Redes de Comunicaciones

Ejercicios Tema 3. Teletráfico. Dimensionado de Sistemas

Ramón Agüero Calvo

Departamento de Ingeniería de Comunicaciones

E.T.S.I.I.T - Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

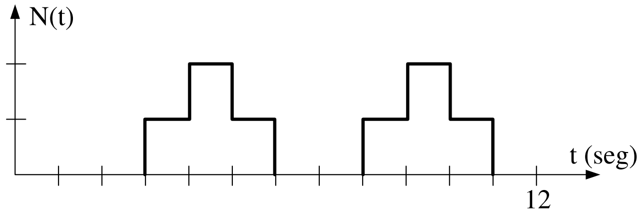
Redes de Comunicaciones

Tema 3 - Teletráfico
Hoja de problemas

Problema 1. Un grupo de circuitos cursan en 3 horas 500 llamadas con un tiempo medio de duración de 4 minutos. Calcular:

(a) Volumen de tráfico.
(b) Intensidad de tráfico cursado.
(c) Número medio de llamadas en el sistema.

Problema 2. Dada la figura representativa del estado de ocupación de un grupo de circuitos durante un tiempo de observación de 12 segundos, determinar:



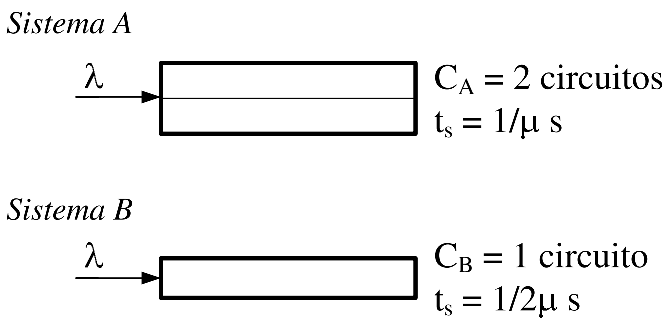
(a) La tasa de llegada de peticiones del sistema.
(b) El tiempo medio de servicio de una unidad.
(c) El número medio de circuitos ocupados.

Teniendo en cuenta que de la figura anterior se desprende que el grupo de circuitos constituye un sistema con tres posibles estados: 0, 1 y 2, durante el tiempo de observación, obtener:

(d) λ_0 y μ_1, y comprobar que $\lambda_0 \cdot p_0 = \mu_1 \cdot p_1$, siendo:

- λ_0 la tasa de cambios del estado 0 al 1, con la condición de que el sistema está en el estado 0.
- μ_1 la tasa de cambios del estado 1 al 0, con la condición de que el sistema está en el estado 1.

Problema 3. Dados los siguientes sistemas con pérdidas:



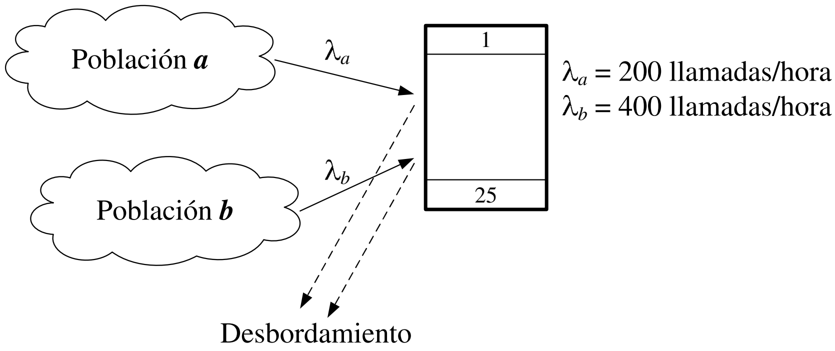
Sabiendo que en el Sistema A el tiempo medio de servicio por servidor es $1/\mu$, con ocupación aleatoria, mientras que en el Sistema B el tiempo medio de servicio del servidor es de $1/2\mu$, calcular, para los dos sistemas A y B:

(a) Tráfico ofrecido a un circuito (servidor).
(b) La expresión del *Grado de Servicio*. Decir cuál de los dos es más grande, razonando la respuesta.

Con la ayuda de los diagramas de transición entre estados (procesos de nacimiento y muerte), determinar:

(c) El tiempo medio de permanencia en el estado de bloqueo.
(d) El tiempo medio de permanencia en el estado 0 (sistema desocupado).
(e) Las probabilidades p_i $(i \neq 0)$ de todos los estados diferentes al estado de desocupado p_0.
(f) Calcular la p_0 en función de $\rho = \lambda/\mu$.
(g) El número medio de llamadas que se están sirviendo en función de las p_i.
(h) Utilizando la relación de *Little*, calcular cuál es la tasa cursada de entrada en función de la probabilidad de bloqueo.

Problema 4. Dos poblaciones a y b infinitas generan un tráfico poissoniano de tasas λ_a y λ_b, respectivamente. Las peticiones de las dos poblaciones son atendidas por un grupo de $C = 25$ circuitos con un tiempo medio de servicio de 3 minutos.



Calcular:

(a) El tráfico ofrecido por cada población.
(b) La probabilidad de bloqueo para la población b.
(c) El tráfico cursado de la población a y de la población b.
(d) El tráfico perdido para las poblaciones a y b.
(e) La probabilidad de que una llamada sea de la población a y de la población b.
(f) La probabilidad de que una llamada desbordada provenga de la población a y la probabilidad de que lo haga de la población b.

Problema 5. Un grupo de 10 circuitos se ocupan de manera secuencial (esto es, se ocupa el primer circuito si éste está libre; si está ocupado se ocupa el segundo y así repitiendo esta búsqueda por orden para cada una de las ocupaciones hasta que se acaban los circuitos del grupo). Si el tráfico es de 10 *Erlangs* y el tiempo medio de duración de una llamada es de 120 segundos, calcular:

(a) El tráfico cursado por el grupo de circuitos.
(b) Tráfico cursado por el último circuito.
(c) Tasa con la que se ocupa el primer circuito.
(d) Tasa con la que se ocupa el último circuito.

En el caso en que la ocupación fuese aleatoria (es decir, se ocupa cualquier circuito de entre los que están libres), calcular:

(e) Tráfico cursado por el grupo de circuitos.
(f) Tráfico cursado por el primer circuito.
(g) Tráfico cursado por el último circuito.
(h) Tasa con la que se ocupa el primer circuito.

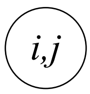
Problema 6. Se ofrece un tráfico de $A = 2$ *Erlangs* a un grupo de 2 circuitos. Si la ocupación de estos circuitos es secuencial, calcular:

(a) Probabilidad de tener un circuito ocupado.
(b) Probabilidad de tener 2 circuitos ocupados.
(c) Número medio de circuitos ocupados.
(d) Probabilidad de tener el primer circuito ocupado.

Si la ocupación es aleatoria, calcular:

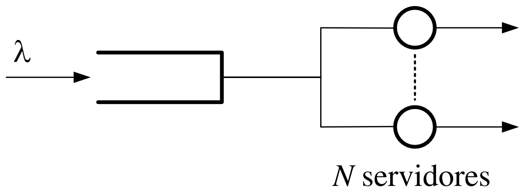
(e) Probabilidad de tener 0 circuitos ocupados.
(f) Probabilidad de tener un circuito ocupado.
(g) Nº medio de circuitos ocupados.

Sugerencia: Estudiar los diagramas de estado de cada caso donde cada estado se puede representar por:



i: ocupación del primer circuito
j: ocupación del segundo circuito
i,j = 0 → libre   *i,j* = 1 → ocupado

Problema 7. Dado el sistema de *Erlang-C* representado en la figura:



es decir, un sistema constituido por N servidores, cola infinita y tiempo medio de servicio de una unidad para cada uno de los servidores $1/\mu$. Siendo λ la tasa de llegadas de peticiones al sistema y N, número de servidores, superior al tráfico ofrecido por λ, $N > TO$, señalar para cada una de las preguntas cuál de las respuestas es válida:

(a) El tráfico cursado por los servidores será:

1) $TO \cdot PD$ 2) TO 3) $TO(1 - PB)$ 4) TD

(b) La tasa de llamadas cursadas por el servidor será:

1) μ 2) $\lambda(1 - PB)$ 3) λ 4) μN

(c) El tiempo medio entre finalizaciones del servicio será:

1) $\dfrac{1}{\mu}$ 2) $\dfrac{1}{\lambda}$ 3) $\dfrac{1}{N\mu}$ 4) $\dfrac{1}{\lambda(1 - PB)}$

(d) El número medio de elementos en el sistema cola + servidores será:

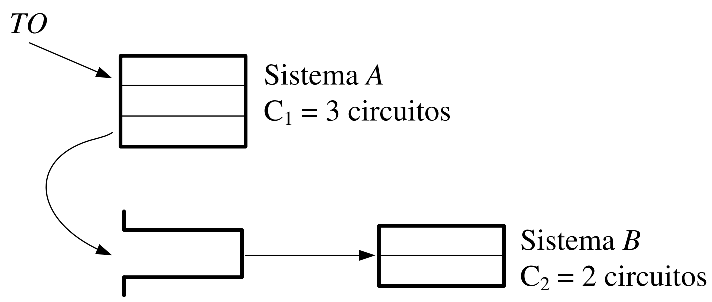
$$1)\quad N_q + \frac{N_{\text{servidores}}}{N} \qquad 2)\quad TC \qquad 3)\quad \frac{W_q + W_{\text{servicio}}}{\lambda} \qquad 4)\quad N_q + N_{\text{servidores}}$$

Problema 8. Una empresa dispone de una centralita privada, sin operador, de baja capacidad y ya dimensionada como sistema de acceso a la red pública pretendiéndose analizar su funcionamiento. La empresa tiene contratadas dos líneas a la compañía telefónica, de conexión con la red pública para dar servicio a 6 teléfonos (población finita pero distribución de *Poisson*), situados en diferentes despachos de aquélla.

Se sabe que cada uno de los teléfonos genera individualmente en promedio 3 llamadas durante la hora cargada, λ_{ind}, con una duración media de 120 segundos ($1/\mu$). Para facilitar la resolución supondremos que las llamadas o bien se cursan o bien se pierden. Por otra parte, el acceso a las líneas es secuencial.

(a) Representar el diagrama de estados del sistema constituido por las dos líneas, indicando el estado (ocupado o libre) de cada una de las líneas y las tasas de transición.
(b) Encontrar las probabilidades de estar en cada uno de los 4 estados anteriores en función de $A_{\text{ind}} = \lambda_{\text{ind}}/\mu$.
(c) Tráfico ofrecido al sistema en función de A_{ind}.
(d) Número medio de líneas ocupadas.
(e) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema se bloquee?

Problema 9. Se dispone de un sistema formado por un grupo de C_1 circuitos sobre el que se ofrecen las llamadas en primera elección. Si este grupo está lleno, las peticiones se desbordan a otro grupo que dispone de un grupo de C_2 circuitos y una cola de capacidad ilimitada donde las llamadas esperan a que quede un circuito de este segundo grupo libre.

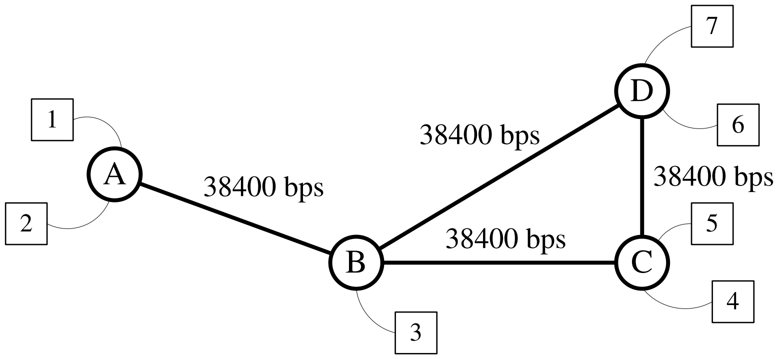


(a) Calcular el tráfico cursado por el grupo de circuitos A cuando $TO = 3$ *Erlangs*.
(b) Calcular el tráfico cursado por el grupo de circuitos B.
(c) Probabilidad de que una llamada que llegue al grupo B no se espere para conseguir un circuito.

(d) Asumiendo que las ocupaciones de los grupo A y B son independientes, calcular la probabilidad de que una llamada que llegue al sistema no se espere.

(e) ¿Qué valor máximo puede llegar a tener TO sin que el sistema llegue a saturarse (es decir, que el tamaño de la cola del grupo B no crezca indefinidamente)?

Problema 10. Considérese la red de conmutación de paquetes que se muestra en la figura:



donde la carga de paquetes medida en *paquetes/segundo* entre los nodos es la que se indica a continuación:

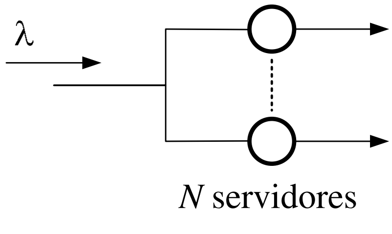
- De 1 a 4: 4 *paquetes/seg.*
- De 2 a 7: 8 *paquetes/seg.*
- De 3 a 6: 6 *paquetes/seg.*

Considerando que la longitud de los paquetes está distribuida exponencialmente con media 256 bytes, calcular el retardo medio en los siguientes casos:

(a) Se realiza el encaminamiento en base al mínimo número de saltos.

(b) Se cambia el encaminamiento de forma que la comunicación entre 3 y 6 se realiza a través de los enlaces BC y CD, en lugar de pasar directamente por el nodo D.

Problema 11. Dado el sistema de *Erlang-B* representado en la figura:



esto es, un sistema constituido por N servidores, con un tiempo medio entre servicio, por unidad $1/\mu$ para cada uno de ellos, y una tasa de llegadas de peticiones de servicio λ.

Señalar para cada una de las siguientes preguntas cuál de las respuestas es cierta.

(a) El tráfico ofrecido al sistema será:

1) λ 2) $\dfrac{\lambda}{\mu}$ 3) TC 4) $\dfrac{\mu}{\lambda}$

(b) Siendo N, el número de servidores, superior al tráfico ofrecido, $N > TO$ se debe cumplir:

1) $TC = TO$ 2) $TC < TO$ 3) $TC > TO$

(c) La tasa de llegadas cursadas por el conjunto de los N servidores será:

1) $\dfrac{N}{\mu}$ 2) λ 3) $\dfrac{TO(1-PB)}{1/\mu}$ 4) $\dfrac{TO}{1/\mu}$

(d) El tiempo medio entre finalizaciones de servicio será:

1) $\dfrac{1}{\mu}$ 2) $\dfrac{1}{N\mu}$ 3) $\dfrac{1}{\mu \cdot TO(1-PB)}$ 4) $\dfrac{1}{\lambda}$

Problema 12. Se dispone de un sistema con dos servidores y cola de capacidad infinita, en el que el tiempo de servicio es exponencial de media $1/\mu$ y la tasa de entrada depende del estado del sistema y sigue la ley $\lambda_n = \lambda/(1+n)$, siendo n el estado del sistema.

(a) Representar el diagrama de estados del sistema.
(b) Obtener las probabilidades de encontrarse en cada uno de los anteriores estados en función de $A = \lambda/\mu$.
(c) Obtener la tasa media de entrada al sistema en función de A, μ y p_0.
(d) Calcular el número medio de unidades en el sistema global en función de A y P_0.
(e) Obtener el número medio de unidades en el subsistema cola de espera y el número medio de unidades en el subsistema conjunto de servidores en función de A y P_0.
(f) Obtener el tiempo medio de permanencia en cada uno de los subsistemas en función de A y μ.

Problema 13. Se dispone de una CPU a la que se envían programas, para ser ejecutados, siguiendo una ley de Poisson de tasa λ. Estos programas se esperan hasta que son asignados a la CPU, lo cual se hace según el orden de llegada. Con objeto de mejorar el grado de servicio, el sistema dispone de la posibilidad de conectar otra CPU en el momento en que haya N o más programas esperando en la cola. El tiempo de ejecución por programa es exponencial con valor medio $1/\mu$.

Se pide:

(a) Diagrama de estados del sistema indicando las tasas de nacimiento y muerte.
(b) Probabilidad de cada estado en función de $A = \lambda/\mu$ y N.

Calcular en función de A, N y P_0:

(c) Tráfico ofrecido al sistema.
(d) Tráfico cursado por el sistema cuando únicamente hay una CPU activada.
(e) Probabilidad de bloqueo del sistema.
(f) Probabilidad de que la segunda CPU esté en funcionamiento.

Problema 14. A un nodo de conmutación se conectan 4 terminales. Dicho nodo dispone de 3 enlaces de salida de capacidad 9600 *bps* cada uno. Cuando un terminal genera un mensaje, éste transmite por cualquier enlace libre, o se guarda en un *buffer* (interno al terminal) a la espera de que quede algún enlace libre para transmitirlo. La longitud de los mensajes está distribuida exponencialmente con media 960 *bits*. Entre el nodo y los terminales existe un protocolo, de manera que cuando un terminal genera un mensaje queda inactivo (no genera más mensajes) **hasta que el nodo confirma que su mensaje ya ha sido transmitido** (dicha confirmación es inmediata). Cada uno de los terminales activos generan mensajes según una distribución de Poisson con tasa $\lambda = 2$ *mensajes/segundo*.

(a) Dibujar el diagrama de estados para el nodo.
(b) Calcular las probabilidades para cada uno de dichos estados.
(c) Calcular el número medio de mensajes en el nodo.
(d) Calcular el tiempo medio de permanencia en el nodo.

Problema 15. Un nodo de una red de conmutación de paquetes bajo estudio consta de un enlace de salida y una memoria adicional con capacidad para almacenar 3 paquetes. Una población infinita genera paquetes a una tasa media de λ p/s. La distribución de la longitud de los paquetes se supone exponencial y de media L bits. La capacidad de la línea de salida es de C *bps* mientras que el número de unidades en cola sea menor o igual a un paquete. Cuando esta condición no se cumple, el nodo renegocia instantáneamente con la red la capacidad del enlace, que pasa a ser de $2C$ *bps* para intentar drenar con mayor rapidez los paquetes entrantes.

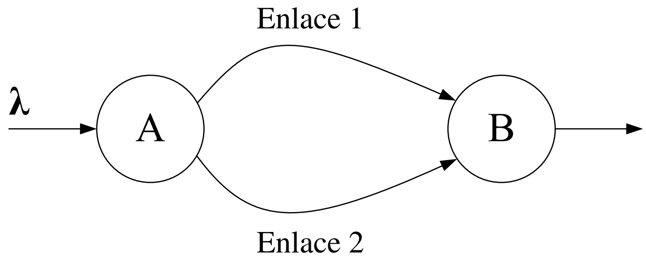
Se pide:

(a) Dibujar el diagrama de estados.
(b) Obtener la probabilidad de cada uno de los estados en régimen permanente.
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione a C *bps*? ¿Y a $2C$ *bps*?
(d) ¿Cuál es la probabilidad de pérdida de un paquete?

(e) ¿Cuál es el tiempo medio de permanencia en el sistema?

Nota: En todo el problema se supone que la tasa media de servicio, correspondiente a la velocidad de transmisión C bps, es igual a la tasa de llegada de paquetes y, a su vez, igual a la unidad.

Problema 16. Para aumentar la fiabilidad, los nodos A y B de una red de datos están unidos por dos enlaces de capacidades respectivas C_1 y C_2, con $C_1 > C_2$.



El nodo A encamina los paquetes, de longitud exponencial de media L bits, por el enlace de mayor capacidad hasta que λ alcanza cierto umbral u p/s. El enlace 2 se empieza a utilizar cuando el tiempo de transferencia (espera + transmisión) por el enlace 1 se iguala al tiempo de transmisión de un paquete por el enlace 2, lo cual determina el valor de u. Cuando $\lambda > u$, A distribuye aleatoriamente los paquetes que sobrepasan el umbral de forma proporcional a la capacidad de los enlaces.

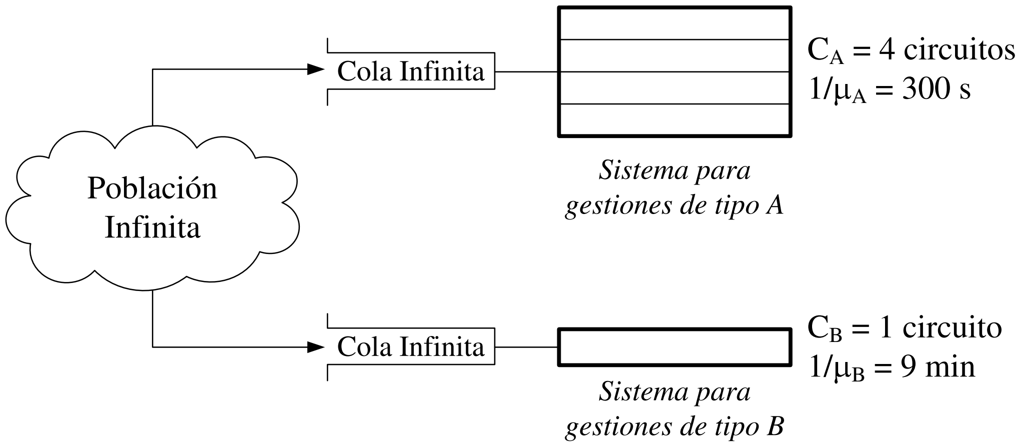
Teniendo en cuenta que:

- $C_1 = 64$ $kbps$
- $C_2 = 32$ $kbps$
- $L = 100$ $bits$

Calcular:

(a) El valor de u.
(b) El valor de λ_1 y λ_2 cuando $\lambda = 2u$.

Problema 17. Las llegadas a una sucursal bancaria, por parte de una población infinita, se pueden modelar como un proceso de Poisson con tiempo medio entre llegadas de dos minutos. Dentro de la sucursal los clientes tienen la posibilidad realizar dos tipos de gestiones A y B, lo cual también se puede modelar como el acceso a dos tipos de sistemas, según se representa en la figura.



En el sistema A los circuitos C_A modelan el comportamiento de los oficinistas (que hacen gestiones del tipo A), y en el sistema B el circuito C_B modela el comportamiento del director de la sucursal (que hace gestiones del tipo B). La probabilidad de que un cliente desee realizar una gestión del tipo A es 0.8.

Calcular:

(a) Tráfico ofrecido y tráfico cursado por cada uno de los sistemas.
(b) Tiempo medio que deben esperar los clientes que realizan gestiones del tipo A y tiempo medio que deben esperar los clientes que realizan gestiones del tipo B.
(c) Si los clientes que hacen gestiones de tipo A eligen al azar cualquier oficinista que se encuentre libre, ¿a cuántos clientes atenderá un oficinista durante las 8 horas de un día de trabajo?

Problema 18. Una empresa que diseña aplicaciones tiene que implantar un sistema de servidores. Se asume que las peticiones de servicio siguen una distribución de *Poisson*, con tasa λ. El ingeniero se plantea dos alternativas:

- Emplear tres sistemas idénticos, en los que el tiempo de servicio medio (se asume una distribución exponencial) es de $1/\mu$. Si los tres servidores están ocupados, la petición se pierde.
- Sustituir dos de los anteriores equipos por uno de mayores prestaciones, con un tiempo de servicio medio (también distribuido exponencialmente) tres veces menor. En este caso, cuando una petición llega al sistema, es atendida por la máquina de mayores prestaciones y, si estuviera ocupada, por el segundo servidor. Al igual que en la anterior estrategia, cuando los dos servidores están ocupados, la petición se pierde.

Teniendo en cuenta que $\lambda = 2$ peticiones/segundo, y que el tiempo de servicio es $1/\mu = 1$ segundos, se pide:

(a) Determinar la probabilidad de pérdida en ambos sistemas; ¿cuál de las estrategias ofrece un mejor *GoS*?
Nota: Para analizar la segunda alternativa, representar cada estado como (i, j), donde i representa la ocupación del primer servidor y j la del segundo.

(b) En la segunda alternativa, ¿cuál es la probabilidad de que el primer servidor esté ocupado?

(c) Calcular, para los dos estrategias, el número medio de servidores ocupados y el tiempo medio de permanencia en el sistema.

Problema 19. Una empresa tiene contratada 2 líneas de salida en su *"router"*, que se supone dispone de una memoria infinita para almacenar los paquetes antes de ser transmitidos. La capacidad de cada una de ellas es de C *bps* y se asume que la distribución de la longitud de los paquetes es exponencial, con media L *bits*, y que la tasa de llegada de paquetes al *"router"* es λ *pkt/s* . Para abaratar costes se decide valorar la posibilidad de contratar una única línea, con capacidad αC *bps* ($\alpha > 1$). Se pide:

(a) Representar las cadenas de *Markov* que permiten analizar ambos sistemas. Establecer las tasas de nacimiento y muerte correspondientes y derivar la probabilidad de cada uno de los estados en función de λ, C, L y α.

(b) Derivar el tiempo medio de espera en la cola para los dos sistemas.

(c) Calcular el valor mínimo de α para que el tiempo medio total (espera y transmisión) sea igual en ambos casos.

(d) Teniendo en cuenta que el alquiler de una línea tiene un precio fijo de 30 €, más 10 € adicionales por *kbps* contratado, ¿sería rentable modificar la configuración? (Asumir que $L = 1000$ *bits*, $\lambda = 10$ *pkt/s* y $C = 10$ *kbps*)

Ayuda: Si $|x| < 1$, se sabe que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \qquad\qquad \sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Problema 20. Se va a analizar el sistema de planificación de las dos CPUs que una empresa tiene para atender las peticiones de sus empleados, que llegan según un proceso de Poisson de tasa λ. El planificador se ha programado de manera que cuando se recibe una petición siempre vaya a la CPU más rápida (se asume que el tiempo de servicio sigue una distribución exponencial negativa, de media $\frac{1}{\mu}$), siempre que esté libre. Si estuviera ocupada, la petición se atendería por la otra CPU (su tiempo de servicio también es exponencial negativo, aunque con una media tres veces mayor que la de la anterior).
Teniendo en cuenta que $\lambda = 2$ peticiones/segundo y que el tiempo de servicio de la CPU más rápida es $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{3}$ segundos, se pide calcular, de manera razonada:

(a) Probabilidad de que la 2ª CPU esté ocupada.

(b) Número medio de aplicaciones atendidas en el sistema y tiempo medio de permanencia en el mismo.
(c) Probabilidad de que el sistema esté bloqueado.

Pista. *Para resolver estos apartados, representar cada estado como (i, j), donde i representa la ocupación de la primera CPU y j la de la segunda.*

Se supone ahora que la empresa instala un nuevo conjunto de aplicaciones, que requieren una capacidad mayor que las anteriores. Para ello decide ampliar las prestaciones del sistema y adquiere una nueva CPU, con las prestaciones de la de mayor capacidad, para sustituir a la segunda.
Las aplicaciones a procesar pueden ser de dos tipos:

- *Grupo uno.* Requieren de una CPU para ser ejecutadas y el tiempo de servicio medio (distribución exponencial negativa) es, para las dos CPUs, igual a $\frac{1}{\mu}$ $\left(\frac{1}{4}\text{ segundos}\right)$.
- *Grupo dos.* Necesitan de las dos CPUs para poderse ejecutar, siendo el tiempo medio de servicio (distribución exponencial negativa) el doble del anterior ($\frac{2}{4}$ segundos).

El planificador se reprograma de manera que, cuando llega una petición del *Grupo uno* es atendida, de manera aleatoria, por cualquiera de las CPUs que esté libre. Cuando una petición no puede atenderse se pierde. Teniendo en cuenta esta nueva configuración, y que la probabilidad de recibir una petición es de 0.5 para cada uno de los grupos (equiprobables), manteniéndose la tasa global en $\lambda = 2$ peticiones/segundo, se pide resolver las siguientes cuestiones de manera razonada:

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos CPUs estén ocupadas?
(e) Obtener la probabilidad de bloqueo para cada grupo de aplicaciones.

Pista. *Para resolver estos apartados, representar cada estado como (i, j), donde i representa el número de CPUs ocupadas y j la aplicación que las ocupa.*

Problema 21. Se va a analizar el comportamiento de un nodo de comunicaciones, con una única interfaz de salida, de capacidad C bps. Se supone que los paquetes llegan según una distribución de *Poisson*, con una tasa λ paquetes por segundo, y que éstos tienen una longitud l, según una distribución exponencial negativa, de media L bits. Cuando un paquete llega al nodo y el enlace de salida está ocupado, se mantiene en un *buffer* (que se supone infinito) hasta que pueda ser transmitido. Debido a un crecimiento en la tasa de llegada de paquetes, se decide incorporar un *regulador* de tráfico a la entrada del nodo. Así, cuando haya S o más paquetes en el nodo (esperando o en el enlace de salida), el regulador entrará en funcionamiento y descartará, con una probabilidad $1 - q$, cualquier nueva llegada.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*. Establecer las tasas de nacimiento y muerte y calcular la probabilidad de los estados correspondientes.

(b) ¿Cuál es el valor máximo de q, en función de L, C y λ, para que el sistema sea estable?
(c) Calcular la probabilidad de que una nueva llamada sea rechazada.
(d) ¿Cuál es el número medio de paquetes en el *buffer* de espera?
(e) Obtener, a partir del resultado del apartado anterior, el tiempo medio que un paquete tiene que permanecer esperando en el *buffer* del nodo.
(f) ¿Cuánto vale dicho tiempo cuando $q = 1$? Discutir el resultado obtenido.
En este último apartado, asumir que $C > \lambda L$.

Ayuda: Si $|x| < 1$, se sabe que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \qquad \sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Además:

$$\sum_{i=0}^{N-1} x^i = \frac{1-x^N}{1-x} \qquad \sum_{i=0}^{N-1} i x^i = x\left(\frac{1-x^N}{(1-x)^2} - \frac{N x^{N-1}}{1-x}\right)$$

Problema 22. Una compañía de banca on-line quiere establecer un centro de atención al cliente vía telefónica. Para ello se plantea contratar a tres operadores, que atenderán las llamadas de los clientes. Se supone además que cuando los tres operadores están ocupados, cualquier llamada nueva se pierde. Se ha estimado que se producen 2 llamadas por minuto y que su duración media es de 1 minuto. Considerando que el tráfico correspondiente sigue un modelo de *Poisson*, se pide resolver razonadamente las siguientes cuestiones.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que se pierda una llamada? ¿Cuál es el tráfico que cursa el sistema?
(b) Aplicando la relación de Little, obtener el tiempo medio de permanencia en el sistema. ¿Cuál es el porcentaje de ocupación de cada operador, si se asume elección aleatoria?
(c) ¿Cuantos operadores serían necesarios para reducir la probabilidad de bloqueo hasta el 10 %?
(d) La empresa distingue ciertos clientes como *premium*. Si se mantiene el sistema original de tres operadores (que no tiene ningún tipo de inteligencia), ¿cuál es la probabilidad de que una llamada de un cliente *premium* se pierda?
Suponer que el porcentaje de clientes premium *es* $100 \cdot \alpha$.

La compañía quiere fidelizar a sus clientes *premium*, para lo que pretende que sus llamadas tengan una probabilidad de bloqueo inferior. Para ello establece el siguiente procedimiento: cuando hay dos operadores ocupados, sólo se aceptarán llamadas de los clientes *premium*, rechazando el resto de llegadas al sistema.

(e) ¿Cuál es el porcentaje máximo de clientes *premium* que puede haber para que la probabilidad de perdida de sus llamadas sea inferior al 10 %?

(f) Si se supone que $\alpha = 0.4$ (el 40 % de los clientes son *premium*), cuál es la probabilidad de bloqueo de sus llamadas? ¿Y la de las llamadas del resto de clientes?

(g) Calcular, en este caso, el tráfico cursado por el sistema y, a través de la relación de Little, establecer el tiempo medio de permanencia en el mismo.

(h) Si el turno de trabajo de los operadores es de 8 horas, ¿cuánto tiempo estará atendiendo llamadas cada agente en el sistema modificado?
Se sigue suponiendo que la asignación de los operadores a las llamadas es aleatoria.

Problema 23. Se cuenta con un nodo de comunicaciones, con dos interfaces de salida, de capacidad C bps cada una. Se supone que los paquetes llegan según una distribución de *Poisson*, con una tasa λ paquetes por segundo, y que éstos tienen una longitud l, según una distribución exponencial negativa, de media L bits. Cuando un paquete llega al nodo y los dos enlaces de salida están ocupados, se mantiene en un *buffer* (que se supone infinito) hasta que pueda ser transmitido. Si se define A como $\frac{\lambda}{\mu}$, donde μ es el inverso del tiempo de servicio, se pide resolver las siguientes cuestiones, en función de A, λ y μ.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*. Establecer las tasas de nacimiento y muerte y calcular la probabilidad de los estados correspondientes.

(b) ¿Cuál es el número medio de paquetes en el nodo (esperando o en una interfaz)? Utilizando la relación de Little, calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema.

Debido a una incidencia en la red, una de las interfaces de salida baja su capacidad hasta un valor $\alpha \cdot C$ ($\alpha < 1$). El gestor del nodo se plantea dos posibilidades: (1) anular la interfaz más lenta; o (2) dejarla en funcionamiento, asumiendo que un paquete se transmitirá, de manera totalmente aleatoria, por cualquiera de las dos interfaces cuando ambas estén libres.

(c) Modelar el sistema de la opción (1) con una cadena de *Markov*. Establecer las tasas de nacimiento y muerte y calcular la probabilidad de los estados correspondientes. ¿Cuál es el número medio de paquetes y el tiempo medio de permanencia en el sistema?

(d) Repetir el apartado anterior para la opción (2). ***Pista:*** *Dividir el estado en el que hay un único paquete en el nodo en dos estados, en función de cuál sea la interfaz por la que se esté transmitiendo el paquete.*

(e) ¿Cuál es el valor de A, en función de α, que le puede ayudar al gestor a decantarse por una u otra opción, teniendo en cuenta el tiempo de permanencia en el sistema?

Nota: *Asumir, en cualquier caso, que el sistema es estable.*
Ayuda: Si $|x| < 1$, se sabe que:

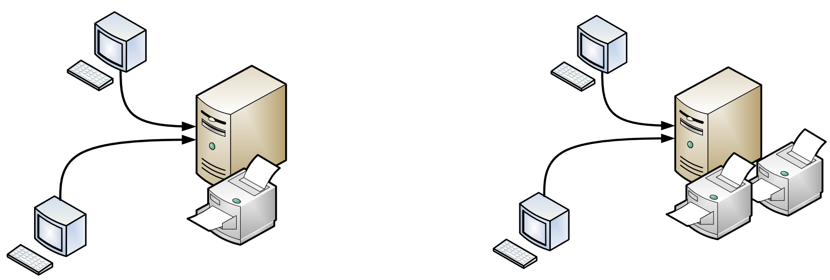
$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \qquad\qquad \sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Problema 24. En una oficina trabajan 2 personas, que comparten un servidor de impresión con una única impresora. Al enviar un trabajo, se debe esperar a que haya concluido para poder volver a remitir otro documento. Se supone además que el servidor tiene memoria suficiente para almacenar trabajos pendientes. Se sabe que el tiempo medio entre el momento en que acaba un trabajo y el envío del siguiente es, para cada terminal, $t_{\text{ia}}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1$ minuto (distribución exponencial negativa) y que el tiempo de impresión (asimismo distribución exponencial negativa), tiene un valor medio de $t_{\text{impresión}}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 1$ minuto.

(a) Modelar el sistema con una cola de *Markov*. ¿Cuál es la probabilidad de que haya un trabajo esperando en el servidor de impresión?
(b) Obtener, aplicando la relación de *Little*, el tiempo medio de espera y el de estancia total en el servidor (espera más impresión).

Para mejorar el comportamiento del sistema, se decide añadir al servidor una segunda impresora, el doble de rápida que la anterior. Se modifica la política del servidor, de manera que cuando llegue un trabajo sea atendido por la impresora más rápida, siempre que esté libre; en caso contrario iría a la que había originalmente.

(c) Modelar el nuevo sistema, y calcular la probabilidad de que esté funcionando la impresora nueva.
Nota: Para analizar la segunda alternativa, representar cada estado como (i, j)*, donde* i *representa la ocupación de la primera impresora (rápida) y* j *la de la segunda.*
(d) Volver a calcular el tiempo medio de espera, así como el de permanencia en el sistema, tras la modificación que se ha realizado.



(a) Configuración inicial   (b) Configuración mejorada

Problema 25. La Universidad de Lusitania dispone de un super-computador para que los diferentes grupos de investigación puedan mandar sus simulaciones más pesadas. Debido al volumen de datos necesarios, el servidor sólo dispone de memoria para almacenar una petición en espera cuando el procesador esté atendiendo otra. Si llegara una aplicación cuando el servidor y la memoria están ocupados, ésta se perdería.

Se supone que las llegadas al super-computador siguen una distribución de Poisson, con una tasa de $\lambda = 3$ peticiones/hora, y que el tiempo que tarda el procesador en finalizar las simulaciones se puede modelar como una variable aleatoria exponencial negativa de media $t_{\text{servidor}}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 20$ minutos.

(a) Modelar el sistema con una cola de *Markov*. ¿Cuál es la probabilidad de que haya un trabajo esperando en el sub-sistema de memoria? ¿Cuál es la probabilidad de bloqueo?

(b) Obtener, aplicando la relación de *Little*, el tiempo medio de espera y el de estancia total en el computador (espera más procesador).

Con el objetivo de reducir el consumo que supone poner en marcha el procesador se decide hacer una modificación en el sistema, de manera que cuando llega una petición, se mantiene a la espera, pasando al procesador únicamente al recibir una segunda simulación; cuando el simulador se enciende, no se vuelve a pasar al estado de *stand-by* hasta que el sistema esté desocupado. Al igual que antes, se asume que una petición se pierde si llega cuando tanto servidor como memoria están ocupados.

(c) Modelar el nuevo sistema, y calcular las probabilidades de espera y de bloqueo. *Nota: Para analizar esta alternativa, representar cada estado como* (i, j)*, donde* i *representa la ocupación del sub-sistema de espera y* j *la del procesador.*

(d) Volver a calcular el tiempo medio de espera, así como el de permanencia en el sistema, tras la modificación que se ha realizado. Comentar los resultados.

Problema 26. Una pequeña empresa tiene una base de datos para gestionar toda la información relativa a sus empleados. Para acceder a la misma se dispone de una aplicación que tiene dos procesos, de manera que si llegara una tercera petición cuando ambos están ejecutándose, ésta se perdería. Teniendo en cuenta que el tiempo necesario para atender una consulta a la base de datos sigue una distribución exponencial negativa, con un valor medio $t_s = 3$ segundos, y que las peticiones llegan, según un proceso de *Poisson*, a una tasa de $\lambda = 20$ consultas/minuto, se pide resolver razonadamente las siguientes cuestiones.

(a) Modelar el sistema como un proceso de nacimiento y muerte y calcular, a partir del mismo, la probabilidad de que una petición a la base de datos se pierda.

(b) ¿Cuál es el número medio de peticiones en la aplicación? Utilizando la relación de *Little*, calcular el tiempo medio de permanencia en la misma.

Una vez puesto en marcha el servicio, se determina que un porcentaje de llegadas $(\alpha \cdot 100)$ vienen del departamento de recursos humanos (RRHH), mientras que el resto provienen de otros departamentos.

(c) Si $\alpha = \frac{2}{3}$, ¿cuál es la probabilidad de pérdida para las peticiones de RRHH? ¿Y para las que vienen del resto de departamentos?

Con objeto de priorizar las consultas que se llevan a cabo desde RRHH se hace una modificación en la aplicación. Así, se establece que una petición que provenga de este departamento permanezca en espera cuando los dos procesos están ocupados (únicamente se permite que haya una consulta en espera).

(d) Modelar el nuevo sistema como un proceso de nacimiento y muerte. Calcular la probabilidad de pérdida para las consultas de RRHH y para las peticiones de otros departamentos.
(e) ¿Cuál es el número medio de procesos ocupados? ¿Cuál es el número medio de consultas en espera?
(f) Utilizando la relación de *Little*, y a partir de los resultados del apartado anterior, calcular el tiempo medio de espera y el de permanencia *total* en la aplicación.
(g) ¿Cuál es la probabilidad de pérdida global?

Problema 27. La empresa CONSULTEL S.L. tiene un servicio de atención al cliente con tres líneas y dos operadores, de manera que cuando los dos operadores están ocupados, sólo puede permanecer en espera un cliente. Se supone que las llamadas llegan (según una distribución de *Poisson*) a una tasa $\lambda = 2$ llamadas por minuto, y que su duración (distribución exponencial negativa) media es de 1 minuto.

(a) Modelar el sistema con una cola de *Markov*, asumiendo que los clientes en espera se mantienen en el sistema hasta que les atienda un operador. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema esté bloqueado? Obtener, aplicando la relación de *Little*, el tiempo medio de espera.

Se va a analizar la impaciencia de los clientes, utilizando dos modelos diferentes:

Modelo 1 En este caso se supone que cuando un cliente, al llamar, encuentra los dos operadores ocupados, decide permanecer a la espera con una probabilidad α.

Modelo 2 Los clientes, cuando están esperando, pueden decidir finalizar la llamada. El tiempo de espera que aguantan en espera se modela con una variable aleatoria exponencial negativa, con media $\frac{1}{\gamma}$.

(b) Representar el modelo 1 con una cola de Markov. Calcular la probabilidad de bloqueo y el tiempo medio de espera, cuando $\alpha = \frac{3}{4}$.
(c) Representar el modelo 2 con una cola de Markov. Calcular la probabilidad de bloqueo y el tiempo medio de espera, cuando $\frac{1}{\gamma} = 30$ segundos.
(d) ¿Cuál es el valor de α que hace que las probabilidades de bloqueo de ambos modelos sean iguales? (se mantiene que $\frac{1}{\gamma} = 30$ segundos). ¿Cuál es el tiempo medio de espera en ese caso?
(e) Explicar brevemente cómo se podría calcular la probabilidad de que un cliente decidiera finalizar la espera en el modelo 2.

Problema 28. Un centro de investigación dispone de un computador de altas prestaciones para realizar análisis que requieren de una gran carga computacional. Cuando se está ejecutando una simulación, y debido al volumen de información que se necesita para realizar el análisis, sólo se puede tener una petición en espera, con lo que si llegara otra cuando el servidor y la memoria están ocupados, se perdería.

Se supone que las llegadas al simulador se pueden modelar como un proceso de *Poisson*, con una tasa $\lambda = 6$ peticiones/hora y que el tiempo que tarda el procesador en finalizar el análisis se corresponde con una variable aleatoria exponencial negativa de media $t_s = 10$ minutos.

(a) Modelar el sistema con una cola de *Markov.* ¿Cuál es la probabilidad de bloqueo?
(b) Obtener, aplicando la relación de *Little*, el tiempo medio de espera y el de estancia total en el computador (espera más procesador).

Se comprueba que algunos de los análisis que se llevan a cabo no convergen, por lo que tienen que ser repetidos con otros valores iniciales, lo que sucede con una probabilidad $1 - \alpha$. En esta situación, cuando finaliza una simulación que no ha obtenido resultados adecuados, se vuelve a ejecutar inmediatamente.

(c) Modelar el nuevo sistema, y calcular la probabilidad de bloqueo, asumiendo que $\alpha = \frac{1}{2}$.
(d) Aplicando la relación de *Little*, calcular el tiempo medio que una simulación (considerando todas las ejecuciones) está en el procesador y el tiempo medio de espera.
(e) ¿Cuántas ejecuciones son necesarias (en media) para cada análisis? ¿Cuál es el tiempo medio por ejecución?. *Nota:* Si $|x| < 1$, se sabe que $\sum_{i=0}^{\infty} ix^i = \frac{x}{(1-x)^2}$

Problema 29. Para unir las redes de dos de sus sedes (S y D), una compañía dispone de un nodo de comunicaciones, con una capacidad en la interfaz de salida de C `bps`. Se sabe que la tasa de información generada entre S y D se puede modelar como un proceso de *Poisson*, con un valor medio λ paquetes/seg; a su vez, la longitud de los paquetes sigue una distribución exponencial negativa, y tiene un valor medio de L `bits`. Si se supone que el nodo tiene capacidad suficiente para almacenar paquetes hasta que puedan ser transmitidos, se pide responder a las siguientes cuestiones.

(a) Representar la cadena de *Markov* del sistema y calcular las probabilidades de los correspondientes estados en función de C, L y λ.
(b) Utilizando la relación de *Little* calcular el tiempo medio que tarda un paquete en llegar de S a D (coincide con tiempo medio de permanencia en el nodo: espera más interfaz) en función de C, L y λ.
(c) Si se sabe que $C = 50$ `kbps` y $L = 1250$ `Bytes`, ¿cuál es el valor máximo de λ que se puede tener para que el modelo anterior sea válido?

Ayuda: Si $|x| < 1$, se sabe que: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \dfrac{1}{1-x}$ y $\sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

Finalmente, se estima que la tasa de llegadas media (λ), es de 240 paquetes/minuto, pero la empresa se plantea diferentes alternativas para mejorar las prestaciones del sistema.

Alternativa 1 Se activa un regulador de tráfico, de manera que cuando haya M paquetes o más en el sistema, se descartan las nuevas llegadas con una probabilidad $1 - q$.

Alternativa 2 Los paquetes tienen asociado un tiempo de espera máximo, que se modela con una variable aleatoria exponencial negativa, de media $\frac{1}{\gamma}$; cuando un paquete alcanza dicho límite se descarta.

Alternativa 3 Se adquiere un segundo nodo de comunicaciones, idéntico al anterior, aunque se alquila una capacidad menor para su interfaz de salida. El tráfico se distribuye entre ambos sistemas, de manera que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.
Nota: *En este caso cada nodo dispone de su propio sistema de espera.*

(d) Modelar las dos primeras alternativas con una cadena de *Markov*, indicando las tasas de nacimiento y muerte correspondientes.

(e) Aplicando el resultado del apartado (b), calcular el tiempo medio que un paquete tarda en llegar de S a D en la Alternativa 3, si el tráfico se reparte de manera equitativa entre ambos nodos ($\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda}{2}$), y la capacidad de la interfaz de salida del segundo nodo es $C_2 = \frac{C}{2}$.

(f) ¿Cómo tendría que repartirse el tráfico entre los dos nodos (calcular λ_1 y λ_2) para minimizar el tiempo medio que un paquete tardaría en llegar de S a D si las capacidades se mantienen ($C_1 = C$ y $C_2 = \frac{C}{2}$)? ¿Cuánto vale dicho tiempo?

Problema 30. Una compañía de ingeniería dispone de un *clúster* con dos máquinas para resolver los análisis de estructuras por parte de sus empleados. Debido al volumen de información necesario en cada ejecución, cuando los dos computadores están ocupados, las peticiones entrantes se descartan. Se supone que la duración de un análisis sigue una distribución exponencial negativa, con valor medio $t_s = \frac{1}{\mu} = 60$ segundos y que las llegadas al *clúster* siguen un proceso de *Poisson*, con una tasa de $\lambda = 60$ análisis por hora.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de que una petición sea rechazada.

(b) ¿Cuál es el tiempo medio de permanencia en el sistema?

Para reducir el número de rechazos, la empresa sustituye uno de los dos computadores por otro con mayores prestaciones, en el que el tiempo de ejecución medio por análisis se reduce a la mitad. Los ingenieros encargados de programar el planificador se plantean dos alternativas (en ambas, cuando las dos máquinas están ocupadas, las entradas se siguen rechazando, tal y como ocurría anteriormente).

Planificador 1 Las peticiones, siempre que sea posible, van al nuevo computador y, sólo si está ocupado, se mandarían a la máquina original.

Planificador 2 Para aumentar la fiabilidad del sistema, se plantea balancear la carga entre los dos equipos; así, cuando llegue una nueva petición, esta será atendida por la máquina que llevara más tiempo desocupada.

(c) Modelar la primera alternativa con una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de bloqueo.
Pista: representar los estados como (i,j), donde i indica la ocupación del primer computador y j la del segundo.

(d) Modelar la segunda alternativa con una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de bloqueo.
Pista: representar los estados como (i,j), donde i indica la ocupación del primer computador y j la del segundo. Dividir el estado en el que no hay ningún análisis en el clúster en dos, en función de si la siguiente petición irá al primer o al segundo computador.

(e) ¿Con qué alternativa se consigue un número menor de rechazos? ¿Cuál es la probabilidad de ocupación de la máquina con mejores prestaciones en ambos casos?

(f) Calcular, para las dos alternativas, el tiempo medio de permanencia en el sistema.

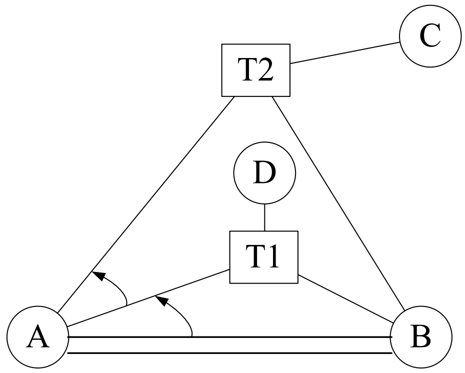
Problema 31. Dos poblaciones A y B ofrecen un tráfico T_A y T_B a un grupo de circuitos de primera elección C_A y C_B respectivamente. El grupo de circuitos C_B es a la vez un grupo de 2ª elección para la población A.
Finalmente, como 2ª elección para la población B y como 3ª para la población A, el tráfico se encamina hacia un grupo de C_C circuitos. Si este último grupo está bloqueado, las llamadas esperan indefinidamente hasta poder ser cursadas.
Si $T_A = 4$ *Erlangs*, $T_B = 6$ *Erlangs* y $C_A = 1$ circuito, calcular:

(a) El número mínimo de circuitos C_B necesario para que:

- como mínimo el 60 % del tráfico ofrecido por la población B sea cursado por los circuitos de 1ª elección.
- como máximo el 75 % del tráfico ofrecido por la población A sea cursado entre los circuitos de 1ª y 2ª elección.

(b) El número mínimo de circuitos C_C para que como mucho el 2 % de las llamadas se tengan que esperar para ser cursadas.

Problema 32. Se dispone de una red como la de la figura:

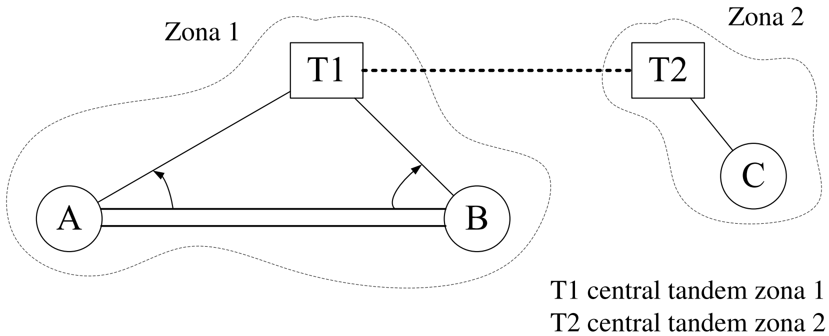


donde el tráfico entre centrales es:

- $T_{AB} = 10$ *Erlangs*
- $T_{AD} = 5$ *Erlangs*
- $T_{AC} = 4$ *Erlangs*

Dimensionar todos los circuitos para que la probabilidad de pérdida en las secciones de elevado uso sea < 0.6 y en las secciones finales sea < 0.01.

Problema 33. Se quiere dimensionar la red de la figura constituida por dos zonas interconectadas vía centrales tandem que se muestra en la figura.



El tráfico entre centrales es el siguiente (en *Erlangs*):

	A	**B**	**C**
A	-	2	2
B	2	-	2
C	2	2	-

Los criterios de diseño son:

- En las secciones de elevado uso el tráfico cursado por el último circuito del grupo no debe ser inferior a 0.5 *Erlangs*.

- $PB_{\text{Sección Final}} < 0.01$.

Los enlaces son unidireccionales excepto en la sección $T1 - T2$ que son bidireccionales.

(a) Dimensionar el número de circuitos de todas las secciones de la red.
(b) Calcular el *GoS* del tráfico de A a C.

Problema 34. Tres centrales telefónicas están unidas a través de una central tandem. Debido a un incremento del tráfico, se plantea establecer una sección directa entre las centrales A y B, y replantear el número de circuitos del resto de la red. Teniendo en cuenta que la matriz de tráfico actualizado es la que se muestra a continuación:

	A	**B**	**C**
A	–	4	2
B	4	–	1
C	–	3	–

y que se decide utilizar enlaces unidireccionales, se pide:

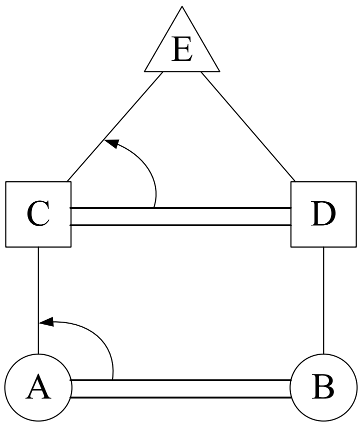
(a) Dimensionar el enlace directo entre A y B, teniendo en cuenta que el tráfico cursado por el menos cargado de los circuitos tiene que ser superior a 0.6 *Erlangs* y que se emplea una disciplina secuencial para la ocupación de los circuitos.
(b) Repetir el apartado anterior, asumiendo esta vez una ocupación aleatoria de los circuitos.
(c) Dimensionar el resto de los enlaces de la red, utilizando los resultados del apartado *(a)*. La probabilidad de pérdida en los enlaces finales tiene que ser menor del 1 %.
(d) Determinar el grado de servicio (*GoS*) para las comunicaciones de A a B y de A a C.
(e) Si se hubieran empleado enlaces bidireccionales, ¿se habrían necesitado más o menos circuitos? Justificar la respuesta.

Problema 35. Dada la red de la figura, en la que...

- El tráfico de A a B, T_{AB}, es de 10 *Erlangs*.
- El tráfico de C a D, T_{CD}, es de 5 *Erlangs*.
- El tráfico de A a D, T_{AD}, es de 5 *Erlangs*.
- Rutas del tráfico $A - B$:
  - 1ª elección $A - B$.
  - 2ª elección (desbordamiento de AB) $A - C - D - B$.
  - 3ª elección (desbordamiento de CD) $A - C - E - D - B$.
- Rutas del tráfico $C - D$:

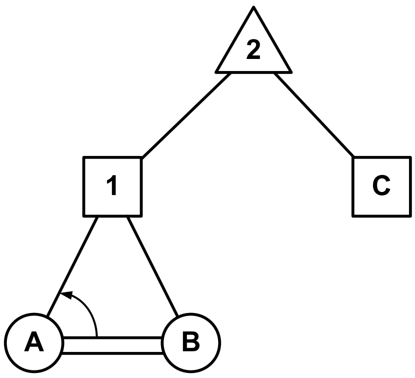
- 1ª elección $C - D$.
- 2ª elección (desbordamiento de CD) $C - E - D$.

- Rutas del tráfico $A - D$:
  - 1ª elección $A - C - D$.
  - 2ª elección (desbordamiento de CD) $A - C - E - D$.



Se pide dimensionar todos los circuitos sabiendo que en las secciones de elevado uso la probabilidad de pérdida ha de ser inferior a 0.7 y en las secciones finales debe ser inferior a 0.01.

Problema 36. Se dispone de la siguiente estructura de red telefónica jerárquica.



Sabiendo que el tráfico entre las poblaciones **A** y **B** es de 4 *Erlangs*, y que entre **A** y **C** se estima una intensidad de 3 *Erlangs*, se pide resolver, de manera razonada, las siguientes cuestiones:

(a) Dimensionar el enlace directo entre **A** y **B**, suponiendo que la ocupación de los circuitos es secuencial y que se requiere que el menos cargado de los circuitos esté ocupado, al menos, el 60 % del tiempo.

(b) Repetir el apartado anterior, asumiendo una ocupación aleatoria de los circuitos.

(c) Dimensionar el resto de enlaces de la red, teniendo en cuenta que la probabilidad de bloqueo en los enlaces de las rutas finales tiene que ser menor del 3 %. Utilizar el resultado del apartado *(a)*.

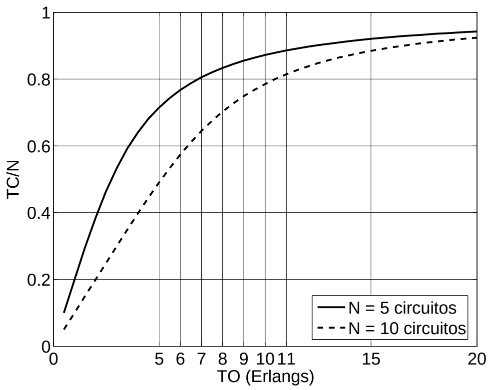
(d) Calcular el *GoS* de las comunicaciones entre **A** y **B** y entre **A** y **C**.

Se conecta una nueva población a la central **1**, y la compañía se plantea añadir una secuencia directa entre **1** y **C**, que desbordaría a la ruta final (entre **1** y **2**). El proveedor ofrece grupos con $\alpha \cdot 5$ circuitos, con ocupación aleatoria.

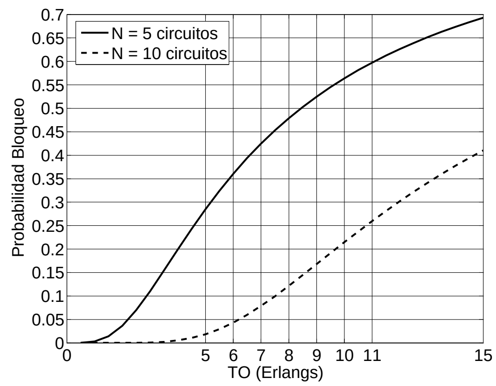
(e) Si se pretende que la ocupación mínima de un circuito en esta secuencia directa sea del 80 %, ¿cuál debería ser el tráfico entre esta población y **C** para que la compañía incorporara un grupo con $\alpha = 1$? ¿Y para que fuera $\alpha = 2$?

(f) Tras realizar una serie de medidas se determina que la intensidad de este tráfico es de 6 *Erlangs*. En estas condiciones, dimensionar nuevamente los enlaces en los que hubiera cambiado el tráfico ofrecido respecto a la configuración inicial.

(g) Determinar el nuevo *GoS* entre **A** y **C**.



(a) Eficiencia en un sistema de pérdida pura con ocupación aleatoria

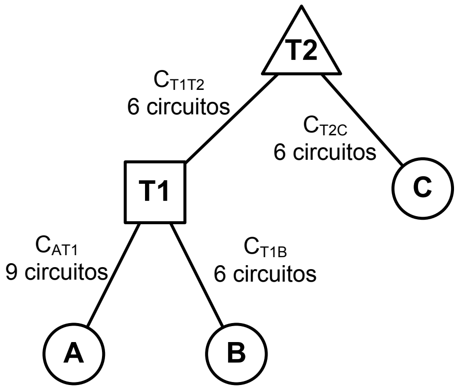


(b) Probabilidad de bloqueo en un sistema de pérdida pura

Problema 37. Considérese la red de la figura.

Se sabe que todos los enlaces son unidireccionales y que los criterios de diseño son los siguientes:

- La pérdida en las secciones de ruta final tiene que ser inferior al 3 %.
- La ocupación mínima por circuito en las secciones directas debe ser superior al 70 %.



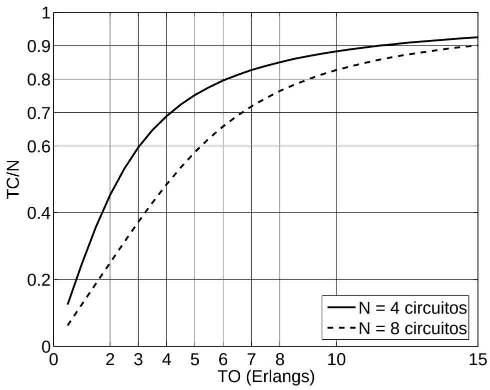
(a) Establecer, en las condiciones iniciales de tráfico (2 *Erlangs* entre **A** y **B** y 2 *Erlangs* entre **A** y **C**), el *GoS* entre **A** y **B** y entre **A** y **C**.

Al comenzar a operar la red se observa que la demanda de tráfico entre **A** y **B** no estaba correctamente estimada, ya que se sitúa en 3 *Erlangs*.

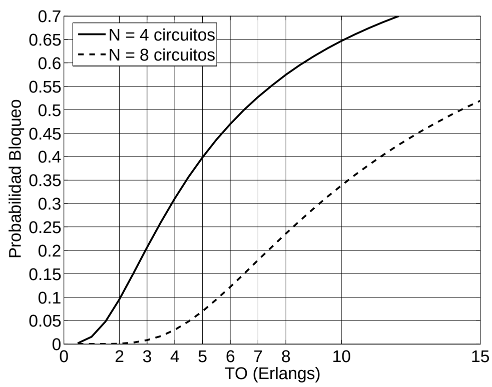
(b) Dimensionar la sección directa entre **A** y **B**, suponiendo ocupación tanto secuencial como aleatoria de los circuitos.

(c) Utilizando el resultado de la ocupación aleatoria, ¿cuáles son los cambios que se pueden realizar en la configuración inicial? ¿Cuál es el nuevo *GoS* entre **A** y **B**?

Tras un periodo de explotación sin incidencias, se observa que comienza a aparecer un tráfico relevante entre **B** y **C**. El operador se plantea establecer una sección directa entre **T1** y **C**, que desbordaría a la sección final **T1**-**T2**. El proveedor ofrece grupos de $4 \cdot N$ circuitos, con ocupación aleatoria.



(a) Eficiencia en un sistema de pérdida pura con ocupación aleatoria



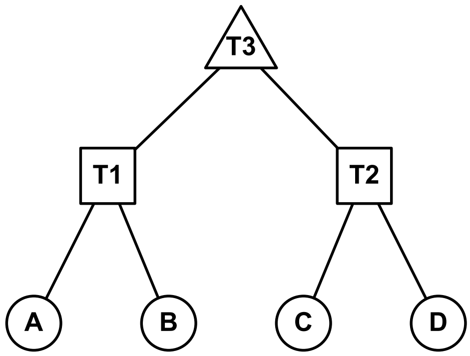
(b) Probabilidad de bloqueo en un sistema de pérdida pura

(d) ¿Cuál debería ser el tráfico mínimo entre **B** y **C** para justificar un grupo de 4 circuitos? ¿Y para uno de 8 circuitos? *(Asumir que la pérdida en **B**-**T1** es del 3 %).*

(e) Si se estima que el tráfico entre **B** y **C** es de 4 *Erlangs*, dimensionar aquellos enlaces en los que haya habido cambios frente a la carga original de tráfico, incluyendo el que une **B** y **T1.**

(f) Establecer el nuevo *GoS* entre **A** y **C**.

Problema 38. Considérese la red de la figura, en la que todos los enlaces son unidireccionales, y la matriz de tráfico correspondiente.



	A	B	C	D
A	-	2	1	3
B	3	-	-	2
C	-	-	-	1
D	-	-	4	-

El operador decide establecer una sección directa entre las centrales **A** y **B** y entre las centrales **C** y **D**. Teniendo en cuenta que se pretende hacer un uso eficiente de los recursos, se decide emplear enlaces bidireccionales. El criterio de diseño es que el menos cargado de los circuitos tenga una ocupación de, al menos, el 80 %. Teniendo en cuenta el escenario descrito, se pide resolver de manera razonada las siguientes cuestiones.

(a) Dimensionar ambas secciones directas, suponiendo ocupación tanto secuencial como aleatoria de los circuitos.

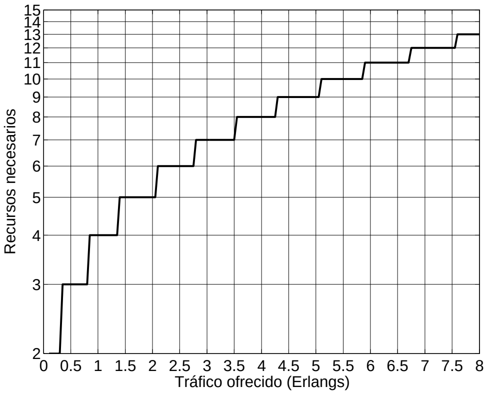
(b) Utilizando el resultado de la ocupación aleatoria, dimensionar los circuitos **AT1**, **BT1**, **T1T3**, **T3T2** y **T2D**, teniendo en cuenta que la probabilidad de bloqueo en los enlaces de una ruta final tiene que ser inferior al 4 %.

(c) ¿Cuál es el grado de servicio entre **B** y **D**?

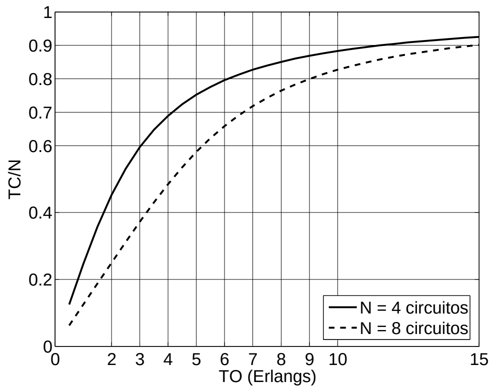
Debido a la construcción de una urbanización, se decide conectar una nueva central **E** a **T1** (se supone que únicamente genera tráfico hacia D). El operador decide implantar una sección directa entre **T1** y **T2** (también *bidireccional*), que desbordaría a la ruta final **T1-T3-T2**. El proveedor ofrece grupos de $4 \cdot N$ circuitos, con ocupación aleatoria.

(d) ¿Cuál debería ser el tráfico mínimo entre **E** y **D** para justificar un grupo de 4 circuitos? ¿Y para uno de 8 circuitos? *(Asumir que la pérdida en **E-T1** es del 4 % y que se mantiene el criterio de diseño del 80 %).*

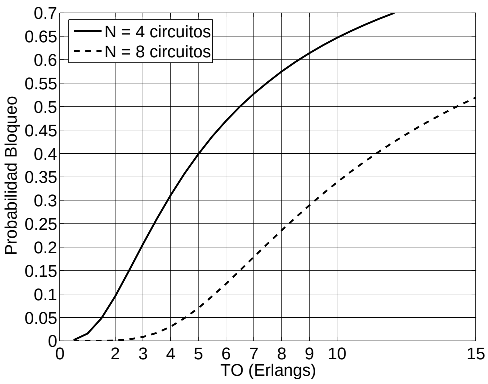
(e) Si se estima que el tráfico entre **E** y **D** es de 2 *Erlangs*, dimensionar aquellos enlaces en los que haya habido cambios frente a la carga original de tráfico, incluyendo el que une **E** y **T1.**



(a) Curva de Erlang-B para una pérdida del 4 %



(b) Eficiencia en un sistema de pérdida pura con ocupación aleatoria



(c) Probabilidad de bloqueo en un sistema de pérdida pura

Problema 39. Considérense tres centrales (**A**, **B** y **C**), que están unidas a través de una central tandem (con enlaces unidireccionales), para dar servicio al tráfico entre ellas, recogido en la matriz que se muestra a continuación.

	A	**B**	**C**
A	-	1	1
B	3	-	1
C	-	1	-

El operador se plantea establecer un enlace directo entre las centrales **A** y **B** para el que, teniendo en cuenta que se pretende hacer un uso eficiente de los recursos, se decide emplear enlaces bidireccionales. El criterio de diseño es que el menos cargado de los circuitos tenga una ocupación de, al menos, el 70 %.

(a) Dimensionar el enlace directo entre **A** y **B**, suponiendo ocupación tanto secuencial como aleatoria de los circuitos.
Nota: *De las alternativas que cumplan el criterio de diseño del operador, elegir aquella que minimice la probabilidad de bloqueo.*

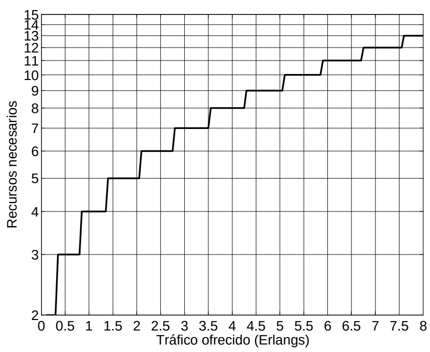
(b) Utilizando el resultado de la ocupación aleatoria, dimensionar el resto de circuitos de la red, teniendo en cuenta que la probabilidad de bloqueo en los enlaces de una ruta final tiene que ser inferior al 4 %.

(c) ¿Cuál es el grado de servicio entre **A** y **B**? ¿Y entre **A** y **C**?

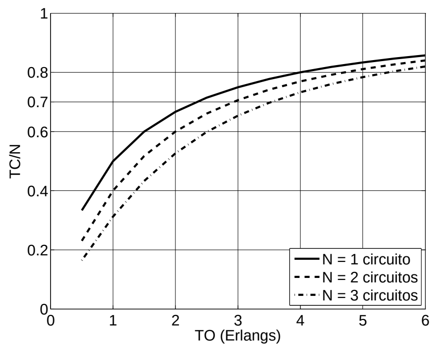
Durante la fase inicial de explotación de la red, el operador se percata de un incremento del tráfico entre las centrales **B** y **C** (sentido $\overrightarrow{\mathbf{BC}}$), y se plantea establecer una sección directa con ocupación aleatoria (enlace bidireccional) entre estas dos centrales (manteniendo el criterio de diseño anterior).

(d) ¿Cuál debería ser el incremento de tráfico para justificar un enlace con 1 circuito? ¿Y para 2 y 3 circuitos?.

(e) Tras la monitorización pertinente se estima que el tráfico entre **B** y **C** se ha incrementado en 1 Erlang (pasando por tanto a valer 2 Erlangs). Redimensionar aquellos enlaces en los que haya habido modificaciones en el tráfico ofrecido, frente al diseño inicial.



Curva de Erlang-B para una pérdida del 4 %



Eficiencia en un sistema de pérdida pura con ocupación aleatoria

Problema 40. Para llevar a cabo ciertos análisis de resistencia de estructuras, una empresa de ingeniería dispone de una computadora con dos procesadores. Cuando ambos están ocupados, el planificador puede mantener una petición en espera, hasta que se libere uno de los procesadores. Si llegara una petición adicional cuando el subsistema de espera está ocupado, se perdería. Se sabe que los ingenieros envían trabajos según un modelo de *Poisson*, a una tasa de 2 peticiones por minuto. Además, el tiempo medio de ejecución es de 30 segundos, y se estima que está distribuido según una variable aleatoria exponencial negativa.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*. ¿Cuál es la probabilidad de que una petición se pierda? ¿Y de que tenga que esperar?.

(b) Utilizando la relación de *Little*, calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema (procesador más espera) y el de espera.

Debido a una actualización en el software de análisis, cada vez que se envía una petición, ésta lleva asociada dos procesos diferentes, y cada uno de ellos se ejecuta de manera independiente por uno de los procesadores. Si el planificador no puede aceptar los dos procesos

(ya sea en una de los procesadores o en el sistema de espera), se perdería la petición completa. Además, se mantiene la tasa de llegadas (2 peticiones* por minuto), así como la duración de los análisis (30 segundos por proceso).
* *Recordar que cada petición llega al sistema con 2 procesos.*

(c) Modelar de nuevo el sistema, con una cadena de *Markov*. ¿Cuál es la probabilidad de pérdida en este caso?

(d) Calcular el número medio de procesadores ocupados y, a partir de dicho resultado, obtener el tiempo medio de permanencia en un procesador, aplicando la relación de *Little*.

(e) Replantear la cadena de *Markov* del apartado (c) si la actualización sólo se hubiera aplicado a un porcentaje $(100 \cdot \alpha)$ de los ingenieros que generan los trabajos. ¿Cómo se podría calcular la probabilidad de pérdida para las peticiones de cada tipo en este caso?
En este último apartado no hace falta calcular las probabilidades de cada estado, sólo plantear el modelo, con las tasas de nacimiento y muerte, y dejar planteadas las probabilidades de pérdida correspondientes.

Problema 41. Un centro de investigación dispone de una máquina, con dos procesadores, para llevar las simulaciones generadas por uno de sus grupos de trabajo que, en concreto, pueden ser de dos tipos (**A** y **B**). En una primera solución se ha desarrollado un programa genérico, según el que cualquiera de los dos tipos de análisis se puede resolver en uno u otro procesador indistintamente, con un tiempo de ejecución igual para ambos, distribuido según una variable aleatoria exponencial negativa con valor medio 1 minuto. Si los dos procesadores estuvieran ocupados, el sistema rechazaría nuevas peticiones, debido al volumen de información que es necesario almacenar en cada ejecución. Se sabe que las llegadas de ambos tipos de análisis se pueden modelar como sendos procesos de *Poisson*, con tasas $\lambda_{\mathbf{A}} = 45$ peticiones/hora y $\lambda_{\mathbf{B}} = 15$ peticiones/hora, respectivamente.

(a) Con ayuda del diagrama de estados del sistema correspondiente, calcular la probabilidad de pérdida para los dos tipos de análisis. ¿Cuánto es el tiempo medio de permanencia en el sistema?

Los programadores deciden *especializar* la aplicación correspondiente, de manera que las simulaciones sólo podrán ser ejecutadas por el procesador que les corresponda. Así, los análisis de tipo **A** tendrían un tiempo de ejecución (exponencial negativo) de 30 segundos, mientras que los de tipo **B** necesitarían 3 minutos (tiempo también distribuido según una variable aleatoria exponencial negativa).

(b) Modelar el nuevo sistema y calcular las probabilidades de pérdida para ambos tipos de análisis.
Pista. *En este apartado tener en cuenta el tipo de simulación que se está ejecutando cuando hay un único procesador ocupado.*

(c) Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema.

Problema 42. Una compañía de seguros dispone de un sistema para atender las consultas por parte de sus agentes. La aplicación tarda una media de 20 segundos en procesar una petición (se estima que la distribución de dicho tiempo de servicio es exponencial negativa) y, además, dispone de capacidad para mantener una consulta en espera. Los agentes asignados a los grandes clientes generan peticiones con una tasa de 3 consultas por minuto, mientras que el resto genera una tasa de 2 peticiones por minuto (se considera que ambos procesos son de *Poisson*). El sistema no diferencia inicialmente los dos tipos de peticiones.

(a) Con ayuda del diagrama de estados del sistema correspondiente, calcular la probabilidad de pérdida para los dos tipos de peticiones.
(b) Calcular el tiempo medio de espera.

Se decide otorgar una mayor prioridad a las peticiones que provienen de los grandes clientes, para lo que se reprograma el sistema de manera que, cuando llegue una consulta de un gran cliente y haya una normal esperando, ésta sea descartada, pasando aquella a estar en espera.

(c) Modelar el nuevo sistema y calcular la probabilidad de pérdida (*sólo de las peticiones entrantes*) para los dos tipos de consulta.
Pista: *tener en cuenta el tipo de petición en espera en el diagrama de estados.*
(d) Calcular el tiempo medio de espera de las peticiones que provienen de los grandes clientes.
(e) Indicar cómo se podría calcular la probabilidad de que una petición originada por un cliente *regular* fuera descartada por la llegada de una consulta relacionada con un gran cliente.

Problema 43. Un equipo del centro de investigación **FraunHOF** utiliza un súper-computador para realizar análisis genéticos. Sus investigadores generan simulaciones (proceso de *Poisson*) con una tasa $\lambda = 8$ peticiones/minuto. La máquina dispone de dos procesadores y capacidad para almacenar una consulta adicional en espera. Si el tiempo que tarda un procesador en analizar un perfil genético se distribuye según una variable exponencial negativa, con media 15 segundos, se pide responder razonadamente a las siguientes cuestiones.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de que una petición sea rechazada.
(b) ¿Cuál es el tiempo medio que una petición tiene que esperar antes de pasar al procesador?

Un grupo de desarrollo de software de **FraunHOF** diseña un algoritmo diferente, en el que se aprovecha los patrones de los perfiles que se tienen que analizar. Se reprograma la aplicación para que las peticiones se atiendan de dos en dos (esto es, es necesario que haya dos peticiones para poder ejecutar un análisis), con un tiempo de procesamiento α veces menor que el anterior ($\alpha \geq 1$). La aplicación utiliza ambos procesadores, y cada ejecución del algoritmo devuelve los resultados de dos perfiles.
La máquina que se utiliza para llevar a cabo los análisis sigue siendo la misma, con dos procesadores y capacidad para almacenar una petición en espera.

(c) Modelar el nuevo sistema y calcular la probabilidad de bloqueo cuando $\alpha = 2$.
(d) ¿Cuál es el valor de α que hace que la probabilidad de bloqueo de ambas alternativas sean iguales?
(e) Calcular el tiempo medio de espera (cuando $\alpha = 2$) en el nuevo sistema.

Problema 44. Se pretende analizar el comportamiento de un nodo de comunicaciones con dos interfaces de salida, pero sin capacidad para almacenar paquetes en espera. Se asume que los paquetes llegan según un proceso de *Poisson*, con una tasa $\lambda = 480$ paquetes por minuto. La capacidad de cada una de las dos interfaces de salida del nodo es de $C = 64$ *kbps*. Se asume que la longitud de los paquetes sigue una distribución exponencial negativa, con una media de 1000 *Bytes*.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*. ¿Cuál es la probabilidad de que se pierda un paquete?
(b) Utilizando la relación de *Little*, calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema.
(c) Si se sabe que un porcentaje de los paquetes que llegan al nodo ($100 \cdot \alpha$) son de alta prioridad, ¿cuál es la probabilidad de pérdida para estos paquetes, si se mantiene el sistema original, en función del parámetro α?

El ingeniero que gestiona el nodo determina que la pérdida en la que se incurre para los paquetes de alta prioridad no es aceptable. Para ello modifica la operación del nodo, de manera que los paquetes *no prioritarios* sólo puedan emplear la segunda interfaz, mientras que los paquetes de alta prioridad puedan utilizar cualquiera de ellas (eligen una u otra de manera aleatoria, si ambas están libres).

(d) Modelar el sistema modificado con una cadena de *Markov*
Sugerencia: representar los estados como (i,j), donde i indica la ocupación del primer interfaz y j la del segundo..
(e) Teniendo en cuenta que $\alpha = \frac{2}{3}$, ¿cuál es la probabilidad de pérdida para cada tipo de paquete?
(f) ¿Cuál es el número medio de paquetes en el sistema? Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo de permanencia en el nodo; ¿depende del valor de α?

Problema 45. Un grupo de investigación utiliza un súper-computador para realizar dos tipos de análisis, para lo que reserva un procesador y capacidad de memoria suficiente para guardar un trabajo en espera. La llegada de ambos tipos de peticiones sigue un proceso de Poisson, con tasas λ_1 y λ_2, respectivamente. La ejecución de ambos tipos de análisis tiene una duración exponencial negativa, de media $t = 30$ *segundos*. Se sabe además que las simulaciones de tipo 2 no pueden esperar.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov* y calcular las probabilidades de pérdida para ambos tipos de análisis, si $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ análisis por minuto.

(b) Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo medio de espera. ¿Cuál sería el tiempo medio de espera para los análisis del primer grupo? A partir de los resultados anteriores establecer la probabilidad de que un análisis del sistema pertenezca a uno u otro grupo.

Los ingenieros consiguen mejorar el diseño de la aplicación que se encarga del primer grupo de análisis, por lo que su tiempo medio de ejecución se reduce, pasando a ser $t_1 = \frac{t}{\alpha}$ (con $\alpha > 1$).

(c) Modelar de nuevo el sistema, utilizando una cadena de *Markov*.
Sugerencia: *En este caso es recomendable que en los estados de la cadena se diferencie el tipo de análisis que se está ejecutando en el simulador.*

(d) El tiempo puede reducirse aún más si se establece que una petición del grupo 1 sólo puede esperar si la que está en el procesador también lo es. Modelar de nuevo el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular la probabilidad de pérdida para ambos tipos de análisis, si se supone que $\alpha = 2$.

Problema 46. A un nodo de comunicaciones con una interfaz de salida llegan paquetes de dos tipos de servicio diferentes (*rt* y *nrt*). En ambos casos se establece que la longitud se puede modelar como una variable aleatoria exponencial negativa, de media 300 `Bytes`. Las tasas de llegadas son, por otra parte: $\lambda_{rt} = 10$ paquetes por minuto y $\lambda_{nrt} = 30$ paquetes por minuto (en ambos casos, la llegada de paquetes sigue un proceso de *Poisson*). El nodo de comunicaciones no dispone de ningún *buffer* para almacenar paquetes en espera.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov* y calcular las probabilidades de pérdida para ambos tipos de paquetes, en función de la capacidad de la interfaz de salida del nodo de comunicaciones. Calcular la capacidad mínima para que la probabilidad de bloqueo de los paquetes *rt* sea menor del 20 %.

(b) Se hace una modificación en el sistema, de manera que se otorgue mayor prioridad a los paquetes *rt*; así, si al llegar un paquete *rt* se estuviera transmitiendo un paquete *nrt*, éste se descartaría, pasando aquel a la interfaz. Utilizando la capacidad calculada en el apartado anterior, ¿cuál es la probabilidad de que se rechace un paquete entrante de cada tipo?
Sugerencia: *En este caso es recomendable que en los estados de la cadena se diferencie el tipo de paquete que está en la interfaz.*

(c) Utilizando la relación de *Little*, calcular el tiempo medio de permanencia para cada tipo de paquete en el sistema, comentando los resultados.

El nodo de comunicaciones se actualiza, de manera que se habilita un *buffer* con capacidad para mantener un paquete en espera, aunque se establece que únicamente los paquetes *nrt* pueden esperar.

(d) Modelar de nuevo el sistema, utilizando una cadena de *Markov* y teniendo en cuenta la modificación del apartado (b) y que, en este caso, los paquetes *nrt* desplazados por los *rt* irían (si es posible) al *buffer* de espera, en lugar de ser rechazados directamente. ***Sugerencia:*** *En este caso es recomendable que en los estados de la cadena se diferencie el tipo de paquete que está en la interfaz.*
(e) Indicar, sin resolver numéricamente el sistema anterior, cuáles serían las probabilidades de rechazar paquetes entrantes de cada tipo.

Problema 47. Se pretende utilizar la teoría de colas para analizar el comportamiento del *scheduler* de una máquina que lleva a cabo simulaciones de gran envergadura para el departamento de I+D de una empresa. Se asume que sólo se puede ejecutar un trabajo cada vez, y que el sistema tiene capacidad para mantener una petición en espera. Se decide también ofrecer los servicios del super-computador al resto de la compañía, pero se pretende priorizar las que son generadas por el propio departamento. Para ello se diseña el planificador de manera que únicamente puedan esperar las peticiones que llegan del departamento.
Se asume que las llegadas de ambos tipos de peticiones se pueden modelar con sendos procesos de *Poisson*, con tasas $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ peticiones por hora, para el departamento y externas, respectivamente. Se asume también que la duración de los análisis se puede modelar con una variable aleatoria exponencial negativa, con una media de 10 minutos por análisis.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de pérdida para las peticiones de los dos tipos de análisis.
(b) ¿Cuál es el tiempo medio (considerando cualquier análisis) de espera? ¿Y el tiempo medio de espera para las peticiones que vienen del propio departamento?

Para dotar de mayor prioridad a los análisis del departamento se decide modificar el planificador, de manera que cuando se esté ejecutando un análisis externo y llegue una petición del departamento, aquella sea rechazada, pasando a procesar la recién llegada; además, se sigue manteniendo el criterio de que las peticiones externas no pueden esperar.

(c) Volver a modelar el sistema y calcular la probabilidad de pérdida para los dos tipos de análisis.
Pista: *Tener en cuenta el tipo de análisis que se está ejecutando cuando haya uno en el sistema.*

(d) Calcular, utilizando la relación de *Little*, el tiempo medio de permanencia *en el procesador* para ambos tipos de análisis, comentando los resultados obtenidos.

Se hace una inversión para mejorar la máquina, de manera que se decide sustituir el subsistema de espera por un nuevo procesador. Así, el super-computador puede ejecutar dos simulaciones en paralelo, pero no puede mantener ninguna en espera. Además, se *reserva* el segundo procesador para los análisis del departamento (las peticiones externas solo pueden emplear el procesador original) y se mantiene el esquema de priorización anterior, de manera que una petición del departamento podría ocupar el procesador que estuviera ejecutando un análisis externo, que sería rechazado, cuando el otro procesador estuviera ocupado. Se asume, además, que cuando los dos procesadores están libres, las peticiones del departamento son atendidas por uno u otro indistintamente.

(e) Modelar el nuevo sistema e indicar cómo se podrían calcular las probabilidades de pérdida para las peticiones entrantes de cada tipo de análisis (no hace falta resolver numéricamente las probabilidades de cada uno de los estados).
Pista: *Representar cada estado como* i, j*, indicando el tipo de análisis que está ocupando el primer (*i*) y el segundo (*j*) procesador:* $0, 1$ *ó* 2 *(ninguno, departamento o externo, respectivamente).*

Problema 48. Se pretende analizar el comportamiento de una máquina para analizar estructuras. Se cuenta con un procesador y capacidad para mantener una única petición en espera. Se supone que los análisis llegan según un proceso de *Poisson*, con una tasa $\lambda = 3$ peticiones por minuto; además, el tiempo de análisis se puede modelar como una variable aleatoria exponencial negativa, de media 10 segundos.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de pérdida. Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo de espera medio.

Para tratar de mejorar el rendimiento del sistema, se decide dividir el análisis en dos *fases*. Para ejecutar la segunda se tiene que haber finalizado la primera previamente. La duración de ambas se puede modelar con variables aleatorias exponenciales negativas, de medias 1 y 4 segundos, respectivamente. El sistema puede mantener una petición en espera, pero no se pueden ejecutar los dos procesos simultáneamente; así, un análisis tiene que esperar hasta que el anterior haya finalizado completamente para comenzar con la primera fase.

(b) Modelar de nuevo el sistema, utilizando una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de pérdida.
Sugerencia: *En este caso es recomendable que en los estados de la cadena se indique la etapa que se está ejecutando en el procesador.*

(c) Calcular, aplicando la relación de *Little* el tiempo media de espera y el tiempo en el procesador (contando ambas fases).

Para mejorar aún más el comportamiento del sistema, se decide paralelizar la ejecución de los procesos, de manera que un análisis pudiera pasar a la primera fase, una vez que el anterior esté en la segunda etapa. Se sigue manteniendo la posibilidad de tener una única petición en espera y que un análisis necesite finalizar la primera etapa para pasar a la segunda fase.

(d) Modelar de nuevo el sistema, utilizando una cadena de *Markov*, indicando como se podría calcular la probabilidad de pérdida (no hace falta resolver numéricamente las probabilidades de cada uno de los estados).
Sugerencia: *Representar cada estado como* i, j, k, *indicando el número de análisis en la primera etapa (i), en la segunda (j) y esperando (k):* 0 *ó* 1.

Problema 49. Un laboratorio dispone de un *clúster* de procesadores para analizar estructuras genéticas. El tiempo necesario para concluir el análisis se puede modelar con una variable aleatoria exponencial negativa, de media $t_s = 24$ minutos. Se supone que el *clúster* puede llevar a cabo un análisis y tiene capacidad adicional para mantener otro en espera. Se supone que las peticiones llegan según un proceso de *Poisson*, con una tasa $\lambda = 2.5$ peticiones por hora.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de pérdida. Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo de espera medio. Si se asume que el *clúster* está funcionando las 24 horas del día, ¿cuánto tiempo estarán activos los subsistemas de procesado y gestión de memoria?

Teniendo en cuenta que los análisis tienen patrones similares entre sí, se decide realizar una modificación al sistema, de manera que cuando llegue un análisis y haya otro en ejecución, ambos se lleven a cabo de manera simultánea. En este caso el tiempo medio para la finalización del proceso será de $\frac{t_s}{\alpha}$, con $\alpha \leq 1$. El *clúster* no dispone de capacidad para tener más de dos análisis en el sistema.

(b) Modelar de nuevo el sistema, utilizando una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de pérdida en función del parámetro α. ¿Cuál es el valor de α que garantiza una mejora de las prestaciones (en términos de la probabilidad de pérdida) frente al sistema original?
(c) Calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema, cuando $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\alpha = \frac{3}{4}$.

Problema 50. Una empresa de ingeniería especializada en el *Big Data* ha desarrollado un servicio para acometer el análisis de grandes volúmenes de información. Debido a las características de dichos estudios, que llegan a la máquina según un proceso de Poisson, a una tasa λ de 4 peticiones por hora, se decide llevar a cabo el procesado en dos etapas. En la primera se establecen patrones básicos de la información, para pasar posteriormente a la segunda, en la que se determinan las recomendaciones que realiza el sistema. La duración de ambas fases se puede modelar con sendas variables aleatorias exponenciales negativas, con medias 15 y 30 minutos, respectivamente. Se asume además que el sistema no tiene capacidad para mantener peticiones en espera.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular la probabilidad de pérdida.
(b) Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo de permanencia en el sistema y en cada proceso. Si se supone que la máquina permanece encendida las 24 horas del día, ¿cuánto tiempo estará activa la segunda etapa?

Los ingenieros se percatan que hay varios análisis en los que la correlación de datos hace que las recomendaciones sean triviales. Modifican la primera fase del análisis, de manera que se puedan detectar dichas situaciones. Se mantiene la duración de la primera etapa, pero se establece un mecanismo paralelo (con duración exponencial negativa de media 5 minutos) que permite finalizar con estos análisis sin que tengan que pasar por la segunda fase, consiguiendo reducir además la duración media de esta segunda etapa, que pasa a ser de 21 minutos.

(c) Modelar el sistema con una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de pérdida.
(d) Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema y en cada proceso.
(e) A partir de los resultados del apartado anterior, calcular la probabilidad de que un análisis no necesite pasar por la segunda fase.

Tomando como base este segundo sistema, y para mejorar aún más sus prestaciones, se añade un buffer para mantener *únicamente* peticiones que ya hayan sido procesadas por la primera fase, en caso de que el segundo proceso estuviera activo. Para evitar situaciones de bloqueo, el primer proceso y el buffer de espera *no pueden* estar ocupados simultáneamente.

(f) Modelar el sistema mejorado con una cadena de Markov e indicar cómo se podría calcular la probabilidad de bloqueo.
No es necesario resolver numéricamente las probabilidades de cada estado.
Sugerencia: *Representar cada estado como* i, j, k, *indicando si está activa la primera fase (i), la segunda (j) o el sistema de espera (k):* 0 *ó* 1.

Problema 51. La empresa *Abufalia* dispone de una máquina para procesar tendencias de mercado. Para ello dispone de un súper computador con un procesador y memoria adicional para mantener una petición en espera. Se supone que los análisis llegan según un proceso de *Poisson*, a una tasa $\lambda = 5$ peticiones por minuto. Los análisis tienen una duración que se puede modelar con una variable aleatoria exponencial negativa, de media 3 segundos.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de pérdida. Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo de permanencia en el procesador y en el sistema de memoria.

(b) Los ingenieros comprueban que los análisis sólo terminan de manera satisfactoria con probabilidad $\psi = \frac{3}{4}$; en caso contrario, el análisis se reinicia de manera instantánea. Volver a modelar el sistema y calcular la probabilidad de bloqueo y el tiempo medio de permanencia en el procesador.

(c) Utilizar el resultado del apartado anterior para calcular el número medio de procesados que se necesitan ejecutar por análisis.

Los ingenieros plantean una modificación al sistema; así, se adquiere un segundo procesador, en el que se ejecutan *únicamente* los análisis que no han finalizado correctamente tras el primer procesado, en un tiempo que se puede modelar con una variable aleatoria exponencial negativa, de media μ_2^{-1} s. Por limitaciones de la gestión de la base de datos, los dos procesadores no pueden emplearse simultáneamente, planteándose dos alternativas para la gestión de la memoria.

Alternativa 1 En la memoria se mantiene una petición, que pasa al primer procesador *únicamente* cuando la que estuviera ejecutándose finalice correctamente (ya sea en el primer procesador o en el segundo).

Alternativa 2 Para priorizar los análisis 'novedosos' se decide que, si hay una petición en espera, un análisis que no converja en el primer procesado sea descartado, pasando a procesarse la que estuviera en el *buffer*.

(d) Modelar ambas alternativas como cadenas de *Markov* e indicar cómo se podría calcular la probabilidad de pérdida.
Sugerencia: *En este caso es recomendable que en los estados de la cadena se indique la etapa que se está ejecutando en el procesador.*

Problema 52. Se pretende analizar las prestaciones de un súper-computador para llevar a cabo simulaciones que pueden ser de dos tipos. En un primer enfoque se decide que se utilizará un programa genérico, de manera que el tiempo de análisis será el mismo para ambos, pudiéndose modelar con una variable aleatoria exponencial negativa, de media 35 s. Los análisis de tipo α llegan (según un proceso de *Poisson*) a una tasa de $\lambda_\alpha = 2$ análisis por minuto, mientras que para los de tipo β (también según un proceso de *Poisson*), se estima una tasa $\lambda_\beta = \frac{4}{7}$ llegadas por minuto.

El gestor del súper-computador reserva un procesador y capacidad de memoria para mantener una simulación en espera, y el equipo de investigadores establece que los análisis de tipo α no pueden esperar.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular la probabilidad de pérdida para los dos tipos de análisis.

(b) Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo de permanencia en el sistema. ¿Cuál es el tiempo de espera medio?

Tras la puesta en marcha del sistema se diseña una mejora en el código, aprovechando la complementariedad entre ambos tipos de simulaciones. Así, se establece que las de tipo α puedan seguir ejecutándose de manera individual (manteniendo el tiempo anterior), mientras que las de tipo β se procesarán *simultáneamente* con las α, lo que permite reducir el tiempo de análisis (también exponencial negativo) hasta los 19 s (al acabar finalizan las dos simulaciones a la vez). De esta manera, cuando llega un análisis de tipo β al sistema esperará (si el procesador está vacío) hasta que llegue uno de tipo α, para procesarlos a la vez; si hubiera una simulación de tipo α ejecutándose, se reiniciaría el proceso, para analizar las dos de manera simultánea. Además, cuando el sistema está procesando dos simulaciones a la vez, no puede aceptar ninguna adicional en espera.

(c) Modelar el nuevo sistema como una cadena de *Markov*, y calcular la probabilidad de pérdida para ambos tipos de análisis.
    Sugerencia: *En este caso es recomendable que se distinga el/los tipo/s de análisis en el procesador.*
(d) Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo de permanencia promedio en el procesador para cada tipo de simulación.
(e) Si el equipo está activo 14 horas al día, ¿cuántas horas estará en funcionamiento el procesador?

Problema 53. Considérese un súper-computador que lleva a cabo simulaciones de gran complejidad. Mediante técnicas de virtualización se asignan los recursos necesarios para llevar a cabo hasta dos análisis en paralelo, pero debido al volumen de información necesario en cada una, no se pueden mantener peticiones en espera. Se supone que la duración de cada simulación se puede modelar como una variable exponencial negativa, de media $\frac{1}{\mu} = 20$ minutos. Además se asume que las peticiones llegan al sistema según un proceso de *Poisson*, con una tasa $\lambda = 6$ llamadas por hora.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular la probabilidad de bloqueo.
(b) Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo de permanencia en el sistema. Si se supone que el súper-computador permanece encendido 12 horas al día, ¿cuánto tiempo habrá dos análisis ejecutándose de manera simultánea?
(c) ¿Cuántas simulaciones llevará a cabo cada procesador, en media, en el periodo de 12 horas, si se asume una estrategia de ocupación aleatoria?

Para tratar de reducir la probabilidad de pérdida se decide dividir cada análisis en dos *threads*, manteniendo la posibilidad de ejecutar dos simulaciones en paralelo. El primer *thread* sigue el procedimiento habitual, aunque su su duración media se incrementa hasta los 30 minutos. En paralelo se utiliza un *hilo* que permite descartar el análisis utilizando un algoritmo más eficiente; la duración media de este segundo *thread* (variable exponencial negativa) es $\frac{1}{\gamma} = 15$ minutos. Se asume que ambos *hilos* se ejecutan de manera independiente en cada simulación.

(d) Modelar el sistema con una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de bloqueo.
(e) Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema. Comentar brevemente el resultado obtenido.
(f) Calcular el número medio de simulaciones ejecutadas en cada procesador durante el periodo de 12 horas.
(g) ¿Cómo se podría calcular la probabilidad de que un análisis sea descartado por el segundo *hilo*?

Problema 54. Considérese un sistema con un único procesador al que llegan dos tipos de análisis, según sendos procesos de Poisson, con tasas $\lambda_\alpha = 8$ y $\lambda_\beta = 4$ peticiones por minuto, respectivamente. Se supone que los análisis β no pueden esperar y que el sistema tiene capacidad para mantener una petición en espera. La duración de los análisis es la misma para ambos grupos, y se puede modelar con una variable aleatoria exponencial negativa, de media $t_s = \frac{1}{\mu} = 5$ segundos.

(a) Modelar el sistema con una cadena de Markov y calcular la probabilidad de pérdida para ambos tipos de análisis.
(b) Utilizar la relación de Little para calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema. ¿Cuál es el tiempo de espera medio para las aplicaciones del grupo α?
(c) A partir de los resultados del apartado anterior, calcular el porcentaje de análisis de cada grupo procesados en el sistema.

Para reducir la probabilidad de bloqueo de los análisis del grupo β se modifica el sistema, de manera que solo se aceptaría una petición de un grupo si la anterior que llegó al sistema era del otro. El resto de características se mantienen, de manera que únicamente los análisis α pueden esperar.

(d) Modelar el sistema modificado con una cadena de Markov, y calcular la probabilidad de pérdida para ambos tipos de análisis.
Sugerencia: *Diferenciar el tipo de análisis que hay en el procesador, así como el último que se ha procesado en el supuesto de que el sistema esté en reposo.*

Problema 55. A un sistema de análisis llegan dos tipos de peticiones según sendos procesos de Poisson, con tasas $\lambda_\alpha = 4$ y $\lambda_\beta = 2$ peticiones por minuto, respectivamente. Debido a los requisitos de la aplicación que las genera, las peticiones no pueden esperar. Se contempla la utilización de un único procesador, y los ingenieros implementan una aplicación de análisis para ambas peticiones, de manera que el tiempo medio de servicio (que se puede modelar con una variable aleatoria exponencial negativa) es $t_s = 20$ segundos (el mismo para ambas).

(a) Modelar el sistema con una cadena de Markov y calcular la probabilidad de pérdida para ambos tipos de análisis.

Para mejorar las prestaciones del sistema, los ingenieros determinan que las peticiones de tipo β solo puedan procesarse nada más finalizar un análisis de tipo α; gracias a ello se especializan las aplicaciones, consiguiendo reducir los tiempos de ejecución, de manera que $(t_s)^\alpha = 10$ segundos y $(t_s)^\beta = 5$ segundos. Se cambia la configuración del *clúster*, al que se le añade un sub-sistema de memoria que permite que una petición β espere mientras se esté procesando una petición α y se establece que únicamente se mantengan en espera si, al llegar al sistema, el procesador está activo, procesando un análisis α.

(b) Modelar el sistema con una cadena de Markov y calcular la probabilidad de pérdida para ambos tipos de análisis.
Sugerencia: *Diferenciar el tipo de análisis que hay en el procesador.*

(c) Utilizar la relación de Little para calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema. ¿Cuál es el tiempo de espera medio para las aplicaciones de tipo β?

En una segunda mejora se contemplan dos alternativas.

Alternativa 1 Las peticiones β también esperan si, al llegar al sistema, éste está vacío, manteniéndose así hasta que se procese el primer análisis α que llegue al *clúster*.

Alternativa 2 Las peticiones β esperan siempre que el subsistema de memoria esté vacío, y se mantienen así hasta que se termine de procesar un análisis α.

(d) Modelar ambas alternativas como cadenas de *Markov* e indicar cómo se calcularía la probabilidad de pérdida para ambos tipos de análisis.
Sugerencia: *Diferenciar el tipo de análisis que hay en el procesador.*

Problema 56. Un laboratorio utiliza una súper-computadora para llevar a cabo análisis de estructuras. Debido al volumen de información de cada análisis, solamente se puede tener una petición en espera. Se supone que el tiempo de simulación medio por análisis (que sigue una distribución exponencial negativa), es $\frac{1}{\mu} = 400$ segundos. Además, se considera que los análisis llegan al sistema según un proceso de *Poisson*, con una tasa $\lambda = 9$ llegadas por hora.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular la probabilidad de pérdida.
(b) Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo media de espera. ¿Cuál es la probabilidad de que un análisis que espere lo haga por más de 10 minutos?
(c) Si la súper-computadora está encendida durante 12 horas al día, ¿cuánto tiempo estará activo el procesador?

La administradora de la súper-computadora detecta que el laboratorio está haciendo un uso elevado del procesador, por lo que modifica la operación del sistema, de manera que se limitan los recursos dedicados, en análisis alternos. Así, tras procesar un análisis con la configuración anterior, el procesador se modifica, de manera que el tiempo medio de análisis crece hasta los 600 segundos, para posteriormente volver a la configuración inicial, y así sucesivamente. Además, establece que únicamente se mantendrán peticiones en espera cuando el procesador está trabajando con la configuración rápida, para que el tiempo de espera no sea excesivo.

(d) Modelar el sistema con una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de pérdida. ***Sugerencia.*** *Tener en cuenta la configuración actual y futura del procesador a la hora de establecer los estados de la cadena.*
(e) Calcular el tiempo medio que un análisis está procesándose. Utilizar dicho resultado para establecer el porcentaje de análisis que se procesan con cada una de las configuraciones del procesador.
(f) Volver a modelar el sistema con una cadena de *Markov*, si se modifica nuevamente, de manera que se llevan a cabo dos análisis con la configuración rápida del procesador, seguidos de uno con la lenta, y así sucesivamente.

Problema 57. En un sistema de transacción, dos máquinas: α y β, generan peticiones con la misma tasa: $\lambda = 12\ m^{-1}$. Éstas son atendidas con un sistema con un único recurso y capacidad para mantener peticiones en espera. Una máquina no genera más transacciones hasta que la anterior no haya finalizado. El tiempo de procesado de una transacción se puede modelar con una variable aleatoria exponencial negativa, de media 2.5 segundos.

(a) Modelar el sistema como una cadena de Markov. Utilizar el teorema de Little para calcular el tiempo medio de espera.

Para priorizar las peticiones de la máquina α, se decide situar un regulador a la salida de la máquina β, que descarta sus peticiones con una probabilidad $1 - \varphi$, siendo $\varphi = \frac{3}{4}$.

(b) Modelar nuevamente el sistema como una cadena de Markov, y establecer el tiempo medio de espera para cada tipo de petición.
Sugerencia: *A la hora de establecer los estados de la cadena de Markov, se debería considerar el tipo de petición en ejecución y en espera.*

En otra alternativa de diseño, el administrador del sistema decide eliminar el regulador, estableciendo en su lugar que las aplicaciones β no puedan esperar.

(c) Modelar el sistema con una cadena de Markov y calcular la probabilidad de pérdida para las peticiones de tipo β.
Sugerencia: *A la hora de establecer los estados de la cadena de Markov, se debería considerar el tipo de petición en ejecución y en espera.*
(d) ¿Cuál es el tiempo de espera de las peticiones de tipo α? ¿Qué porcentaje de peticiones de cada tipo se procesan en el sistema?

Problema 58. Una empresa cuenta con un sistema de atención al cliente con tres líneas, y decide contratar dos personas para atender las consultas de sus clientes. Se supone que las llamadas que llegan se pueden modelar como un proceso de Poisson, con una tasa $\lambda = 24$ llegadas por hora. Además, la duración de las consultas (modelada según una variable aleatoria exponencial negativa) es, en media, $\mu^{-1} = 5$ minutos.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular las probabilidades de pérdida y de espera.
(b) Utilizar la relación de Little para calcular el tiempo de espera medio ¿Qué porcentaje de las llamadas que se aceptan tienen que esperar?
(c) Si se supone que la jornada laboral es de 7 horas, ¿cuánto tiempo estarían atendiendo llamadas cada uno de los dos operadores, asumiendo que las llamadas se reparten aleatoriamente entre ellos?

La empresa pretende reducir el porcentaje de llamadas que se pierden al llegar al sistema, por lo que introduce la siguiente modificación: cuando una llamada está esperando, un proceso automático la podría rechazar, con un mensaje grabado que le pide al cliente que intente llamar más tarde. Para ello utiliza una contador cuya duración se establece según una variable aleatoria exponencial negativa, de valor medio $\gamma^{-1} = 75$ segundos. El contador se reestablece cada vez que una llamada entrante tiene que esperar y, cuando expira, causa que la llamada en espera sea rechazada.

(d) Modelar nuevamente el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular las probabilidades de que una llamada entrante se pierda o tenga que esperar. Utilizando la relación de *Little*, calcular el tiempo de espera medio.
(e) ¿Qué valor de γ^{-1} haría que la probabilidad de pérdida para llamadas entrantes fuera inferior a 0.1?

Problema 59. Considerar un nodo al que le llegan paquetes según un proceso de *Poisson*, de tasa $\lambda = 400\ s^{-1}$. Los paquetes son de dos tipos: 1 y 2, siendo $\varphi = \frac{5}{6}$ la probabilidad de que sean de tipo 1. El nodo tiene una única interfaz de salida, y capacidad para mantener 1 paquete en espera. Se establece además que los paquetes de tipo 2 no pueden esperar. Asumir que el tiempo de servicio (transmisión) es exponencial negativo, de media $\frac{1}{\mu} = 3\ ms$.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular la probabilidad de pérdida para cada tipo de paquete.
(b) Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo medio de permanencia en el nodo. ¿Cuál es el tiempo de espera promedio para los paquetes de tipo 1?
(c) Se supone que el consumo energético de la interfaz es $\alpha\ mJ/\text{min}$, mientras que el del sistema de espera es $\frac{\alpha}{4}\ mJ/\text{min}$. ¿Cuánta energía consumirá el nodo (en función de α) en 1 hora?

Para reducir la probabilidad de pérdida de los paquetes de tipo 2 se modifica la operación del *scheduler* del nodo, tal y como se detalla a continuación:

- Cuando se esté transmitiendo un paquete de tipo 1 que haya estado esperando previamente en el buffer, no se admitirán más paquetes de este tipo, hasta que dicha transmisión haya finalizado.
- Si llegara un paquete de tipo 2 durante la transmisión de un paquete de tipo 1 que haya esperado en el buffer, se cancelaría la transmisión en curso, pasando a transmitirse el paquete de tipo 2. Si el paquete de tipo 1 no hubiera esperado previamente en el buffer, su transmisión no se cancelaría.

(d) Modelar el sistema con una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de pérdida para los paquetes de tipo 1 (considerar únicamente los entrantes) y de tipo 2. ***Sugerencia.*** *Diferenciar en el modelo si se está transmitiendo un paquete de tipo 1 que haya esperado previamente.*

(e) Calcular el tiempo promedio que los paquetes están en la interfaz del nodo.

(f) ¿Cuál es el tiempo medio en el que el nodo está transmitiendo un paquete de tipo 1 que ha esperado en el buffer? ¿Cómo se podría calcular la probabilidad de que una transmisión de un paquete de tipo 1 que haya esperado previamente sea cancelada?

Problema 60. Una compañía especializada en Big Data cuenta con una máquina para llevar a cabo análisis. En una primera configuración decide utilizar técnicas de virtualización para desplegar tres procesadores independientes en la misma. Además, debido al volumen de datos generados, no se pueden mantener peticiones en espera. Los análisis se generan (proceso de Poisson) a una tasa de $\lambda = 40\ m^{-1}$, y el tiempo medio necesario para procesar cada petición (distribución exponencial negativa) es $T_s = 4.5\ s$.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular la probabilidad de pérdida. Si la compañía tiene el sistema activo durante 12 horas, ¿cuánto tiempo estará usándose toda la capacidad de cómputo del sistema? ¿Cuántas horas estará en reposo?

(b) Calcular el número medio de análisis que hay en el sistema, utilizando dos métodos diferentes. Utilizar la relación de Little para calcular el tiempo de permanencia en la máquina de computación.

Los ingenieros que gestionan el sistema modifican su operación, de manera que se despliega un único procesador, con una capacidad de cómputo mayor. Así, el tiempo medio de procesado (para un único análisis) es tres veces menor al de la configuración inicial, $T'_s = \frac{T_s}{3}$. Además, cada vez que llega una nueva petición, su análisis se lleva a cabo de manera conjunta con las que ya estuvieran procesándose previamente (reiniciándose el proceso cada vez). Se asume que el número máximo de análisis se que pueden combinar es 3 y que, además, el tiempo medio medio de procesado para n análisis es $\frac{n \cdot T'_s}{k}$, siendo T'_s el correspondiente a una única petición, y $k \geq 1$.

(c) Modelar nuevamente el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular la probabilidad de pérdida, si $k = 1$. ¿Qué valor de k hace que la probabilidad de pérdida sea tres veces menor que la de la configuración anterior?

(d) ¿Cuál es el tiempo medio de permanencia en el sistema cuando $k = 1$? ¿Cuál sería el tiempo medio que el procesador está procesando únicamente un análisis, desde que empieza su procesado hasta que bien finaliza o se reinicia, al llegar otra petición?

Problema 61. Una empresa cuenta con un sistema de análisis, con un único procesador. Se asume además que solamente se puede mantener una petición en espera. Se estima que se generan $\lambda = 48$ peticiones por hora (proceso de Poisson), y que cada análisis tarda, en media (variable aleatoria exponencial negativa), $\frac{1}{\mu} = 150$ segundos.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular la probabilidad de pérdida. Si la compañía tiene el sistema activo durante 16 horas, ¿cuánto tiempo estará activo el procesador?

Para incrementar su vida útil, se pretende aumentar el tiempo de reposo del procesador. Para ello se decide que, cuando esté activo, únicamente se aceptará un porcentaje de las peticiones entrantes. Así, éstas pasarían al *buffer* de espera (si hubiera capacidad) con probabilidad α.

(b) Modelar nuevamente el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular el valor de α que hace que el procesador esté en reposo 5 horas (de las 16 en las que el sistema esté en funcionamiento durante una jornada).

(c) Si $\alpha = \frac{1}{4}$, ¿cuál es la probabilidad de bloqueo del sistema? ¿Cuál sería la probabilidad de pérdida de peticiones global?

En un diseño alternativo (esto es, partiendo del sistema original), se establece que, una vez esté en funcionamiento, el procesador puede pasar a un estado de *stand-by*, lo que ocurre al finalizar un temporizador cuya duración media (variable aleatoria exponencial negativa) es $\frac{1}{\theta} = 750$ segundos. Cuando pasa al estado de *stand-by*, la petición que se estuviera analizando pasaría a estar en espera, mientras que si hubiera alguna esperando, sería descartada. El procesador vuelve a su estado normal de funcionamiento tras expirar un temporizador cuya duración (también variable aleatoria exponencial negativa) es de $\frac{1}{\varphi} = 375$ segundos.

(d) Modelar el nuevo sistema con una cadena de Markov y calcular la probabilidad de pérdida para las peticiones entrantes. ¿Cuánto tiempo estaría el procesador en reposo durante las 16 horas?

(e) Utilizar la relación de Little para calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema.

Problema 62. Se pretende analizar el comportamiento de un sistema de análisis de datos bursátiles. Se dispone de un procesador y, teniendo en cuenta la cantidad de información de cada petición, únicamente podría mantenerse una en espera. Se supone que los análisis llegan según un proceso de *Poisson*, con una tasa $\lambda = 10\ m^{-1}$. Se modela el tiempo necesario para realizar un análisis con una variable aleatoria exponencial negativa, de media $\frac{1}{\mu} = 9\ s$.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular la probabilidad de pérdida.

(b) Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo medio que una petición está en el sistema de espera. ¿Cuál es el porcentaje de análisis que tienen que esperar? ¿Cuál sería el tiempo medio de espera para los análisis que tienen que esperar?

(c) ¿Cuánto tiempo está activo el procesador por hora? Utilizar dos métodos para hacer el cálculo.

(d) La empresa estima que el coste de mantener el procesador activo es de α \$/min, mientras que el sistema de espera cuesta $\frac{\alpha}{4}$ \$/min. Además, el coste de mantener el sistema encendido, incluso cuando el procesador está inactivo, es de $\frac{\alpha}{30}$ \$/min. ¿Cuánto le cuesta a la empresa 1 hora de operación del sistema de análisis, si $\alpha = 0.038$?

Los ingenieros que gestionan el sistema hacen una modificación en el software de análisis, de manera que se reduce notablemente el tiempo necesario para procesar las peticiones, que pasa a ser $\frac{1}{\mu_f} = 2\ s$. El inconveniente es que únicamente un porcentaje de los análisis se completan en ese tiempo, mientras que el resto tienen que volver a ser procesados con otro programa corrector (usando el mismo procesador), que invierte en media $\frac{1}{\mu_s} = 15\ s$, para finalizar adecuadamente. Se estima que la probabilidad de que un análisis no requiera ser procesado por el programa corrector es $\beta = \frac{2}{3}$.
Se plantean además dos posibles configuraciones para el sistema modificado:

Configuración 1 Si se estuviera procesando un análisis con el programa corrector, no se admitirían nuevas peticiones, a pesar de que hubiera capacidad en el sistema de espera.

Configuración 2 Siempre que haya capacidad en el sistema de espera, se admitirían nuevas peticiones, independientemente del tipo de programa que se estuviera ejecutando en el procesador.

(e) Modelar ambas alternativas con una cadena de *Markov* y calcular la probabilidad de pérdida en cada caso.
Sugerencia. *Diferenciar en el modelo el programa que está ejecutando el análisis.*

(f) Calcular, en ambos modelos, el tiempo medio de permanencia en el procesador, utilizando la relación de Little.

Problema 63. Un sistema dispone de un software de procesado de imágenes que se ha diseñado en base a 2 fases, que tienen que completarse en el mismo orden para cada análisis. Los tiempos de ejecución de ambas se pueden modelar como variables aleatorias (distribución exponencial negativa), con medias $\frac{1}{\mu_1} = 8\ s$ y $\frac{1}{\mu_2} = 12\ s$, respectivamente. Se cuenta únicamente con un procesador, y se decide no mantener peticiones en espera. Los análisis llegan según un proceso de *Poisson*, con una tasa $\lambda = 2\ m^{-1}$.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular la probabilidad de pérdida. Utilizar la relación de Little para calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema.

Para intentar mejorar las prestaciones del servicio, se lleva a cabo una modificación, de manera que se consigue que ciertos análisis finalicen completamente al terminar la primera fase. Los que no acaban correctamente (probabilidad φ) pasan por un módulo corrector, que modificará los parámetros de entrada, antes de volver a pasar por el algoritmo principal (fase 1). Este proceso se repetirá hasta que el análisis finalice de manera correcta. El tiempo medio de procesado en el algoritmo principal no cambia, y el tiempo que invierte el módulo corrector se puede modelar con una variable aleatoria exponencial negativa, de media $\frac{1}{\mu_c} = 6\ s$.

(b) Modelar nuevamente el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular la probabilidad de pérdida, si $\varphi = \frac{1}{3}$. ¿Cuál es el valor máximo de φ para garantizar que la probabilidad de pérdida sea menor con esta configuración?

(c) Asumiendo que $\varphi = \frac{1}{3}$, utilizar la relación de Little para calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema. ¿Cuántas veces (en media) tiene que pasar un análisis por el módulo corrector?

Para reducir aún más la pérdida la empresa decide mejorar las prestaciones del sistema, incorporando un buffer de almacenamiento. Así, se podrá mantener una petición en espera, pero únicamente si se está ejecutando el algoritmo principal. Además, si la fase 1 no finalizara correctamente y hubiera una petición esperando, esta tendría que descartarse, al activar el módulo corrector.

(d) Modelar nuevamente el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular la probabilidad de pérdida, con $\varphi = \frac{1}{3}$. ¿Cuánto tiempo estará activo el buffer de espera en una hora de funcionamiento del sistema? Calcular el tiempo medio de espera, aplicando la relación de *Little*.

(e) Modificar la cadena de *Markov* anterior, si se añade la condición que una petición solo pueda esperar cuando el análisis está en su primer paso por la fase 1.

Problema 64. Se pretende estudiar el comportamiento de un sistema de cálculo científico, que está configurado con un único procesador, y capacidad para mantener una petición en espera. Se sabe que los análisis llegan según un proceso de *Poisson*, a una tasa $\lambda = 2.75$ llegadas por hora, y que el algoritmo invierte en media (variable aleatoria exponencial negativa) $\frac{1}{\mu} = 40$ minutos para dar los resultados.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*, y calcular las probabilidades de pérdida y de espera. Utilizar la relación de *Little* para calcular el tiempo medio que un análisis permanece en el sistema.
(b) ¿Cuál es el porcentaje de análisis (de los que no se pierden) que tienen que esperar? ¿Cuál es la probabilidad de que la espera sea superior a una hora para los análisis que esperan?

Se comprueba que, por un diseño defectuoso del algoritmo de análisis, se pueden producir situaciones de *stack overflow*, causando que el análisis en ejecución se descarte, reiniciándose el procesador. Se modela esta circunstancia con un temporizador (variable aleatoria exponencial negativa) estando el procesador activo, con valor medio $\frac{1}{\gamma} = 80$ minutos. Se contemplan dos posibilidades:

Alternativa (1) Se reinicia todo el sistema, por lo que si hubiera un análisis esperando, también se descartaría.

Alternativa (2) Se reinicia únicamente el procesador.

(c) Modelar la Alternativa (1) con una cadena de *Markov*, y calcular las probabilidades de pérdida y espera (para análisis entrantes). ¿Cuál es el tiempo medio que un análisis está en el procesador y en el buffer de espera?
(d) Repetir el apartado anterior para la Alternativa (2), y comentar los resultados obtenidos.
(e) ¿Qué porcentaje de análisis no finaliza correctamente en la Alternativa (2), por el problema de *stack overflow*?
Pista: *si X e Y son variables aleatorias exponenciales negativas independientes entre sí, la probabilidad de que X sea menor que Y se puede calcular como $\frac{\mu_X}{\mu_X+\mu_Y}$, siendo μ_X y μ_Y las tasas de X e Y, respectivamente.*

Problema 65. Considérese un sistema de computación, con dos procesadores y capacidad para mantener dos análisis en espera. Se supone que las peticiones llegan al sistema (proceso de *Poisson*) a una tasa λ (s^{-1}), y que el tiempo que se necesita para llevar a cabo un análisis es exponencial negativo, de media $\frac{1}{\mu}$ s.

(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*. Indicar las probabilidades de pérdida y espera, en función de $A = \frac{\lambda}{\mu}$.
(b) Establecer, en función de A, λ, μ, el tiempo medio de espera. ¿Cuál sería el tiempo medio en el procesador?
(c) Se modifica el sistema, de manera que cuando una aplicación está en espera, podría descartarse. Para ello se usa un temporizador con una duración (variable aleatoria exponencial negativa) media $\frac{1}{\gamma}$ (s), para cada análisis que esté en espera. Así, si este temporizador expirara estando el análisis en espera, éste se descartaría. Modelar nuevamente el sistema con una cadena de Markov.

Problema 66. Un nodo de comunicaciones tiene 2 interfaces de salida, y capacidad para mantener paquetes en espera. Los paquetes llegan según un proceso de *Poisson*, a una tasa λ, y el tiempo de transmisión (servicio) es exponencial negativo, de media $\frac{1}{\mu}$. En todos los apartados (si no se dice lo contrario), se asume que el sistema es estable.

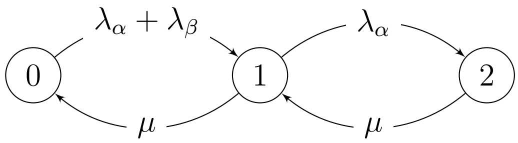
(a) Modelar el sistema con una cadena de *Markov*. ¿Cuál es el número medio de interfaces ocupadas? (dar la respuesta en función de λ y μ)

(b) Si $\frac{1}{\mu} = 10\ ms$, ¿cuál es valor máximo de λ que se podría admitir para asegurar la estabilidad del sistema? ¿Cuál sería la probabilidad de que un paquete tuviera que esperar, si $\lambda = 100$ p/s? ¿Cuánto tiempo estaría el nodo en reposo durante una hora de observación?

(c) Se hace un cambio en la configuración del equipo, de manera que cada interfaz tiene un tiempo de transmisión diferente: $\frac{1}{\mu_1}$ y $\frac{1}{\mu_2}$. Se decide que no se podrán utilizar las dos interfaces simultáneamente, por lo que cada vez que se comienza a transmitir un paquete se decide, de manera completamente aleatoria, la interfaz que se utilizará. Modelar el sistema con una cadena de Markov.
Sugerencia: indicad la interfaz en uso en los estados.

Problema 67. Una compañía contrata un SaaS en la nube, para desplegar un sistema de análisis de datos, con un procesador y capacidad para mantener una petición en espera. Se reciben dos tipos de peticiones: α y β (en ambos casos se pueden modelar como procesos de *Poisson*). Para priorizar los análisis α se decide que las peticiones β no puedan esperar. Se sabe que el tiempo de ejecución de un análisis se puede modelar como una variable aleatoria exponencial negativa, de media 20 seg. Se sabe, además, que en 1 minuto se reciben 2 peticiones de tipo α.

La figura muestra la cadena de Markov del sistema:



(a) Tras monitorizar el sistema durante 24 horas de operación, se ve que está en estado de reposo 9 horas. Además, se observa que en una hora se pierden (en promedio) 30 análisis α. ¿Cuánto es λ_β? ¿Cuál es la probabilidad de pérdida para ambos tipos de análisis?

(b) ¿Cuál es el tiempo de espera medio para las aplicaciones α? ¿Qué porcentaje de aplicaciones α de las que se procesan tienen que esperar?

(c) Calcular el tiempo de estancia en todo el sistema. ¿Cuál sería dicho tiempo para los dos tipos de análisis? ¿De los análisis que procesa el sistema, qué porcentaje son de tipo β?

(d) El proveedor del servicio cobra 0.05 € por cada minuto que está funcionando el buffer de espera. ¿Cuánto será el coste de un día (24 horas) de operación? Hacer el cálculo de dos maneras diferentes.

(e) Para dar más prioridad a los análisis α se modifica el sistema, de manera que si hubiera un análisis β procesándose al llegar una petición α, aquella se descartaría, pasando esta al procesador. Modelar el sistema como una cadena de *Markov*, e indicar como se calcularía la probabilidad de pérdida para los análisis (entrantes) de cada tipo.
Sugerencia: tened en cuenta el tipo de análisis en el procesador en los estados.

Problema 68. Un sistema de cálculo en la nube (SaaS) se configura con un procesador y capacidad para mantener en espera 2 peticiones. Éstas llegan al sistema (proceso de Poisson) a una tasa $\lambda = 4$ análisis por minuto. Se asume que el tiempo de procesado se puede modelar con una variable exponencial negativa, de media $\frac{1}{\mu} = 15$ segundos.

(a) Modelar el sistema con una cadena de Markov y calcular las probabilidades de pérdida y espera. Utilizar la relación de Little para calcular el tiempo medio de espera.

(b) ¿Qué porcentaje de los análisis que se procesan tienen que esperar? ¿Cuál sería el tiempo de espera de estos análisis?

(c) La compañía tiene un contrato de pago por uso: $\frac{1}{3}$ de céntimo por minuto de uso del procesador, y $\frac{1}{6}$ de céntimo por minuto de uso del sistema de espera (se contabilizan los minutos de espera de todas las aplicaciones que se procesan). ¿Cuánto sería el coste de 1 hora de operación del sistema?

Se modifica la operación del sistema, para reducir el tiempo medio de espera. Se mejoran las prestaciones del procesador, y se reduce la capacidad del subsistema de espera, de manera que únicamente se podría mantener un análisis en espera. La capacidad del procesador permite que el tiempo de procesado se reduzca hasta $\frac{1}{\mu_\S} = 7.5\ s$, aunque si se tienen que procesar dos análisis de manera consecutiva, el segundo procesado sería tres veces más lento, debido a la gestión de las caché. Esto es, cuando llega un análisis estando el sistema vacío, se procesa con la capacidad máxima, mientras que si llega del buffer (tras completar otro análisis previo) el tiempo de procesado se triplicaría. Para evitar que haya muchos análisis que se procesen con la configuración lenta, se establece que, cuando se esté en esa situación, no se admitirían análisis en el buffer de espera.

(d) Modelar el sistema con una cadena de Markov y establecer las probabilidades de pérdida y de espera. ¿Cuánto sería el tiempo medio de espera?
Sugerencia: identificar la configuración del procesador en los estados correspondientes.

(e) ¿Cuál debería ser la capacidad del procesador (tiempo de procesado) en esta configuración para que la probabilidad de pérdida fuera la del sistema inicial? *Se sigue asumiendo que la capacidad del mismo cuando se procesa un análisis que venga del buffer es tres veces menor.*

E.T.S.I.I.T - Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Redes de Comunicaciones

Tema 3 - Teletráfico
Soluciones de la hoja de problemas

Problema 1.

(a) 2000 minutos.
(b) 11.1 Erlangs.
(c) 11.1 llamadas.

Problema 2.

(a) $\frac{1}{3}$ llamadas.
(b) 2 segundos.
(c) $\frac{2}{3}$ circuitos.
(d)

Problema 3.

(a) $TO_A = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$.
$TO_B = \frac{\rho}{2}$.
(b) $PB_A = \frac{1}{1+\frac{2}{\rho}+\frac{2}{\rho^2}}$.
$PB_B = \frac{1}{1+\frac{2}{\rho}}$
(c) $\overline{T_A} = \overline{T_B} = \frac{1}{2\mu}$.
(d) $\overline{T_A} = \overline{T_B} = \frac{1}{\lambda}$.
(e) A: $p_1 = \frac{\rho}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}}$ $\quad p_2 = \frac{\frac{\rho^2}{2}}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}}$
B: $p_1 = \frac{\frac{\rho}{2}}{1+\frac{\rho}{2}}$.
(f) A: $p_0 = \frac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}}$
B: $p_0 = \frac{1}{1+\frac{\rho}{2}}$.
(g) $\overline{N_A} = \frac{\rho+\rho^2}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}}$
B: $\overline{N_B} = \frac{\frac{\rho}{2}}{1+\frac{\rho}{2}}$.
(h) A: $\lambda_C = \lambda\,(1 - PB_A)$.
B: $\lambda_C = \lambda\,(1 - PB_B)$.

Problema 4.

(a) $TO_a = 10$ Erlangs.
$TO_b = 20$ Erlangs.
(b) $PB_a = PB_b \approx 0.245$.
(c) $TC_a \approx 7.55$ Erlangs.
$TC_b \approx 15.1$ Erlangs.
(d) $TP_a \approx 2.45$ Erlangs.
$TP_b \approx 4.9$ Erlangs.
(e) $Pr_a = \frac{1}{3}$
$Pr_b = \frac{2}{3}$.
(f) $Pr_a = \frac{1}{3}$
$Pr_b = \frac{2}{3}$.

Problema 5.

(a) $TC \approx 7.85$ Erlangs.
(b) $TC \approx 0.586$ Erlangs.
(c) $\lambda_C \approx 27.3$ llamadas/hora.
(d) $\lambda_C \approx 17.6$ llamadas/hora.
(e) $TC \approx 7.85$ Erlangs.
(f) $TC \approx 0.785$ Erlangs.
(g) $TC \approx 0.785$ Erlangs.
(h) $\lambda_C \approx 23.6$ llamadas/hora.

Problema 6.

(a) 0.4
(b) 0.4
(c) $\overline{N} = 1.2$ circuitos.
(d) 0.667
(e) 0.2
(f) 0.4
(g) $\overline{N} = 1.2$ circuitos.

Problema 7.

(a) 2)
(b) 3)
(c) 2)
(d) 4)

Problema 8.

(a)
(b) $p_{00} \approx 0.571$ $\quad p_{10} \approx 0.286$
$p_{01} \approx 0.057$ $\quad p_{10} \approx 0.086$
(c) $TO \approx 0.55$ Erlangs.
(d) $\overline{N} = 0.514$ líneas.

(e) $PB \approx 0.086$.

Problema 9.

(a) $TC \approx 1.96$ Erlangs.
(b) $TC \approx 1.04$ Erlangs.
(c) 0.39.
(d) 0.865.
(e) 4.2 Erlangs.

Problema 10.

(a) 0.28 segundos.
(b) 0.23 segundos.

Problema 11.

(a) 2)
(b) 2)
(c) 3)
(d) 3)

Problema 12.

(a)
(b) $p_i = \frac{A}{i!}\left(\frac{A}{2}\right)^{i-i} p_0 \quad i > 0$
$p_0 = \frac{1}{2e^{\frac{A}{2}}-1}$.
(c) $\overline{\lambda} = p_0\lambda\left[\frac{4}{A}\left(e^{\frac{A}{2}}-1\right)-1\right]$.
(d) $\overline{N} = p_0 A e^{\frac{A}{2}}$.
(e) $\overline{N_{\text{cola}}} = Ap_0\left(e^{\frac{A}{2}}+1\right) - 4p_0\left(e^{\frac{A}{2}}-1\right)$
$\overline{N_{\text{servidor}}} = p_0\left(4e^{\frac{A}{2}}-4-A\right)$.
(f) $\overline{W_{\text{cola}}} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{Ae^{\frac{A}{2}}}{4e^{\frac{A}{2}}-4-A}-1\right]$.
$\overline{W_{\text{servidor}}} = \frac{1}{\mu}$.

Problema 13.

(a)
(b) $p_i = A^i p_0 \quad i \leq N$
$p_i = 2^N\left(\frac{A}{2}\right)^i p_0 \quad i > N$
$p_0 = \frac{1}{\frac{1-A^{N+1}}{1-A}+\frac{A^{N+1}}{2-A}}$.
(c) $TO = A$
(d) $TC = Ap_0\frac{1-A^N}{1-A}$.
(e) $PB = 1 - p_0$.
(f) $p_0\frac{A^{N+1}}{2-A}$.

Problema 14.

(a)
(b) $p_0 = 0.482 \quad p_1 = 0.386 \quad p_2 = 0.116$
$p_3 = 0.015 \quad p_4 = 0.01$.
(c) $\overline{N} = 0.667$
(d) 0.1 segundos.

Problema 15.

(a)
(b) $p_0 = p_1 = p_2 = \frac{4}{15} \quad p_3 = \frac{2}{15} \quad p_4 = \frac{1}{15}$.
(c) $p_{\text{C bps}} = \frac{8}{15} \quad p_{\text{2C bps}} = \frac{1}{5}$
(d) $PB = \frac{1}{15}$
(e) $\overline{W} = \frac{11}{7}$ segundos.

Problema 16.

(a) $u = 320$ paquetes/segundo.
(b) $\lambda_1 = \frac{1600}{3}$ pkt/s $\quad \lambda_2 = \frac{320}{3}$ pkt/s.

Problema 17.

(a) $TO_A = TC_A = 2$ Erlangs
$TO_B = TC_B = 0.9$ Erlangs.
(b) $\overline{W_A} \approx 26$ segundos
$\overline{W_B} = 81$ minutos.
(c) 48 llamadas

Problema 18.

(a) $PB_1 \approx 0.21 \quad PB_2 = 0.2$.
(b) 0.4.
(c) $\overline{N_1} = \frac{30}{19} \quad \overline{N_2} = 0.8$
$\overline{W_1} = 1\ s \quad \overline{N_2} = 0.5\ s$

Problema 19.

(a) Original: $p_i = \left(\frac{\lambda L}{C}\right)^i \frac{1}{2^{i-1}}\frac{2C-\lambda L}{2C+\lambda L} \quad i > 0$
$p_0 = \frac{2C-\lambda L}{2C+\lambda L}$
Alternativo: $p_i = \left(\frac{\lambda L}{C\alpha}\right)^i \frac{C\alpha-\lambda L}{C\alpha}$
(b) Original: $\overline{W_{cola}} = \frac{L(\lambda L)^2}{C[(2C)^2-(\lambda L)^2]}$
Alternativo: $\overline{W_{cola}} = \frac{\lambda L^2}{C\alpha(C\alpha-\lambda L)}$
(c) $\alpha = 1 + \frac{\lambda L}{C}\left[1 - \frac{\lambda L}{4C}\right]$
(d) Sí

Problema 20.

(a) $\frac{2}{5}$

(b) $\overline{N} = \frac{4}{5} \quad \overline{W} = \frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{5}$
(d) $\frac{17}{57}$
(e) $PB_1 = \frac{17}{57} \quad PB_2 = \frac{25}{57}$

Problema 21.

(a) $p_i = p_0 A^i \quad i < S$
$p_i = p_0 A^i q^{i-S} \quad i \geq S$
$p_0 = \frac{1}{\frac{1-A^{S+1}}{1-A} + \frac{A^{S+1}q}{1-Aq}}$
(b) $q < \frac{C}{\lambda L}$
(c) $(1-q)\frac{1}{\frac{1-A^S}{1-A}+\frac{A^S}{1-Aq}}\frac{A^S}{1-Aq}$
(d) $p_0 \left[\frac{A^2(1-A^S)}{(1-A)^2} - \frac{SA^{S+1}}{1-A} + \right.$
$\left. + \frac{A^{S+2}q^2}{(1-Aq)^2} + \frac{A^{S+1}Sq}{1-Aq}\right]$
(e) $\frac{1}{\lambda}\frac{\frac{A^2(1-A^{S-1})}{(1-A^2)} - \frac{(S-1)A^S}{1-A} + \frac{A^S Aq}{(1-Aq)^2} + \frac{A^S(S-1)}{1-Aq}}{\frac{1-A^S}{1-A} + A^S\frac{q}{1-Aq}}$
(f) $\frac{A}{\mu - \lambda}$

Problema 22.

(a) $PB \approx 0.21 \quad TC \approx 1.58$
(b) $\overline{W} = 1$ minuto
Porcentaje ocupación: 52.63 %
(c) 4 operadores.
(d) ≈ 0.21
(e) 41.7 %
(f) $PB_{\text{premium}} \approx 0.094$
$PB_{\text{no-premium}} \approx 0.458$
(g) $TC \approx 1.37$ Erlangs
$\overline{W} = 1$ minuto.
(h) $\approx$ 3 horas y 36 minutos.

Problema 23.

(a) $p_i = 2\left(\frac{A}{2}\right)^i \quad i > 0$
$p_0 = \frac{1-\frac{A}{2}}{1+\frac{A}{2}}$
(b) $\overline{N} = \frac{A}{1-\frac{A^2}{4}} \quad \overline{W} = \frac{1}{\mu}\frac{1}{1-\frac{A^2}{4}}$
(c) $p_i = A^i(1-A)$
$\overline{N} = \frac{A}{1-A} \quad \overline{W} = \frac{1}{\mu}\frac{1}{1-A}$
(d) $p_{10} = p_0\frac{A}{2} \qquad p_{01} = p_0\frac{A}{2\alpha}$
$p_i = p_0\frac{A^i}{(1+\alpha)^{i-2}}\frac{1}{2\alpha}$
$p_0 = \frac{2\alpha(1+\alpha-A)}{2\alpha(1+\alpha)+A(1+\alpha^2)}$
(e) $A = (1+\alpha)\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha(1+\alpha)}{1+\alpha^2}}\right)$

Problema 24.

(a) 0.4
(b) $\overline{W_{\text{espera}}} = \frac{1}{2}$ minutos
$\overline{W_{\text{total}}} = \frac{3}{2}$ minutos.
(c) ≈ 0.46
(d) $\overline{W_{\text{espera}}} = 0$ minutos
$\overline{W_{\text{total}}} = \frac{5}{8}$ minutos.

Problema 25.

(a) $Pr_{\text{espera}} = \frac{1}{3} \quad PB = \frac{1}{3}$
(b) $\overline{W_{\text{espera}}} = 10$ minutos
$\overline{W_{\text{total}}} = 30$ minutos.
(c) $Pr_{\text{espera}} = 0.6 \quad PB = 0.4$
(d) $\overline{W_{\text{espera}}} = 20$ minutos
$\overline{W_{\text{total}}} = 40$ minutos.

Problema 26.

(a) $Pr_{\text{pérdida}} = \frac{1}{5}$
(b) $\overline{N} = 0.8$
$\overline{W_{\text{aplicación}}} = 3$ segundos.
(c) $(Pr_{\text{pérdida}})_{\text{RRHH}} = \frac{1}{5}$
$(Pr_{\text{pérdida}})_{\text{No RRHH}} = \frac{1}{5}$
(d) $(Pr_{\text{pérdida}})_{\text{RRHH}} = \frac{1}{16}$
$(Pr_{\text{pérdida}})_{\text{No RRHH}} = \frac{1}{4}$
(e) $\overline{N_{\text{procesos}}} = \frac{7}{8}$
$\overline{N_{\text{espera}}} = \frac{1}{16}$
(f) $\overline{W_{\text{espera}}} = \frac{3}{14}$ segundos (≈ 0.214 s)
$\overline{N_{\text{espera}}} = \frac{45}{14}$ segundos (≈ 3.214 s)
(g) $Pr_{\text{pérdida}} = \frac{1}{8}$

Problema 27.

(a) $Pr_{\text{bloqueo}} = \frac{2}{7}$
$\overline{W_{\text{espera}}} = \frac{1}{5}$ min (12 s).
(b) $Pr_{\text{bloqueo}} = \frac{3}{13}$
$\overline{W_{\text{espera}}} = \frac{1}{6}$ min (10 s).
(c) $Pr_{\text{bloqueo}} = \frac{1}{6}$
$\overline{W_{\text{espera}}} = \frac{1}{10}$ min (6 s).
(d) $\alpha = \frac{1}{2}$
$\overline{W_{\text{espera}}} = \frac{1}{8}$ min (7.5 s).

Problema 28.

(a) $Pr_{\text{bloqueo}} = \frac{1}{3}$.
(b) $\overline{W_{\text{espera}}} = 5$ min.
$\overline{W_{\text{total}}} = 15$ min.

(c) $Pr_{\text{bloqueo}} = \frac{4}{7}$.
(d) $\overline{W_{\text{simulación}}} = 20$ min.
$\overline{W_{\text{espera}}} = \frac{40}{3}$ min (800 s).
(e) $\overline{\text{Simulaciones}} = 2$.
$\overline{W_{\text{simulación}}} = 10$ min.

Problema 29.

(a) $P_i = \left(\frac{\lambda L}{C}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda L}{C}\right)$.
(b) $\overline{W_{\text{sistema}}} = \dfrac{L}{C - \lambda L}$
(c) $\lambda_{\max} = 5$ paquetes$/s$
(d)
(e) $t = \frac{7}{6}\ s$
(f) $\lambda_1 = 2.95$ paquetes$/s$
$\lambda_2 = 1.05$ paquetes$/s$
$t = 540\ ms$

Problema 30.

(a) $P_{\text{rechazo}} = 0.2$
(b) $t = 1$ minuto
(c) $P_{\text{bloqueo}} = \frac{1}{9}$
(d) $P_{\text{bloqueo}} = \frac{1}{8}$
(e) Para el primer sistema: $\frac{1}{3}$
Para el segundo sistema: $\frac{1}{4}$
(f) Para el primer sistema: $\frac{5}{8}$ minutos
Para el segundo sistema: $\frac{5}{7}$ minutos

Problema 31.

(a) 7 circuitos.
(b) 9 circuitos.

Problema 32.

(a) $C_{AB} = 5$ cir. $C_{AT1} = 19$ cir.
$C_{T1B} = 12$ cir. $C_{T1D} = 11$ cir.
$C_{AT2} = 10$ cir. $C_{T2B} = 2$ cir.
$C_{T2C} = 10$ cir.

Problema 33.

(a) $C_{AB} = 2$ cir. $C_{BA} = 2$ cir.
$C_{AT1} = 8$ cir. $C_{T1A} = 8$ cir.
$C_{BT1} = 8$ cir. $C_{T1B} = 8$ cir.
$C_{T1T2} = 15$ cir. $C_{CT2} = 10$ cir.
$C_{T2C} = 10$ cir.

(b) $GoS \approx 98\,\%$.

Problema 34.

(a) 3 circuitos.
(b) 5 circuitos.
(c) $C_{BA} = 3$ cir. $C_{AT} = 10$ cir.
$C_{BT} = 8$ cir. $C_{CT} = 8$ cir.
$C_{TA} = 6$ cir. $C_{CT} = 11$ cir.
$C_{BT} = 8$ cir.
(d) $GoS_{AB} \approx 99.54\,\%$ $GoS_{AC} \approx 98.8\,\%$
(e) Menos circuitos.

Problema 35.

(a) $C_{AB} = 4$ cir. $C_{AC} = 20$ cir.
$C_{CD} = 6$ cir. $C_{CE} = 19$ cir.
$C_{ED} = 19$ cir. $C_{DB} = 13$ cir.

Problema 36.

(a) 3 circuitos
(b) 5 circuitos
(c) $C_{A1} = 10$ cir. $C_{1B} = 5$ cir.
$C_{12} = 7$ cir. $C_{2C} = 7$ cir.
(d) $GoS_{AB} \approx 1.915\,\%$ $GoS_{AC} \approx 5.64\,\%$
(e) 4.05 Erlangs ($\alpha = 1$)
7.55 Erlangs ($\alpha = 2$).
(f) $C_{1C} = 5$ cir. $C_{12} = 10$ cir.
$C_{2C} = 9$ cir.
(g) $GoS_{AC} \approx 3.91\,\%$

Problema 37.

(a) $GoS_{AB} \approx 2.53\,\%$ $GoS_{AC} \approx 3.71\,\%$
(b) Secuencial: 1 circuito
Aleatoria: 2 circuitos
(c) $C_{AT1} = 8$ cir. $C_{T1B} = 5$ cir.
$GoS_{AB} \approx 1.95\,\%$
(d) 2.1 Erlangs (4 circuitos)
5.2 Erlangs (8 circuitos).
(e) $C_{BT1} = 9$ cir. $C_{T1C} = 4$ cir.
$C_{T1T2} = 7$ cir. $C_{T2C} = 7$ cir.
(f) $GoS_{AB} \approx 3.2\,\%$

Problema 38.

(a) Sección AB: 1 circuito (secuencial)
2 circuitos (aleatoria)
Sección CD: igual

(b) AT1: 10 cir; BT1: 8 cir; T1T3: 10/11 cir; T3T2: 10 cir; T2D: 9 cir.
(c) $GoS_{BD} \approx 14.5\,\%$
(d) 0.24 Erlangs (4 circuitos)
3.36 Erlangs (8 circuitos).
(e) ET1: 5 cir; T1T2: 4 cir; T1T3: 9 cir; T3T2: 9 cir; T2D: 12 cir

Problema 39.

(a) Secuencial: 2 circuitos.
Aleatoria: 3 circuitos.
(b) $C_{AT} = 5$ cir. $C_{BT} = 6$ cir.
$C_{CT} = 4$ cir. $C_{TA} = 5$ cir.
$C_{TB} = 5$ cir. $C_{TC} = 5$ cir.
$C_{BT} = 8$ cir.
(c) $GoS_{AB} \approx 98.75\,\%$ $GoS_{AC} \approx 94.95\,\%$
(d) 1 circuito: 0.5 *Erlangs*
2 circuitos: 1 *Erlang*
3 circuitos: 1.5 *Erlangs*.
(e) $C_{BC} = 2$ cir. $C_{BT} = 6$ cir.
$C_{CT} = 3$ cir. $C_{TA} = 5$ cir.
$C_{TB} = 4$ cir. $C_{TC} = 6$ cir.
$C_{BT} = 8$ cir.

Problema 40.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{1}{11}$
$P_{\text{espera}} = \frac{2}{11}$
(b) $\overline{t_{\text{sistema}}} = 33\ s$
$\overline{t_{\text{espera}}} = 3\ s$
(c) $P_{\text{pérdida}} = \frac{3}{7}$
(d) $\overline{N_{\text{procesadores}}} = \frac{8}{7}$
$\overline{t_{\text{procesador}}} = 1\ m$
(e)

Problema 41.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{1}{5}$ (la misma para ambos)
$\overline{t_{\text{sistema}}} = 1\ m$
(b) $(P_{\text{pérdida}})^A = \frac{3}{11}$
$(P_{\text{pérdida}})^B = \frac{3}{7}$
(c) $\overline{t_{\text{sistema}}} \approx 1.02\ m$

Problema 42.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{25}{49}$ (la misma para ambos)
(b) $\overline{t_{\text{espera}}} = 12.5\ s$
(c) $(P_{\text{pérdida}})^{\text{gran cliente}} = \frac{20}{49}$
$(P_{\text{pérdida}})^{\text{cliente regular}} = \frac{25}{49}$
(d) $\overline{t_{\text{espera}}} \approx 13.8\ s$
(e)

Problema 43.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{2}{7}$
(b) $\overline{t_{\text{espera}}} = 3\ s$
(c) $P_{\text{pérdida}} = \frac{1}{5}$
(d) $\alpha \approx 1.45$
(e) $\overline{t_{\text{espera}}} = 5.625\ s$

Problema 44.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{1}{5}$
(b) $\overline{t_{\text{sistema}}} = \frac{1}{8}\ s$
(c) $(P_{\text{pérdida}})_{\text{alta prioridad}} = \frac{1}{5}$
(d)
(e) $(P_{\text{pérdida}})_{\text{alta prioridad}} = 0.1645$
$(P_{\text{pérdida}})_{\text{no prioritarios}} = 0.4304$
(f) $\overline{N_{\text{sistema}}} = 0.7468$
$\overline{t_{\text{sistema}}} = \frac{1}{8}\ s$

Problema 45.

(a) $(P_{\text{pérdida}})_1 = \frac{1}{5}$
$(P_{\text{pérdida}})_2 = \frac{3}{5}$
(b) $\overline{t_{\text{espera}}} = 10\ s$
$\left(\overline{t_{\text{espera}}}\right)_1 = 15\ s$
$P_1 = \frac{2}{3}$
(c)
(d) $(P_{\text{pérdida}})_1 = \frac{9}{29}$
$(P_{\text{pérdida}})_2 = \frac{13}{29}$

Problema 46.

(a) $(P_{\text{pérdida}})_{rt} = \frac{1600}{C+1600}$
$(P_{\text{pérdida}})_{nrt} = \frac{1600}{1600+C}$
$C_{min} = 6400$ bps
(b) $(P_{\text{pérdida}})_{rt} = \frac{1}{17}$
$(P_{\text{pérdida}})_{nrt} = \frac{1}{5}$
(c) $\left(\overline{t_{\text{sistema}}}\right)_{rt} = t_s$
$\left(\overline{t_{\text{espera}}}\right)_{nrt} = t_s \cdot \frac{4}{4+A}$
(d)
(e)

Problema 47.

(a) $P^{\text{dpto}}_{\text{pérdida}} = \frac{1}{4}$
$P^{\text{ext}}_{\text{pérdida}} = \frac{5}{8}$

(b) $W_w = 4$ min
$W_w^{\text{dpto}} = 5$ min
(c) $P_{\text{pérdida}}^{\text{dpto}} = \frac{4}{19}$
$P_{\text{pérdida}}^{\text{ext}} = \frac{23}{38}$
(d) $W_s^{\text{dpto}} = 10$ min
$W_s^{\text{ext}} = 6$ min
(e)

Problema 48.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{1}{7}$
$W_w = \frac{10}{3}$ s
(b) $P_{\text{pérdida}} = \frac{11}{263}$
(c) $W_w = \frac{55}{63}$ s
$W_s = 5$ s
(d)

Problema 49.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{1}{3}$
$W_w = 12$ min
$t_{\text{procesador}}^{ON} = 16$ horas
$t_{\text{memoria}}^{ON} = 8$ horas
(b) $P_{\text{pérdida}} = \frac{1}{3\alpha+1}$
$\alpha \geq \frac{2}{3}$
(c) $W_t = \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} & 40 \text{ m} \\ \alpha = \frac{1}{2} & \frac{88}{3} \text{ m} \end{cases}$

Problema 50.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{3}{4}$
(b) $W_t = 45\ m$
$W_A = 15\ m$
$W_B = 30\ m$
$T_{\text{ON}}^{B} = 12$ horas
(c) $P_{\text{pérdida}} = \frac{3}{8}$
(d) $W_t = 9\ m$
$W_A = \frac{15}{4}\ m$
$W_B = \frac{21}{4}\ m$
$T_{\text{ON}}^{B} = 12$ horas
(e) $\frac{1}{4}$

Problema 51.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{1}{21}$
$W_p = 3$ s
$W_w = \frac{3}{5}$ s
(b) $P_{\text{pérdida}} = \frac{1}{13}$
$W_p = 4$ s
(c) $\overline{N_{\text{análisis}}} = \frac{4}{3}$
(d)

Problema 52.

(a) $P_{\text{pérdida}}^{\beta} = \frac{1}{6}$
$P_{\text{pérdida}}^{\alpha} = \frac{2}{3}$
(b) $W_t = \frac{175}{4}$ s
$W_w = \frac{35}{4}$ s
(c) $P_{\text{pérdida}}^{\beta} = \frac{1}{4}$
$P_{\text{pérdida}}^{\alpha} = \frac{17}{35}$
(d) $W_t^{\beta} = 19$ s
$W_t^{\alpha} = \frac{85}{3}$ s
(e) 6.8 horas

Problema 53.

(a) $P_{\text{bloqueo}} = 0.4$
(b) $W_t = 20$ min
$T_{2\text{ análisis}} = 4.8$ h
(c) 21.6 simulaciones
(d) $P_{\text{bloqueo}} = 0.2$
(e) $W_t = 10$ min
(f) 28.8 simulaciones
(g)

Problema 54.

(a) $P_{\text{pérdida}}^{\beta} = \frac{5}{8}$
$P_{\text{pérdida}}^{\alpha} = \frac{1}{4}$
(b) $W_t = 7$ s
$W_w^{\alpha} = \frac{5}{2}$ s
(c) $\{\alpha, \beta\} = \{80, 20\}$
(d) $P_{\text{pérdida}}^{\beta} = \frac{29}{59}$
$P_{\text{pérdida}}^{\alpha} = \frac{44}{59}$

Problema 55.

(a) $P_{\text{pérdida}}^{\beta} = P_{\text{pérdida}}^{\alpha} = \frac{2}{3}$
(b) $P_{\text{pérdida}}^{\beta} = \frac{5}{7}$
$P_{\text{pérdida}}^{\alpha} = \frac{3}{7}$
(c) $W_t = 11$ s
$W_w^{\beta} = 10$ s
(d)

Problema 56.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{1}{3}$
(b) $W_t = 200$ s
Prob$\{W > 10\ m\} = 0.223$
(c) 8 horas
(d) $P_{\text{pérdida}} = \frac{1}{2}$
(e) $W_{\text{proceso}} = 500$ s 50 %, 50 %
(f)

Problema 57.

(a) $W_w = \frac{5}{6}$ s
(b) $W_w^\alpha = \frac{15}{22}$ s $W_w^\alpha = \frac{5}{6}$ s
(c) $P_{\text{pérdida}}^\beta = \frac{4}{13}$
(d) $W_w^\alpha = \frac{5}{8}$ s $\mathcal{P}^\alpha = \frac{4}{7}$

Problema 58.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{2}{7}$ $P_{\text{espera}} = \frac{2}{7}$
(b) $W_w = 1$ m $\mathcal{P}_{\text{esperar}} = \frac{2}{5}$
(c) 5 horas
(d) $P_{\text{pérdida}} = \frac{2}{17}$ $P_{\text{espera}} = \frac{6}{17}$
$W_w = 20$ s
(e) $\gamma^{-1} = 57.7$ s

Problema 59.

(a) $P^1_{\text{pérdida}} = \frac{6}{17}$ $P^2_{\text{pérdida}} = \frac{12}{17}$
(b) $W_t = 4.5$ ms $W_w^{\text{pkt 1}} = \frac{18}{11}$ ms
(c) $47.65 \cdot \alpha$ ms
(d) $P^1_{\text{pérdida}} = 0.4204$ $P^2_{\text{pérdida}} = 0.4586$
(e) 2.867 ms
(f) 2.5 ms

Problema 60.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{9}{26}$
4.154 horas 0.923 horas
(b) $N_t = \frac{51}{26}$ $W_t = 4.5$ s
(c) $P_{\text{pérdida}} = \frac{6}{17}$ $k = 2.803$
(d) $W_t = 3.41$ s $W_{1\ \text{análisis}} = 0.75$ s

Problema 61.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{4}{7}$ 13.714 horas
(b) $\alpha = \frac{1}{20}$
(c) $P_{\text{bloqueo}} = \frac{1}{4}$ $P_{\text{pérdida}} = \frac{5}{8}$
(d) $P_{\text{pérdida}} = \frac{2}{3}$ 6.52 horas
(e) $W_t = 4.72$ m

Problema 62.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{9}{19}$
(b) $W_w = 5.4$ s $\mathcal{P}_{\text{esperar}} = \frac{3}{5}$
$W_w^{\text{esperan}} = 9$ s
(c) 47.37 s
(d) 2.146 $
(e) $P^1_{\text{pérdida}} = \frac{11}{23}$ $P^2_{\text{pérdida}} = \frac{31}{73}$
(f) $W_p^1 = 7\ s$ $W_p^2 = 7\ s$

Problema 63.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{2}{5},\ W_t = 20$ s
(b) $P_{\text{pérdida}} = \frac{1}{3},\ \varphi \leq 0.46154$
(c) $W_t = 15$ s, $\#c = \frac{1}{2}$
(d) $T_{\text{buffer}} \approx 3.92$ m, $W_w = \frac{16}{7}$ m
(e)

Problema 64.

(a) $P_{\text{pérdida}} \approx 0.543,\ P_{\text{espera}} = 0.296$
$W_t \approx 65.88$ m
(b) 64.7 %, 22 %
(c) $P_{\text{pérdida}} \approx 0.362,\ P_{\text{espera}} = 0.296$
$W_p \approx 22.535$ m, $W_w = 12.394$ m
(d) $P_{\text{pérdida}} \approx 0.402,\ P_{\text{espera}} = 0.329$
$W_p \approx \frac{80}{3}$ m, $W_w = \frac{44}{3}$ m
(e) 33 %

Problema 65.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{A^4}{8+8A+4A^2+2A^3+A^4}$
$P_{\text{espera}} = \frac{A^2+\frac{A^3}{2}}{2+2A+A^2+\frac{A^3}{2}+\frac{A^4}{4}}$
(b) $W_w = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{A^3+A^4}{4+4A+2A^2+A^3},\ W_s = \frac{1}{\mu}$
(c)

Problema 66.

(a) $N_s = \frac{\lambda}{\mu}$
(b) $\lambda_{\max} = 200\ s^{-1},\ P_{\text{esperar}} = \frac{1}{3}$
Tiempo reposo = 20 min
(c)

Problema 67.

(a) $\lambda_\beta = 1\ m^{-1}$, $P^{\alpha}_{\text{pérdida}} = \frac{1}{4}$, $P^{\beta}_{\text{pérdida}} = \frac{5}{8}$
(b) $W_w^{\alpha} = 10\ s$, $\%^{\alpha}_{\text{esperan}} = \frac{1}{2}$
(c) $W_t = 28\ s$, $W_t^{\alpha} = 30\ s$, $W_t^{\beta} = 20\ s$
$\%^{\beta} = \frac{1}{5}$
(d) 18 €
(e)

Problema 68.

(a) $P_{\text{pérdida}} = \frac{1}{4}$
$P_{\text{espera}} = \frac{1}{2}$, $W_w = 15\ s$
(b) $\%_{\text{esperan}} = \frac{2}{3}$, $W_w|_{\text{esperan}} = 22.5\ s$
(c) 22.5 cent.
(d) $P_{\text{pérdida}} = \frac{1}{3}$
$P_{\text{espera}} = \frac{1}{6}$, $W_w = \frac{15}{8}\ s$
(e) $T_s = 5.757\ s$