

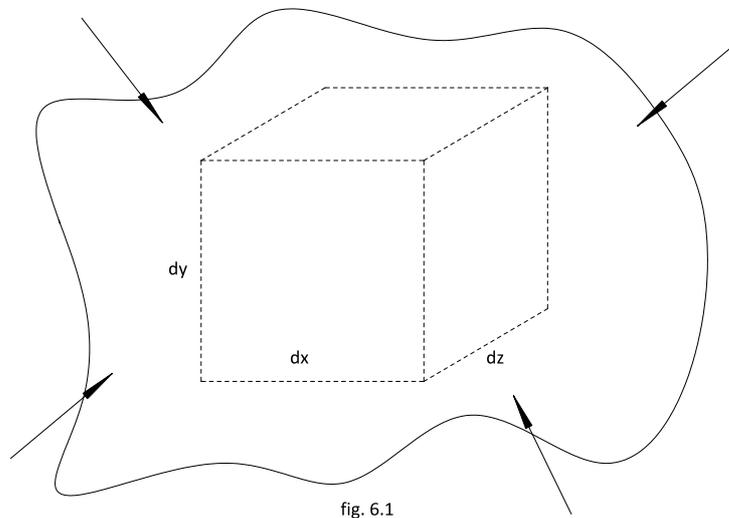
© Roberto Imaz Gutiérrez. Este capítulo se publica bajo Licencia [Creative Commons BY-NC-SA 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

Capítulo 6. ESFUERZO CORTANTE

6.1 NOCIONES PREVIAS

6.1.0 Previamente a tratar de las tensiones y deformaciones, motivados en una viga, por el esfuerzo cortante, nos es necesario tratar dos cuestiones de la teoría de la elasticidad.

6.1.1 Recordamos la noción de tensión dada en el apartado 1.2, y consideremos un cubo elemental, aislado, idealmente, en el interior de un cuerpo en equilibrio, bajo la acción de un sistema de fuerzas cualesquiera.



La tensión que actúa sobre una cara, ver figura 6.2, la descomponemos en su composición normal y las dos tangenciales, paralelas a los ejes coordenados.

La tensión normal la designamos por la letra σ , con un subíndice, que indica el eje, coordenado, a que es normal el plano sobre el que actúa σ ; considerándola positiva cuando se trata de una tracción, y negativa si se trata de una compresión.

Entonces tomando momentos respecto al eje OZ (o para mayor claridad respecto al eje que pasando por el centro del paralelepípedo es paralelo a OZ) o igualando a cero obtendremos: (ver figura 6.2.b) $(\xi_{yx} \cdot dx \cdot dz) \cdot dy = (\xi_{xy} \cdot dy \cdot dz) \cdot dx$ (6.1) o sea $\xi_{yx} = \xi_{xy}$ (6.1')

En la sección (6.1) se ha encerrado dentro de un paréntesis la fuerza que actúa sobre cada cara, por el valor de la tensión en el centro de esta.

Igualando a cero, los momentos de las fuerzas de superficie, respecto a los ejes Oy y Ox, obtendríamos dos ecuaciones análogas a la (6.1'). O sea agrupando las tres:

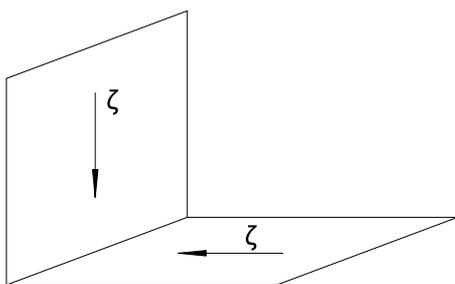
$$\xi_{xy} = \xi_{yx}; \xi_{yz} = \xi_{zy}; \xi_{zx} = \xi_{xz} \quad (5.1'')$$

Vemos pues que el sistema de tensiones que actúa sobre los planos coordenados que pasan por un punto, está definido por las seis cantidades $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \xi_{xy}, \xi_{yz}, \xi_{zx}$, las cuales reciben el nombre de componentes del tensor tensión en el punto considerado.

Como veremos en la teoría de la Elasticidad, el conocimiento de estas componentes, nos permite calcular la tensión que actúa, sobre cualquier plano que pase por 0.

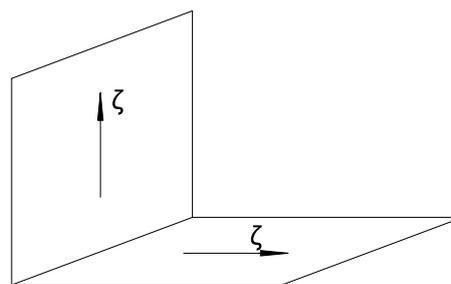
Pero la consecuencia que ahora más nos interesa, sacada de las ecuaciones (6.1) es:

“Las componentes de las tensiones tangencia, normales a la arista intersección, de dos planos ortogonales son iguales en valor absoluto, y sus sentidos son tales, que ambas se dirigen hacia la arista, (figura 6.3.a) o se separan de ella (figura 6.3.b)”



a)

fig. 6.3



b)

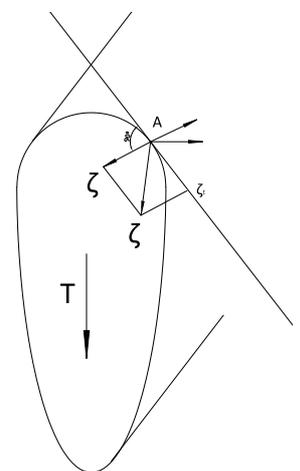
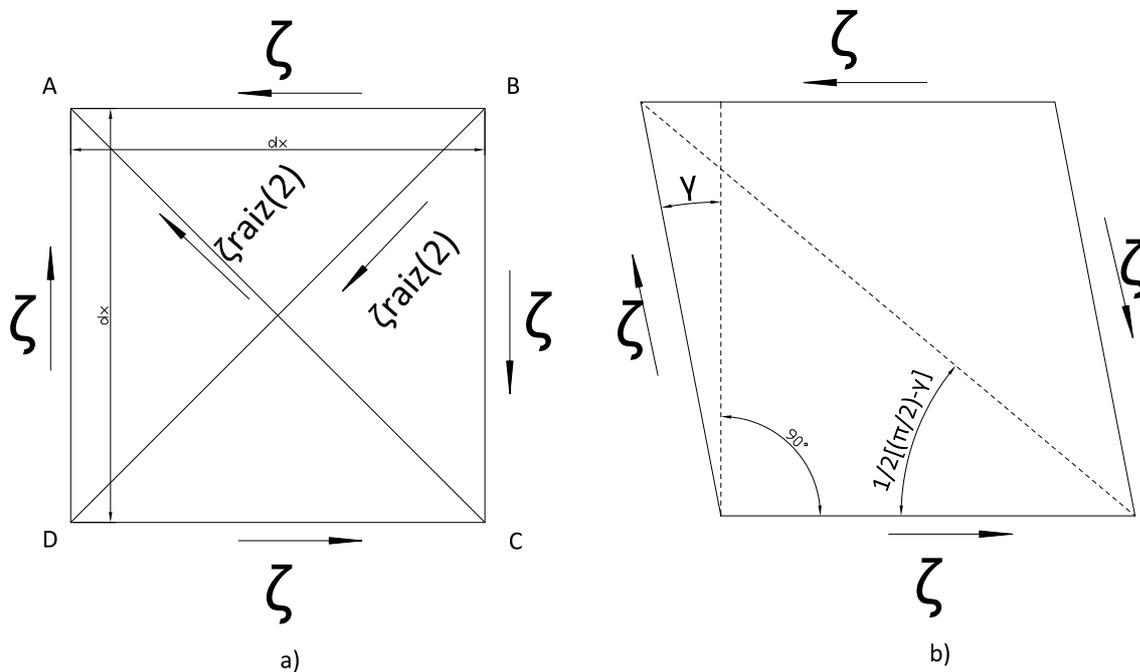


fig. 6.4

6.1.2 De lo acabado de exponer, podemos deducir una propiedad importante. Si sobre la sección recta de una viga, actúa un esfuerzo cortante T , “La tensión cortante en un punto del contorno es tangente a este.”

En efecto si la tensión cortante ζ en un punto A , del perímetro de la sección recta, admitiese una componente normal ζ_n , existiría la misma ζ_n , en la cara lateral de la viga; y como las caras laterales, normalmente, por hipótesis, debe ser necesariamente $\zeta_n=0$, o sea se confunde con ζ_t , y es tangente, por tanto, en A a la curva que delimita a la sección recta (ver figura 6.4).

6.1.3 Vamos a ver ahora, la relación que existe entre la tensión cortante ζ , y la deformación angular producida por esta γ :



Consideremos un paralelepípedo de sección cuadrada ABCD, y altura unidad, actuando sobre sus caras laterales, una tensión cortante, exclusivamente (tal como muestra la figura 6.5.a).

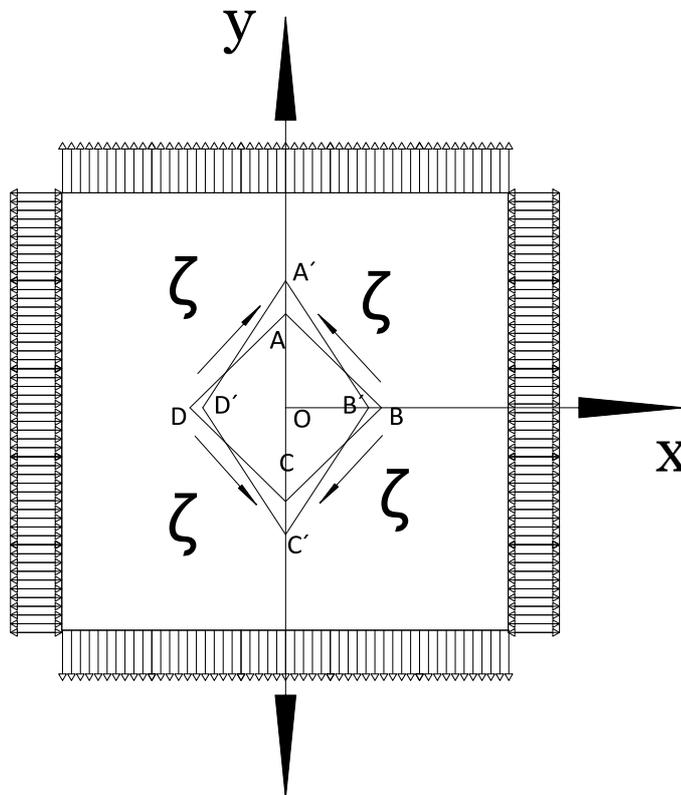
Esta tensión cortante, produce una deformación angular γ (figura 6.5.b).

Observemos, sobre la diagonal BD, que actúa un esfuerzo de tracción $N = \sqrt{2}\xi \cdot dx$ o sea

una tensión $\sigma = \frac{\xi \sqrt{2} dx}{\sqrt{2} dx} = \xi$.

Igualmente sobre el plano diagonal AC actúa una tensión (presión) que vale $\sigma = \xi$.

Si giramos pues, la figura (6.5.a) un ángulo de 45° obtendremos un estado tensional, tal como el que se indica en la figura 6.6, en la que se tiene;



$$\sigma_x = -\sigma_y; \sigma_z = 0$$

Si aislamos un elemento cuadrangular, tal como el ABCD de la figura 6.6, actuará sobre sus caras, según lo dicho más arriba, una tensión cortante exclusivamente. Tal estado tensional recibe el nombre de esfuerzo cortante simple. El acortamiento del elemento vertical Ob ó Od, es igual a los alargamientos de los elementos horizontales Oa y Oc, por lo que despreciando infiniésimos de segundo orden, deducimos que las longitudes ab, bc, cd, da, no cambian. El ángulo

formado por ab y cd, sin embargo cambia, y la magnitud de la deformación tangencial γ puede deducirse del estudio de la deformación del triángulo Oab. Después de deformarse abcd, se transforma en el a'b'c'd' y se verifica:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{Ob'}{Oa'} = \frac{1 + \varepsilon_x}{1 + \varepsilon_y} \quad (6.2).$$

Sustituyendo $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ por sus valores:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = -\frac{(1+\nu)\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = \frac{(1+\nu)\sigma_y}{E}$$

Y habida cuenta de que para valores pequeños de γ es;

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \approx \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}$$

La ecuación (6.2) se transforma en;

$$\frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{(1+\nu)\sigma_y}{E}}{1 + \frac{(1+\nu)\sigma_y}{E}} \text{ de donde } \frac{\gamma}{2} = \frac{(1+\nu)\sigma_y}{E}; \text{ o como } \sigma_y = \zeta ; \boxed{\gamma = \frac{2(1+\nu)\zeta}{E}} \quad (6.3).$$

Ecuación que relaciona γ con ζ .

Al coeficiente que multiplica a ζ se lo suele designar por G:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad (6.4)$$

Y se le denomina “módulo de elasticidad tangencial”.

La ecuación (6.3) se escribe entonces más sencillamente

$$\boxed{\gamma = \frac{\xi}{G}} \quad (6.3')$$

Esta ley es semejante a la $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$.

Como γ es adimensional, vemos por (6.4) que G , que se llama también módulo de deslizamiento, tiene las mismas dimensiones que E , o sea, FL^{-2} . Así por ejemplo para acero normal de construcción en que $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ y (coeficiente poisson) $\nu = 0,3$ resulta:

$$G = \frac{2,1 \cdot 10^6}{2(1 + 0,3)} \approx 807,700 \text{ kg/cm}^2$$

6.1.4 Para el elemento cúbico de la figura 6.2.a a la fórmula (6.3') se escribe para la deformación tangencial según los planos coordenados y las ecuaciones 3.10 del apartado 3.1, que dan la deformación longitudinal, y que repetimos a continuación se completan con las que dan las deformaciones angulares.

$$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\xi_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\xi_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} = \frac{\xi_{zx}}{G} \end{array}} \quad (6.4)$$

Estas ecuaciones ligan las tensiones en un punto con las deformaciones que producen en ese mismo punto (es decir) el tensor tensión de componentes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \xi_{xy}, \xi_{yz}, \xi_{zx}$ con el tensor de deformaciones de componentes $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Estas ecuaciones son de trascendental importancia en la teoría de Elasticidad.

NOTA: Es importante advertir que todo lo dicho en los anteriores apartados 6.1.1 y 6.1.2 no es privativo de los cuerpos elásticos sino que puede aplicarse a cualquier material aunque este no sea elástico, ni siquiera homogéneo e isótropo.

Sin embargo lo expuesto en el 6.1.3 es sólo aplicable a los cuerpos elásticos, por estar fundamentado en la ley de Hooke.

6.2 FÓRMULA FUNDAMENTAL PARA EL CÁLCULO DE LAS TENSIONES CORTANTES.

Consideremos una pieza prismática de sección uniforme cualquiera, y sometida a un momento flector variable contenido en uno de los planos principales de inercia de la sección. El momento flector variable motiva un esfuerzo cortante ya que $T = -\frac{dM}{ds}$.

Como vimos en 4.7, esta sollicitación, se denomina “flexión simple”.

Aislemos de esta viga un elemento prismático por medio de dos secciones rectas S y S', distantes dx, y por una superficie cilíndrica de forma cualquiera pero de generatrices paralelas al eje de la viga.

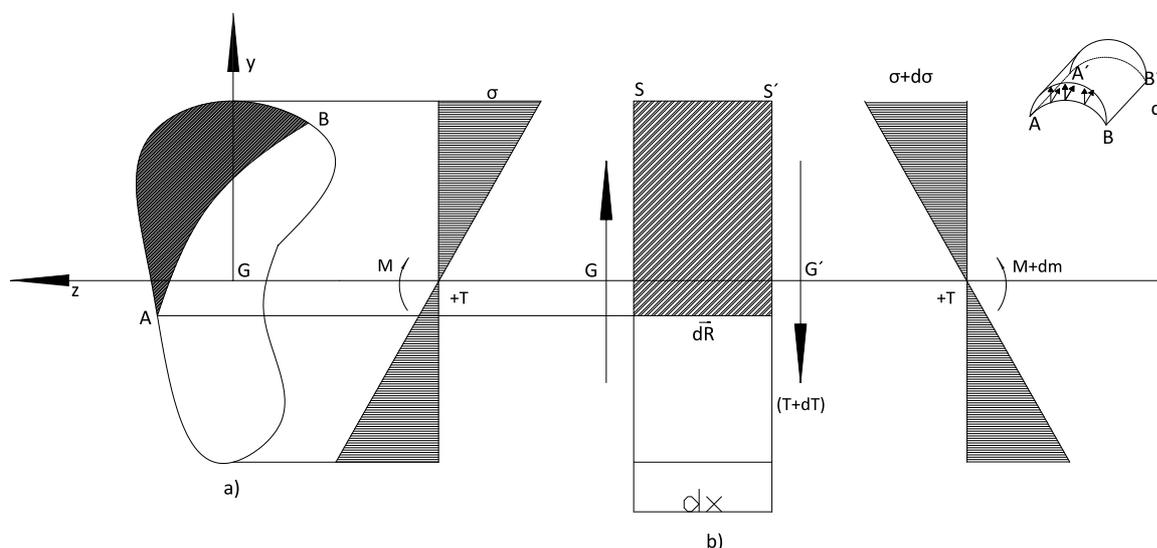


figura 6.7

En la sección S actúa el momento flector M y el esfuerzo cortante (+T). En la sección S' actúan el momento M+dM y el esfuerzo cortante + (T+dT).

Estudiamos el equilibrio del elemento prismático anteriormente definido y dibujado.

Sobre su cara dorsal (situada sobre S) actúan unas tensiones normales, motivadas por M, cuya suma vale (en valor absoluto).

$$N = \int_{\Omega} \frac{M_y}{I} d\Omega = \frac{M}{I} \int_{\Omega} y d\Omega$$

De igual forma la suma de las compresiones que actúan sobre la base frontal (situada sobre S') es;

$$N + dN = \int_{\Omega} (\sigma + d\sigma) d\Omega = \frac{M + dM}{I} \int_{\Omega} y d\Omega \rightarrow \Omega = \Omega'$$

Este esfuerzo es más grande que el anterior, y por tanto la resultante de los dos es una fuerza dN dirigida hacia la derecha que vale:

$$dN = \frac{T \cdot dx}{I} \cdot M_e \quad (6.5)$$

Donde $M_e = \int y \cdot d\Omega$ es el “momento estático” del área con relación al eje neutro sección.

Como el elemento prismático considerado está en equilibrio, deberá existir necesariamente unas tensiones cortantes, que el trozo (2) ejerce sobre el (1), a través de su superficie cilíndrica de contacto, cuya resultante dR equilibran a dN.

Como; $dR = dx \int_m \zeta dl \approx \zeta_m \cdot l \cdot dx$ es $\zeta_m = \frac{T \cdot M_e}{I \cdot l}$ (6.6)

En dónde ζ_m es la tensión cortante media a lo largo de AB y l la longitud de esta curva.

Observemos que por lo dicho al final del apartado 6.1.1. junto a las tensiones ξ que aparecen en la superficie cilíndrica $ABA''B''$, parábolas al eje de la pieza, aparecerán otras, contenidas en el plano S , y cuya componente normal a la curva AB , será en cada punto, igual, en valor absoluto, a la correspondiente contenida en la superficie cilíndrica, y que ambas estarán dirigidas hacia la curva AB , o se separarán de ella, (ver figura 6.7.c). En este caso las dos tensiones tangenciales normales a AB , tienen sentidos que se separan de dicha curva.

Esta última observación, es muy importante, pues la fórmula fundamental (6.6), nos permite hallar, por ser ambas iguales, tanto la tensión tangencial media, que actúa sobre la superficie $ABA'B'$, según sus generatrices, como la tensión media que se ejerce en la sección normal S , a lo largo de AB , y normal a esta curva. La misma citada observación, nos permite determinar, sin ambigüedad, el sentido de esta tensión cortante.

En los apartados siguientes veremos algunas explicaciones prácticas, de cuanto acabamos de exponer. Es fácil, poner de manifiesto, la existencia de estas tensiones cortantes. Para más sencillez supongamos una viga de sección rectangular, simplemente apoyada y cargada según indica la figura adjunta 6.7 a)

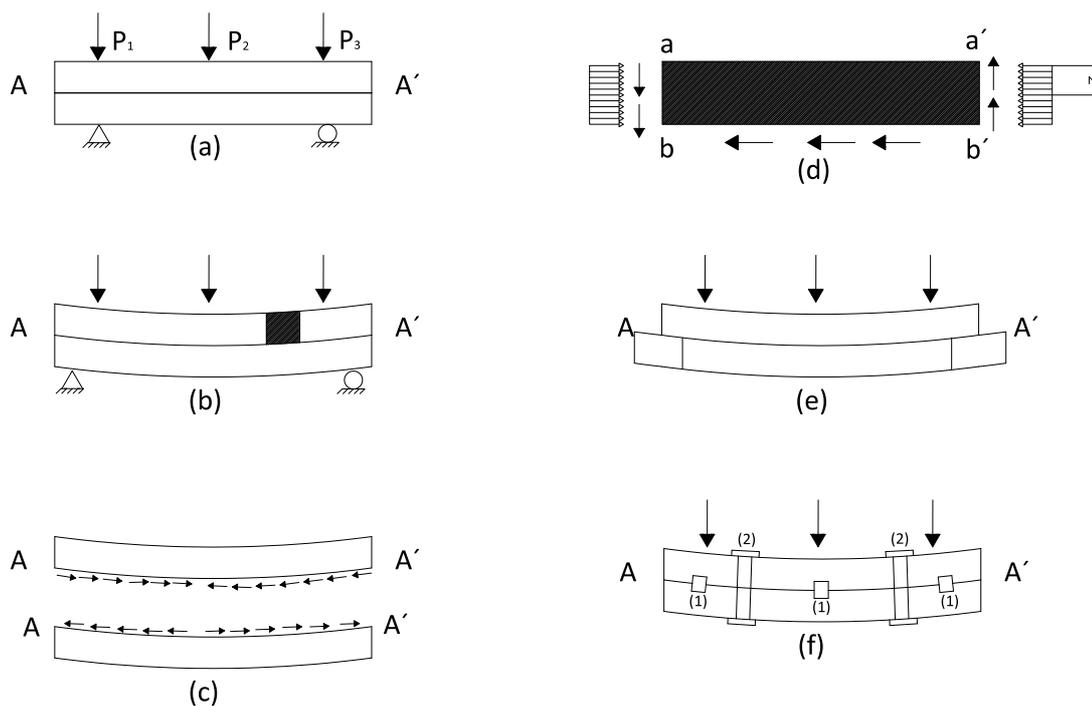


figura 6.7

Consideremos una sección ideal AA', horizontal, que divide a la viga en dos porciones (1) y (2). Si cargamos la viga con una serie de fuerzas P1, P2 y P3, está se flectará (figura 6.7b) y a lo largo del plano AA', aparecerán una serie de tensiones cortantes, que impiden que el trozo (1) desliza sobre el (2) tal como aparece en la figura. Las tensiones cortantes que se ejercen, a lo largo de AA' sobre cada uno de los trozos (1) y (2) se indican en la figura c.

En la figura d) se indican las tensiones normales y las tangenciales, que actúan sobre el elemento de viga a, b, a', b', que se indica en la figura 6.7.b)

Es fácil ver, físicamente, es decir sin necesidad de reglas o convecciones de signos, el sentido de las tensiones. En efecto, siendo mayor el momento que actúa sobre la cara ab cortante que actúa sobre bb' tendrá el sentido que se indica en la citada figura 6.7

Finalmente, por lo dicho en la figura 6.3, deducimos el sentido de las tensiones, cortantes sobre ab y a'b'.

En cuanto al módulo de estas tensiones cortantes, por la fórmula 6.6 vemos;

- Sobre la cara ab ó a'b', las tensiones cortantes, crecen a manera que nos acercamos a la fibra neutra; ya que para una sección determinada, todos los factores que entran en la citada fórmula, son constantes, excepto m_o que aumenta parabólicamente con la profundidad z.
- Sobre bb', la tensión cortante se mantiene constante, ya que evidentemente los factores m_o , I y l de la fórmula 6.6 se mantiene invariables; en cuanto a T, como

$$T = -\frac{dM}{dx}, \text{ y M varía linealmente, será } T=\text{constante.}$$

Si la viga hubiese estado cargada con una carga uniformemente repartida (p.T/m.), la tensión cortante sobre bb', aumentaría, linealmente, de derecha a

izquierda, ya que M aumenta parabólicamente, y por tanto $|T| = |dM/dx|$ aumenta linealmente.

(*) También serán mayores las tensiones normales, de compresión, sobre ab que sobre $a'b'$.

Cuando se unen dos vigas, para evitar el deslizamiento de una sobre otra, y aumentar, en consecuencia su resistencia a flexión, se usan estas solidariamente por medio de “cuñas” o tornillos pasantes, señalados con los números 1 y 2 respectivamente en la figura 6.7 f.

Examinemos, ahora, a continuación, varias aplicaciones de la fórmula fundamental 6.6, habida cuenta de las “naciones previas” expuestas en 6.1.

6.3 SECCIÓN RECTANGULAR

Veamos como se reparten las tensiones tangenciales en una sección rectangular de ancho b , y h de canto.

Por lo dicho en el apartado 6.1.1, y que se ilustra en la figura 6.4, las tensiones A y A' deben estar dirigidas según el contorno. Lo mismo ocurre por simetría en el punto m de AA' la tensión cortante es paralela al esfuerzo cortante T :

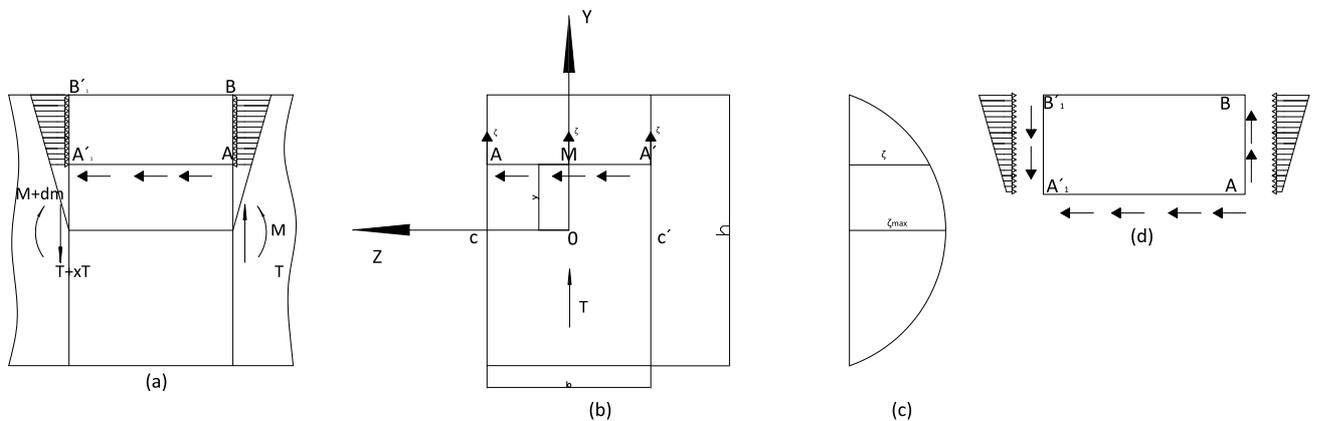


fig.6.8

Por otra parte también admitiremos que la distribución de tensiones es uniforme a lo largo de AA'.

Habida cuenta de estas dos hipótesis, podemos calcular fácilmente el valor de la tensión cortante ζ que actúa a una altura y , sobre la fibra neutra, mediante la fórmula (6.6).

Aconsejamos que el alumna deduzca, para este caso, dicha fórmula directamente. Para ello establecerá el equilibrio del primas ABA'B' considerando las fuerzas normales que actúan sobre AB y A'B' y las tangenciales sobre AA'. (todas ellas son horizontales).

En este caso particular es:

$$m_B = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{\frac{h}{2} + y}{2} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right), I = \frac{bh^3}{12},$$

$l=b$, y sustituyendo en 6.6 obtendremos;

$$\boxed{\zeta_{\max} = \frac{3T}{2bh} \left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2 \right]} \quad (6.7)$$

Así pues, la distribución de tensiones tangenciales, a lo largo de una paralela al eje xy , es una parábola, tal como se indica en la figura 6.8 c). Las tensiones tangenciales máximas se producen en el eje \overline{OZ} y el valor común de aquella es:

$$\boxed{\zeta_{\max} = \frac{3T}{2bh} = \frac{3T}{2h}} \quad (6.8)$$

El sentido de las tensiones tangenciales se ve fácilmente bien aislando el prisma ABA'B', y viendo que sobre AA', las tensiones tangenciales van dirigidas de derecha a izquierda; bien deduciendo el sentido de T sobre la cara AB (será hacia arriba, si como en nuestro caso, M aumenta de derecha a izquierda).

NOTA:

Los valores de ζ , dados por las fórmulas (6.7) y (6.8), no son exactos, pero tienen una gran aproximación, siempre que la sección sea peraltada ($h > b$). La teoría más exacta de la Elasticidad, muestra que la tensión cortante, no es constante, a lo largo de todos los puntos del eje neutro (eje \overline{Oz}), sino que alcanza sus valores máximos, en sus puntos extremos C y C' (ver figura 6.8 b).

Los valores del coeficiente α , por el que hay que multiplicar la tensión ζ_{\max} , dada por la fórmula (6.8).

6.4 SECCIÓN SIMÉTRICA

Consideremos una sección cualquiera, con un eje central de simetría, según el cual actúa el esfuerzo cortante T.

La tensión cortante, en un punto cualquiera P, tiene dos componentes ζ_{xy} y ζ_{yz} paralelas al eje Oy y Oz respectivamente. Para la componente vertical se puede utilizar todo el rozamiento expuesto en 6.2, siendo por tanto aplicable la fórmula (6.6) que nos permite escribir:

$$\zeta_{xy} = \zeta_{yz} = \frac{T \cdot M_e}{I \cdot l} \quad (6.6')$$

En donde como sabemos $l=2z$ representa el espesor de la sección al nivel y, y m_0 el momento estático, respecto a \overline{Oz} del área situada por encima de AA'.

ζ variará pues como Me/l y normalmente será máximo en la fibra neutra, a no ser que l crezca más deprisa que m_0 (como ocurre en un triángulo isósceles).

Para obtener la componente horizontal ξ_{xz} de la tensión cortante procederemos como sigue; Las tensiones cortantes en los puntos A y A' serán tangentes al contorno de la sección, cortándose sus direcciones, en el punto B del eje Oy.

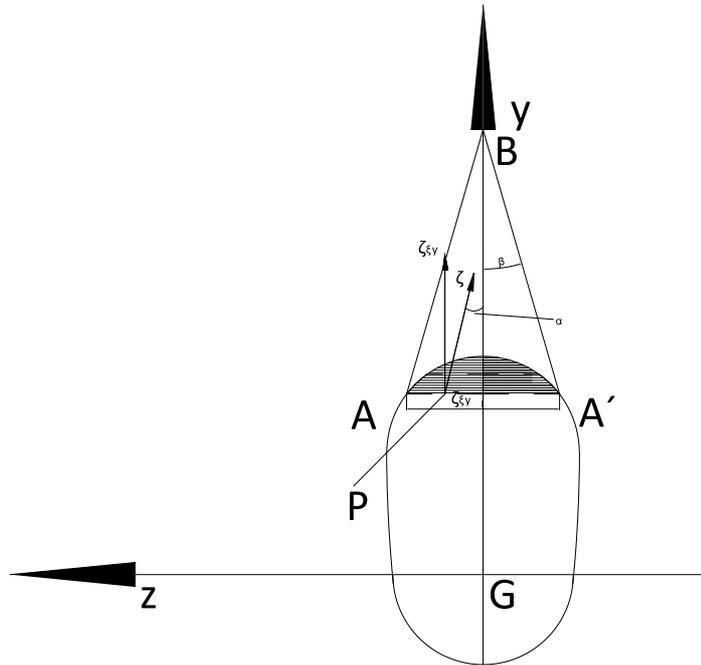


fig.6.9

La dirección de la tensión cortante, en un punto P de la horizontal AA', la supondremos, tal que esté también dirigida hacia B.

Se tiene así:

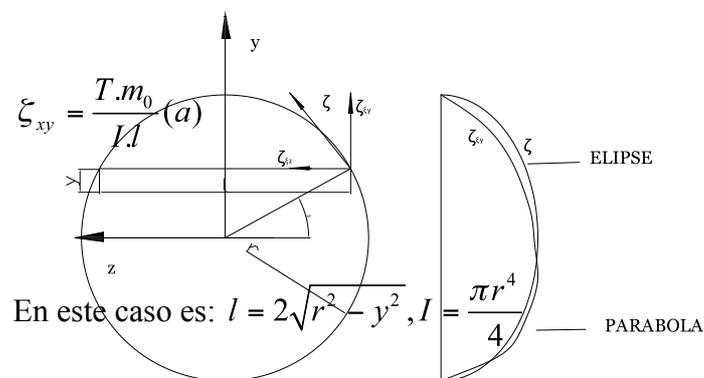
$$\xi_{xz} = \xi_{zx} = \xi_{xy} \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_{xy} + \vec{\xi}_{xz}$$

$$|\xi| = \sqrt{\xi_{xy}^2 + \xi_{xz}^2} = \frac{\xi_{xy}}{\cos \beta} \quad (\text{en el contorno}) \quad (6.9)$$

6.5 SECCIÓN CIRCULAR

Como aplicación de lo acabado de exponer en el apartado anterior hallamos las tensiones tangenciales en una sección circular cuando T actúa según un diámetro de la sección que tomamos por eje \overline{Oy}



$$m_0 = \int_y^r y \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{2}{3} (r^2 - y^2)^{3/2} \text{ de donde sustituyendo en (a);}$$

$$\xi_{xy} = \frac{4T}{3\Omega} \left[1 - \left(\frac{y}{r} \right)^2 \right] \quad (6.10) \text{ en donde } \Omega = \pi r^2 \text{ (la distribución de } \xi_{xy} \text{ a lo}$$

largo de Oy es pues parabólica)

La tensión tangencial ζ , en el contorno es $|\zeta| = \frac{|\xi_{xy}|}{\cos \beta}$ o sea

$$\boxed{\zeta = \frac{4}{3} \left(\frac{T}{\Omega} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r} \right)^2}} \quad (6.11)$$

El máximo de ξ_{xy} y ζ es para $x=0$ y su valor común $\frac{4}{3} \frac{T}{\Omega}$ excede en un

33% del valor de la tensión media $\frac{T}{\Omega}$.

Vemos también que la distribución de ζ a lo largo del perímetro es una elipse (cuando ζ viene en función de y).

NOTA:

El estudio riguroso (basándose en que el material es perfectamente elástico) muestra que las tensiones cortantes, no son iguales a lo largo del eje neutro (eje Oz); sino que el máximo lo alcanza en el centro y vale;

$$\zeta_{\max} = \frac{3 + 2\gamma}{2(1 + \gamma)} \frac{T}{\Omega}$$

Para $\gamma = 0,3$ (el valor que tiene para los aceros de construcción) es

$$\zeta_{\max} = 1,385 \frac{T}{\Omega} \text{ mientras la fórmula aproximada nos da } \zeta_{\max} = 1,333 \frac{T}{\Omega}.$$

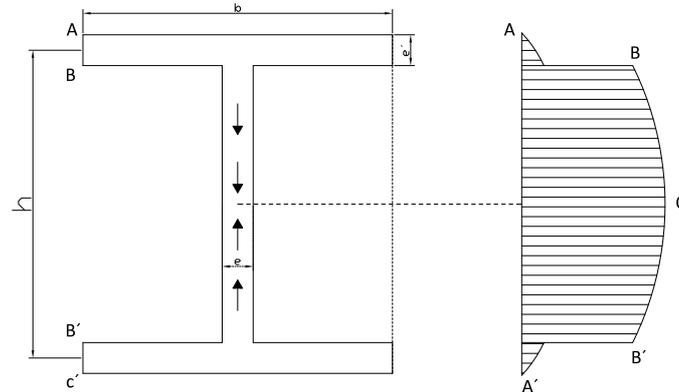
El error cometido pues al utilizar esta última es de 3,25%, error, que sin duda es superado por no ser el material perfectamente elástico, etc.

6.6 PERFILES LAMINADOS

La repartición de ζ_{xy} , experimenta una fuerte discontinuidad al pasar del ala, al alma. Esta discontinuidad es debida, a la similar que experimenta I al pasar del valor b , al o , ya en la fórmula;

$$\zeta_{xy} = \frac{T}{I} \frac{m_0}{b}$$

$\frac{T}{I}$ permanece constante y m_e es continua.



En las alas la tensión cortante vertical, es despreciable; y el alma, absorbe, prácticamente en su totalidad la totalidad del esfuerzo T . Entre B y B' , se distribuye parabólicamente, con muy poca diferencia entre los valores mínimos (en B y B') y el máximo en O .

En la práctica se toma para ξ_{\max} la tensión media en el alma definida por:

$$\xi_{\max} = \frac{T}{e(h - e')} \quad (6.12)$$

Que da una buenísima aproximación (1 al 5% por defecto) la tensión máxima en el alma.

Además de las ínfimas, y por tanto despreciable, tensiones verticales que aparecen en las alas, existen otras horizontales, de apreciable cuantía que hay que tener en consideración, y que vamos a calcular.

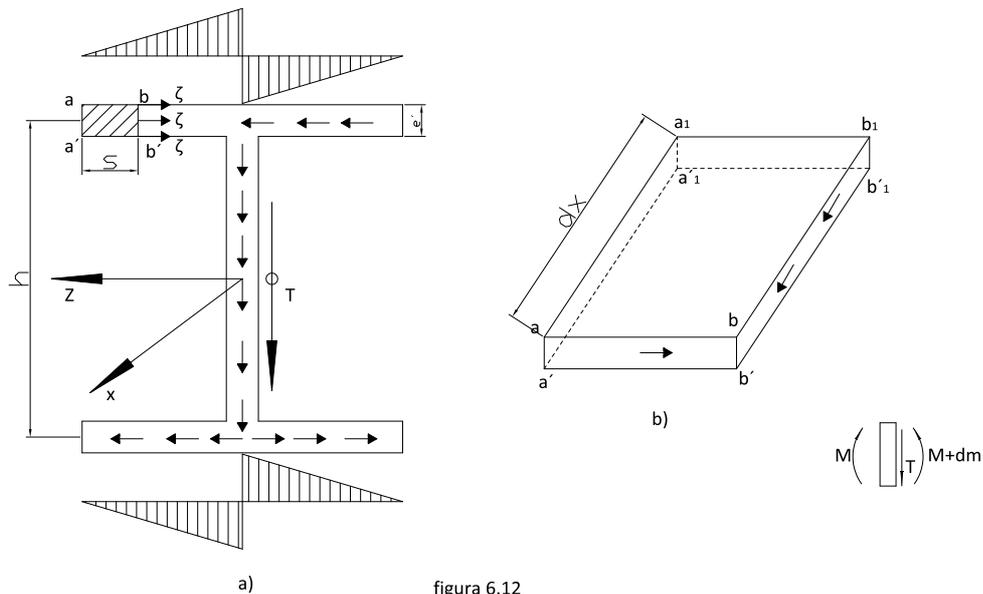


figura 6.12

Consideremos por ejemplo la sección bb' , figura 6.12.a, siendo las tensiones en b y b' , paralelas al borde, o sea horizontales, y siendo pequeño el espesor de las alas parece lógico admitir que las tensiones a lo largo de bb' sean paralelas y uniformes (estas mismas dos hipótesis hicimos para la sección rectangular, pero por el pequeño espesor del ala, se cumplirán aquí, con mucha más aproximación).

La tensión cortante ζ_{xy} vendrá dada por la fórmula general 6.6:

$$\zeta_{xy} = \frac{T \cdot m_e}{I \cdot e'}$$

Siendo m_e el momento estático del área rayada $aa'bb'$ respecto al eje Oz o

$$\text{sea } m_e = S \frac{eh}{2}$$

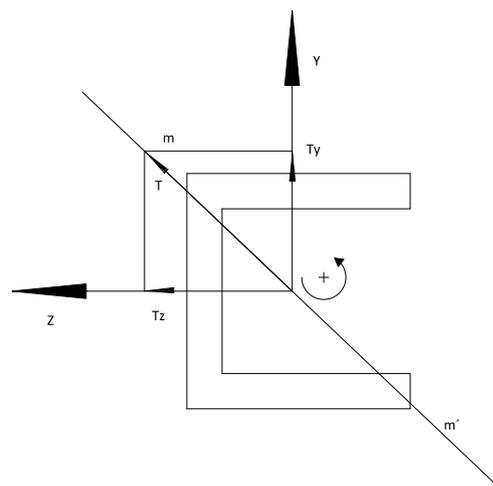
Siendo T , I y e' constantes, y variante m_e , linealmente con S , ζ_{xz} variará también linealmente con ésta variable, y la representación del valor algebraico de las tensiones tangenciales, será la que figura en 6.12.a).

En cuanto al sentido, es fácil determinarlo, por la consideración que sigue: Supongamos que M es positivo y que aumenta según el signo positivo del eje Ox . Si aislamos un elemento tal como se indica en la figura 6.12.b), sobre la cara $a_1a'_1b_1b'_1$.

En consecuencia, para establecer el equilibrio del elemento, considerando las tensiones tangentes tendrán el sentido que se indica en la figura.

Por lo expuesto al final de 6.1.1 (fig 6.3) es inmediato ver que el sentido de la tensión tangencial sobre la cara $a a' b b'$ es el indicado según se indica en la fig 6.2b, la cara considerada es la frontal. Sobre la dorsal de la rebanada, aparecerán, salvo un infinitesimo, las mismas tensiones en sentido contrario. El sentido de las tensiones cortantes sobre el alma será el que se indica en la fig. 6.11 y 6.12^a.

6.7 CASO EN QUE EL ESFUERZO CORTANTE NO ESTÁ CONTENIDO EN UNO DE LOS PLANOS PRINCIPALES DE INERCIA.



En la fórmula fundamental (6.6), deducida en 6.2, y en todas sus aplicaciones expuestas en los párrafos 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, hemos supuesto que el momento flector M , y por tanto T , estaba contenido en uno de los planos principales de inercia.

Si no es así, y M actúa sobre un plano cualquiera mm' , \bar{T} actuará sobre la traza de este plano (ver figura 6.14).

Podemos entonces descomponer T en sus dos componentes T_y y T_z sobre los ejes coordenados (trazas de los planos principales de inercia sobre la sección). Entonces para cada uno de estos esfuerzos podremos aplicar la fórmula (6.6) o las (6.9), y en un punto cualquiera obtendremos una $\bar{\xi}^z$ producido por \bar{T}_z y una $\bar{\xi}^y$ producido por \bar{T}_y , y la $\bar{\xi}$ total será;

$$\boxed{\bar{\xi} = (\bar{\xi}^z) + (\bar{\xi}^y)} \quad (6.13)$$

6.8 TRABAJO DE DEFORMACIÓN

6.8.1 Trabajo de las componentes verticales de las tensiones tangenciales.

En una viga de sección rectangular, o en el alma de una viga doble T las tensiones cortantes se reducen a sus componentes verticales. Siendo estos los casos más corrientes interesa primero y principalmente calcular el trabajo de éstas componentes.

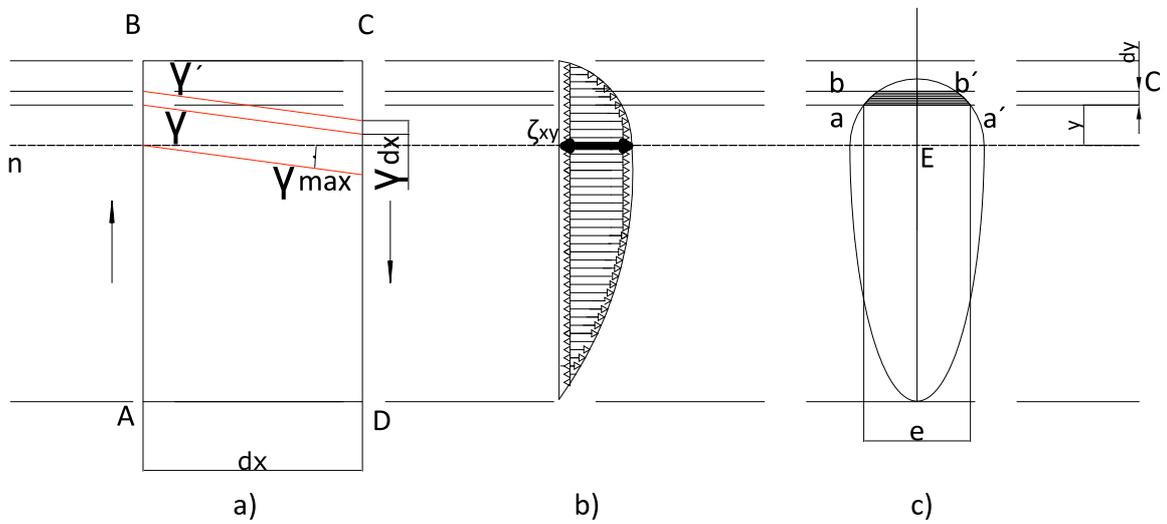


figura 6.14

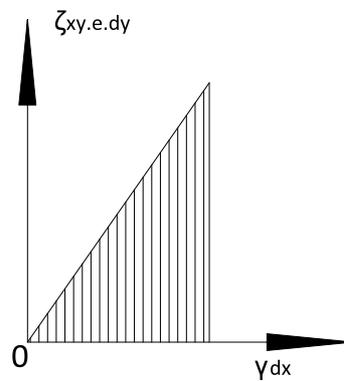


figura 6.15

A lo largo de todo el rectángulo elemental $aa'bb'$ la tensión tangencial, salvo un infinitésimo, se mantiene constante e igual a $\zeta_{xy} = G\gamma$ (a) (ver figura 6.14)

Siguiendo un razonamiento paralelo al seguido en el apartado 3.3, obtendríamos que el trabajo efectuado por las componentes ξ_{xy} que actúan sobre el rectángulo elemental, es el área del triángulo rayado en la figura 6.15, o sea;

$$d^2\xi = \frac{1}{2} \gamma \cdot dx \cdot \xi_{xy} \cdot e \cdot dy \quad \text{o teniendo en cuenta a);}$$

$$d^2\xi = \frac{1}{2} \frac{\xi_{xy}^2}{G} e \cdot dx \cdot dy$$

Y el trabajo efectuado por la deformación de la rebanada ABCD será;

$$d\xi = \frac{dx}{2G} \int_{\Omega} \xi_{xy}^2 \cdot e \cdot dy$$

y el trabajo por unidad de longitud de viga

$$\xi = \frac{dx}{2G} \int_{\Omega} \xi_{xy}^2 \cdot e \cdot dy$$

Y sustituyendo ξ_{xy} por su valor;

$$\xi_{xy} = \frac{T \cdot K_e}{I \cdot e} \quad \text{resulta} \quad \xi = \frac{T^2}{2GI^2} \int_{\Omega} \frac{M_e^2}{e} \cdot dy \quad (6.14)$$

O finalmente;

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{T^2}{G\Omega_1} \quad (6.14')$$

Siendo $\Omega_1 = \frac{I^2}{\int_{\Omega} \frac{M_e^2}{e} dy}$ (6.15) la llamada sección reducida.

Si se hubiese calculado el trabajo de deformación, suponiendo que las tensiones tangenciales se repartiesen uniformemente por la sección, siendo entonces

$\xi_{xy} = \frac{T}{\Omega}$ hubiéramos llegado a la expresión $\xi = \frac{1}{2} \frac{T^2}{G\Omega}$, que sólo difiere de la (6.14') en que aparece Ω en vez de Ω_1 .

Cuando calculamos las tensiones, y por ende las deformaciones, por la fórmula más exacta $\xi_{xy} = \frac{T.M_e}{I.e}$, todo ocurre como si T se repartiese uniformemente sobre el área de la sección (ficticia) reducida dada por (6.15)

Las secciones reducidas de un rectángulo y un círculo son respectivamente, $\Omega_1 = \frac{5}{G}\Omega$ y $\Omega_1 = \frac{9}{10}\Omega$, proponiendo al alumno que, como ejercicio, compruebe estos resultados.

Para una doble T la sección reducida es aproximadamente a la del alama, o con mayor aproximación aún;

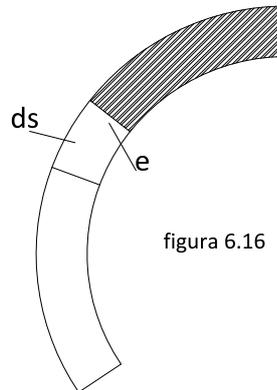
$$\Omega_1 = (h - e_1)e$$

Siendo h el canto;

e_1 el espesor de las alas.

e el espesor del alma.

6.8.2 En el caso de un perfil laminado, o sección tubular de pequeño espesor, siguiendo el mismo razonamiento que en el párrafo anterior (6.9.1) llegaríamos a la misma fórmula (6.14)



$$d\zeta = \frac{dx}{2G} \int \left(\frac{T}{I} \frac{m_e}{l} \right)^2 d\Omega \text{ y sustituyendo } d \text{ por } d\Omega = 0. \text{ } ds \text{ queda ;}$$

$$d\zeta = \frac{dx}{2G} T^2 \frac{1}{I^2} \int_s \frac{m_e^2}{e} ds \text{ (6.16) o sea;}$$

$$\Omega_1 = \frac{I^2}{\int_s \frac{m_e^2}{e} ds} \text{ (6.16')}$$