Capítulo 3. TRACCIÓN Y COMPRESIÓN SIMPLE

3.1 BARRA PRISMÁTICA SOMETIDA A UN ESFUERZO NORMAL CONSTANTE

Consideremos una barra rectilínea de sección recta, cualquiera, pero constante, sometida a dos fuerzas iguales y opuestas contenidas en la fibra media (es decir dos fuerzas aplicadas en el c.d.g. de las secciones extremas, y contenidas en la recta que une estos dos puntos) de igual valor absoluto, y apuestas.

El peso de la pieza es despreciable, o en caso contrario su influencia se estudia por separado.

Si efectuamos una sección recta y dividimos el prisma en dos partes, después de deformado éste, vemos que las dos secciones m.n. pertenecientes a cada pedazo del prisma, deben ser:

a) simétricas respecto al plano m.n.

b) superponibles.

Esta doble condición, sólo puede cumplirse si las secciones rectas permanecen, al deformarse el prisma, planas y normales a la fibra media de la misma.

Esta es la nombrada **HIPÓTESIS DE NAVIER,** que vemos, que no es tal hipótesis, ya que es

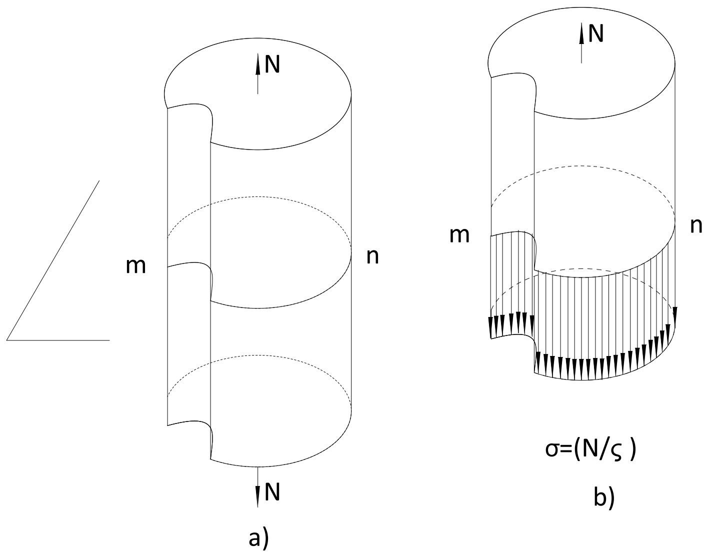

Figura 3.1

Demostrable con pleno rigor. Ahora bien, para mantener este rigor deberíamos suponer, - en virtud del principio de Saint – Venant – que el prisma es suficientemente largo, en relación con las dimensiones de su sección recta, y que la sección m.n. se da suficientemente alejada de las secciones extremas (alrededor de una o dos veces de la dimensión lineal máxima de aquella).

Si aislamos una de las partes de la barra – por ejemplo la que queda por encima de la sección recta m.n. – esta parte quedará en equilibrio bajo la acción de la fuerza N (normal a la cara en que actúa y aplicada en su c.d.g.) y de las tensiones que la parte inferior ejerce sobre la superior a través de su cara de contacto m.n.

Es lógico admitir una repartición uniforme de tensiones sobre esta cara, la cual satisface a las condiciones de equilibrio. La exactitud de esta hipótesis puede probarse por la Teoría de la Elasticidad. Siguen pues, manteniéndose las fórmulas;

$$\sigma = \frac{N}{\Omega}(3.1)$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l}(3.2)$$

$$\sigma = E\varepsilon(3.3)$$

Para cualquier punto de sección recta m.n. genérica, fórmulas ya demostradas en el apartado 2.4 para una probeta de sección circular o rectangular. Ahora, repetimos, la sección recta es una curva plana cerrada cualquiera, o una forma tubular cualquiera también. Las letras tienen los mismos significados que en el apartado 2.4.

Sustituyendo (3.1) y (3.2) en (3.3) queda como expresión del alargamiento

$$\boxed{\delta = \frac{N \bullet l}{E \bullet \Omega}(3.4)}$$

NOTAS;

1. Observamos que en el caso de tracción o compresión simple, el material se utiliza en la plenitud de sus posibilidades puesto que la tensión máxima admisible se alcanza en todos sus puntos.

2. Hemos hablado de tensión admisible. Esta es, para el acero, la de fluencia dividida por un cierto coeficiente de seguridad, (siempre menor que dos). En los hormigones, en que no existe tensión de fluencia, se coge la de rotura, dividida por un coeficiente de seguridad igual a 2,5 ó 3.

   Modernamente en vez de establecer el coeficiente de seguridad a través de la tensión, se hace por medio de la carga que produce la rotura de la estructura, dividiendo luego esta por un cierto coeficiente de seguridad. En nuestro caso, de compresión o flexión centrada, los dos procedimientos son idénticos.

   En el hormigón armado suelen emplearse – modernamente – un método mixto que aplica a las tensiones del hormigón y acero unos ciertos coeficientes (divisores) de seguridad, menores de los anteriores, y otro (multiplicador) a la carga que produce la rotura de la estructura con las tensiones de rotura (o fluencia) así ya reducidos.

   Hay materiales que resisten igual a tracción que a compresión como el acero laminado o de armar.

   Otros tienen resistencia distinta para ambas solicitaciones. Ejemplo clásico es el hormigón que resiste unas 10 veces más a compresión que a tracción.

3.2 LA CONTRACCIÓN LATERAL. COEFICIENTE DE POISSON.

El ensayo del apartado 2.4 nos ha mostrado los alargamientos de una barra sometida a tracción. En este ensayo puede comprobarse que el alargamiento longitudinal (axial), viene siempre acompañado – en el caso de un cuerpo elástico – de una contracción lateral de la sección recta.

La relación de la contracción lateral unitaria ε_y, alargamiento lateral unitario ε_x, es una constante, llamada coeficiente de Poisson y que suele designarse por υ.

Así pues se verificará – teniendo en cuenta signos -.

$$\boxed{\varepsilon_y = -\upsilon\varepsilon_x} \quad (3.5)$$

El coeficiente de Poisson vale de 0,25 a 0,30 para los aceros empleados en construcción, y del orden de 0,16 para el hormigón.

Por medio del coeficiente de Poisson se puede calcular el aumento de volumen de una barra tendida, la longitud de la barra aumenta en la relación $\frac{1+\varepsilon}{1}$, las dimensiones de la sección recta disminuyen en la relación $\frac{1-\upsilon\varepsilon}{1}$; y por tanto el área de su sección recta disminuirá en la relación $\frac{(1-\upsilon\varepsilon)^2}{1}$ (ver figura 3.2).

Por consiguiente el volumen de la barra variará en la relación;

$$\boxed{\frac{(1+\varepsilon)(1-\upsilon\varepsilon)^2}{1}}$$

Como ε es muy pequeño, si despreciamos sus potencias mayores de I (es decir infinitésimas de segundo o tercer orden) la expresión anterior resultará;

$$\boxed{1+\varepsilon-2\upsilon\varepsilon}$$

La variación relativa de volumen o dilatación cúbica, vale por tanto;

$$\Delta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{(1+\varepsilon-2\upsilon\varepsilon)-1}{1} = \varepsilon(1-2\upsilon)$$

Como es difícil de concebir una material que disminuye de volumen cuando se tracciona, deberá ser $\varepsilon(1-2\upsilon)>0$; o sea $\upsilon \le 0,50$.

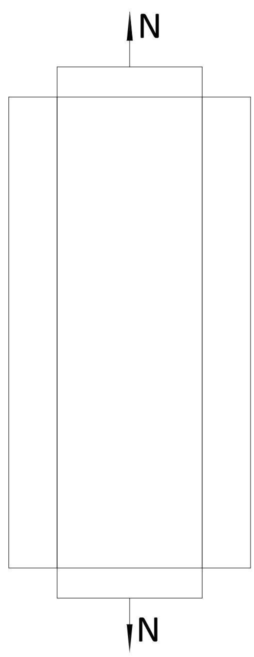

Figura 3.2

El caso de compresión, la contracción longitudinal viene acompañada de una dilatación transversal que se rige por la misma fórmula 3.5. Como ejercicio puede calcular el alumno el valor de Δ en caso de una barra comprimida.

3.3. EL TRABAJO DE DEFORMACIÓN

Durante la deformación de una fuerza prismática, la fuerza exterior realiza un trabajo. Supongamos que esta, se hace crecer lenta y gradualmente, para no producir ninguna aceleración. Si suponemos además que el cuerpo es elástico todo el trabajo efectuado por las fuerzas exteriores (una en este caso) se utiliza en vencer las fuerzas elásticas internas, y se trasforma íntegramente en energía potencial elástica de deformación.

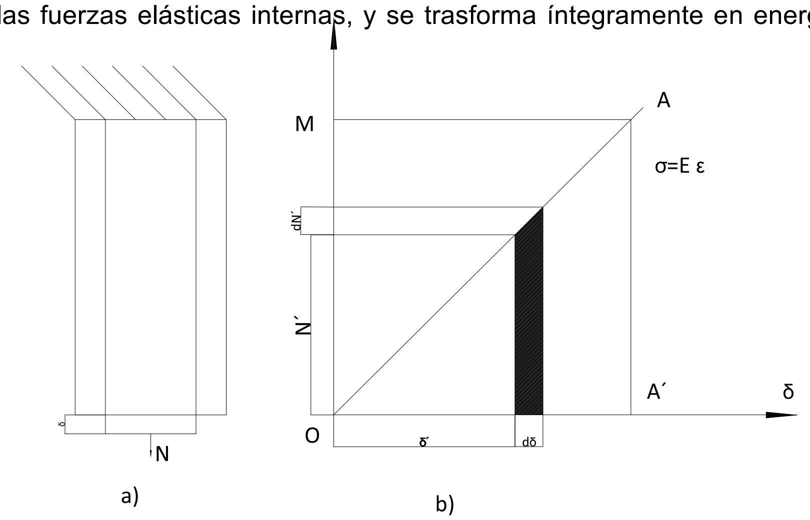

Figura 3.3

Sea N el valor final de la fuerza exterior y δ el correspondiente alargamiento de la barra.

Representamos en un diagrama cartesiano, la relación entre los sucesivos valores de N y δ. Por la ecuación 3.3 – que se repite en la fig. 3.3 – esta es una relación lineal ya que;

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} \text{ y } \varepsilon = \frac{\delta}{l} \text{ y por tanto } N = \left(E\frac{\Omega}{l} \right) \bullet \delta$$

A un valor intermedio N´ de la fuerza N corresponde un valor δ' intermedio, del alargamiento; y a un incremento diferencial dN´ de N corresponde, el incremente diferencial $d\delta'$ de δ. El trabajo elemental efectuado durante este incremento diferencial es:

$$\boxed{dZ = N' \bullet d\delta'}$$

Que viene representado por el rectángulo rayado de la figura (esta medida desprecia el infinitésimo de orden superior ½ $dN' \bullet d\delta'$ representado en la figura por el triángulo sombreado)

Integrando, vemos, que el trabajo total viene representado, gráficamente, por el área del triángulo OAA´, o sea;

$$\boxed{Z = \frac{N\delta}{2}} \quad (3.7)$$

(este es un caso particular del Teorema de Calpeyron que enunciaremos y demostraremos en el capítulo IV)

Si sustituimos en 3.7 por su valor queda;

$$\boxed{Z = \frac{N^2 l}{2E\Omega}} \quad (3.8)$$

Si, al revés, se sustituye N en función de δ queda;

$$\boxed{Z = \frac{E.\Omega.\delta^2}{2l}} \quad (3.8´)$$

Finalmente podemos introducir el volumen $V = l.\Omega$ de la barra, y como variable la tensión $\sigma = \frac{N}{\Omega}$, ó el alargamiento unitario $\varepsilon = \frac{\delta}{l}$ quedando las fórmulas;

$$Z = \frac{\sigma^2.V}{2E} = \frac{E.\varepsilon^2.V}{2} \quad (3.9)$$

Si estas fórmulas se dividen por V nos queda el valor del trabajo de deformación por unidad de volumen en función σ o de ε .

3.4 TRACCIÓN Y COMPRESIÓN EN 2-3 DIRECCIONES ORTOGONALES ENTRE SÍ.

Supongamos un paralepipedo trirectángulo sobre cuyo para de caras apuestas actúan cargas de tracción o compresión, uniformemente repartidas que llamaremos $\sigma_x, \sigma_y y \sigma_z$. Sean N_x, N_y, N_z la suma de las fuerzas que actúan sobre cada una de las caras, o sea:

$$N_x = \sigma_x.\Omega; N_y = \sigma_y.\Omega; N_z = \sigma_z.\Omega$$

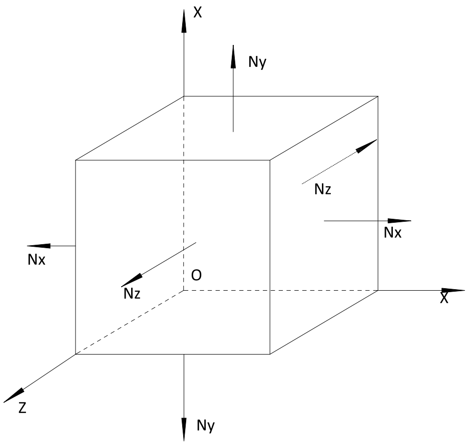

Figura 3.4

La dilatación en la dirección OX depende de las tres variables.

Apliquemos al principio de la superposición de efectos. Para ello, supongamos, que, primeramente, que σ_x actúa solo; por la fórmula (3.3) tendremos $\varepsilon_x^{'} = \frac{\sigma_x}{\varepsilon}$, igualmente por la acción aislada de σ_y obtendríamos (Fórmula 3.5):

$$\varepsilon_x^{'} = -\frac{\upsilon.\sigma_y}{E} \text{ y de igual forma para } \sigma_{z;}\ \varepsilon_z^{'} = -\frac{\upsilon.\sigma_z}{E}$$

Cuando $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ actúan simultáneamente por el principio de la superposición de efectos tendremos;

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)\right]\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon(\sigma_z + \sigma_x)\right]\\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)\right]\end{aligned}} \qquad (3.10)$$

Estas fórmulas que, implican que el cuerpo sea homogéneo (iguales características en todos sus puntos) e isótropo (iguales propiedades en cualquier dirección) constituyen la hipótesis de Hooke generalizada.