

© Roberto Imaz Gutiérrez. Este capítulo se publica bajo Licencia [Creative Commons BY-NC-SA 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

Complemento al Capítulo 5. FLEXIÓN SIMPLE, FLEXIÓN COMPUESTA Y ESFUERZO CORTANTE ESVIADO

1. FLEXIÓN ESVIADA

Sea una pieza cualquiera (asimétrica o no) sometida a un momento flector contenido en un plano cualquiera, cuya traza con el de la sección recta llamamos mm' .

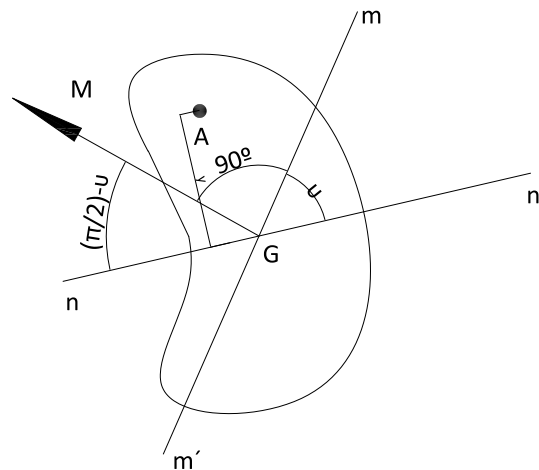


figura 1

Sea nn' la fibra neutra correspondiente. La ecuación $\varepsilon = \frac{y}{F}$ (1) que dedujimos para la flexión recta sigue siendo válida para este caso, ya que las premisas utilizadas de que las secciones planas se mantienen, después de la flexión, planas y normales a la fibra media se sigue cumpliendo.

Para obtener una segunda ecuación que junto a la (1), nos proporcione un sistema de donde deducir la tensión en un punto genérico A, igualamos los momentos, de las fuerzas exteriores (M) y de las fuerzas infinitesimales ($\sigma \cdot \Omega$) que actúan sobre cada elemento de superficie, tomadas con relación al eje nn' .

$$M \operatorname{sen} \theta = \int (\sigma d\Omega) y ; \text{ y como } \sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E \cdot y}{\rho} ; \text{ o resumiendo } \frac{E}{\rho} = \frac{\sigma}{y} \quad (1')$$

$$\text{deducimos } M \operatorname{sen} \theta = \frac{E}{\rho} \int_{\Omega} y^2 d\Omega ; \quad \boxed{M \operatorname{sen} \theta = \frac{E \cdot I_{nn'}}{\rho}} \quad (2)$$

Siendo $I_{nn'}$ el momento de inercia de la sección con relación al eje nn' (fibra neutra).

Eliminando ρ entre (1') y (2) obtenemos;

$$\boxed{\sigma = \frac{M y}{I_{nn'}} \operatorname{sen} \theta} \quad (3)$$

$$\text{O también } \boxed{\sigma = \frac{M}{I_{nn'} / \operatorname{sen} \theta} y} \quad (3')$$

Si en las ecuaciones (2) y (3) hacemos $\theta = \frac{\pi}{2}$, obtenemos las fórmulas análogas,

deducidas para el caso de flexión recta.

Asimismo vemos que la expresión (3') que nos da σ es idéntica al caso de flexión recta

con tal de sustituir $I_{zz'}$ por $\frac{I_{nn'}}{\operatorname{sen} \theta}$.

2. FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA

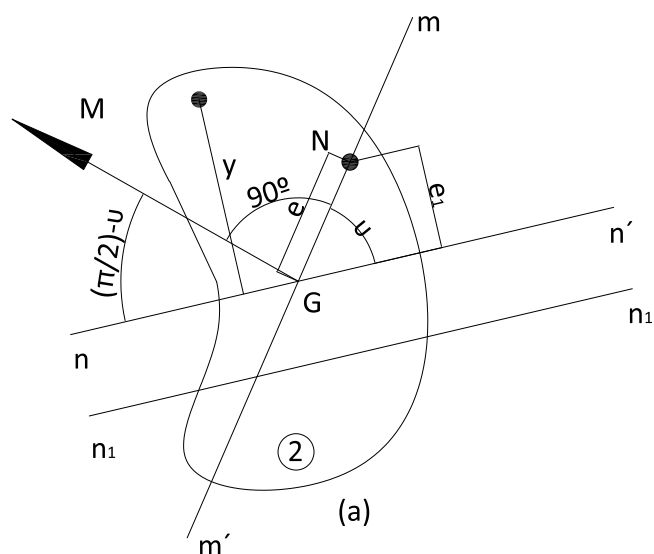


figura 2

Una fuerza P actuando en un punto genérico N es equivalente a la misma fuerza actuando en el baricentro G de la sección más un par $\vec{M} = \vec{GN} \wedge \vec{P}$, ($|\vec{M}| = P \cdot e$)

Por el principio de superposición podemos escribir la expresión que nos da la tensión en un punto genérico A ;

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} + \frac{P_n e}{I_{m'}} y \text{sen} \theta \quad (4)$$

La fórmula (4) la podemos escribir;

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} \left(1 + \frac{e \cdot y \cdot \text{sen} \theta}{r_{m'}^2} \right) = \frac{P}{\Omega} \left(1 + \frac{e_1 \cdot y}{r_{m'}^2} \right) \quad (4')$$

Siendo $e_1 = e \cdot \text{sen} \theta$ (ver figura 2) y $r_{m'}^2 = \frac{I_{m'}}{\Omega}$ el radio de giro correspondiente a nn' .

$nn' \rightarrow$ Es la fibra neutra correspondiente a la flexión M únicamente.

$n_1 n'_1 \rightarrow$ Es la fibra neutra correspondiente a la fuerza P actuando en N .

Sabemos que ambas son paralelas siendo nn' el diámetro conjugado de GM respecto a la elipse central de inercia.

Dado N , o sea Gm , es inmediato determinar, como veremos después nn' así como

$r_{m'}$.

Por ello en la figura 3 se expone la construcción que nos da $n_1 n'_1$ conocidos, N , nn'

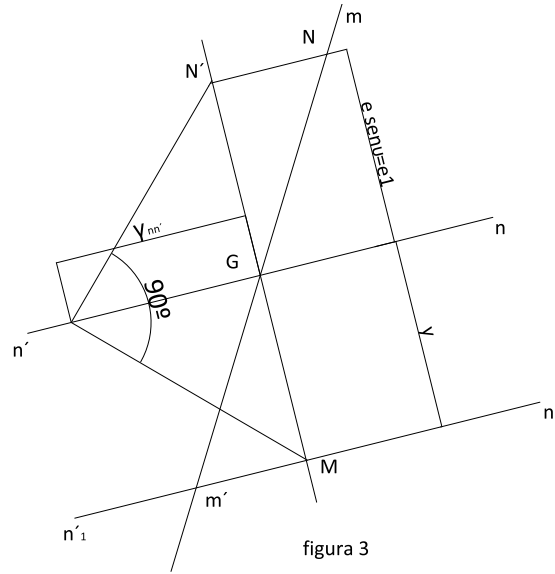
y $r_{m'}$.

La ecuación de $n_1 n'_1$ se obtiene haciendo $\sigma = 0$ en (4'). Esta ecuación será pues;

$$e_1 \cdot y + r_{m'}^2 = 0 \quad (5)$$

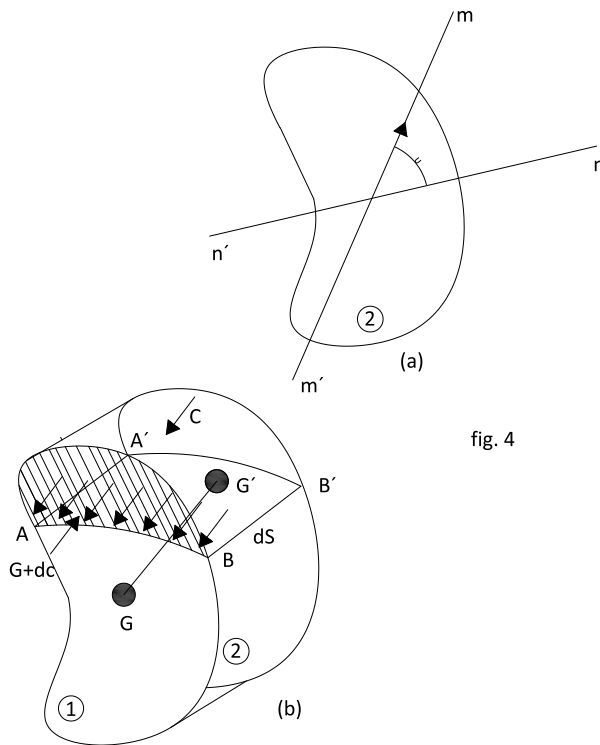
La construcción de la figura 3 indica que se cumple efectivamente

$$\vec{G'N'} \cdot \vec{GM} = -r_{m'}^2 \text{ o sea } (5)$$



3. ESFUERZO CORTANTE ESVIADO

Si sobre una viga actúa un momento flector variable, en módulo, pero siempre contenido en un mismo plano, que puede ser cualquiera, entonces decimos que existirá un esfuerzo cortante contenido en el mismo plano que el momento, y de modo; $t = \frac{dM}{ds}$.



Vamos a determinar las tensiones cortantes que produce este esfuerzo T. En la figura 4 se ha representado una rebanada de espesor ds. Sea AB una curva cualquiera trazada sobre la sección recta y ABA'B' la superficie cilíndrica de directriz AB y generatrices paralelas a GG'. Establezcamos el equilibrio de la parte del sólido que está por encima de ABA'B'.

Por efecto del momento flector sobre la porción A'B'C' (contenida en la cara (2)), actúan unas compresiones cuyo resultante es C. De igual manera, y por el mismo motivo sobre el área ACB actúa una compresión C+dC. La diferencia entre estos dos empujes debe equilibrarse por las tensiones cortantes que actúan sobre ABA'B'. Si dl es la diferencial de la longitud de la curva AB de longitud L, la ecuación de equilibrio se escribe;

$$C + dc - C = ds \int_A^B \xi \, dl; \int_{\Omega_1} \frac{M + dM}{I_{m'}} \text{sen}\theta \cdot y \, d\Omega - \int_{\Omega_1} \frac{M}{I_{m'}} \text{sen}\theta \cdot y \, d\Omega = ds \int_A^B \xi \, dl \text{ es decir,}$$

$$\frac{dM}{ds} \cdot \frac{\text{sen}\theta}{I_{m'}} \int_{\Omega_1} y \, d\Omega = \int_A^B \xi \, dl = \bar{R} \text{ o finalmente } \int_A^B \xi \, dl = R = \frac{T \cdot M_e}{I_{m'}} \text{sen}\theta \quad (6)$$

Siendo M_e el momento estático de la parte rayada Ω_1 respecto a nn' .

Si llamamos ξ_m a la tensión cortante media o normal a AB a lo largo de AB tenemos;

$$\xi_m = \frac{T \cdot M_e}{I_{m'} l} \text{sen}\theta \quad (6')$$

Fórmula que coincide con la correspondiente a cuando T actúa sobre uno de los ejes principales de inercia, haciendo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Así mismo vemos, como en el apartado anterior que la expresión que nos da ξ_m escrita

de la forma;

$$\xi_m = \frac{T \cdot M_e}{(I_{m'} / \text{sen}\theta) l} \quad (6'')$$

Coincide con el caso en que T actúa sobre uno de los ejes principales de inercia, con tal de sustituir $I_{22'}$ por $\frac{I_{m'}}{\text{sen}\theta} = I_{m'}^*$.

Lo dicho en los tres anteriores apartados, reflejado en las ecuaciones (3')(4')(5')y (6''), muestran que es de gran interés:

a) dada una recta mm' hallar la conjugada nn' .

b) Hallar el valor de $I_{m'}$ y $I_{m'}^* = \frac{I_{m'}}{\text{sen}\theta}$

En el apartado que sigue damos un procedimiento gráfico que resuelve de manera inmediata estas dos ecuaciones.

4. CONSTRUCCIONES GRÁFICAS (Rectas conjugadas, momentos de inercia y centrífugos)

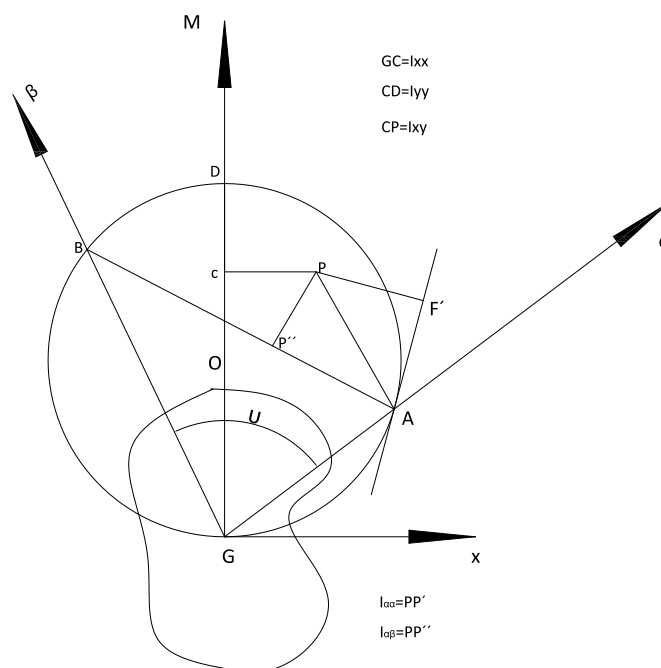


fig. 5

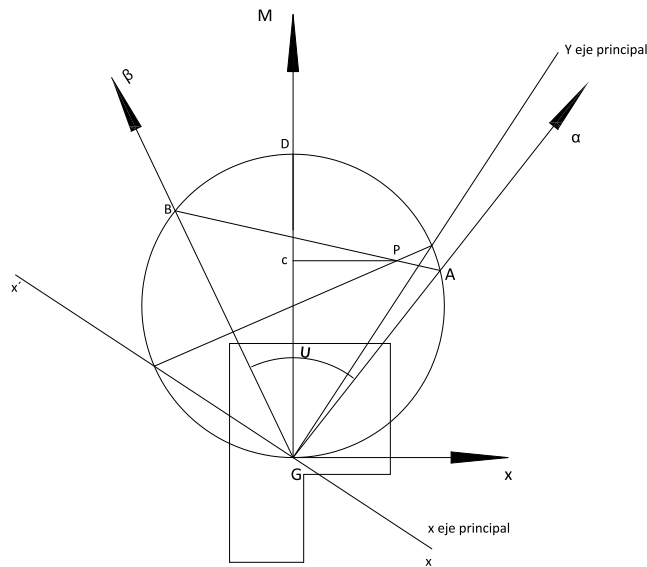


fig. 6

Enunciaremos las dos propiedades fundamentales del círculo de Mohr que se dibuja en la figura 5.

Primeramente diremos como se dibuja el citado círculo de Mohr;

Dibujados dos ejes perpendiculares, sobre el eje vertical se lleva $GC = I_{xx'}$ y a continuación $CD = I_{yy'}$.

El círculo en cuestión es construido sobre GD como diámetro.

Para determinar el polo P, se lleva $CP = I_{xy}$ paralelamente a $G\alpha$ y según el sentido positivo de este eje I_{xy} es positivo.

PROPIEDAD N°1;

El m.d. i con relación a un eje cualquiera $G\alpha$ (fig5); viene dado por la longitud de la normal PP' , bajada desde el polo P, a la tangente AT del círculo, en el punto A en que $G\alpha$ corta al círculo de Mohr.

Asimismo si $G\alpha$ y $G\beta$ son dos rectas conjugadas ($I_{\alpha\beta} = 0$) y es θ el ángulo que

forman; $\frac{I_{\alpha\alpha'}}{\text{sen}\theta} = I_{\alpha\alpha}'^*$ viene dado por PA (ver figura 6).

PROPIEDAD N° 2:

El momento centrífugo con relación a dos ejes orientados, cualesquiera $G\alpha$ y $G\beta$ está representado por la distancia del polo P a la cuerda AB siendo A y B los puntos de intersección de $G\alpha$ y $G\beta$, respectivamente con el círculo de Mohr (ver figura 5).

El sentido es positivo cuando queda dentro de la región rayada en la figura 7^a. En otro caso es negativo, figura 7b.

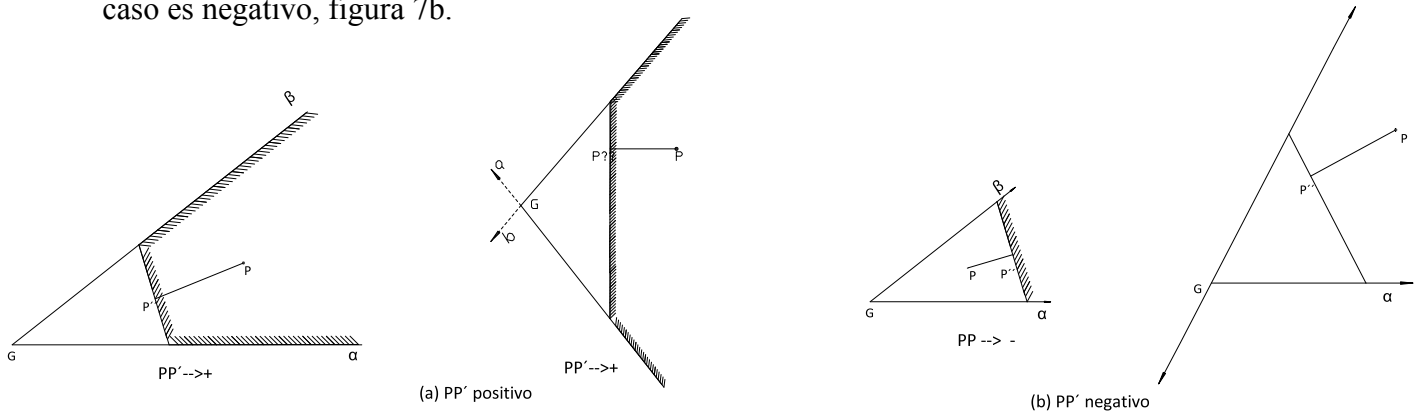


figura 7

De estas propiedades fundamentales deducimos: figura 6,

- Para determinar el diámetro conjugado $G\beta$, de uno cualquiera $G\alpha$, basta trazar APB y unir B con gG.
- Para obtener los ejes principales se une P con el centro del círculo. Los momentos principales de inercia vienen dados por $I_{xx'} = PN$; $I_{yy'} = PM$

Vamos a justificar las construcciones o propiedades del círculo de Mohr, en relación con la geometría de las masas, enunciadas anteriormente.

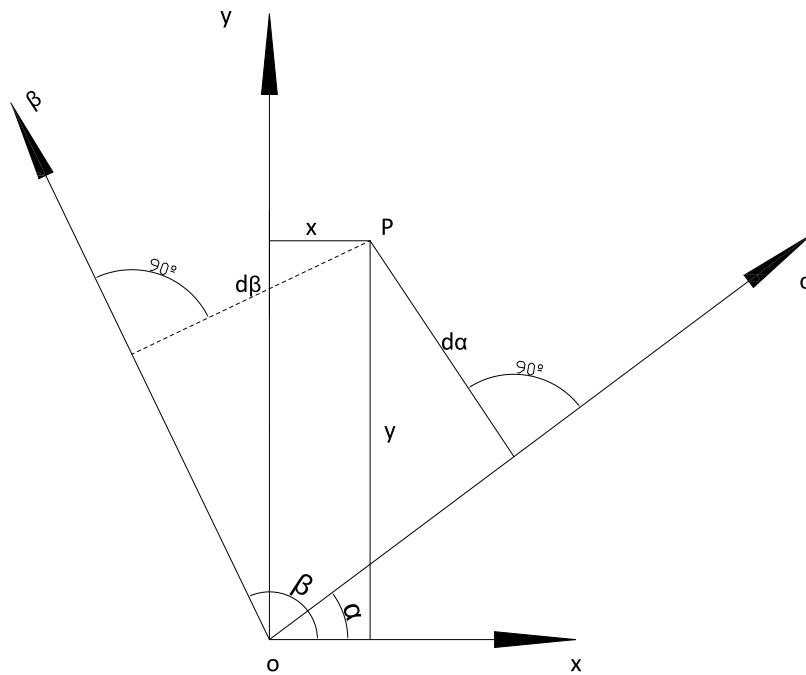


fig. 8

$$\left. \begin{aligned} d_{\alpha} &= x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha \\ d_{\beta} &= x \operatorname{sen} \beta - y \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

d_{α} es + si P está del mismo lado de 0α que + 0β . Idem para d_{β} .

De acuerdo con este convenio se obtienen las fórmulas (1).

Si 0α es un eje cualquiera, que forma un ángulo $+\alpha$, que forma un ángulo $+\alpha$ con

0α ,

Habida cuenta de que $I_{\alpha\alpha'} = \int_{\Omega} d_{\alpha}^2 . d\Omega$

$I_{xx'} = \int_{\Omega} y^2 . d\Omega$; $I_{yy'} = \int_{\Omega} x^2 . d\Omega$; $I_{xy'} = \int_{\Omega} xy . d\Omega$, obtenemos

$$\left. \begin{aligned} I_{\alpha\alpha'} &= I_{xx'} \cos^2 \alpha + I_{yy'} \operatorname{sen}^2 \alpha - 2I_{xy'} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ I_{\alpha\beta} &= -I_{xx'} \cos \alpha \cos \beta - I_{yy'} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + I_{xy'} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Habida cuenta de las relaciones trigonométricas que siguen;

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]; \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

Las expresiones (2) se pueden escribir en la siguiente forma;

$$I_{\alpha\alpha'} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$I_{\alpha\beta} = -\frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos(\alpha + \beta) + I_{xy} \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

Construyamos el círculo de Mohr de las figuras 9 y 10 como dijimos anteriormente.

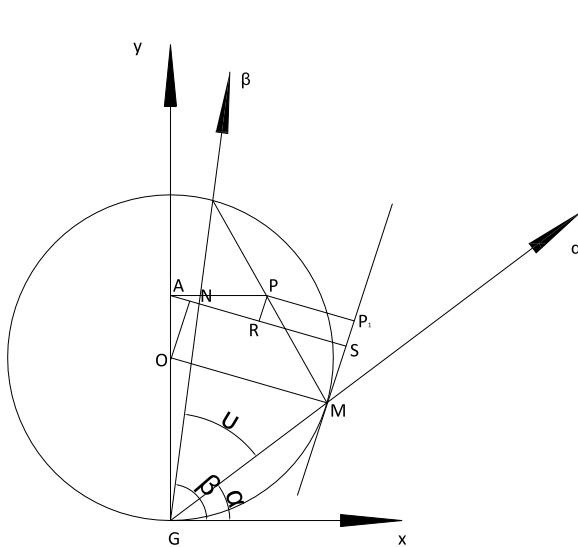


fig. 9

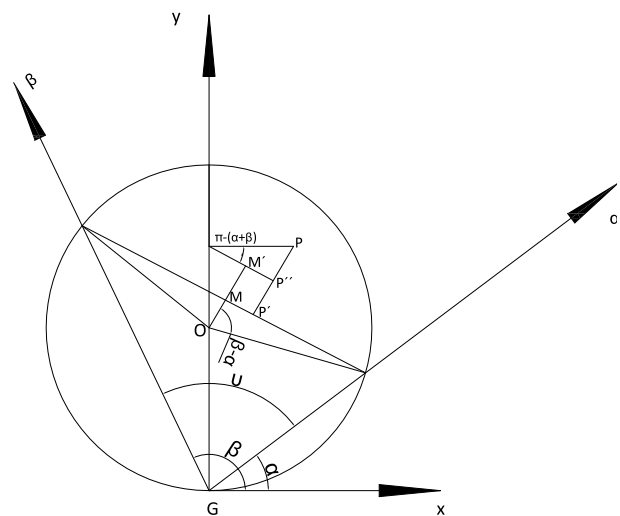


fig. 10

En la figura 9 vemos que;

$$PP_1 = AS - AR = AN + OM - AR$$

pero:

$$AN = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\alpha; OM = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2}; AR = I_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha;$$

Luego $PP_1 = I_{\alpha\alpha}$ (7) y además $PM = \frac{I_{m'}}{\text{sen}}$

Con las fórmulas 7 y 8 queda demostrada la primera parte del teorema de Mohr.

Por otra parte en la figura 10 es;

$$PP' = I_{xy} \text{sen}[\pi - (\alpha + \beta)] = I_{xy} \text{sen}(\alpha + \beta)$$

$$PP' = PP' + OM' - OM \text{ y como } OM' = \frac{I_{yy}}{2} \cos[\pi - (\alpha + \beta)] = -\frac{-I_{yy}}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$OM = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

Luego $PP' = I_{\alpha\beta}$ ya que coincide con la segunda expresión de (2').
