
© Roberto Imaz Gutiérrez. Este capítulo se publica bajo Licencia [Creative Commons BY-NC-SA 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

Capítulo 7. TORSIÓN

7.1 TORSIÓN PURA DE UN CILINDRO CIRCULAR

Consideramos aquí únicamente, el caso de una barra cilíndrica, de sección recta circular, sometida a torsión pura.

El caso de torsión pura, de barras prismáticas de sección cualquiera, perfiles delgados laminados, y de tubos de pared gruesa o delgada, lo trataremos en la teoría de la elasticidad.

Se dice que una barra prismática está sometida a torsión pura, cuando en sus extremos, se aplican dos pares iguales y opuestos M_t , contenidos en las secciones extremas. En éste caso el momento torsor en cualquier sección es M_t , no existiendo ningún otro esfuerzo.

Por consideraciones geométricas podemos llegar a las siguientes propiedades del cilindro deformado:

- a) “Las secciones rectas, giran por efecto de la torsión alrededor de su centro respectivo”

Esta propiedad es evidente por razones de simetría.

- b) “Todas las secciones rectas se conservan circulares y planas, después de la deformación”.

En primer lugar por tener que coincidir la sección con ella misma, después de un pequeño giro alrededor del eje del cilindro, la superficie deformada debe ser de revolución, y por tanto su perímetro debe conservarse circular. Por otra parte si al cilindro de la figura 7.1 le damos un giro de 180° , alrededor de la perpendicular a su eje, trazada por su punto medio; el sentido de los momentos extremos se conserva, y en consecuencia la sección primitiva y deformada, deben ser simétricas respecto a la sección recta, y además, como hemos visto antes, coincidir consigo misma, lo cual sólo puede ocurrir si las secciones se conservan planas, después de la deformación, y normales al eje del cilindro.

- c) “ Un radio trazado en una sección recta cualquiera, se conserva recto después de la deformación”,

Esta propiedad se presenta evidente por la perfecta antisimetría de la sollicitación, y simetría de la pieza, pues si separamos de la sección en cuestión una rebanada por medio de dos secciones simétricas, si supusiéramos que un radio se curvaba hacia la derecha, por ejemplo, después de dar a la rebanada un giro similar al que hemos hecho en el apartado b) el radio debía curvarse hacia la izquierda, y como esto es imposible, debe necesariamente, permanecer recto.

Figura 7.1.b)

- d) Finalmente como existe una perfecta simetría de deformación alrededor del centro, “el ángulo entre dos radios cualesquiera de una sección recta, permanece fijo después de la deformación”.

RESUMIENDO todos los resultados de a) a d) podemos concluir;

“En un cilindro circular sometido a torsión pura la deformación se produce de forma, que cada sección gira, alrededor de su centro, sin deformarse, como un disco absolutamente rígido”.

Esta propiedad deducida, por razonamientos geométricos, es rigurosamente exacta, y coincide totalmente con la teoría de la elasticidad, para cilindros circulares sometidos a “torsión pura”, como también existía esta coincidencia para piezas prismáticas sometidas a “flexión pura”.

También en éste caso las consecuencias antes deducidas, son aplicables para materiales elásticos o inelásticos, e incluso anisótropos si el eje de anisotropía coincide con el del cilindro.

Nosotros nos limitaremos por ahora, a materiales elásticos que siguen la ley de Hooke, y los resultados que obtengamos después de lo acabado de decir, serán rigurosamente exactos, con la única condición de que se cumpla exactamente la ley de arriba citada.

Obsérvese, que una recta cualquiera paralela al eje del cilindro, se deforma según una hélice de muy pequeña curvatura.

Consideremos una rebanada, o sea un elemento comprendido entre dos secciones rectas distantes de un rectángulo tal como el adcd, situado sobre un cilindro de radio ρ se deformará según el paralelogramo abc'd', ya que aunque ac' y bd' son tramos infinitésimos de hélice; precisamente por ser de longitud infinitésima se pueden considerar como segmentos

infinitésimos, o sea rectos. Además las longitudes de estos segmentos se diferencian en un infinito de segundo orden pues;

$$\boxed{\gamma = \rho\theta} \quad (7.1)$$

En donde $\frac{dw}{dx} = \theta$ es el ángulo de giro de torsión por unidad de longitud.

El elemento abcd, está pues sometidos a un estado de tensión cortante pura, y por tanto, siendo el material elástico, según la fórmula (6,3') será;

$$\zeta = G\gamma \quad \text{o sea} \quad \boxed{\zeta = G\rho\theta}$$

Vemos pues que las tensiones cortantes producidas por la torsión pura, en el cilindro circular, varían linealmente según ilustra en la figura 7.3.

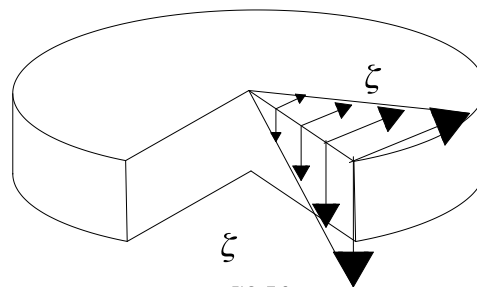


FIG. 7.3

Para determinar el valor de las tensiones cortantes, en función de M_t , necesitamos otra ecuación, junto con la 7.2, que nos permita eliminar ρ . Para ello igualamos el momento torsor al momento, respecto al eje del cilindro, de las tensiones que aquel motiva en una sección, ya que ambos sistemas deben ser equivalentes.

Si nos fijamos en la figura 7.2 b obtenemos;

$$dMt = (d\Omega \cdot \xi) \rho = d\Omega (G\rho\theta) \rho = G\theta\rho^2 d\Omega$$

$$Y \quad M_t = G\theta \int_{\Omega} \rho^2 d\Omega \quad \text{sea}$$

$$M_t = G\theta I_p \quad (7.3) \quad \text{ó} \quad \theta = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \quad (7.3')$$

Donde I_p es el momento polar de la sección circular. O sea:

$$I_p = \int_{\rho=0}^{\rho=r} 2\pi\rho d\rho \rho^2 = \frac{\pi r^4}{2} \quad (7.4)$$

Eliminando θ entre 7.2 y 7.3 obtenemos;

$$\boxed{\xi = \frac{M_t \cdot \rho}{I_p}} \quad (7.5)$$

Y ξ_{\max} (teniendo en cuenta 7.4)

$$\xi_{\max} = \frac{2Mc}{\pi r^3} \quad (7.5')$$

Obsérvese que un cuadrado elemental, cuyos lados están inclinados 45° respecto al eje del cilindro, tal como el que se dibuja en la figura 7.4, está sometido por una de sus caras a una compresión simple y por la otra a tracción simple ambas de módulo ξ (recuérdese lo dicho a propósito de la figura 6.6).

7.2 CILINDROS CIRCULARES HUECOS.

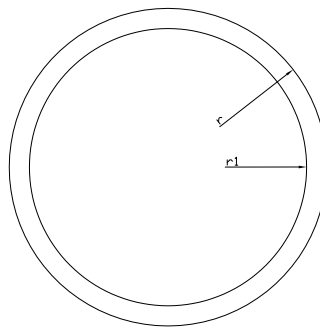
De la repartición de tensiones expuestas anteriormente se ve que en los cilindros macizos el material tiene muy mala utilización ya que en las zonas próximas al eje, la tensión es pequeña y también el brazo de palanca que nos da el elemento diferencial de momento torsor, que

soporta un entorno de este punto. Esto también puede verse a través de la fórmula (7.5), que por su proceso deductivo, se ve que también es rigurosamente aplicable a cilindros huecos.

En este caso I_p vale;

$$I_p = \frac{\pi(r^4 - r_1^4)}{2}$$

Si el tubo es delgado, aproximadamente se puede escribir;



$$r_m = \frac{r + r_1}{2}$$

$I_p = 2\pi r_m e r_m^2 = 2\pi e r_m^3$ y $\Omega = 2\pi r_m e$ siendo por tanto $I_p = \Omega r_m^2$ y entonces (7.5) y (7.3)

se convierten en: $\xi_{\max} = \frac{M_e}{\Omega r_m}$ y $\theta = \frac{M_e}{G\Omega r_m^2} = \frac{\xi_{\max}}{G r_m}$