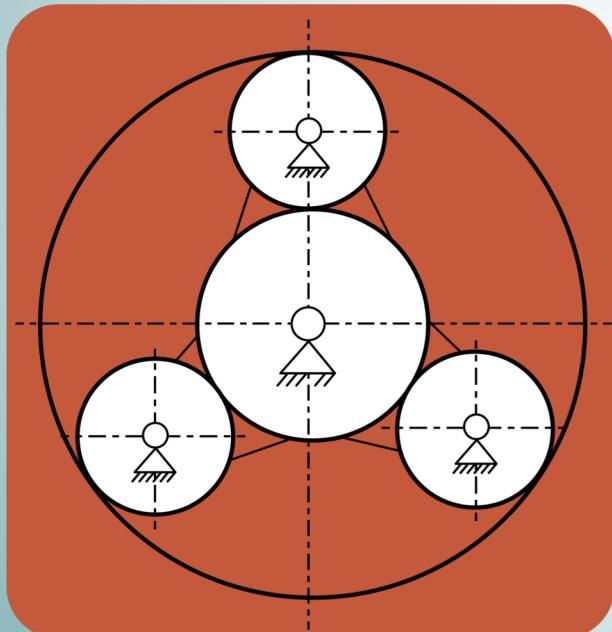


# Máquinas y Mecanismos

## 7. Métodos Numéricos de Análisis Cinemático



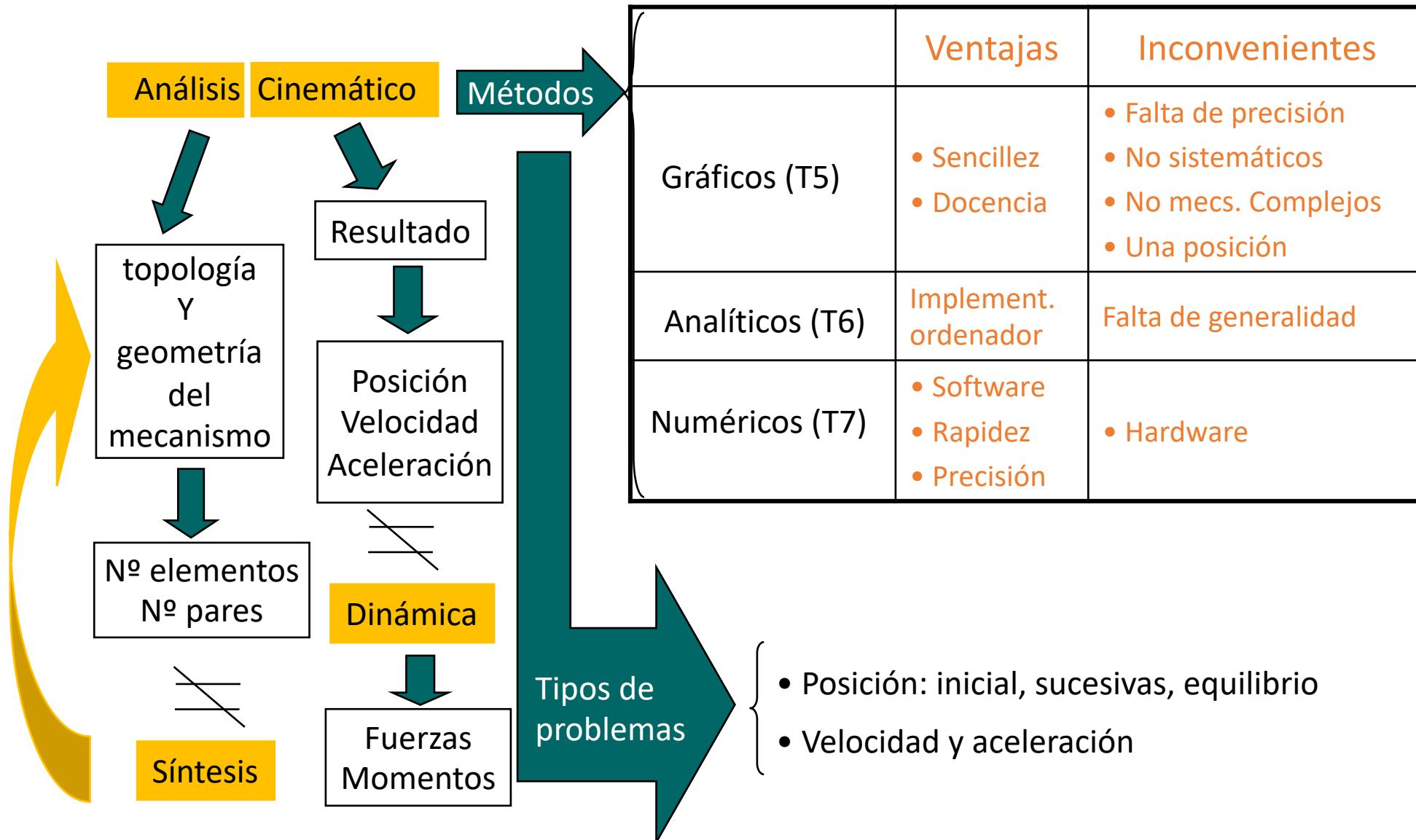
**Alfonso Fernández del Rincón  
Pablo García Fernández**

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

Este material se publica bajo licencia:  
[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



# Introducción al análisis de mecanismos

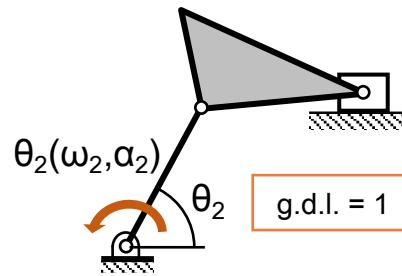


## Epígrafes del tema

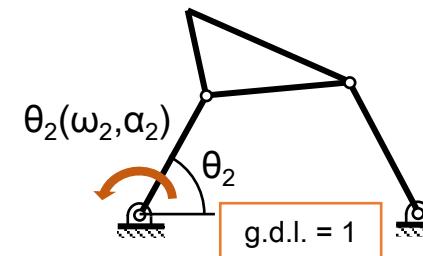
- 7.1 Métodos numéricos: Introducción.
- 7.2 Ecuaciones de restricción y coordenadas generalizadas.
- 7.3 Restricciones redundantes.
- 7.4 Problema de posición inicial y posiciones sucesivas.
- 7.5 Problema de velocidades y aceleraciones.

## 7.1 Métodos numéricos: Introducción

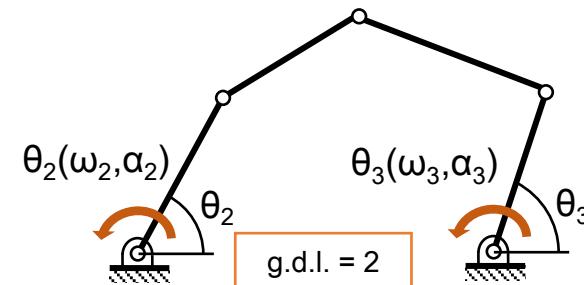
Se debe seleccionar un conjunto de coordenadas para describir un Sistema multicuerpo. Estas deben describir de manera unívoca la posición, velocidad y aceleración del sistema multicuerpo en todo momento.



$$\mathbf{q}_i = [\theta_2]$$



$$\mathbf{q}_i = [\theta_2]$$



$$\mathbf{q}_i = [\theta_2 \quad \theta_3]^T$$

El número mínimo de coordenadas es igual a los g. d. l. → **Coordenadas independientes**. Sin embargo, no siempre definen el sistema de manera única. Las coordenadas independientes varían con el tiempo a través de restricciones temporales o conductoras

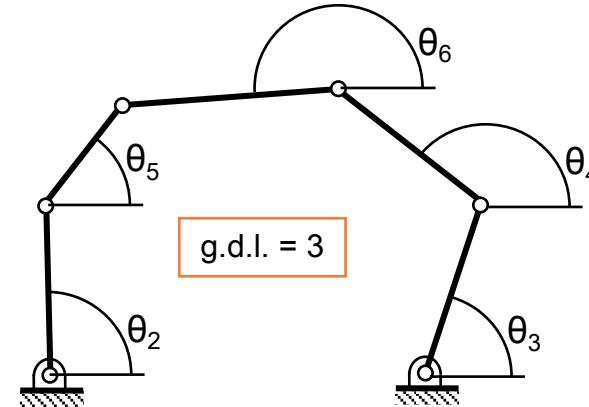
$$\Phi_i(t) = \begin{bmatrix} \theta_2(t) \\ \theta_3(t) \\ \theta_4(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Las coordenadas independientes se suelen definir como motores o actuadores y las ecuaciones de gobierno se denominan **restricciones conductoras**.

## 7.1 Métodos numéricos: Introducción

**Coordenadas dependientes:** Coordenadas adicionales que se utilizan para definir el sistema de manera unívoca.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i &= [\theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4]^T \\ \mathbf{q}_d &= [\theta_5 \quad \theta_6]^T \end{aligned} \} \rightarrow \mathbf{q} = \{\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_d\}$$



Están relacionadas con las coordenadas independientes mediante las **ecuaciones de restricción cinemáticas**. Estas restricciones son por lo general no lineales y su número es igual al número de coordenadas dependientes.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i &= [\theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4]^T \\ \mathbf{q}_d &= [\theta_5 \quad \theta_6]^T \end{aligned} \} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \Phi_i = [\phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4]^T \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \Phi_d = [\phi_5 \quad \phi_6]^T \end{matrix}$$

Los tipos de coordenadas más comúnmente utilizados para definir un sistema multicuerpo son:

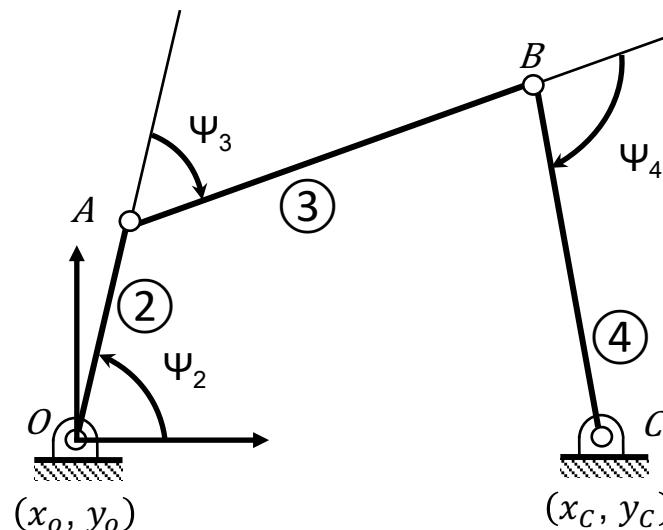
1. Coordenadas relativas.
2. Coordenadas de punto de referencia.
3. Coordenadas naturales.

El mismo sistema se puede definir de varias maneras posibles, dependiendo del objetivo del análisis, su elección determinará la eficacia y la simplicidad del problema.

## Epígrafes del tema

- 7.1 Métodos numéricos: Introducción.
- 7.2 Ecuaciones de restricción y coordenadas generalizadas.
- 7.3 Restricciones redundantes.
- 7.4 Problema de posición inicial y posiciones sucesivas.
- 7.5 Problema de velocidades y aceleraciones.

**Coordenadas relativas:** Las coordenadas relativas definen la posición de cada elemento respecto del anterior en la cadena cinemática, utilizando los parámetros correspondientes a los grados de libertad relativos permitidos en la cadena.



1 g. d. l.  $\Rightarrow$  1 coordenada independiente  $\Rightarrow$  1 restricción conductora  
2 coordenadas dependientes  $\Rightarrow$  2 restricciones cinemáticas

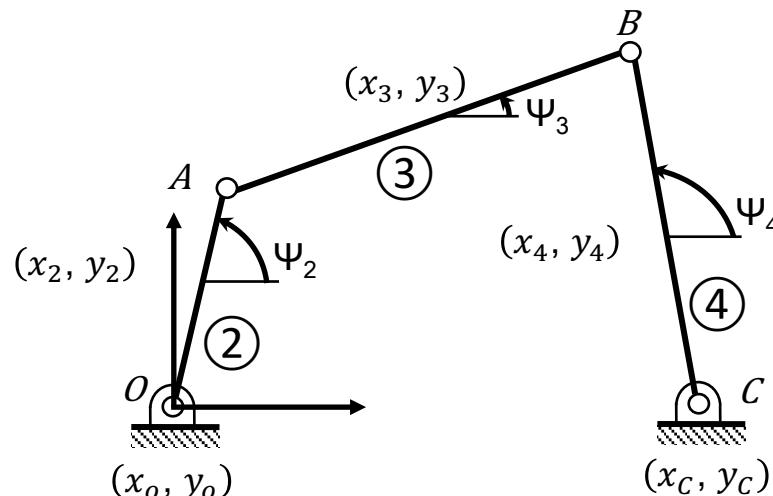
$$\mathbf{q}_i = [\psi_2]^T$$

$$\mathbf{q}_d = [\psi_3 \ \psi_4]^T$$

$$\Phi_d = \begin{Bmatrix} L_2 \cos(\psi_2) + L_3 \cos(\psi_2 + \psi_3) + L_4 \cos(\psi_2 + \psi_3 + \psi_4) - \mathbf{OC} \\ L_2 \sin(\psi_2) + L_3 \sin(\psi_2 + \psi_3) + L_4 \sin(\psi_2 + \psi_3 + \psi_4) \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

Las restricciones cinemáticas se derivan de la condición de cierre de la cadena cinemática en este caso.

**Coordenadas de punto de referencia:** En cinemática plana la posición global de un elemento se define con tres coordenadas. Se determinan las componentes cartesianas de un punto de referencia (normalmente el centro de masas) y la orientación del cuerpo.



Las restricciones cinemáticas se derivan de la condición de cierre de la cadena cinemática en este caso.

1 g. d. l.  $\Rightarrow$  1 coordenada independiente  $\Rightarrow$  1 restricción conductora  
8 coordenadas dependientes  $\Rightarrow$  8 restricciones cinemáticas

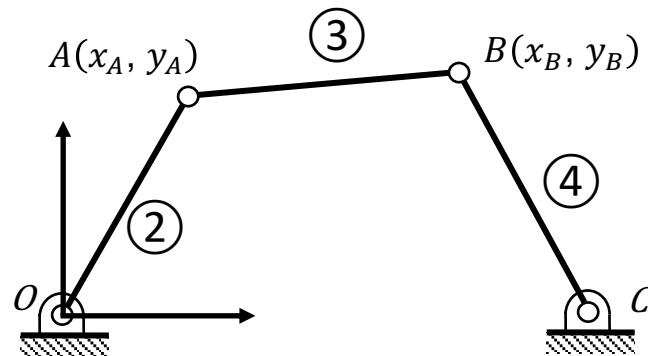
$$\mathbf{q}_i = [\psi_2]^T$$

$$\mathbf{q}_d = [x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ \psi_3 \ x_4 \ y_4 \ \psi_4]^T$$

$$\Phi_d = \left\{ \begin{array}{l} (x_2 - x_0) - L_2/2 \cos(\psi_2) \\ (y_2 - y_0) - L_2/2 \sin(\psi_2) \\ (x_3 - x_2) - L_2/2 \cos(\psi_2) - L_3/2 \cos(\psi_3) \\ (y_3 - y_2) - L_2/2 \sin(\psi_2) - L_3/2 \sin(\psi_3) \\ (x_4 - x_3) - L_3/2 \cos(\psi_3) - L_4/2 \cos(\psi_4) \\ (y_4 - y_3) - L_3/2 \sin(\psi_3) - L_4/2 \sin(\psi_4) \\ (x_4 - x_C) - L_4/2 \cos(\psi_4) \\ (y_4 - y_C) - L_4/2 \sin(\psi_4) \end{array} \right\} = \mathbf{0}$$

**Coordenadas naturales:** Son una evolución de las coordenadas de punto de referencia, en las que dichos puntos se trasladan a los pares cinemáticos. Así, cada elemento tiene al menos dos puntos de ref. Tanto la posición como la orientación del elemento se definen mediante coordenadas cartesianas, por lo que las expresiones angulares no son necesarias.

1 g. d. l.  $\Rightarrow$  1 coordenada independiente  $\Rightarrow$  1 restricción conductora  
3 coordenadas dependientes  $\Rightarrow$  3 restricciones cinemáticas



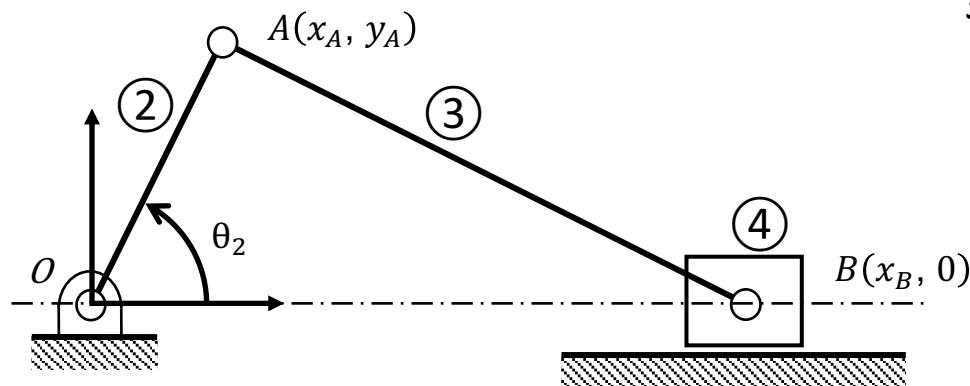
$$\mathbf{q}_i = [x_A]^T$$

$$\mathbf{q}_d = [x_B \quad y_B \quad y_C]^T$$

$$\Phi_d = \left\{ \begin{array}{l} (x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2 - L_2^2 \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - L_3^2 \\ (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 - L_4^2 \end{array} \right\} = \mathbf{0}$$

Las restricciones cinemáticas se derivan de la condición de sólido rígido en este caso.

**Combinación de coordenadas:** En la práctica es habitual utilizar una combinación de los tipos de coordenadas anteriormente expuestos.



1 g. d. l.  $\Rightarrow$  1 coordenada independiente  $\Rightarrow$  1 restricción conductora  
3 coordenadas dependientes  $\Rightarrow$  3 restricciones cinemáticas

$$\mathbf{q}_i = [\theta_2]^T$$

$$\mathbf{q}_d = [x_A \ y_A \ x_B]^T$$

$$\Phi_d = \left\{ \begin{array}{l} x_A - L_2 \cos \theta_2 \\ y_A - L_2 \sin \theta_2 \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - 0)^2 - L_3^2 \end{array} \right\} = \mathbf{0}$$

## Epígrafes del tema

- 7.1 Métodos numéricos: Introducción.
- 7.2 Ecuaciones de restricción y coordenadas generalizadas.
- 7.3 Restricciones redundantes.
- 7.4 Problema de posición inicial y posiciones sucesivas.
- 7.5 Problema de velocidades y aceleraciones.

## 7.3 Restricciones redundantes

Las restricciones redundantes son aquellas que se obtienen como combinación lineal de otras ya existentes.

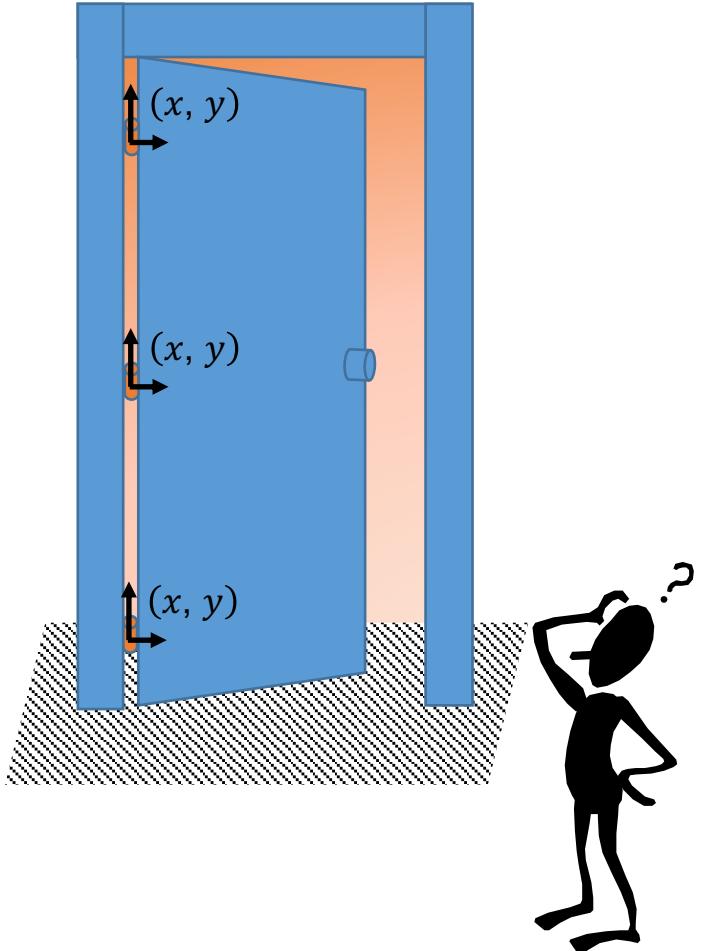
Las restricciones redundantes pueden tener un significado físico concreto.

Ejemplo: Puerta rígida con tres bisagras:

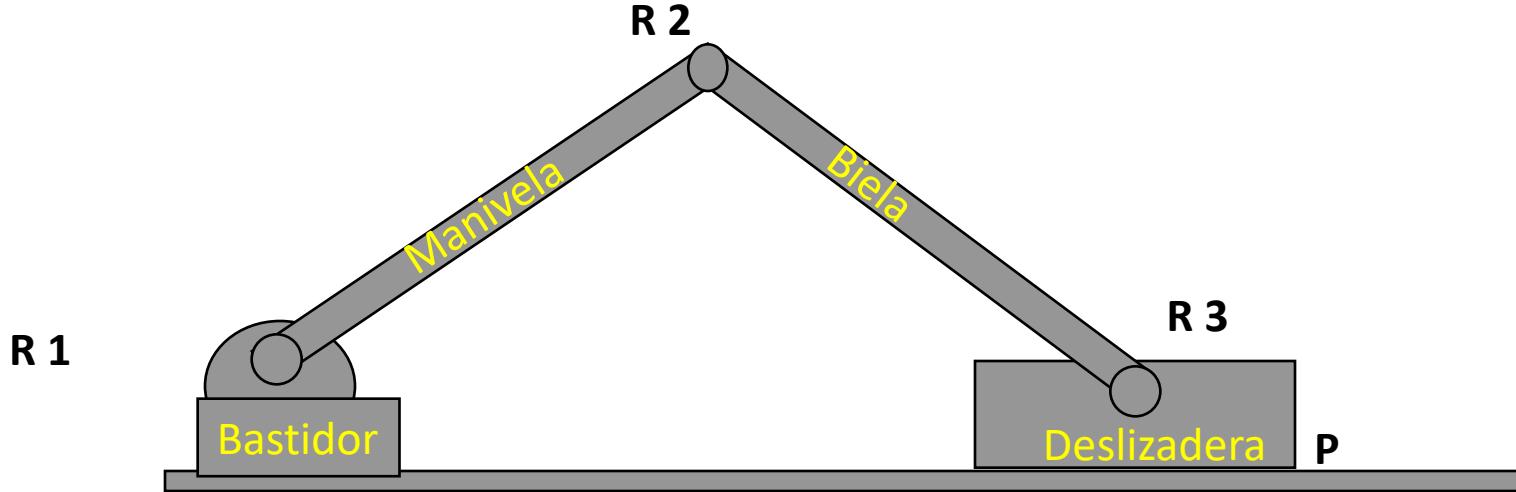
- Se necesita más de una bisagra debida a la deformación de la puerta y a las holguras en las uniones.
- Matemáticamente, las uniones son ideales y los cuerpos rígidos, así que establecer más de una bisagra implica incluir restricciones redundantes.

Dos opciones:

- Consistentes (se satisfacen todas a la vez): Se ignoran algunas, pero no se sabe cuáles. Existen múltiples soluciones
- Inconsistentes (no se satisfacen todas a la vez): La simulación falla.



Ejemplo: Biela – manivela 3D con restricciones redundantes



4 cuerpos x 6 GDL	=+24
1 elemento fijo x 6	= -6
3 Pares de tipo R x 5	= -15
1 Pares de tipo P x 5	<u>= -5</u>
	-2 GDL

Nota: Se recomienda encarecidamente que los modelos no presenten restricciones redundantes. Se considera un error de modelización si una simulación falla debido a esto. Es un error grave no considerar de manera apropiada los load-paths.

## Epígrafes del tema

- 7.1 Métodos numéricos: Introducción.
- 7.2 Ecuaciones de restricción y coordenadas generalizadas.
- 7.3 Restricciones redundantes.
- 7.4 Problema de posición inicial y posiciones sucesivas.
- 7.5 Problema de velocidades y aceleraciones.

## 7.4 Problema de posición inicial y posiciones sucesivas

La posición del sistema multicuerpo se determina resolviendo el sistema de ecuaciones de restricción, que es no lineal, y que de manera compacta se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Phi(\mathbf{q}(t), t) = \mathbf{0}$$

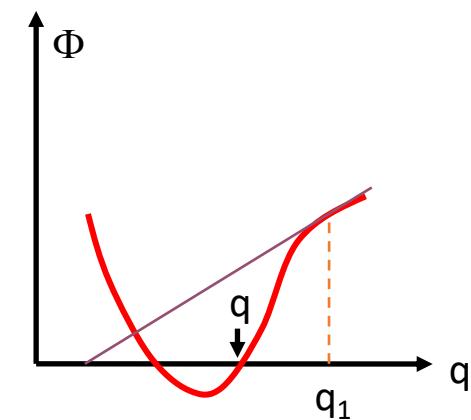
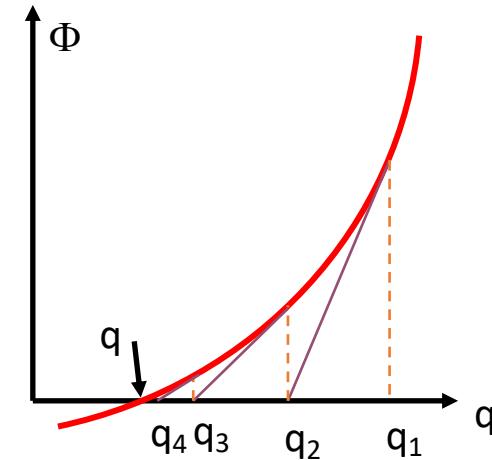
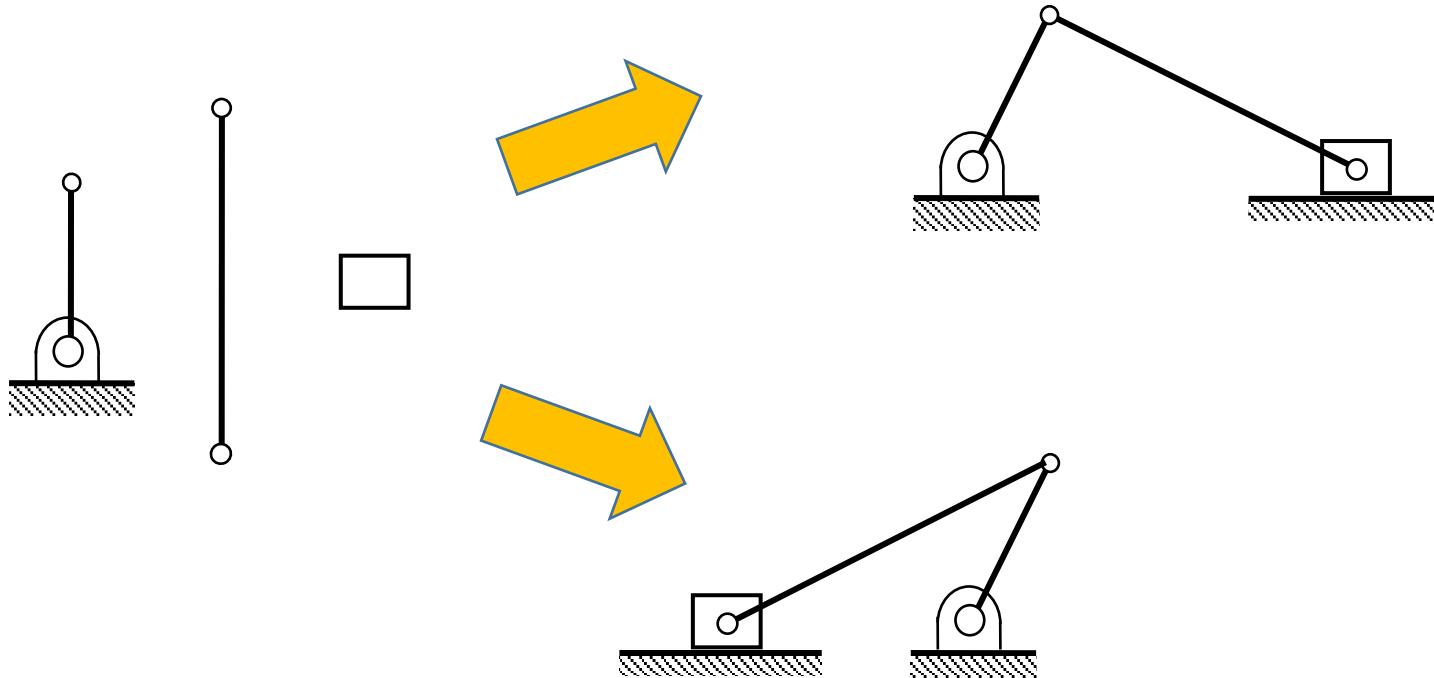
**Problema de posición inicial**

En donde  $t$  es el tiempo,  $\mathbf{q}(t)$  son las coordenadas generalizadas y  $\Phi$  agrupa a las ecuaciones de restricción temporales o conductoras y cinemáticas.

Las incógnitas son las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}(t)$ , que expresan la posición del sistema multicuerpo en el instante inicial. Sin embargo, al ser un problema no lineal, se pueden presentar complicaciones, dado que se necesita partir de un valor numérico para las coordenadas y utilizar un método para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, como el de **Newton-Raphson**.

## 7.4 Problema de posición inicial y posiciones sucesivas

Método de Newton-Raphson:  $\Phi(\mathbf{q}(t), t) = \mathbf{0}$



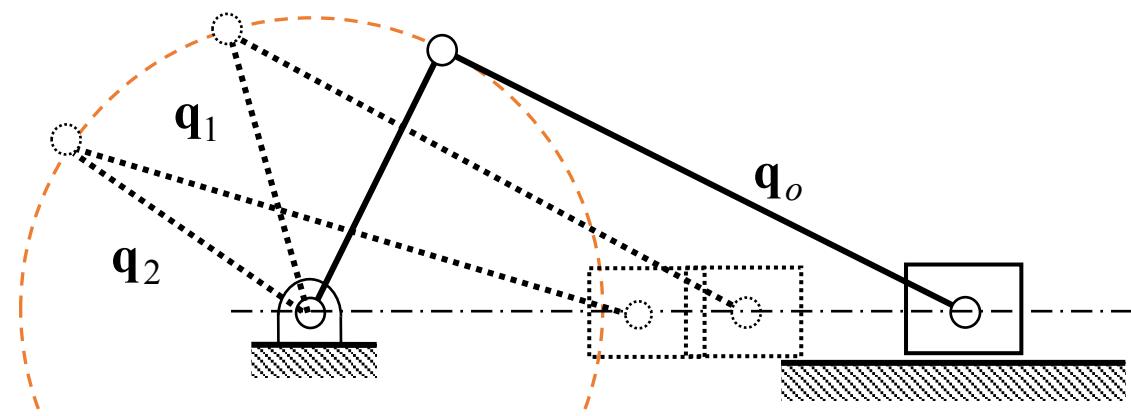
El ensamblado del problema depende de la colocación  
inicial de los elementos

## 7.4 Problema de posición inicial y posiciones sucesivas

Para el cálculo de posiciones sucesivas, la posición anterior se puede utilizar como inicial en el método de resolución del sistema de ecuaciones no lineal.

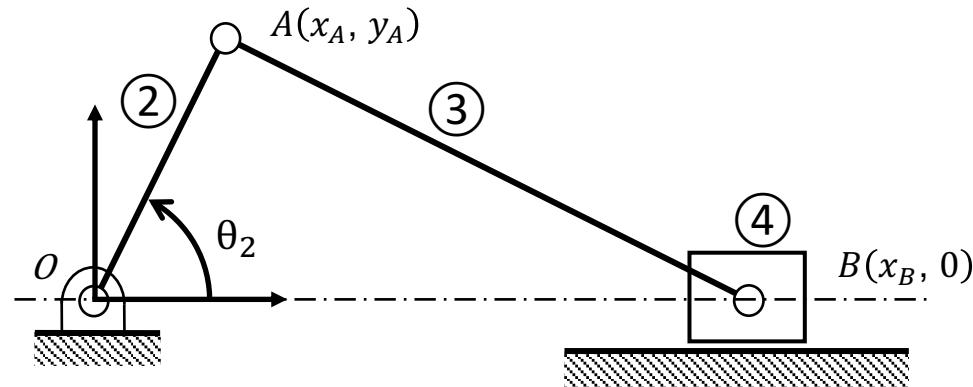
$$\Phi(\mathbf{q}(t), t) = \mathbf{0}$$

Esto será válido siempre y cuando el incremento de posición sea lo suficientemente pequeño.



## 7.4 Problema de posición inicial y posiciones sucesivas. Ejemplo.

1 g. d. l.  $\Rightarrow$  1 coordenada independiente  $\Rightarrow$  1 restricción conductora  
3 coordenadas dependientes  $\Rightarrow$  3 restricciones cinemáticas



$$\begin{aligned}\mathbf{q}_i &= [\theta_2]^T \\ \mathbf{q}_d &= [x_A \ y_A \ x_B]^T\end{aligned}\} \Rightarrow \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ x_A \\ y_A \\ x_B \end{Bmatrix}$$

$$\Phi(\mathbf{q}(t), t) = \begin{Bmatrix} x_A - L_2 \cos \theta_2 \\ y_A - L_2 \sin \theta_2 \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - 0)^2 - L_3^2 \\ \theta_2 - \omega t - \theta_{20} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

## Epígrafes del tema

- 7.1 Métodos numéricos: Introducción.
- 7.2 Ecuaciones de restricción y coordenadas generalizadas.
- 7.3 Restricciones redundantes.
- 7.4 Problema de posición inicial y posiciones sucesivas.
- 7.5 Problema de velocidades y aceleraciones.

## 7.5 Problema de velocidades y aceleraciones

El problema de posición es:

$$\Phi(\mathbf{q}(t), t) = \mathbf{0}, \text{ en donde las incógnitas están agrupadas en } \mathbf{q}(t).$$

Para obtener la ecuación de velocidad, se deriva la de posición aplicando la regla de la cadena, ya que la función depende de dos variables:

$$\dot{\Phi}(\mathbf{q}(t), t) = \frac{d\Phi(\mathbf{q}(t), t)}{dt} = \frac{\partial\Phi(\mathbf{q}(t), t)}{\partial\mathbf{q}} \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial\Phi(\mathbf{q}(t), t)}{\partial t} = \boxed{\Phi_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = \mathbf{0}}^*$$

En donde:

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial\phi_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial\phi_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\phi_n}{\partial q_1} & \frac{\partial\phi_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial\phi_n}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad \Phi_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial\phi_n}{\partial t} \end{bmatrix}$$

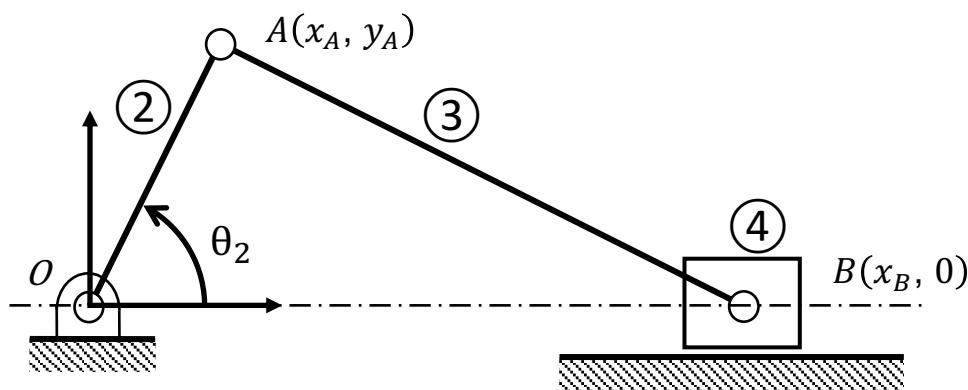
La solución al problema de velocidad es el vector  $\dot{\mathbf{q}}$ , que contiene las velocidades generalizadas. El problema de velocidad es lineal.

\* Para simplificar las ecuaciones se prescinde de las dependencias de los términos

## 7.5 Problema de velocidades y aceleraciones.

1 g. d. l.  $\Rightarrow$  1 coordenada independiente  $\Rightarrow$  1 restricción conductora3 coordenadas dependientes  $\Rightarrow$  3 restricciones cinemáticas

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i &= [\theta_2]^T \\ \mathbf{q}_d &= [x_A \quad y_A \quad x_B]^T \end{aligned} \} \Rightarrow \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ x_A \\ y_A \\ x_B \end{Bmatrix}$$



$$\Phi(\mathbf{q}(t), t) = \begin{Bmatrix} x_A - L_2 \cos \theta_2 \\ y_A - L_2 \sin \theta_2 \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - 0)^2 - L_3^2 \\ \theta_2 - \omega t - \theta_{20} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

La matriz Jacobiana:

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} L_2 \sin \theta_2 & 1 & 0 & 0 \\ -L_2 \cos \theta_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2x_A - 2x_B & 2y_A & 2x_B - 2x_A \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_t = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \\ \dot{x}_B \end{Bmatrix}$$

## 7.5 Problema de velocidades y aceleraciones.

El problema de posición es:

$$\Phi(\mathbf{q}(t), t) = \mathbf{0}, \text{ en donde las incógnitas están agrupadas en } \mathbf{q}(t).$$

El problema de velocidad es:

$$\dot{\Phi} = \Phi_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = \mathbf{0}, \text{ en donde las incógnitas están agrupadas en } \dot{\mathbf{q}}.$$

Para obtener la ecuación de aceleración, se deriva la de velocidad:

$$\begin{aligned}\ddot{\Phi} &= \frac{d\dot{\Phi}}{dt} = \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial t} = \\ &= (\Phi_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t)_q \dot{\mathbf{q}} + (\Phi_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t)_t = \\ &= (\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{tq} + \Phi_{qt} + \Phi_q \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{tt} = \mathbf{0} \Rightarrow\end{aligned}$$

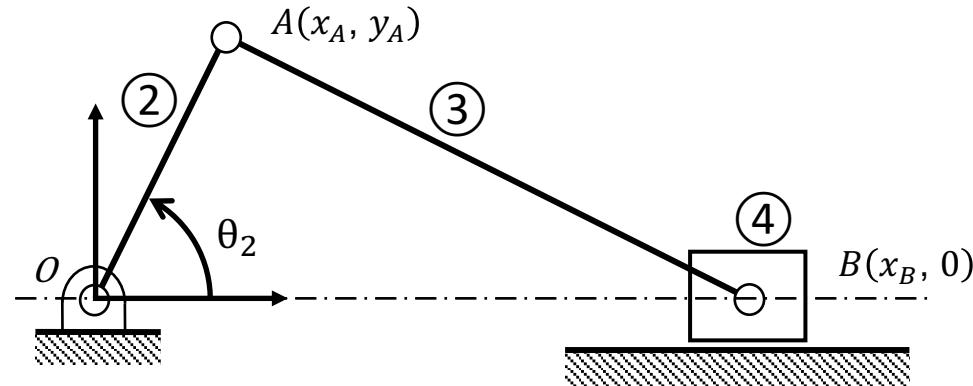
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\Phi} = (\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} + 2\Phi_{tq} + \Phi_q \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{tt} = \mathbf{0}}$$

La solución al problema de aceleración es el vector  $\ddot{\mathbf{q}}$ , que contiene las aceleraciones generalizadas. El problema de aceleración es lineal:

$$\Phi_q \ddot{\mathbf{q}} = - \left( (\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} + 2\Phi_{tq} + \Phi_{tt} \right) = \gamma$$

## 7.5 Problema de velocidades y aceleraciones. Ejemplo.

1 g. d. l.  $\Rightarrow$  1 coordenada independiente  $\Rightarrow$  1 restricción conductora  
3 coordenadas dependientes  $\Rightarrow$  3 restricciones cinemáticas



$$\mathbf{q}_i = [\theta_2]^T \quad \mathbf{q}_d = [x_A \quad y_A \quad x_B]^T \Rightarrow \mathbf{q} = \begin{cases} \theta_2 \\ x_A \\ y_A \\ x_B \end{cases}$$

$$\Phi(\mathbf{q}(t), t) = \begin{cases} x_A - L_2 \cos \theta_2 \\ y_A - L_2 \sin \theta_2 \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - 0)^2 - L_3^2 \\ \theta_2 - \omega t - \theta_{20} \end{cases} = \mathbf{0}$$

$$\Phi_q \ddot{\mathbf{q}} = - \left( (\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} + 2\Phi_{tq} + \Phi_{tt} \right) = \gamma = -(\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{0} + \mathbf{0}$$

$$\Phi_q \dot{\mathbf{q}} = \begin{cases} \dot{\theta}_2 L_2 \sin \theta_2 + \dot{x}_A \\ -\dot{\theta}_2 L_2 \cos \theta_2 + \dot{y}_A \\ 2\dot{x}_A(x_A - x_B) + 2\dot{y}_A y_A + 2\dot{x}_B(x_B - x_A) \\ \dot{\theta}_2 \end{cases} \Rightarrow (\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 L_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{\theta}_2 L_2 \sin \theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\dot{x}_A - 2\dot{x}_B & 2y_A & 2\dot{x}_B - 2\dot{x}_A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Phi_q \ddot{\mathbf{q}} = \gamma = -(\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} = - \begin{cases} \dot{\theta}_2^2 L_2 \cos \theta_2 \\ \dot{\theta}_2^2 L_2 \sin \theta_2 \\ 2\dot{x}_A(\dot{x}_A - \dot{x}_B) + 2\dot{y}_A^2 + 2\dot{x}_B(\dot{x}_B - \dot{x}_A) \\ \dot{\theta}_2 \end{cases} \Rightarrow \ddot{\mathbf{q}} = \begin{cases} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \\ \ddot{x}_B \end{cases}$$