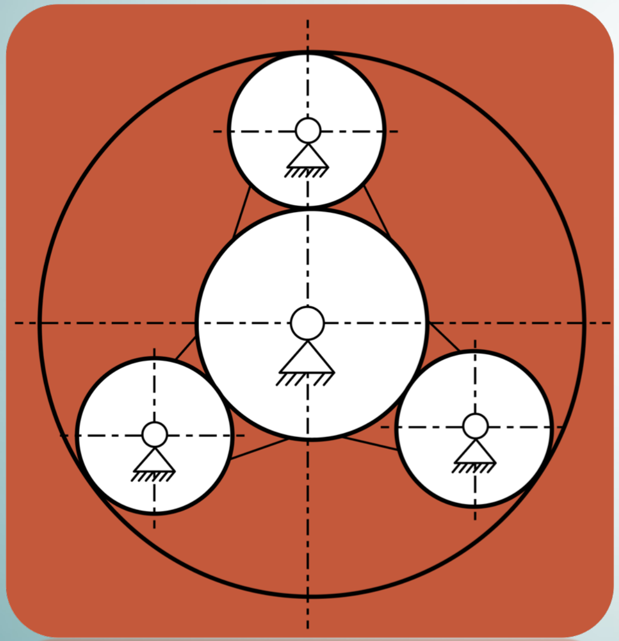
Máquinas y Mecanismos

8. Síntesis Dimensional (I)



Alfonso Fernández del Rincón

Pablo García Fernández

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

Epígrafes del tema

8.1 Introducción a la síntesis de mecanismos

Síntesis | Dimensional

Obtener el mecanismo que realiza una función determinada

Resultado

Dimensiones y orientaciones de los elementos del mecanismo

≠

Análisis

Cómo se comporta el mecanismo

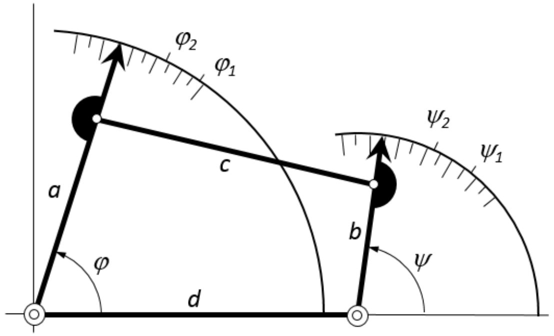
≠

Estructural

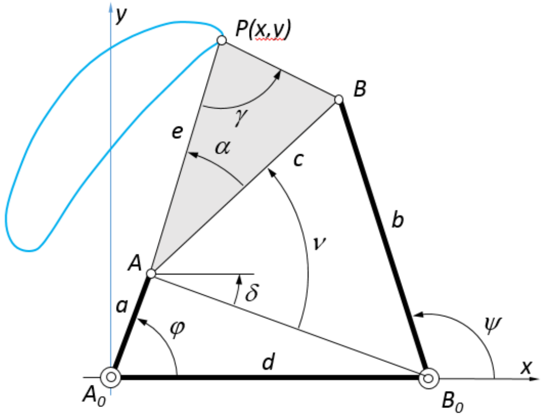
Topología del mecanismo

Tipos de problemas:

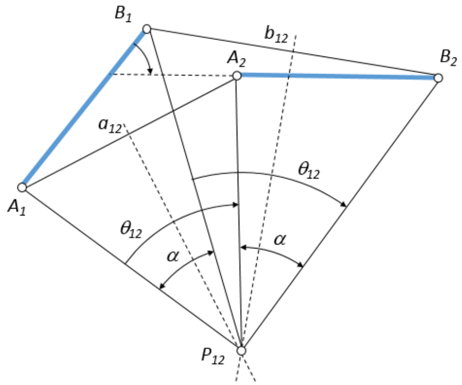
- Síntesis de generación de funciones: Problema de coordinar las barras de entrada y de salida de un mecanismo en un número especificado de posiciones.



- Síntesis de generación de trayectorias: Problema de situar los puntos de las barras e un mecanismo a lo largo de trayectorias preestablecidas.



- Síntesis de guiado de sólido rígido: Problema de situar el acoplador de un mecanismo en un conjunto de posiciones preestablecidas.



Epígrafes del tema

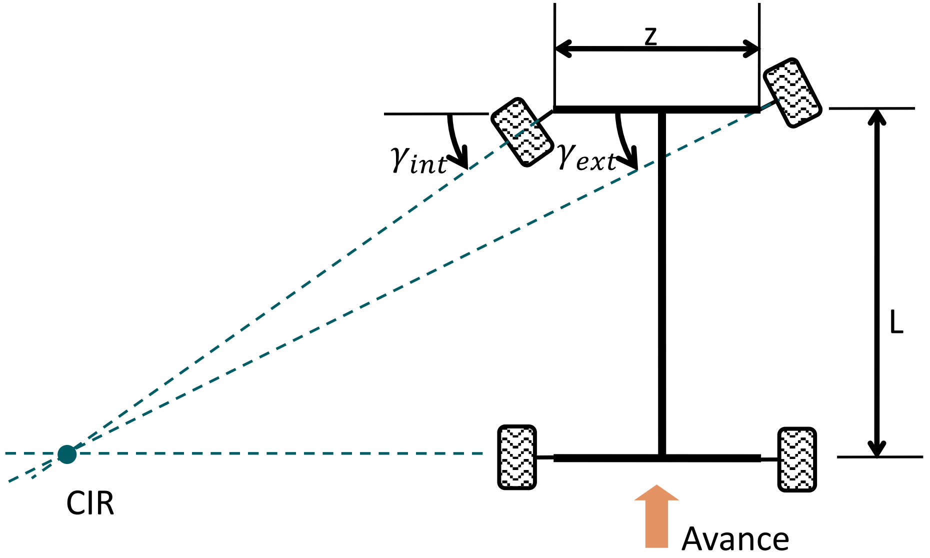
Síntesis de generación de funciones: Problema de coordinar las barras de entrada y de salida de un mecanismo en un número especificado de posiciones.

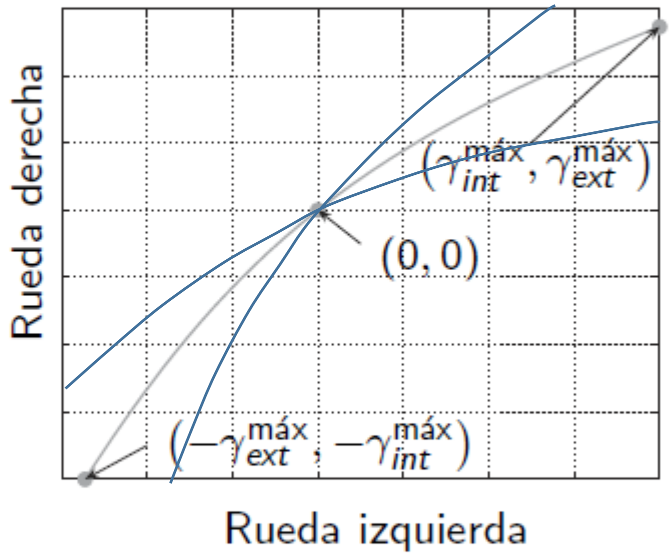
La relación funcional entre la entrada y la salida depende de los parámetros geométricos que lo caracterizan. En el caso del cuadrilátero articulado:

$$f(\varphi, \psi, a, b, c, d) = 0$$

Para cada valor de cada parámetro se obtendrá una relación funcional diferente.

Ejemplo: Mecanismo de dirección de vehículo (Ley de Ackermann)

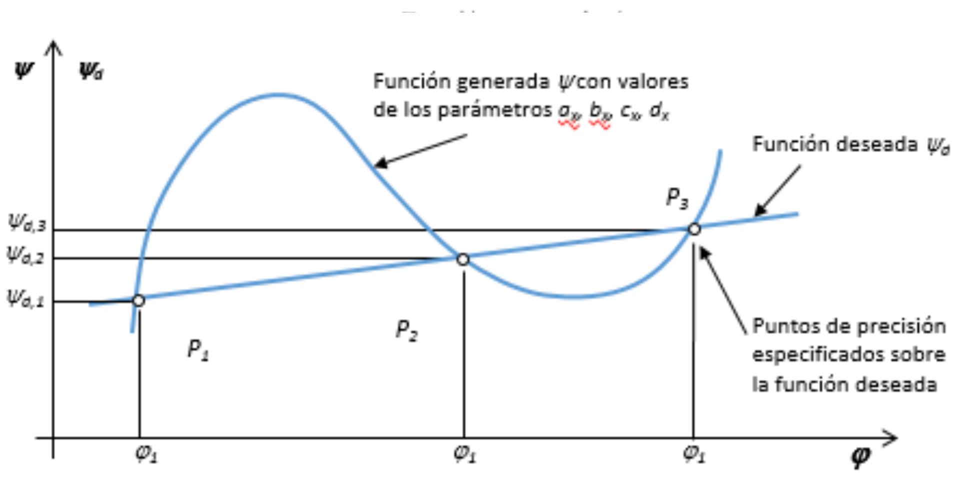


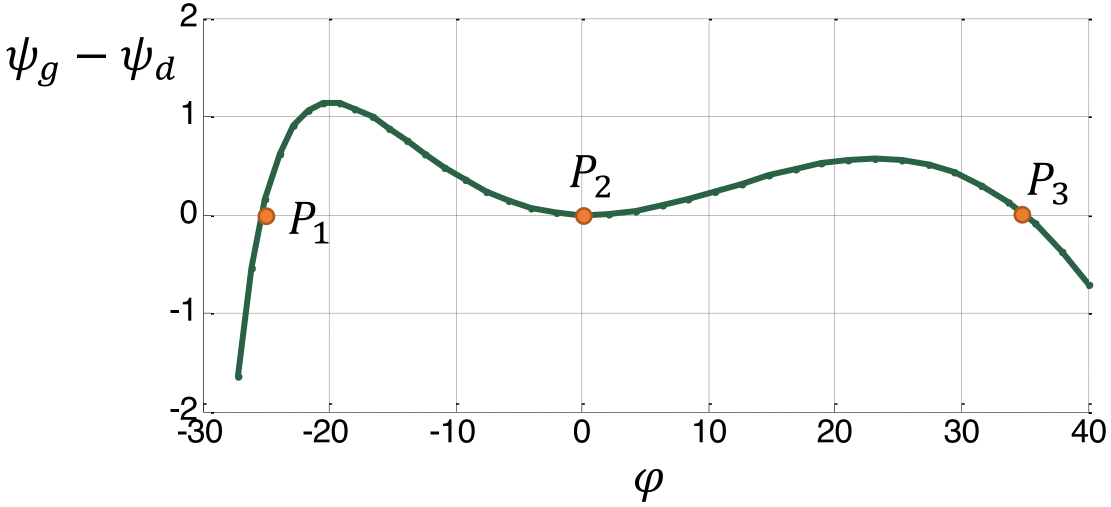


La función deseada puede ser de naturaleza algebraica o transcendente. En el caso del cuadrilátero articulado, la función generada es transcendente, por lo que no se podrá conseguir una algebraica.

Sin embargo, en muchas aplicaciones es suficiente con conseguir que se cumpla la función en una serie de puntos, denominados puntos de precisión.

Se va a estudiar el caso de mecanismos desmodrómicos en los que la curva de salida es plana.





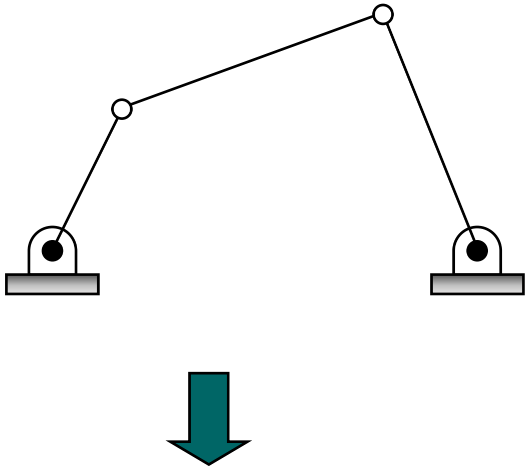
La diferencia entre la función deseada y la función generada se denomina (función de) error estructural.

Epígrafes del tema

La **ecuación de Freudenstein** muestra la relación entre los ángulos de los elementos de entrada y salida del cuadrilátero articulado. Se obtiene escribiendo la ecuación vectorial de cierre:

$$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$$

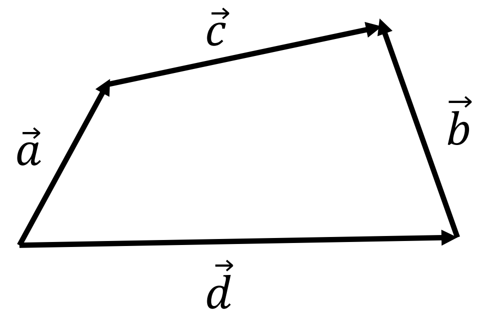
$$ae^{i\varphi} + ce^{i\theta} = be^{i\psi} + d$$



Separando en parte real e imaginaria:

$$\begin{Bmatrix} a\cos\varphi + c\cos\theta = b\cos\psi + d \\ a\sin\varphi + c\sin\theta = b\sin\psi \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} c\cos\theta = -a\cos\varphi + b\cos\psi + d \\ c\sin\theta = -a\sin\varphi + b\sin\psi \end{Bmatrix}$$



Elevando al cuadrado y sumando, se elimina θ:

$$c^2 = a^2 + d^2 + b^2 + 2db\cos\psi - 2ab\cos(\psi - \varphi) - 2da\cos\varphi$$

Y se llega a la Ecuación de Freudenstein:

$$\boxed{K_1\cos\psi - K_2\cos\varphi + K_3 = \cos(\psi - \varphi)}$$

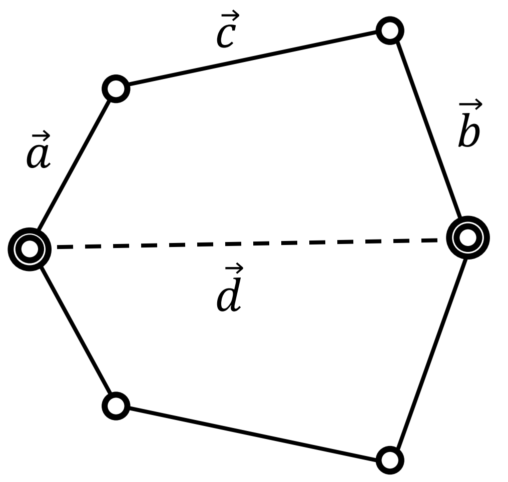
En donde:

$$K_1 = \frac{d}{a};\quad K_2 = \frac{d}{b};\quad K_3 = \frac{a^2 + d^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

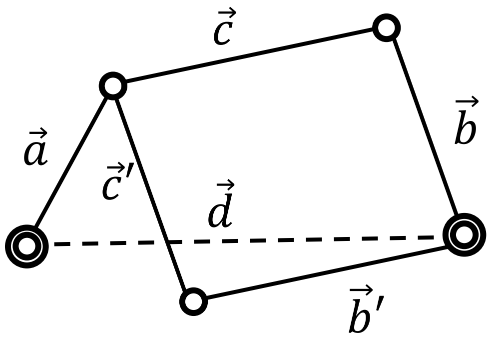
Las incógnitas son los valores de K_i

$$\boxed{K_1 \cos\psi - K_2 \cos\varphi + K_3 = \cos(\psi - \varphi)}$$

Para valores cualesquiera de las constantes K_i, la ecuación de Freudenstein se verifica también si se sustituyen los ángulos por su diferencia a 360º. Es decir, se sustituye el cuadrilátero por su simétrico respecto a la barra fija.



Al elevar al cuadrado, se introduce una solución adicional, es decir, para un valor de φ existen dos de ψ que satisfacen la ecuación.



Los valores de K_i pueden resultar negativos. En ese caso es necesario sumar 180º, ya que K_i representan los módulos y deben ser positivos.

Casos:

a) K_1 y K_2 negativos: sumar 180º a los ángulos φ y ψ.

b) K_1 negativo: sumar 180º al ángulo φ.

c) K_2 negativo: sumar 180º al ángulo ψ.

d) K_3 negativo: sumar 180º al ángulo φ ò ψ. Sólo a uno de los dos.

e) K_1 y K_3 negativos: igual que caso b.

f) K_2 y K_3 negativos: igual que caso c.

g) K_1, K_2 y K_3 negativos: sin solución.

8.3 Ecuación de Freudenstein. Observaciones.

$$\boxed{K_1 \cos\psi - K_2 \cos\varphi + K_3 = \cos(\psi - \varphi)}$$

Se puede obtener la ecuación de Freudenstein para coordinar el movimiento de la barra de entrada con el acoplador:

$$R_1 \cos\psi - R_2 \cos\theta + R_3 = \cos(\psi - \theta)$$

En donde:

$$R_1 = \frac{d}{c}; \quad R_2 = \frac{d}{b}; \quad R_3 = \frac{c^2 + d^2 + b^2 - a^2}{2cb}$$

También se puede coordinar la barra de salida con el acoplador:

$$P_1 \cos\varphi + P_2 \cos\theta - P_3 = \cos(\varphi - \theta)$$

En donde:

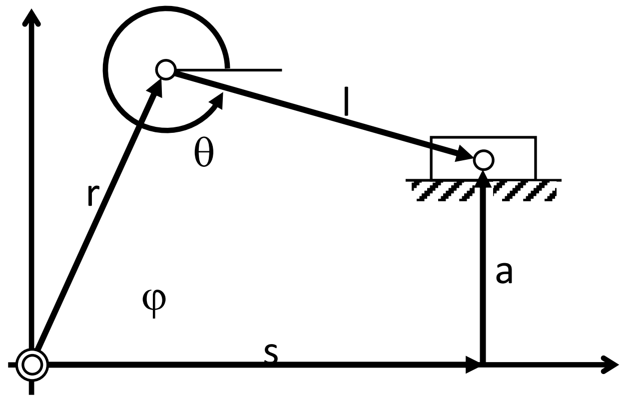
$$P_1 = \frac{d}{c}; \quad P_2 = \frac{d}{a}; \quad P_3 = \frac{c^2 + d^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

Se puede obtener la ecuación de Freudenstein para otros mecanismos distintos del cuadrilátero articulado, como por ejemplo, el biela manivela, siguiendo el mismo procedimiento:

$$K_1 s \cos\varphi + K_2 \sin\varphi - K_3 = s^2$$

En donde

$$K_1 = 2r; K_2 = 2ar; K_3 = a^2 + r^2 - l^2$$



Epígrafes del tema

8.1 Introducción a la síntesis dimensional de mecanismos.

8.2 Síntesis de generación de funciones.

8.3 Ecuación de Freudenstein.

8.4 Síntesis con tres puntos de precisión.

8.5 Aumento del número de puntos de precisión.

8.6 Derivadas de precisión.

8.7 Síntesis aproximada de generación de funciones.

8.4 Síntesis con tres puntos de precisión

Con la ecuación de Freudenstein se pueden obtener las longitudes de las barras de un cuadrilátero articulado de tal forma que exista una coordinación entre los elementos de entrada y salida en tres posiciones determinadas:

φ	φ_1	φ_2	φ_3
ψ	ψ_1	ψ_2	ψ_3

Se sustituyen los valores en la ecuación de Freudenstein obteniendo el siguiente sistema:

$$K_1 \cos\psi_1 - K_2 \cos\varphi_1 + K_3 = \cos(\psi_1 - \varphi_1)$$
$$K_1 \cos\psi_2 - K_2 \cos\varphi_2 + K_3 = \cos(\psi_2 - \varphi_2)$$
$$K_1 \cos\psi_3 - K_2 \cos\varphi_3 + K_3 = \cos(\psi_3 - \varphi_3)$$

Cuyas incógnitas son los coeficientes K_1, K_2 y K_3, que se resuelven fácilmente, dado que es un sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} \cos\psi_1 & -\cos\varphi_1 & 1 \\ \cos\psi_2 & -\cos\varphi_2 & 1 \\ \cos\psi_3 & -\cos\varphi_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\psi_1 - \varphi_1) \\ \cos(\psi_2 - \varphi_2) \\ \cos(\psi_3 - \varphi_3) \end{Bmatrix}$$

Entonces, se pueden hallar las longitudes de las barras, dando un valor arbitrario a uno de ellos:

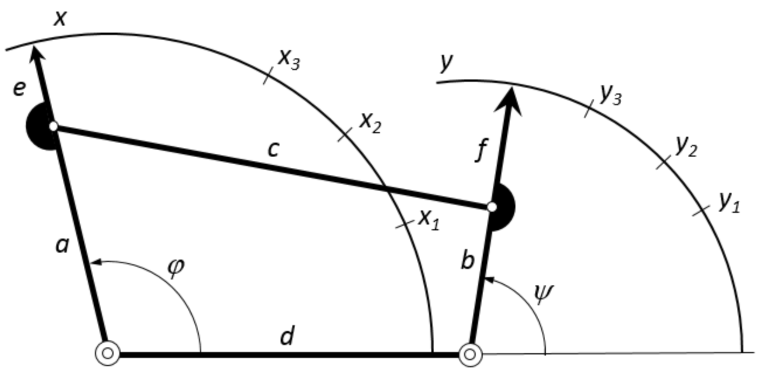
$$K_1 = \frac{d}{a}; \quad K_2 = \frac{d}{b}; \quad K_3 = \frac{a^2 + d^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

El tamaño del mecanismo dependerá de la magnitud dada al parámetro con valor arbitrario, por lo tanto, el sistema tiene infinitas soluciones.

8.4 Síntesis con tres puntos de precisión. Factores de escala

Si se quieren relacionar los arcos abarcados por las barras de entrada y salida en vez de los ángulos girados, se deben sustituir los valores angulares por los arcos:

$$\varphi = \frac{x}{a+e} = k_\varphi x \qquad \psi = \frac{y}{b+f} = k_\psi y$$



Siendo k_φ y k_ψ los factores de escala. La ecuación de Freudenstein quedará de la siguiente forma:

$$K_1 \cos k_\psi y - K_2 \cos k_\varphi x + K_3 = \cos(k_\psi y - k_\varphi x)$$

Los factores de escala suelen fijarse de antemano, sin que ello afecte a a y b, dado que involucran a e y f.

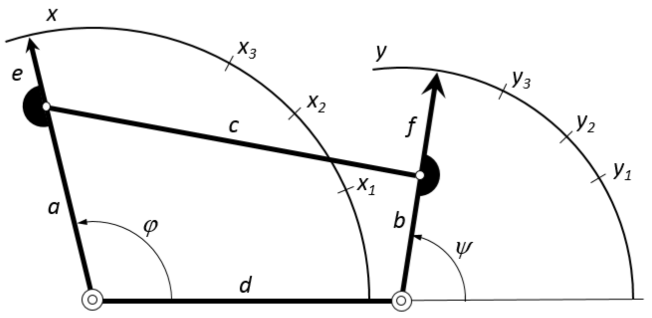
Procedimiento de síntesis:

1. Se calculan los puntos y_1, y_2, y_3 a partir de x_1, x_2, x_3.
2. Con el cambio de escala se determinan $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ y ψ_1, ψ_2, ψ_3, para lo que se deben estimar k_φ y k_ψ.
3. Se resuelve el problema para los tres puntos de precisión obteniendo el valor de las constantes K_1, K_2, K_3.
4. Se calculan los parámetros a, b, c, d y mediante k_φ y k_ψ los parámetros e y f.
5. Si las proporciones del mecanismo son anormales, se estiman nuevos factores de escala y se repite el proceso.

Epígrafes del tema

8.5 Aumento del número de puntos de precisión

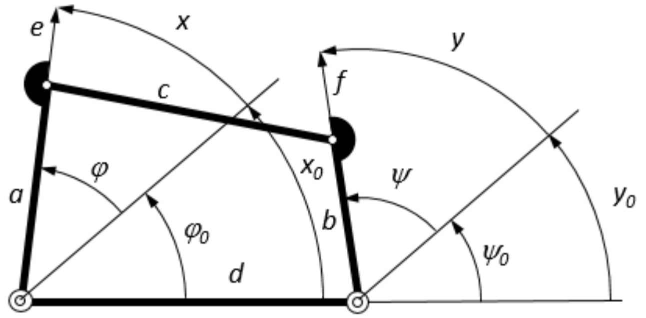
Síntesis con cuatro puntos de precisión: Los arcos se describen directamente con las barras de entrada y salida, prescindiendo de los los parámetros e y f. No se pueden fijar los factores de escala, porque equivaldría a fijar los parámetros a y b. En este caso se emplea un sistema de ecuaciones:



$$2bd\cos\frac{y_i}{b} - 2ad\cos\frac{x_i}{a} - 2ab\cos\left(\frac{y_i}{b} - \frac{x_i}{a}\right) + d^2 + b^2 + a^2 - c^2 = 0 \qquad i = 1, \dots, 4$$

En donde se conocen los valores de x_i e y_i y las incógnitas son a, b, c, d.

Síntesis con cinco puntos de precisión: Si se consideran dos valores de referencia para medir los ángulos, se puede aumentar el número de puntos de precisión a 5. En este caso se necesitan 5 pares de valores φ_i e ψ_i y las incógnitas serán: $K_1, K_2, K_3, \varphi_0, \psi_0$. La ecuación de Freudenstein queda:



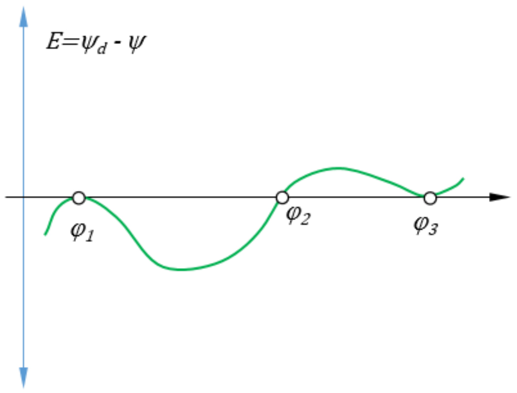
$$K_1\cos(\psi_i + \psi_0) - K_2\cos(\varphi_i + \varphi_0) + K_3 = \cos(\psi_i + \psi_0 - \varphi_i - \varphi_0) \qquad i = 1, \dots, 5$$

Síntesis con seis puntos de precisión: Si se consideran dos valores de referencia para medir los arcos, se puede aumentar el número de puntos de precisión a 6. En este caso se necesitan 6 pares de valores x_i e y_i y las incógnitas serán:a, b, c, d, x_0, y_0. La ecuación de Freudenstein queda:

$$2bd\cos\left(\frac{y_i}{b} + \frac{y_0}{b}\right) - 2ad\cos\left(\frac{x_i}{a} + \frac{x_0}{a}\right) - 2ab\cos\left(\frac{y_i}{b} + \frac{y_0}{b} - \frac{x_i}{a} - \frac{x_0}{a}\right) + d^2 + b^2 + a^2 - c^2 = 0 \qquad i = 1, \dots, 6$$

Epígrafes del tema

Síntesis con derivadas de precisión: Para algunas aplicaciones puede ser necesario que, además de que el mecanismo corte a la función deseada en algunos puntos de precisión, que en dichos puntos las primeras o sucesivas derivadas coincidan.



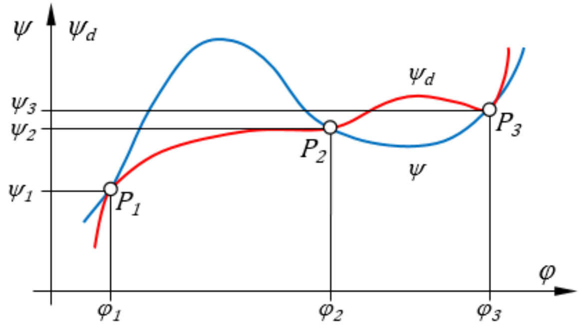
Con cada condición adicional de derivada de precisión impuesta, se debe disminuir un punto de precisión, dado que el número de parámetros de diseño es constante.

Para hacer la síntesis con derivadas de precisión, se deriva la ecuación de Freudenstein. En el caso del cuadrilátero articulado:

$$K_1 \cos\psi - K_2 \cos\varphi + K_3 = \cos(\psi - \varphi)$$

$$K_1 \frac{d\psi}{d\varphi} \sin\psi - K_2 \sin\varphi = \left(\frac{d\psi}{d\varphi} - 1\right) \sin(\psi - \varphi)$$

$$K_1 \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} \sin\psi + K_1 \left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2 \cos\psi - K_2 \cos\varphi = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} \sin(\psi - \varphi) + \left(\frac{d\psi}{d\varphi} - 1\right)^2 \cos(\psi - \varphi)$$



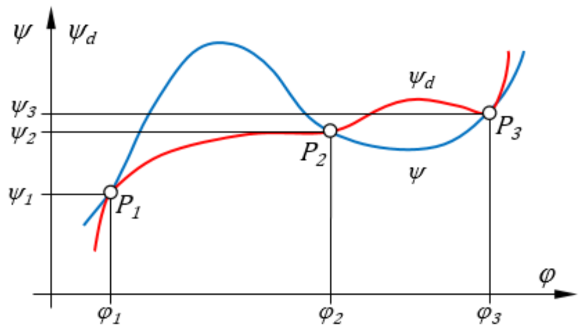
Las derivadas de precisión se pueden identificar con las velocidades y aceleraciones angulares:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \omega_2 = \frac{d\psi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{d\psi}{d\varphi}\omega_1$$

$$\alpha_1 = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \alpha_2 = \frac{d^2\psi}{dt^2} \quad \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{d\psi}{d\varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}\omega_1^2 + \frac{d\psi}{d\varphi}\alpha_1$$

Procedimiento:

- Se quieren obtener:
  - X puntos de precisión (posiciones o arcos).
  - En Y de esos X puntos, las derivadas primeras deben coincidir con la función deseada.
  - En Z de esos X puntos, las derivadas segundas deben coincidir con la función deseada.
- Se escriben las X ecuaciones para esos puntos y las Y y Z para sus derivadas.
- Se debe cumplir que la suma de ecuaciones coincida con el número de parámetros de diseño.



Ejemplo: Dos puntos de precisión y la primera derivada en el primer punto:

$$K_1 \cos\psi_1 - K_2 \cos\varphi_1 + K_3 = \cos(\psi_1 - \varphi_1)$$

$$K_1 \cos\psi_2 - K_2 \cos\varphi_2 + K_3 = \cos(\psi_2 - \varphi_2)$$

$$K_1 \left.\frac{d\psi}{d\varphi}\right|_{\varphi_1} \sin\psi_1 - K_2 \sin\varphi_1 = \left(\left.\frac{d\psi}{d\varphi}\right|_{\varphi_1} - 1\right)\sin(\psi_1 - \varphi_1)$$

Epígrafes del tema

Hasta ahora se han visto métodos exactos de síntesis. Sin embargo, tienen grandes limitaciones:

- Reducido número de puntos (y derivadas) de precisión.
- Debido a errores, holguras, montaje, mecanizado… pueden no ser exactas.

Por esa razón se utilizan métodos numéricos de optimización para realizar síntesis aproximadas. Consiste en minimizar una función de error de síntesis, o función objetivo, respecto a una serie de variables de diseño.

A continuación se describen brevemente los elementos necesarios para definir un problema de síntesis aproximada que se resolverá mediante un método de optimización:

- Las incógnitas del problema de síntesis son las variables de diseño $\mathbf{z}$. Para mecanismos de barras son las dimensiones (y orientaciones) de los elementos que componen el mecanismo.
- En el tema 7 se ha explicado cómo modelizar un mecanismo mediante métodos numéricos: Se necesitan un conjunto de coordenadas generalizadas $\mathbf{q}(\mathbf{z},t) = \{q_1 \quad \cdots \quad q_n\}^T$ y un conjunto de ecuaciones de restricción $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}(\mathbf{z},t),\mathbf{z},t) = \mathbf{0}$.
- Al conjunto de coordenadas $\mathbf{q}$ se añadirán más coordenadas denominadas parámetros funcionales $\boldsymbol{\delta}$. En el caso plano se pueden añadir un máximo de 3 parámetros funcionales por elemento del mecanismo $\boldsymbol{\delta}_i = \{x_i \quad y_i \quad \theta_i\}$. Sirven para definir las posiciones de precisión de manera directa.

- Por cada parámetro funcional, se debe añadir una ecuación de restricción adicional, denominadas restricciones de síntesis $\mathbf{\Phi}_s(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{q}(\mathbf{z}, t), \mathbf{z}, t) = \mathbf{0}$, que se deben cumplir de la misma manera que las ecuaciones de restricción.

- También se pueden añadir otro conjunto de restricción en forma de desigualdad para, por ejemplo, limitar el tamaño de los elementos $\mathbf{g}(\mathbf{z}) \leq 0$.

- El error de síntesis se define como la diferencia entre los parámetros funcionales generados y deseados: $\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\delta}_i) = \boldsymbol{\delta}_{ig} - \boldsymbol{\delta}_{id}$.

- La función objetivo, denominada Función de Error de Síntesis se define como $FES = {}^1/_2 \sum_{i=1}^{npos} \boldsymbol{\varepsilon}_i^T(\boldsymbol{\delta}_i)\mathbf{v}_i\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\delta}_i)$. En esta función aparece la matriz de coeficientes de ponderación $\mathbf{v}_i$ que se utiliza para dar un peso relativo a cada posición de precisión en caso de que sea necesario.

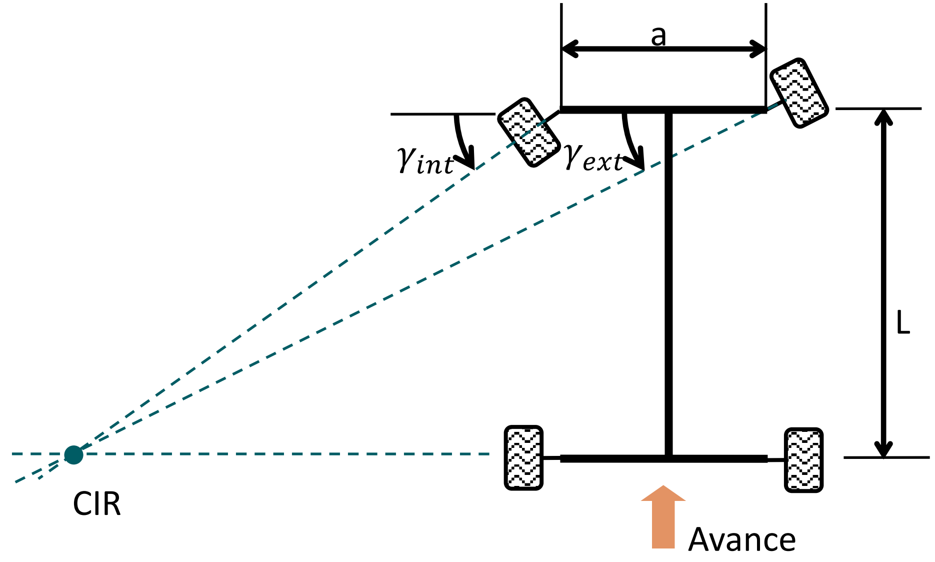
Con todo lo anterior, el problema queda definido de la siguiente manera:

$$\min_{\mathbf{z}} {}^1/_2 \sum_{i=1}^{npos} \boldsymbol{\varepsilon}_i^T(\delta_i)\nu_i\boldsymbol{\varepsilon}_i(\delta_i)$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} \mathbf{\Phi}(\mathbf{q}(\mathbf{z}, t), \mathbf{z}, t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_s(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{q}(\mathbf{z}, t), \mathbf{z}, t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{z}) \leq 0 \end{cases}$$

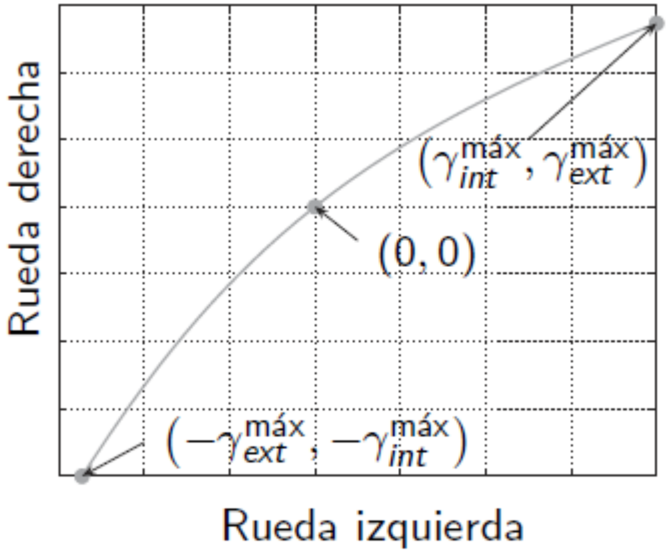
Para resolverlo se deberá aplicar un método de optimización.

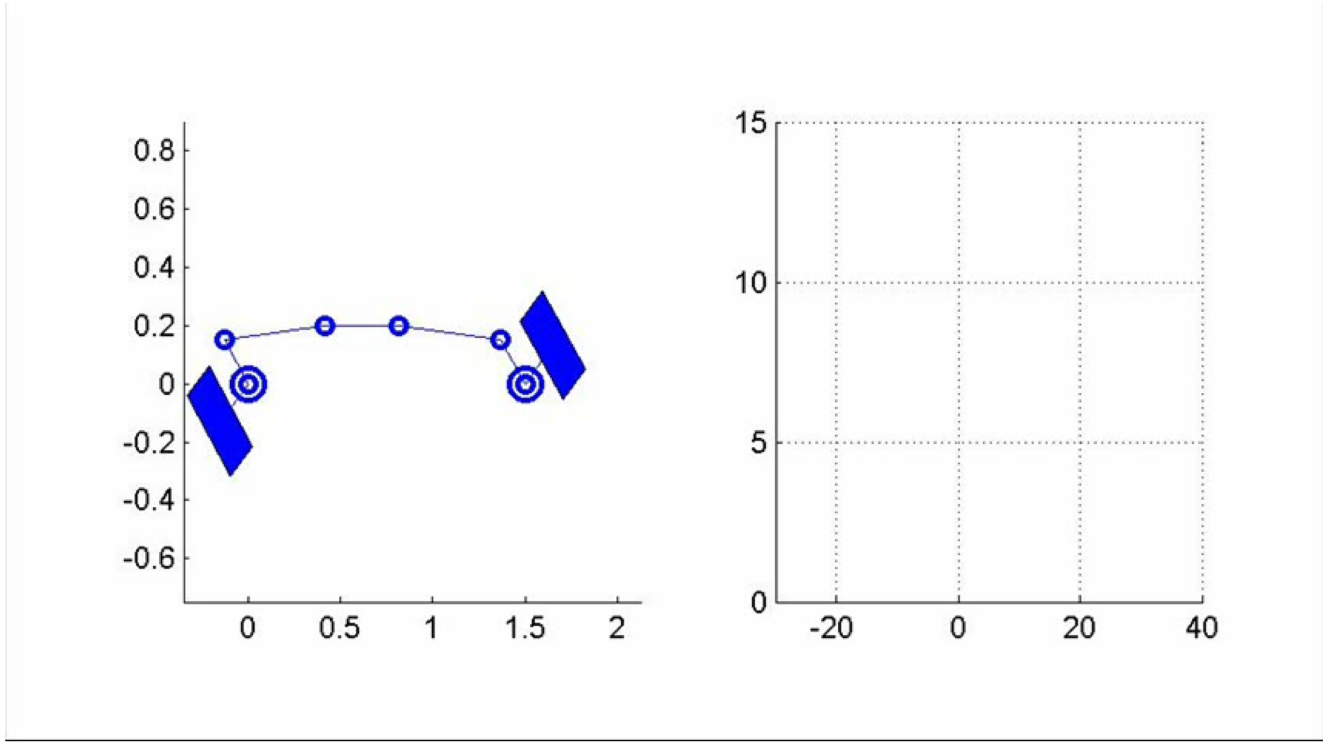
A continuación se muestra un ejemplo aplicado al diseño de mecanismos de dirección de automóviles.



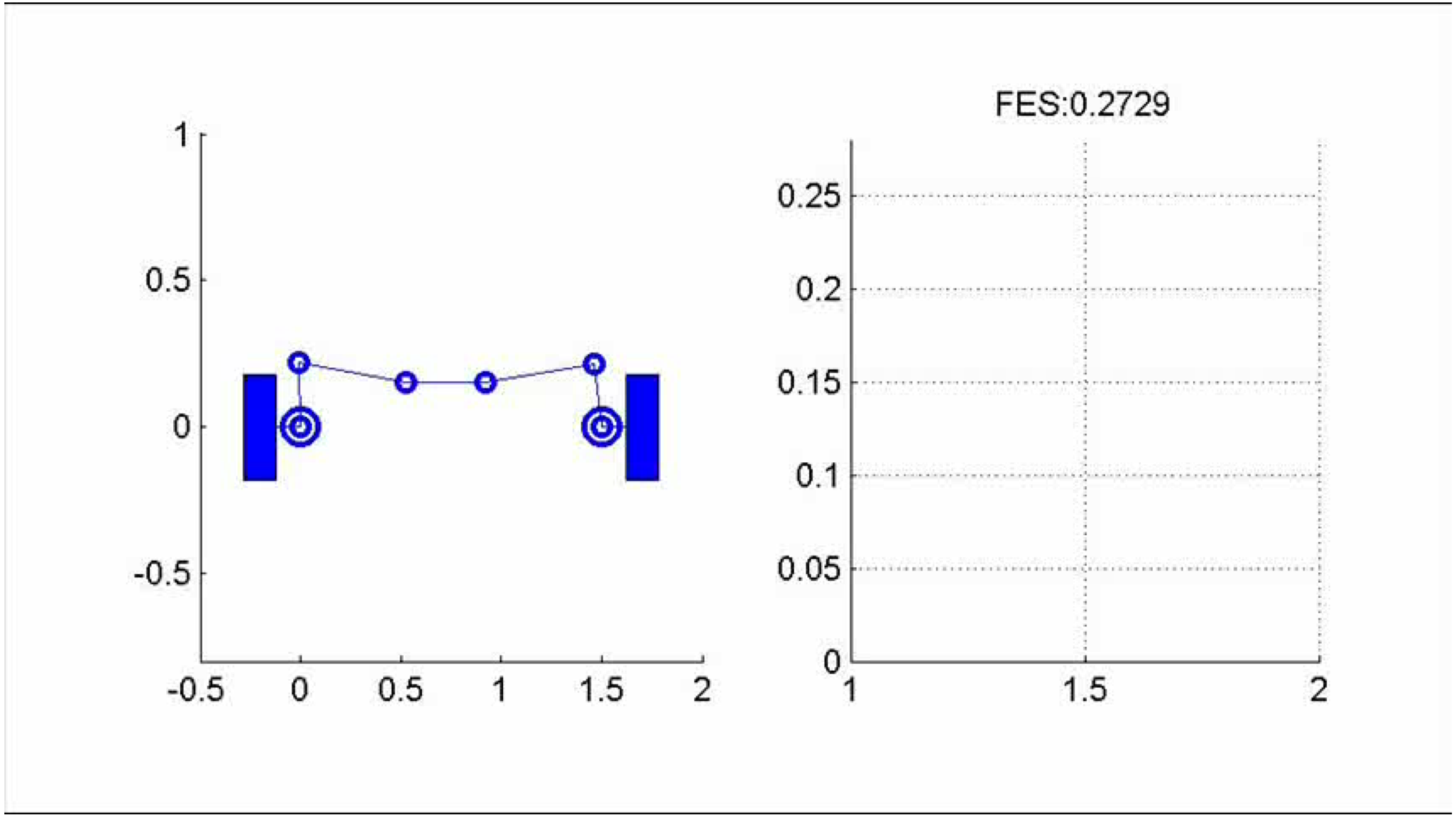
Ley de Ackermann:

$$\gamma_{ext} = \tan^{-1} \frac{1}{\cot \gamma_{int} + \frac{a}{L}}$$





A continuación se muestra un ejemplo aplicado al diseño de mecanismos de dirección de automóviles.



A continuación se muestra un ejemplo aplicado al diseño de mecanismos de dirección de automóviles.