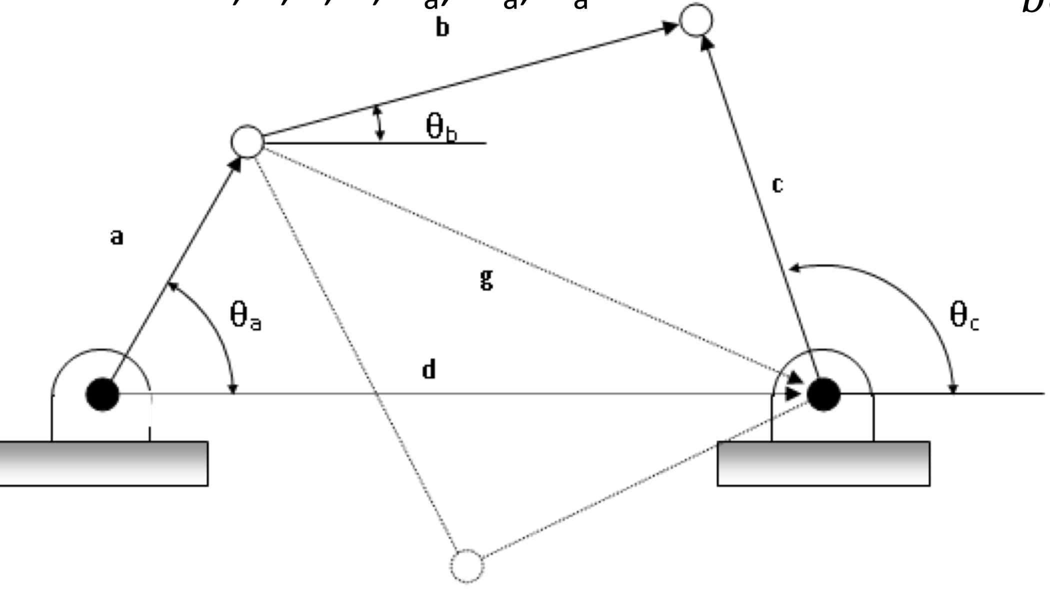
Considerando $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como vectores unitarios

$$b\omega_b(\vec{k}\times\vec{b})\vec{b}-c\omega_c(\vec{k}\times\vec{c})\vec{b}=-a\omega_a(\vec{k}\times\vec{a})\vec{b}\Rightarrow \boxed{\omega_c=\frac{a\omega_a(\vec{k}\times\vec{a})\vec{b}}{c(\vec{k}\times\vec{c})\vec{b}}}$$

$$b\omega_b(\vec{k}\times\vec{b})\vec{c}-c\omega_c(\vec{k}\times\vec{c})\vec{c}=-a\omega_a(\vec{k}\times\vec{a})\vec{c}\Rightarrow \boxed{\omega_b=\frac{-a\omega_a(\vec{k}\times\vec{a})\vec{c}}{b(\vec{k}\times\vec{b})\vec{c}}}$$

Problema de aceleración:

DATOS: a, b, c, d, θ_a, ω_a, α_a



Derivando la Ecuación de velocidad:

$$b\omega_b(\vec{k}\times\vec{b}) - c\omega_c(\vec{k}\times\vec{c}) = -a\omega_a(\vec{k}\times\vec{a})$$

$$b\dot{\omega}_b(\vec{k}\times\vec{b}) + b\omega_b^2(\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{b})) - c\dot{\omega}_c(\vec{k}\times\vec{c}) - c\omega_c^2(\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{c})) = -a\dot{\omega}_a(\vec{k}\times\vec{a}) - a\omega_a^2(\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{a}))$$

$$b\dot{\omega}_b(\vec{k}\times\vec{b}) - b\omega_b^2\vec{b} - c\dot{\omega}_c(\vec{k}\times\vec{c}) - c\omega_c^2\vec{c} = -a\dot{\omega}_a(\vec{k}\times\vec{a}) - a\omega_a^2\vec{a}$$

Considerando $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como vectores unitarios

$$b\dot{\omega}_b(\vec{k}\times\vec{b})\vec{b} - b\omega_b^2\vec{b}\vec{b} - c\dot{\omega}_c(\vec{k}\times\vec{c})\vec{b} - c\omega_c^2\vec{c}\vec{b} = -a\dot{\omega}_a(\vec{k}\times\vec{a})\vec{b} - a\omega_a^2\vec{a}\vec{b}$$

$$\boxed{\dot{\omega}_c = \frac{a\dot{\omega}_a(\vec{k}\times\vec{a})\vec{b} + a\omega_a^2\vec{a}\vec{b} + b\omega_b^2 - c\omega_c^2\vec{c}\vec{b}}{c(\vec{k}\times\vec{c})\vec{b}}}$$

$$b\dot{\omega}_b(\vec{k}\times\vec{b})\vec{c} - b\omega_b^2\vec{b}\vec{c} - c\dot{\omega}_c(\vec{k}\times\vec{c})\vec{c} - c\omega_c^2\vec{c}\vec{c} = -a\dot{\omega}_a(\vec{k}\times\vec{a})\vec{c} - a\omega_a^2\vec{a}\vec{c}$$

$$\boxed{\dot{\omega}_b = \frac{-a\dot{\omega}_a(\vec{k}\times\vec{a})\vec{c} - a\omega_a^2\vec{a}\vec{c} + c\omega_c^2 + b\omega_b^2\vec{b}\vec{c}}{b(\vec{k}\times\vec{b})\vec{c}}}$$

Considerando como elemento de entrada el elemento 2, determinar empleando álgebra compleja la posición, velocidad y aceleración de P.