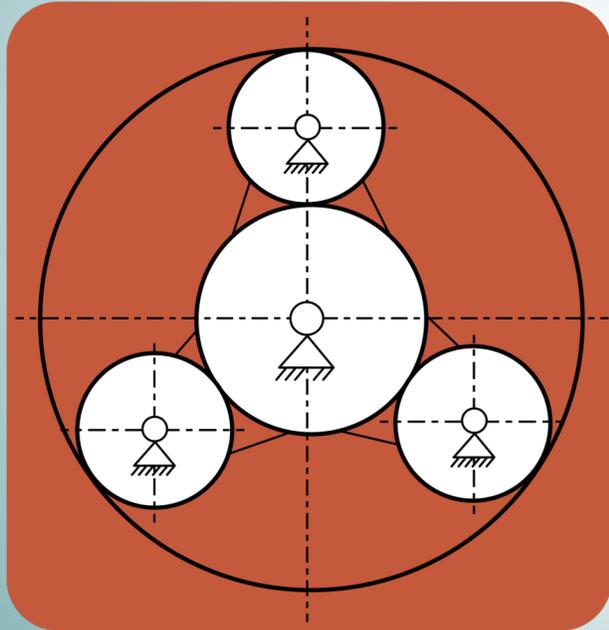


Máquinas y Mecanismos

9. Síntesis Dimensional (II)



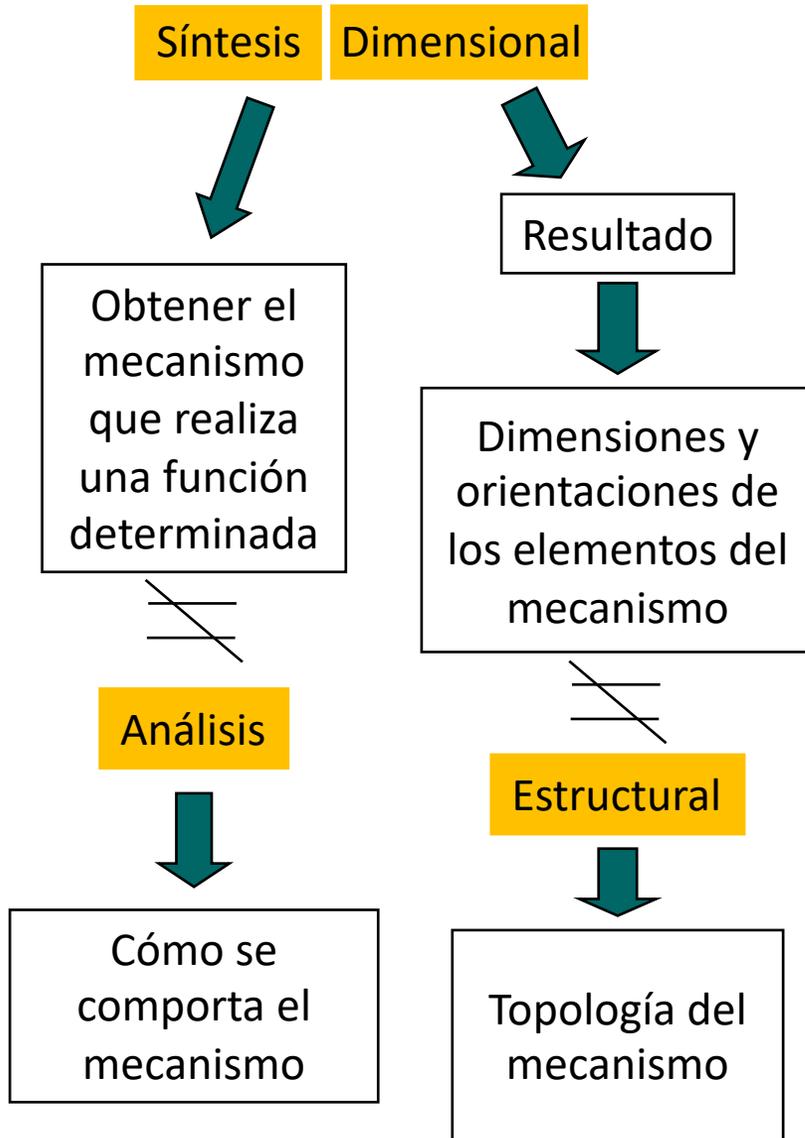
Alfonso Fernández del Rincón
Pablo García Fernández

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

Este material se publica bajo licencia:

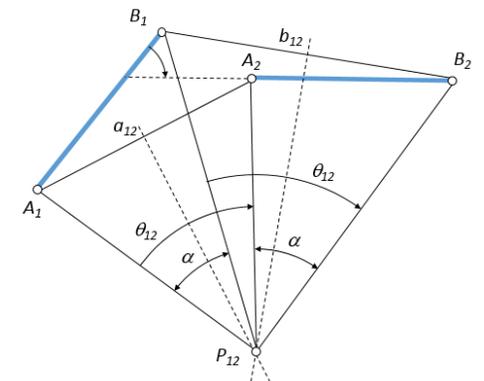
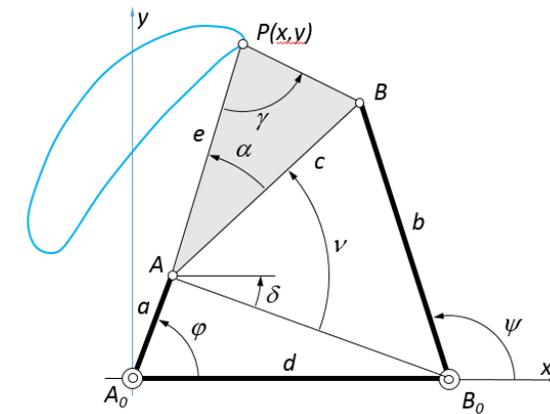
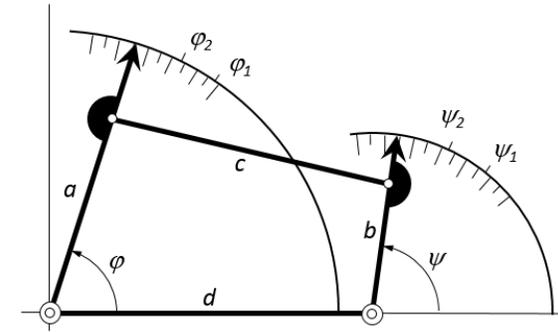
[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)





Tipos de problemas:

- Síntesis de generación de funciones: Problema de coordinar las barras de entrada y de salida de un mecanismo en un número especificado de posiciones.
- Síntesis de generación de trayectorias: Problema de situar los puntos de las barras e un mecanismo a lo largo de trayectorias preestablecidas.
- Síntesis de guiado de sólido rígido: Problema de situar el acoplador de un mecanismo en un conjunto de posiciones preestablecidas.

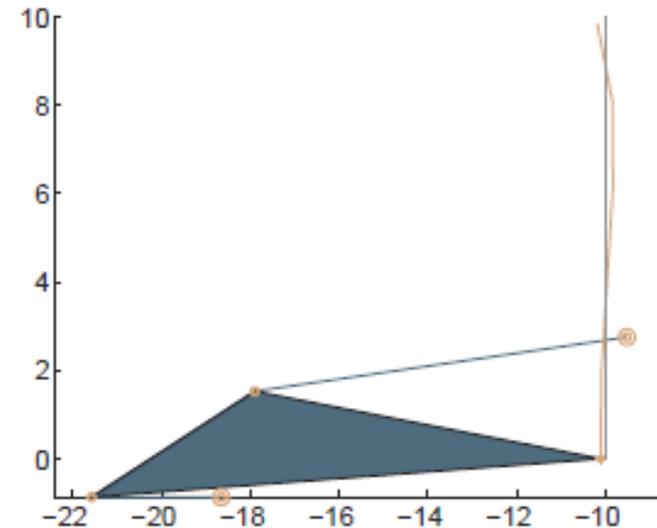
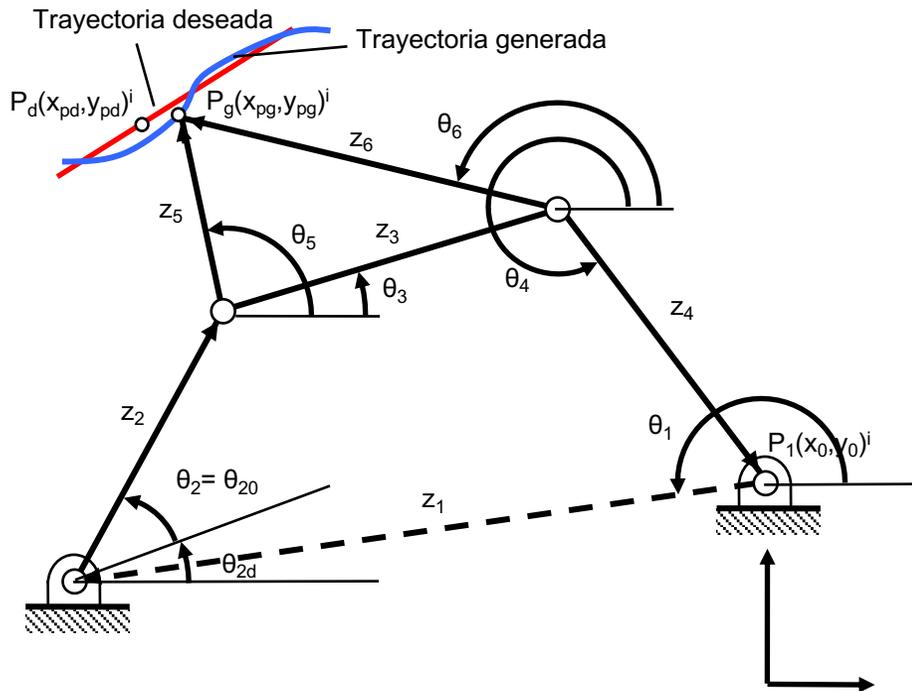


Epígrafes del tema

- 9.1 Síntesis de generación de trayectorias.
- 9.2 Curvas del acoplador del cuadrilátero articulado.
- 9.3 Propiedades de las curvas del acoplador del cuadrilátero articulado.
- 9.4 Generación de trayectorias mediante puntos de precisión.
- 9.5 Generación de trayectorias con tramos casi rectilíneos.
- 9.6 Síntesis de mecanismos cognados.
- 9.7 Síntesis de guiado de sólido rígido.
- 9.8 Síntesis aproximada de generación de trayectorias.

Síntesis de generación de trayectorias: Parte de la síntesis de mecanismos que estudia la correspondencia de las trayectorias descritas por puntos pertenecientes a las barras de un mecanismo durante su movimiento, con otras trayectorias especificadas.

En este tema se presta especial atención a la síntesis de generación de trayectorias del cuadrilátero articulado, por ser uno de los mecanismos más sencillos y más utilizados.



Dado que se va a aplicar la síntesis de generación de trayectorias al mecanismo cuadrilátero articulado, es necesario estudiar previamente el tipo de curvas que este sistema puede generar. Por esta razón se estudian a continuación las curvas del acoplador:

$$\vec{p} = \vec{a} + \vec{e} \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos \varphi + e \cos(\alpha + \theta) \\ y = a \sin \varphi + e \sin(\alpha + \theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cos \varphi = x - e \cos(\alpha + \theta) \\ a \sin \varphi = y - e \sin(\alpha + \theta) \end{cases} (*)$$

$$\vec{p} = \vec{d} + \vec{b} + \vec{f} \Rightarrow \begin{cases} x = d + b \cos \psi + f \cos(\gamma + \alpha + \theta) \\ y = b \sin \psi + f \sin(\gamma + \alpha + \theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \cos \psi = x - d - f \cos(\gamma + \alpha + \theta) \\ b \sin \psi = y - f \sin(\gamma + \alpha + \theta) \end{cases} (**)$$

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (*) y (**):

$$a^2 = x^2 + y^2 + e^2 - 2xe \cos(\alpha + \theta) - 2ye \sin(\alpha + \theta)$$

$$b^2 = f^2 + (x - d)^2 + y^2 - 2(x - d)f \cos(\gamma + \alpha + \theta) - 2fy \sin(\gamma + \alpha + \theta)$$

Operando y reordenando queda:

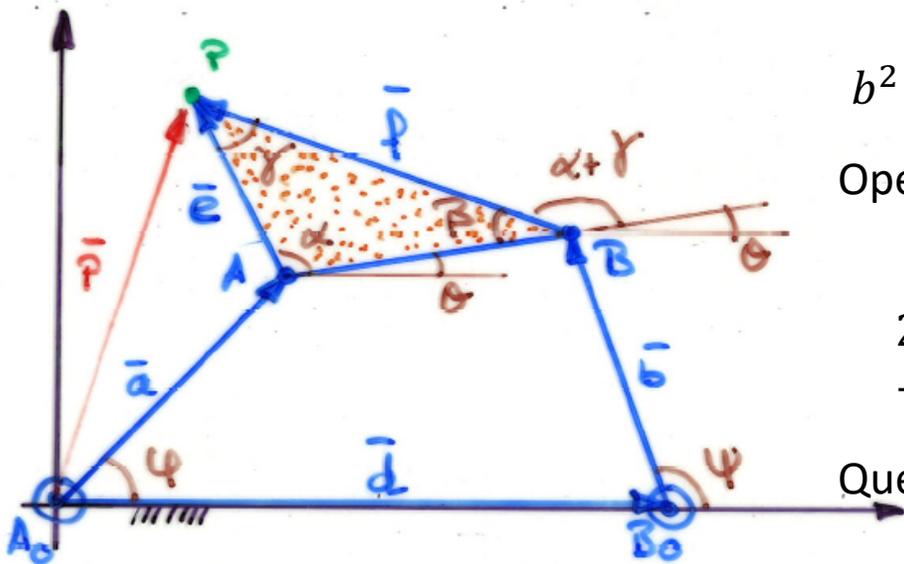
$$2ex \cos(\alpha + \theta) + 2ey \sin(\alpha + \theta) = x^2 + y^2 + e^2 - a^2$$

$$2f((x - d) \cos(\gamma) + y \sin(\gamma)) \cos(\alpha + \theta) + 2f(y \cos(\gamma) - (x - d) \sin(\gamma)) \sin(\alpha + \theta) = (x - d)^2 + y^2 + f^2 - b^2$$

Que se puede escribir también:

$$2A \cos(\alpha + \theta) + 2B \sin(\alpha + \theta) = M$$

$$2C \cos(\alpha + \theta) + 2D \sin(\alpha + \theta) = N$$



Aplicando la regla de Cramer se puede despejar $\cos(\alpha + \theta)$ y $\sin(\alpha + \theta)$, y elevando al cuadrado y sumando términos se obtiene:

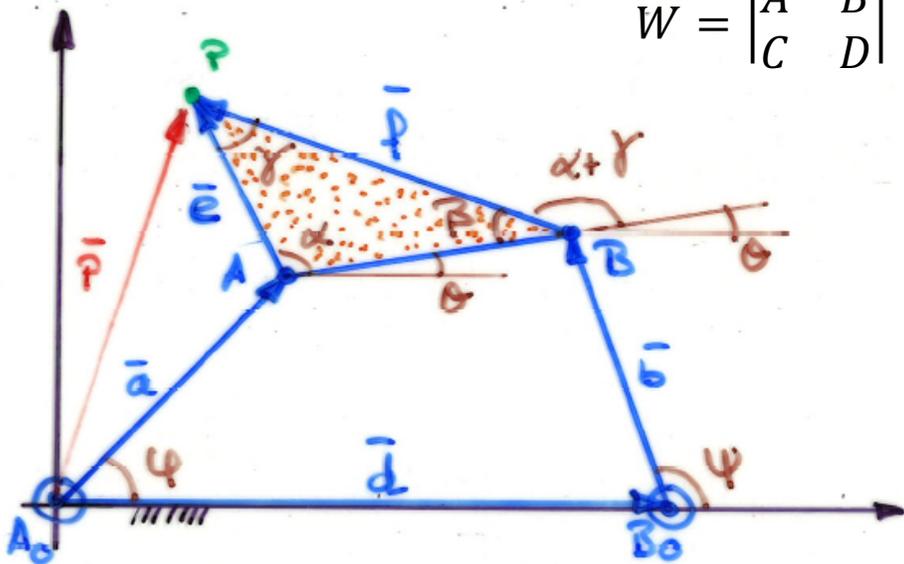
$$U^2 + V^2 = W^2$$

En donde:

$$U = \begin{vmatrix} A & M \\ C & N \end{vmatrix} = ex((x-d)^2 + y^2 + f^2 - b^2) - f(y \sin \gamma + (x-d) \cos \gamma)(x^2 + y^2 + e^2 - a^2)$$

$$V = \begin{vmatrix} M & B \\ N & D \end{vmatrix} = f(y \cos \gamma - (x-d) \sin \gamma)(x^2 + y^2 + e^2 - a^2) - ey((x-d)^2 + y^2 + f^2 - b^2)$$

$$W = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 2ef(dy \cos \gamma - (x(x-d) + y^2) \sin \gamma)$$



U y V son funciones de grado 3 y W es de grado 2. Por lo tanto, la ecuación $U^2 + V^2 = W^2$ es de grado 6 ó séxtica.

A continuación se explican las implicaciones de esta curva y sus propiedades.

Epígrafes del tema

- 9.1 Síntesis de generación de trayectorias.
- 9.2 Curvas del acoplador del cuadrilátero articulado.
- 9.3 Propiedades de las curvas del acoplador del cuadrilátero articulado.
- 9.4 Generación de trayectorias mediante puntos de precisión.
- 9.5 Generación de trayectorias con tramos casi rectilíneos.
- 9.6 Síntesis de mecanismos cognados.
- 9.7 Síntesis de guiado de sólido rígido.
- 9.8 Síntesis aproximada de generación de trayectorias.

1. Con el sistema de referencia empleado (la barra d coincide con el eje OX y una articulación fija en el origen), la ecuación de la trayectoria depende de 6 parámetros:

$$G(x, y, \underbrace{a, b, c, d, e, f}) = 0$$

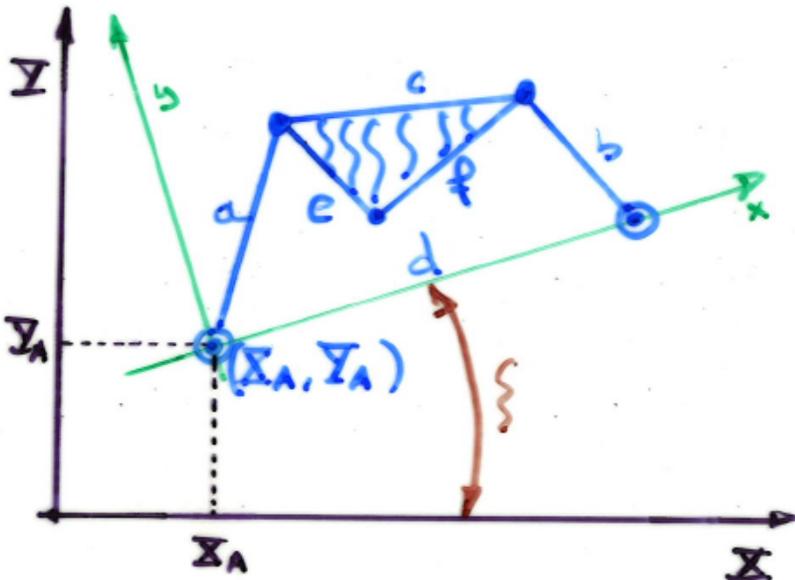
En lugar de tomar d, e, f se pueden considerar otros tres parámetros cualesquiera que definan el triángulo.

2. La curva del acoplador no depende del tiempo.
3. Para un sistema de referencia más general, la ecuación e la trayectoria depende de 9 parámetros:

$$G(\underbrace{X, Y, X_A, Y_A, \xi, a, b, c, d, e, f}) = 0$$

Ambos sistemas se pueden relacionar mediante una sencilla transformación de coordenadas:

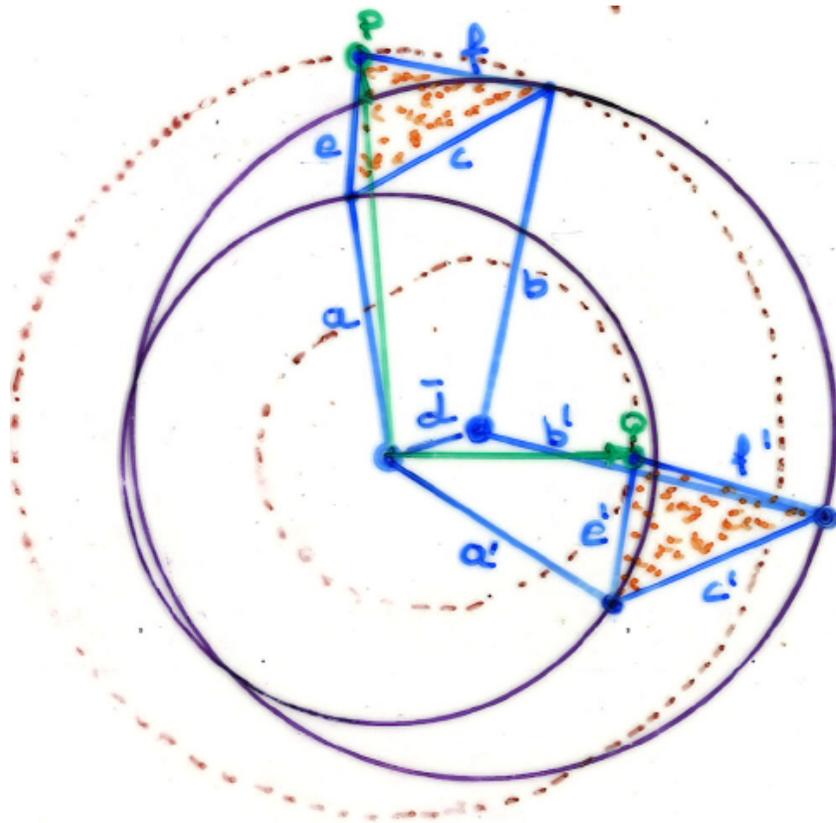
$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi & X_A \\ -\sin \xi & \cos \xi & Y_A \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{X\} = [T]\{x\}$$



4. La ecuación de la trayectoria se ha obtenido a partir de una ecuación vectorial que se ha elevado al cuadrado para poder despejar. Esta operación en realidad es equivalente a tomar módulos en las ecuaciones correspondientes, de tal forma que:

$$a^2 = |\vec{p} - \vec{e}|$$

$$b^2 = |\vec{p} - \vec{d} - \vec{f}|$$



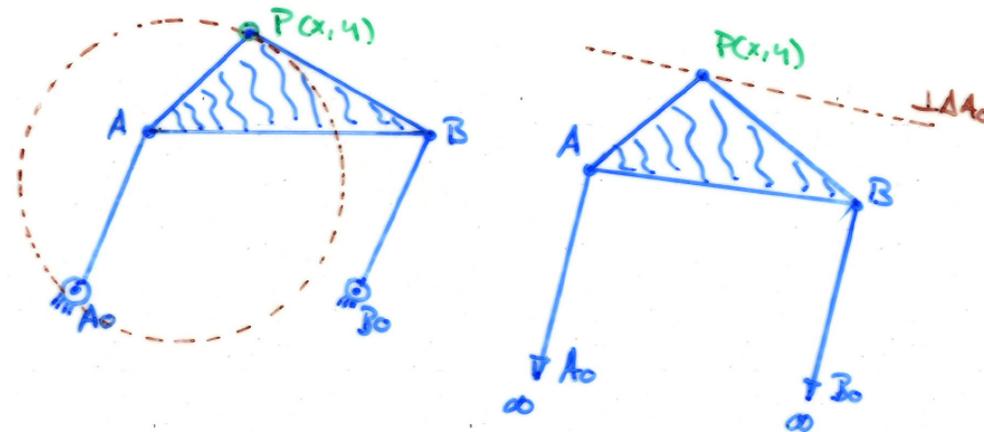
Existen dos soluciones con los triángulos del acoplador iguales y paralelos y con las mismas longitudes de las manivelas.

Por lo tanto, la ecuación de la trayectoria de un punto del acoplador del cuadrilátero articulado tendrá dos ramas cerradas a no ser que en su movimiento ocupe las dos posiciones indicadas, en cuyo caso no cumplirá Grashoff.

Es decir: los puntos que verifican la ecuación $U^2 + V^2 = W^2$ pueden ser:

- Dos curvas cerradas. El cuadrilátero cumple Grashoff.
- Una curva cerrada. El cuadrilátero no cumple Grashoff.

- La intersección de una recta con la curva del acoplador tendrá lugar como máximo en 6 puntos según el Teorema de Bezout: *Dos curvas algebraicas de grados m y n tienen mn puntos de intersección contando los reales e imaginarios.* Conclusión: no es posible imponer a un cuadrilátero una síntesis de trayectorias con más de 6 puntos de precisión alineados.
- Es posible que la curva del acoplador degenerere en una curva de grado inferior, como una recta o una circunferencia, pero si esto sucede, entonces toda la curva degenerada es de ese grado. Por lo tanto, no es posible que una curva de acoplador esté formada por un tramo recto y otro curvo, o por un arco de circunferencia y un tramo curvo de grado seis.

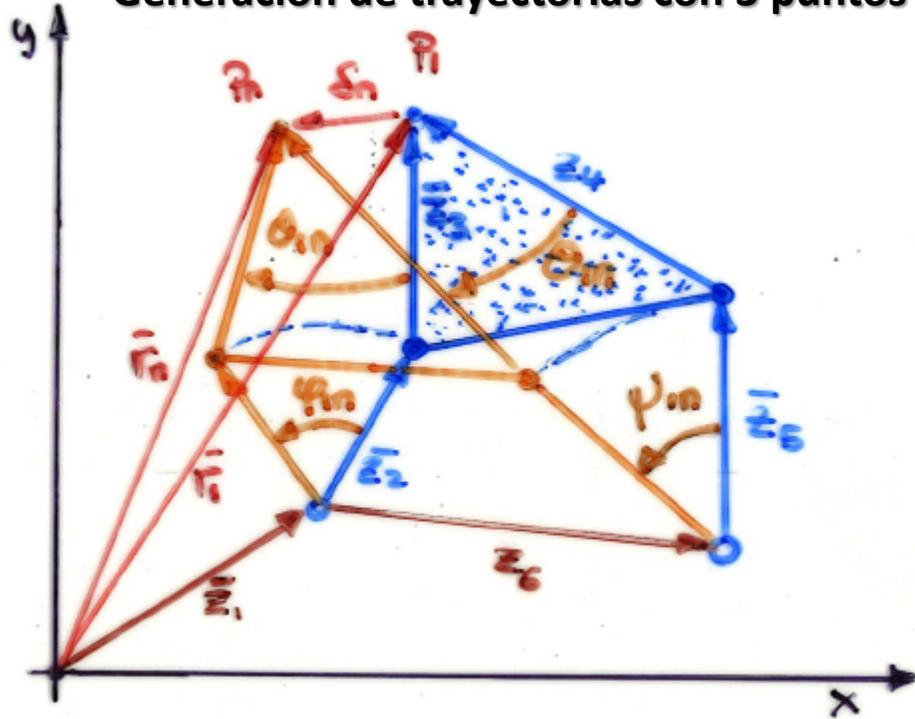


- Una curva plana carece de puntos angulosos, es decir, no posee puntos con dos tangentes y por el que pasa una sola rama. La curva del acoplador no tiene puntos angulosos.

Epígrafes del tema

- 9.1 Síntesis de generación de trayectorias.
- 9.2 Curvas del acoplador del cuadrilátero articulado.
- 9.3 Propiedades de las curvas del acoplador del cuadrilátero articulado.
- 9.4 Generación de trayectorias mediante puntos de precisión.
- 9.5 Generación de trayectorias con tramos casi rectilíneos.
- 9.6 Síntesis de mecanismos cognados.
- 9.7 Síntesis de guiado de sólido rígido.
- 9.8 Síntesis aproximada de generación de trayectorias.

Generación de trayectorias con 3 puntos de precisión mediante números complejos:



Posición 1:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 & (1) \\ \vec{r}_1 = \vec{z}_1 + \vec{z}_6 + \vec{z}_5 + \vec{z}_4 & (2) \end{cases}$$

Posición 2:

$$\begin{cases} \vec{r}_n = \vec{z}_1 + \vec{z}_2 e^{i\varphi_{1n}} + \vec{z}_3 e^{i\theta_{1n}} & (3) \\ \vec{r}_n = \vec{z}_1 + \vec{z}_6 + \vec{z}_5 e^{i\psi_{1n}} + \vec{z}_4 e^{i\theta_{1n}} & (4) \end{cases}$$

Restando:

$$\begin{cases} (3) - (1) \rightarrow \vec{\delta}_n = \vec{z}_2(e^{i\varphi_{1n}} - 1) + \vec{z}_3(e^{i\theta_{1n}} - 1) \\ (4) - (2) \rightarrow \vec{\delta}_n = \vec{z}_5(e^{i\psi_{1n}} - 1) + \vec{z}_4(e^{i\theta_{1n}} - 1) \end{cases}$$

En donde $\vec{\delta}_n = (x_n - x_1) + (y_n - y_1)i$

Para tres puntos de precisión P_1, P_2, P_3 se plantea:

$$\begin{cases} \vec{\delta}_{1-2} = \vec{z}_2(e^{i\varphi_{12}} - 1) + \vec{z}_3(e^{i\theta_{12}} - 1) \\ \vec{\delta}_{1-3} = \vec{z}_2(e^{i\varphi_{13}} - 1) + \vec{z}_3(e^{i\theta_{13}} - 1) \\ \vec{\delta}_{1-2} = \vec{z}_5(e^{i\psi_{12}} - 1) + \vec{z}_4(e^{i\theta_{12}} - 1) \\ \vec{\delta}_{1-3} = \vec{z}_5(e^{i\psi_{13}} - 1) + \vec{z}_4(e^{i\theta_{13}} - 1) \end{cases}$$

Se suponen unos ángulos $\varphi_{12}, \theta_{12}, \psi_{12}, \varphi_{13}, \theta_{13}, \psi_{13}$

$\vec{\delta}_{1-2}$ y $\vec{\delta}_{1-3}$ son dato, ya que se conoce P_1, P_2, P_3

Las incógnitas son $\vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4, \vec{z}_5$

Generación de trayectorias con 3 puntos de precisión mediante números complejos. Ejemplo:

Aplicando la formulación compleja, realizar una síntesis de generación de trayectorias con tres puntos de precisión $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$, $P_3(0,1)$ con las siguientes condiciones adicionales:

$$\varphi_{12} = 30^\circ, \theta_{12} = 30^\circ, \psi_{12} = 60^\circ,$$

$$\varphi_{13} = 60^\circ, \theta_{13} = 45^\circ, \psi_{13} = 90^\circ$$

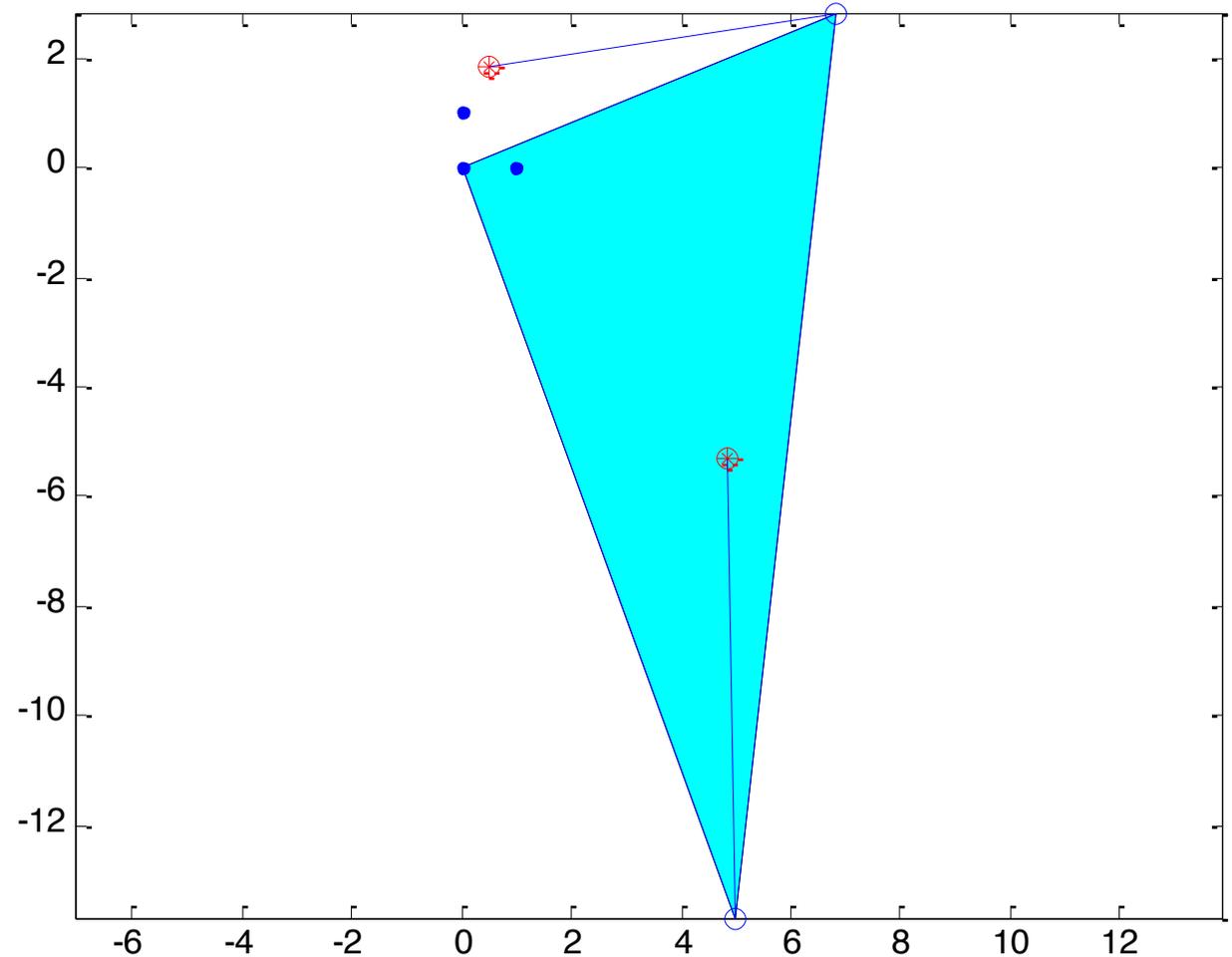
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\delta}_{1-2} = \vec{z}_2 \left(e^{i\frac{\pi}{6}} - 1 \right) + \vec{z}_3 \left(e^{i\frac{\pi}{6}} - 1 \right) = 1 \\ \vec{\delta}_{1-3} = \vec{z}_2 \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 \right) + \vec{z}_3 \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - 1 \right) = 1i \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{z}_2 \\ \vec{z}_3 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\delta}_{1-2} = \vec{z}_5 \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 \right) + \vec{z}_4 \left(e^{i\frac{\pi}{6}} - 1 \right) = 1 \\ \vec{\delta}_{1-3} = \vec{z}_5 \left(e^{i\frac{\pi}{2}} - 1 \right) + \vec{z}_4 \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - 1 \right) = 1i \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{z}_4 \\ \vec{z}_5 \end{cases}$$

Las articulaciones fijas se obtienen sustituyendo, por ejemplo para el punto $P_1(0,0)$:

$$\vec{z}_1 = \vec{r}_1 - \vec{z}_2 - \vec{z}_3$$

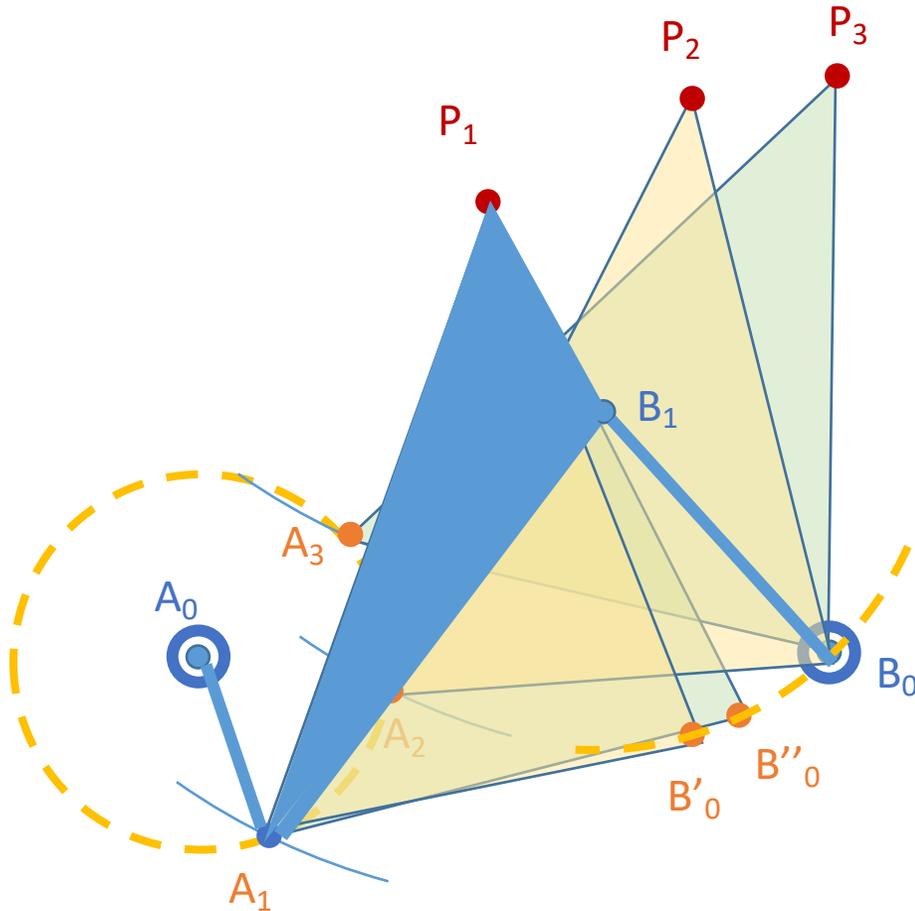
$$\vec{z}_6 = \vec{r}_1 - \vec{z}_1 - \vec{z}_5 - \vec{z}_4$$



Generación de trayectorias con 3 puntos de precisión mediante el método gráfico de la inversión:

Datos: Posiciones de A_0 , B_0 , P_1 , P_2 , P_3 y longitudes de la manivela a y del lado del acoplador e .

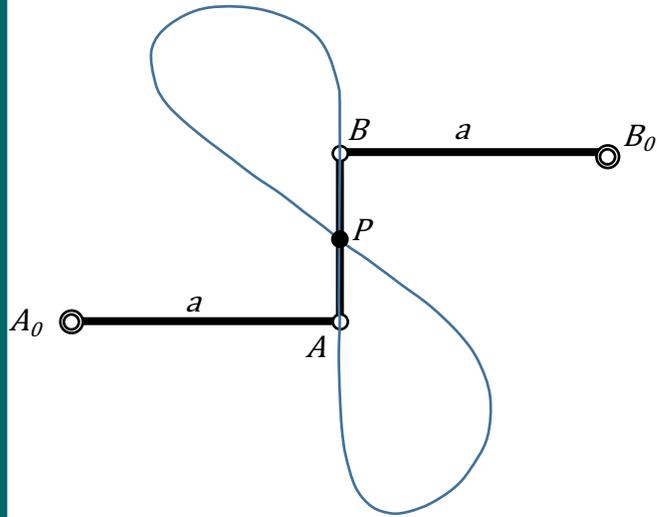
1. Con centro en A_0 , se traza una circunferencia de radio a .
2. Con centro en P_1 , P_2 , P_3 se trazan arcos que cortan a la circunferencia anterior en los puntos A_1 , A_2 , A_3 .
3. El triángulo $P_2A_2B_0$ es el mismo que el $P_1A_1B'_0$.
4. El triángulo $P_3A_3B_0$ es el mismo que el $P_1A_1B''_0$.
5. Los puntos B_0 , B'_0 y B''_0 forman una circunferencia con centro en B_1 .



Epígrafes del tema

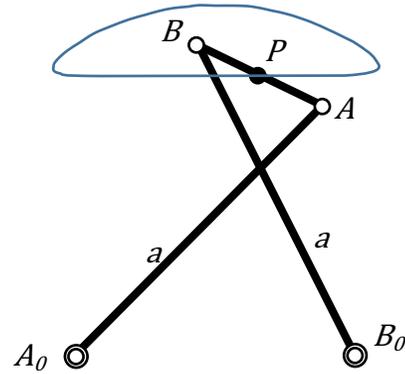
- 9.1 Síntesis de generación de trayectorias.
- 9.2 Curvas del acoplador del cuadrilátero articulado.
- 9.3 Propiedades de las curvas del acoplador del cuadrilátero articulado.
- 9.4 Generación de trayectorias mediante puntos de precisión.
- 9.5 Generación de trayectorias con tramos casi rectilíneos.
- 9.6 Síntesis de mecanismos cognados.
- 9.7 Síntesis de guiado de sólido rígido.
- 9.8 Síntesis aproximada de generación de trayectorias.

Mecanismo de Watt



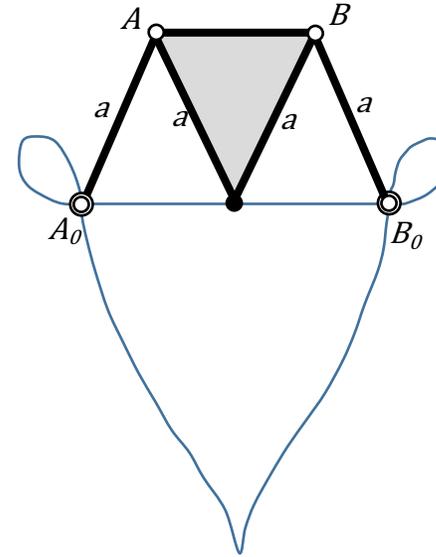
$$\begin{aligned}
 BB_0 &= AA_0 = a \\
 PA &= PB \\
 AB &= 0,62a \\
 A_0B_0 &= 2,15a
 \end{aligned}$$

Mecanismo de Chebishev



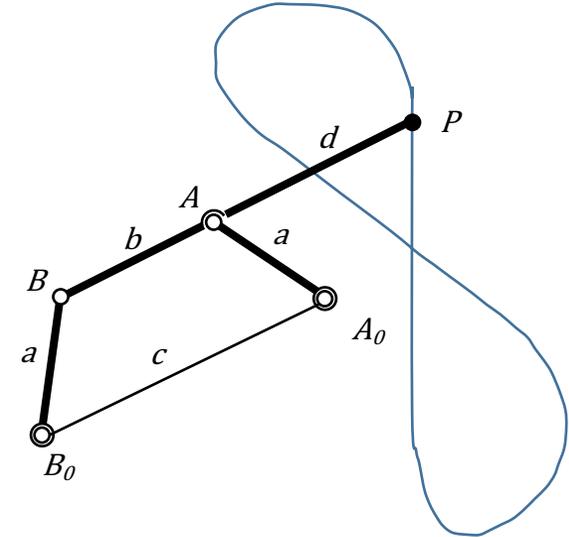
$$\begin{aligned}
 BB_0 &= AA_0 = a \\
 PA &= PB = 0,25a \\
 A_0B_0 &= 0,8a
 \end{aligned}$$

Mecanismo de Roberts



$$\begin{aligned}
 BB_0 &= AA_0 = a \\
 PA &= PB = a \\
 A_0B_0 &= 2AB
 \end{aligned}$$

Mecanismo de Evans



$$\begin{aligned}
 b &= 1,2a \\
 d &= 1,6a \\
 c &= 2,3a
 \end{aligned}$$

Epígrafes del tema

- 9.1 Síntesis de generación de trayectorias.
- 9.2 Curvas del acoplador del cuadrilátero articulado.
- 9.3 Propiedades de las curvas del acoplador del cuadrilátero articulado.
- 9.4 Generación de trayectorias mediante puntos de precisión.
- 9.5 Generación de trayectorias con tramos casi rectilíneos.
- 9.6 Síntesis de mecanismos cognados.
- 9.7 Síntesis de guiado de sólido rígido.
- 9.8 Síntesis aproximada de generación de trayectorias.

Mecanismos cognados: Mecanismos que realizan la misma función.

Dos mecanismos cognados son, por ejemplo, mecanismos que realizan la misma trayectoria, generan la misma función entrada-salida...

El interés de conocer los mecanismos cognados reside en que constituyen alternativas al diseño original, por ejemplo, se puede encontrar un mecanismo alternativo que realiza la misma función, pero que tiene un ángulo de transmisión más cercano al ideal, todas las barras son del mismo orden de magnitud...

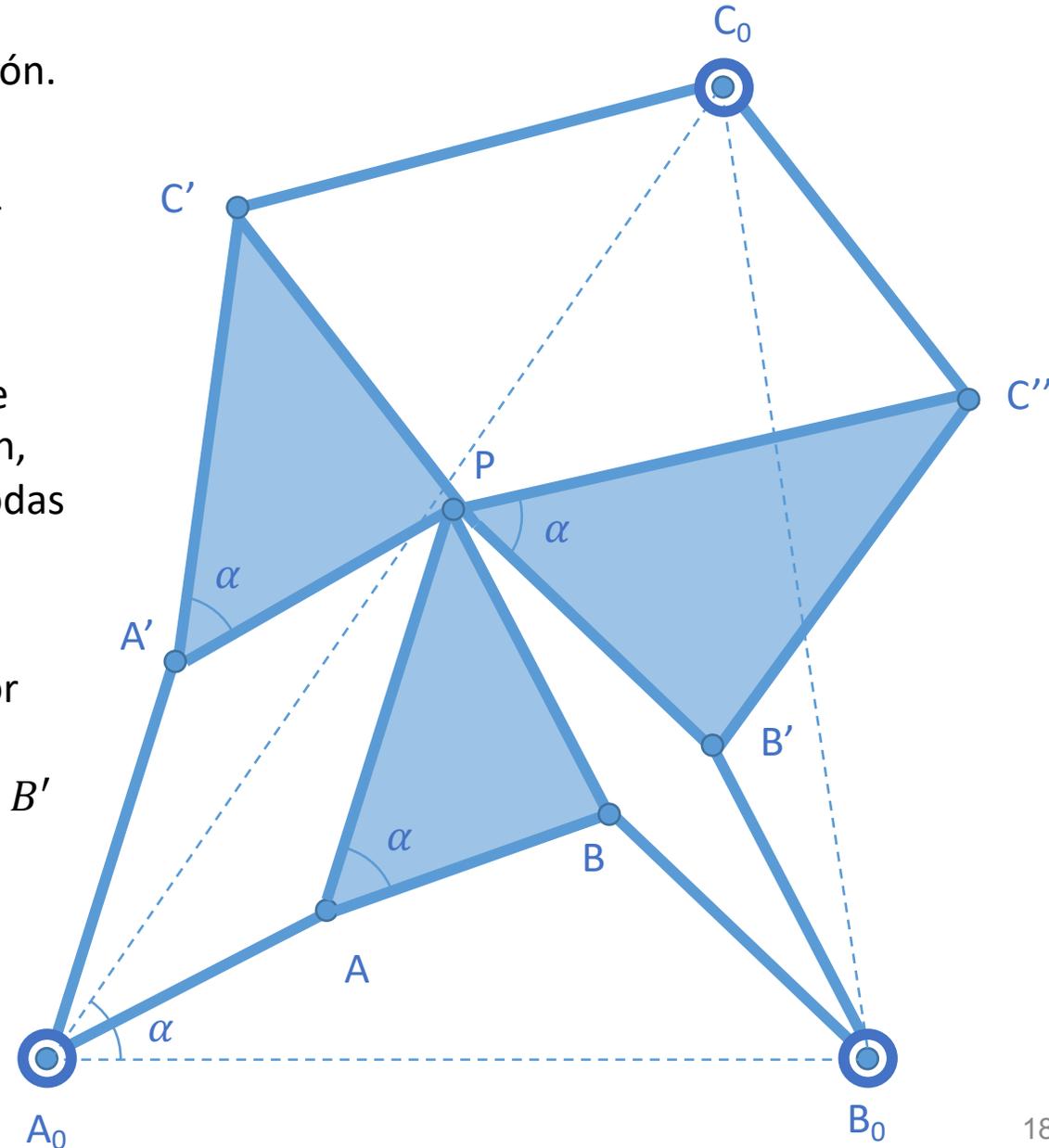
Teorema de Roberts-Chevyshev: Existen tres mecanismos cuadriláteros articulados que trazan la misma curva del acoplador

$$1. \text{ Trazar los puntos } A' \text{ y } B': \left. \begin{matrix} A_0A' \parallel AP \\ A'P \parallel A_0A \end{matrix} \right\} \Rightarrow A' \text{ y } \left. \begin{matrix} B_0B' \parallel BP \\ B'P \parallel B_0B \end{matrix} \right\} \Rightarrow B'$$

2. Acoplador ABP sobre $A'P \rightarrow C'$.

3. Acoplador ABP sobre $B'P \rightarrow C''$.

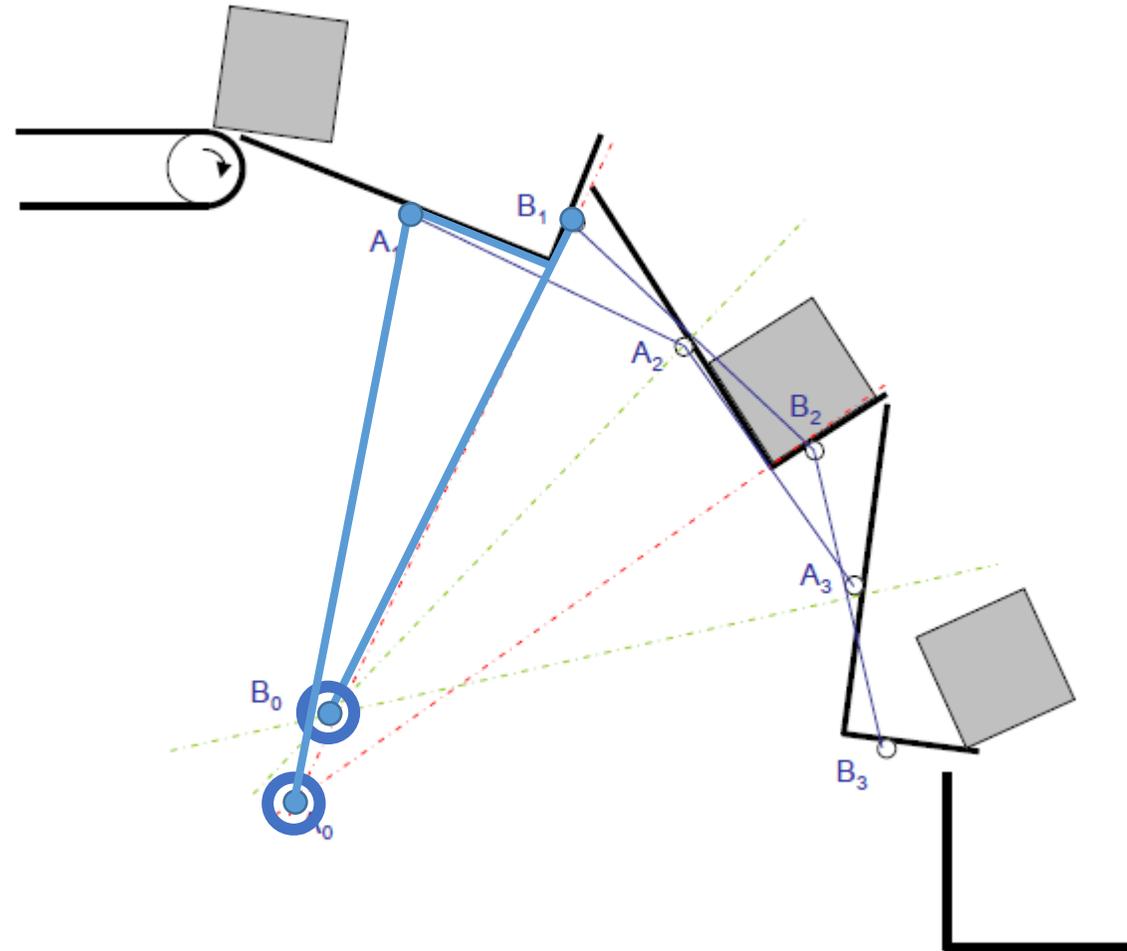
$$4. \text{ Obtener el punto } C_0: \left. \begin{matrix} C_0C' \parallel PC'' \\ C_0C'' \parallel PC' \end{matrix} \right\} \Rightarrow C_0$$



Epígrafes del tema

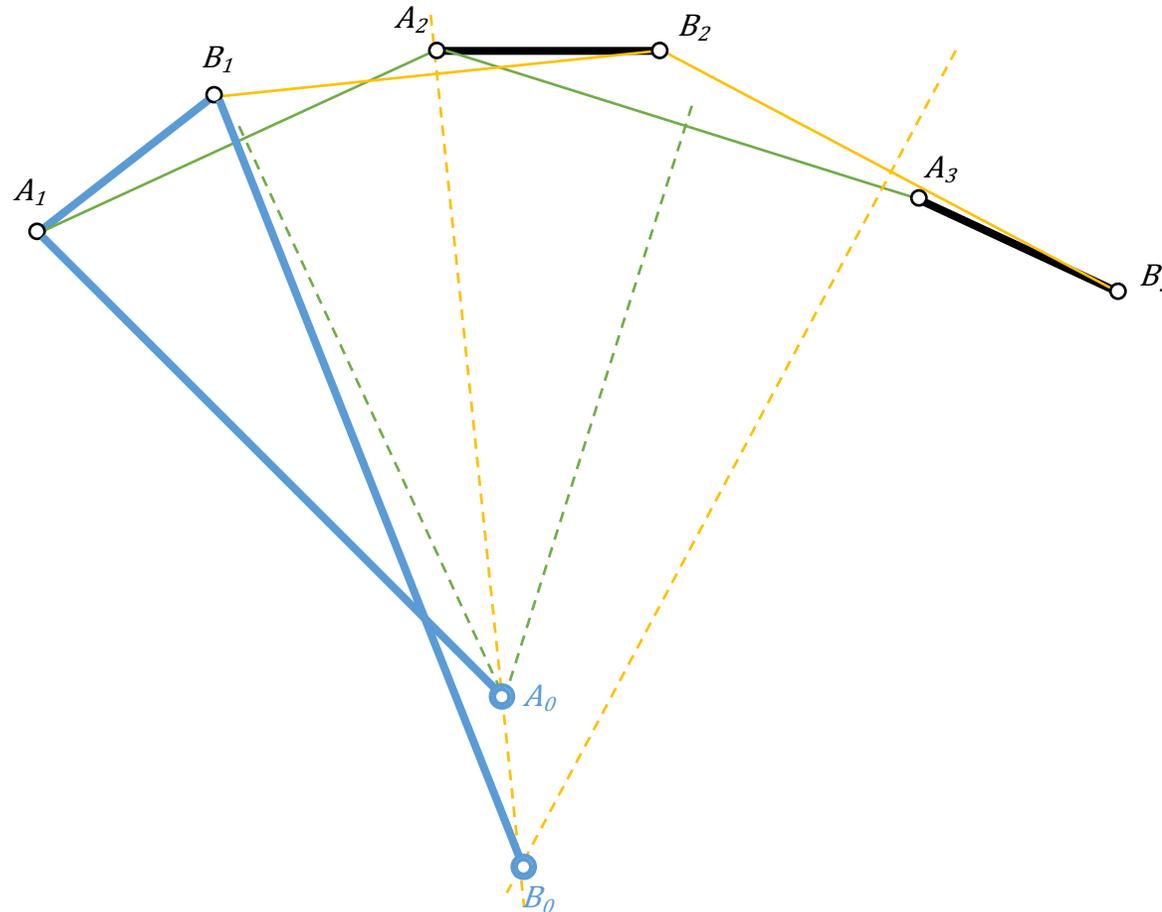
- 9.1 Síntesis de generación de trayectorias.
- 9.2 Curvas del acoplador del cuadrilátero articulado.
- 9.3 Propiedades de las curvas del acoplador del cuadrilátero articulado.
- 9.4 Generación de trayectorias mediante puntos de precisión.
- 9.5 Generación de trayectorias con tramos casi rectilíneos.
- 9.6 Síntesis de mecanismos cognados.
- 9.7 Síntesis de guiado de sólido rígido.
- 9.8 Síntesis aproximada de generación de trayectorias.

Síntesis de guiado de sólido rígido para tres posiciones de precisión: Cuadrilátero articulado



Síntesis de guiado de sólido rígido para tres posiciones de precisión: Cuadrilátero articulado

Las posiciones de las articulaciones fijas A_0 y B_0 son, respectivamente, los centros de las circunferencias que pasan por los puntos A_1, A_2, A_3 y B_1, B_2, B_3 .



Epígrafes del tema

- 9.1 Síntesis de generación de trayectorias.
- 9.2 Curvas del acoplador del cuadrilátero articulado.
- 9.3 Propiedades de las curvas del acoplador del cuadrilátero articulado.
- 9.4 Generación de trayectorias mediante puntos de precisión.
- 9.5 Generación de trayectorias con tramos casi rectilíneos.
- 9.6 Síntesis de mecanismos cognados.
- 9.7 Síntesis de guiado de sólido rígido.
- 9.8 Síntesis aproximada de generación de trayectorias.

Hasta ahora se han visto métodos exactos de síntesis. Sin embargo, tienen grandes limitaciones:

- Reducido número de puntos (y derivadas) de precisión.
- Debido a errores, holguras, montaje, mecanizado... pueden no ser exactas.

Por esa razón se utilizan métodos numéricos de optimización para realizar **síntesis aproximadas**. Consiste en minimizar una **función de error de síntesis**, o **función objetivo**, respecto a una serie de **variables de diseño**.

A continuación se describen brevemente los elementos necesarios para definir un problema de síntesis aproximada que se resolverá mediante un método de optimización:

- Las incógnitas del problema de síntesis son las **variables de diseño** \mathbf{z} . Para mecanismos de barras son las dimensiones (y orientaciones) de los elementos que componen el mecanismo.
- En el tema 7 se ha explicado cómo modelizar un mecanismo mediante métodos numéricos: Se necesitan un conjunto de **coordenadas generalizadas** $\mathbf{q}(\mathbf{z}, t) = \{q_1 \quad \dots \quad q_n\}^T$ y un conjunto de **ecuaciones de restricción** $\Phi(\mathbf{q}(\mathbf{z}, t), \mathbf{z}, t) = \mathbf{0}$.
- Al conjunto de coordenadas \mathbf{q} se añadirán más coordenadas denominadas **parámetros funcionales** δ . En el caso plano se pueden añadir un máximo de 3 parámetros funcionales por elemento del mecanismo $\delta_i = \{x_i \quad y_i \quad \theta_i\}$. Sirven para definir las posiciones de precisión de manera directa.

- Por cada parámetro funcional, se debe añadir una ecuación de restricción adicional, denominadas **restricciones de síntesis** $\Phi_s(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{q}(\mathbf{z}, t), \mathbf{z}, t) = \mathbf{0}$, que se deben cumplir de la misma manera que las ecuaciones de restricción.
- También se pueden añadir otro conjunto de restricción en forma de desigualdad para, por ejemplo, limitar el tamaño de los elementos $\mathbf{g}(\mathbf{z}) \leq 0$.
- El **error de síntesis** se define como la diferencia entre los parámetros funcionales generados y deseados:
 $\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\delta}_i) = \boldsymbol{\delta}_{ig} - \boldsymbol{\delta}_{id}$.
- La función objetivo, denominada **Función de Error de Síntesis** se define como $FES = 1/2 \sum_{i=1}^{npos} \boldsymbol{\varepsilon}_i^T(\boldsymbol{\delta}_i) \mathbf{v}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\delta}_i)$. En esta función aparece la matriz de coeficientes de ponderación \mathbf{v}_i que se utiliza para dar un peso relativo a cada posición de precisión en caso de que sea necesario.

Con todo lo anterior, el problema queda definido de la siguiente manera:

$$\min_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{npos} \boldsymbol{\varepsilon}_i^T(\boldsymbol{\delta}_i) \mathbf{v}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\delta}_i)$$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} \Phi(\mathbf{q}(\mathbf{z}, t), \mathbf{z}, t) = \mathbf{0} \\ \Phi_s(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{q}(\mathbf{z}, t), \mathbf{z}, t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{z}) \leq 0 \end{cases}$$

Para resolverlo se deberá aplicar un método de optimización.

A continuación se muestra un ejemplo aplicado al diseño de un cuadrilátero con un tramo recto. (Ver vídeo Tema 9).

