# Sistemas de Radiofrecuencia

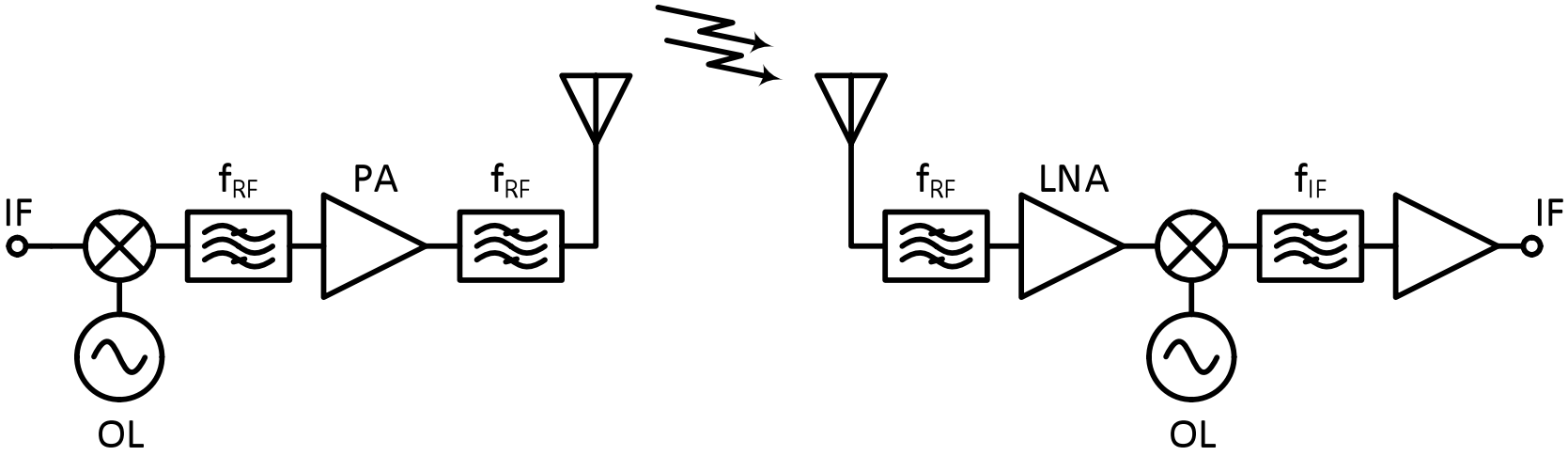
## Tema 5. Circuitos osciladores

**Almudena Suárez Rodríguez**
**Franco Ramírez Terán**
**Mabel Pontón Lobete**

Departamento de Ingeniería de Comunicaciones

Este tema se publica bajo Licencia:
Creative Commons BY-NC-SA 4.0

# Introducción




Cada mezclador requiere una señal periódica en una de sus entradas.

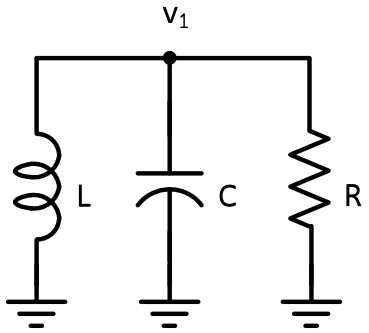
## Oscilador

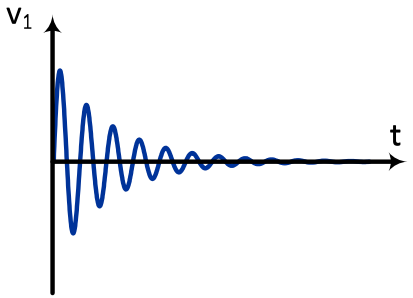
Circuito autónomo que genera una señal periódica a su salida a partir de la energía entregada por fuentes de dc.

# Introducción

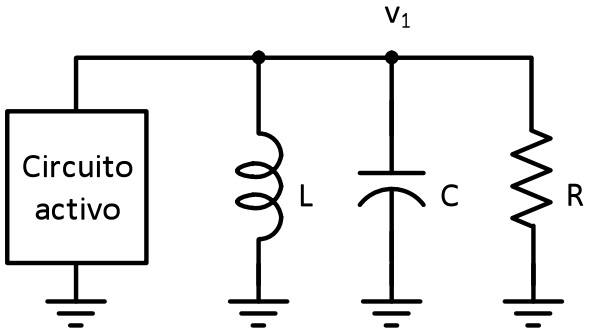
Su frecuencia de operación y amplitud de salida no depende de otras señales periódicas.

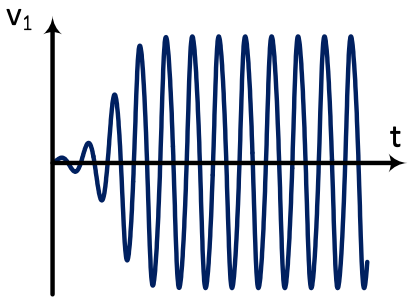
Resonador con pérdidas.




Circuito activo: Exceso de resistencia negativa. Desequilibrio que da lugar al arranque de la oscilación.




La oscilación debe ser estable y auto mantenida.

# Introducción

El análisis de estos circuitos puede abordarse desde dos puntos de vista:

Realimentación

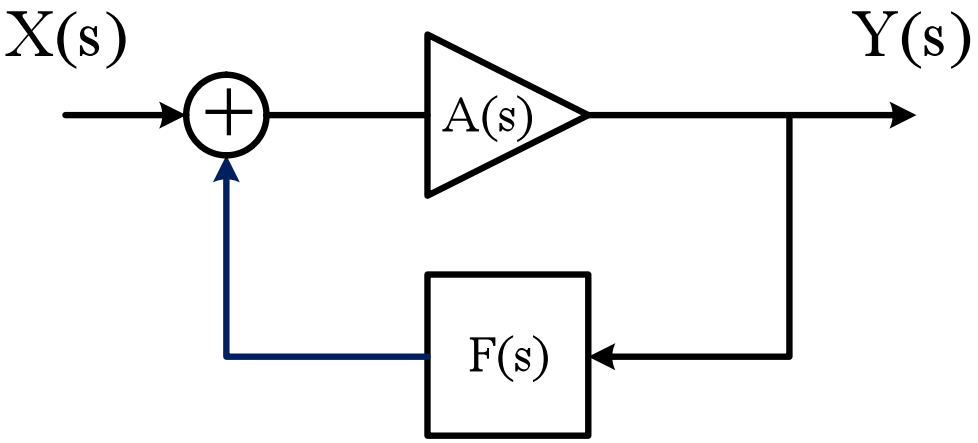
Dispositivo 2-puertos, con ganancia, dentro de un lazo realimentado donde una porción de la salida se deriva a la entrada.

Resistencia negativa

Sistema 1-puerto. Modelo de resistencia negativa, no linealidad y resonador.

# Oscilador realimentado

Considerando un sistema lineal del tipo:



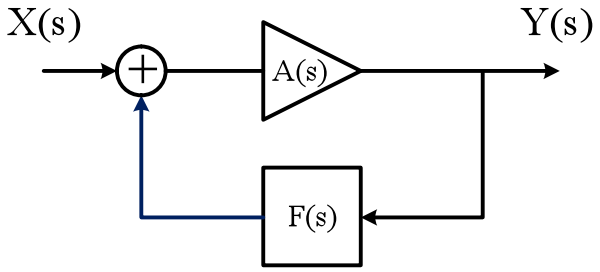

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

La salida Y(s) puede escribirse como:

$$Y(s)=A(s)\left[X(s)+F(s)Y(s)\right] \quad \rightarrow \quad H(s)=\frac{A(s)}{1-\underbrace{A(s)F(s)}}$$

Ganancia de lazo.

# Oscilador realimentado




$$H(s)=\frac{A(s)}{1-A(s)F(s)}$$

La ganancia A depende de la amplitud.

A medida que:

$$A(s)F(s)\rightarrow 1$$

$$Y(s)\rightarrow \infty$$

Es posible obtener una salida a partir de una entrada muy pequeña (p. ej. ruido).

La condición de A(s)F(s) = 1 se cumplirá siempre y cuando:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left[A(s)F(s)\right]&=1\\ \mathrm{Im}\left[Y(s)\right]&=0\end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned}\left|A(s)F(s)\right|&=1\\ \angle\left(A(s)F(s)\right)&=0^{o}\end{aligned}$$

Criterio de Barkhausen.

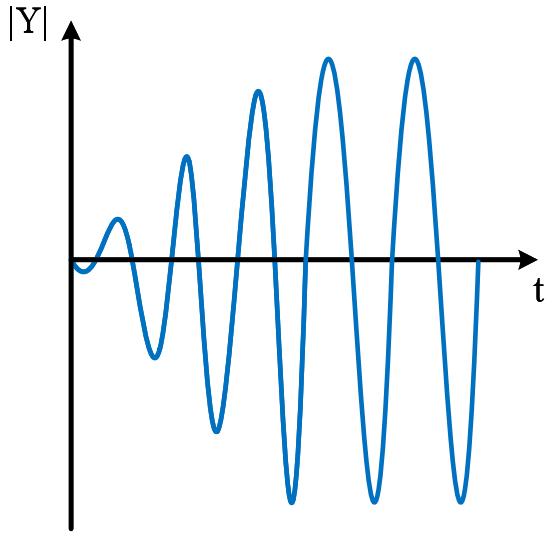
En caso de que la realimentación sea negativa: $\angle\left(A(s)F(s)\right)=180^{o}$

# Oscilador realimentado

Tener en cuenta que las condiciones del criterio de Barkhausen:

- Son necesarias pero no suficientes.
- Se cumplen en el estado estacionario.

En el arranque de la oscilación A(s)F(s) > 1 para que la señal de salida crezca:




La oscilación comienza a crecer hasta que las no linealidades limitan la amplitud → estado estacionario.

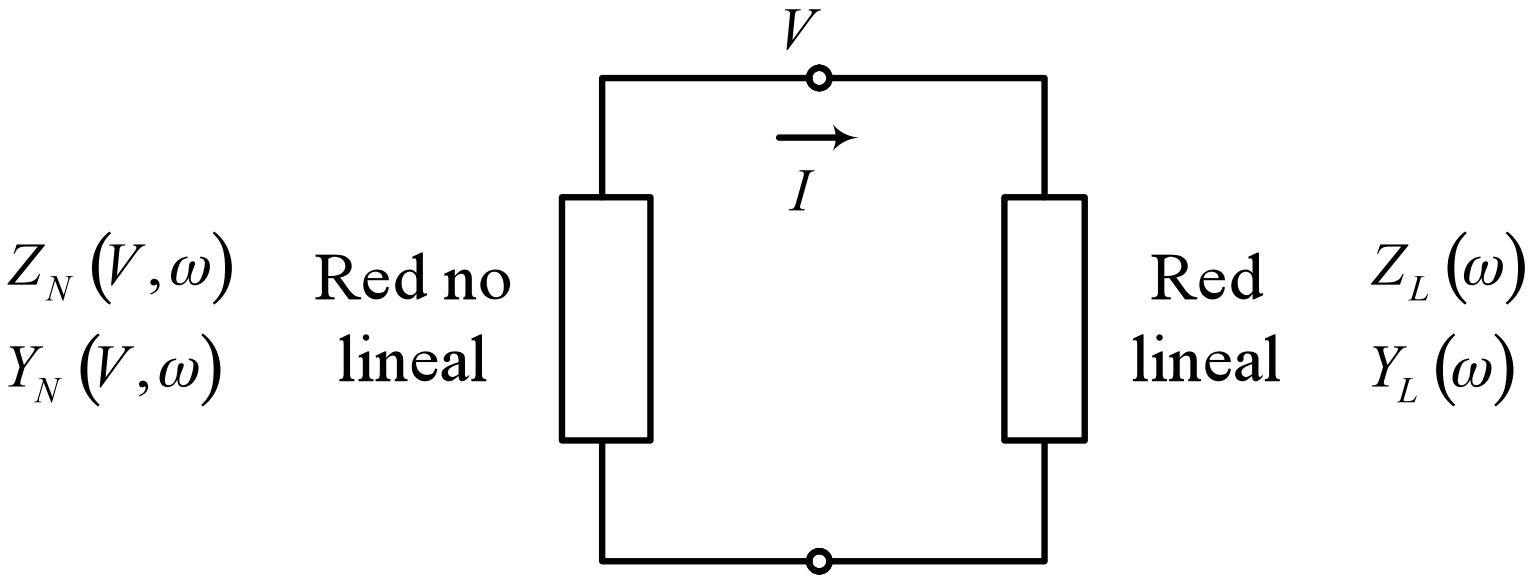
Los polos del sistema se obtienen de:

$$1 - A(s)F(s) = 0$$

Debido a la autonomía del sistema un par de polos complejos se encuentra sobre el eje imaginario $s_o = \pm jw_o$

# Oscilador a resistencia negativa

Se considera el oscilador como dos redes de una sola puerta:




Considerando una oscilación de estado estacionario $v(t)=V_o\cos(\omega_o t+\phi)$

mediante un análisis de admitancias (paralelo) se obtiene:

$$\left[Y_N(V,\omega)+Y_L(\omega)\right]Ve^{j\phi}=0$$

# Oscilador a resistencia negativa

$$\left[Y_N(V,\omega)+Y_L(\omega)\right]Ve^{j\phi}=0$$

Descartando la solución trivial $V=0$, se obtiene:

$$Y_T(V,\omega_o)=Y_N(V_o,\omega_o)+Y_L(\omega_o)=0$$

Como se indicó previamente:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left[Y_T(V_o,\omega_o)\right]=0\\&\mathrm{Im}\left[Y_T(V_o,\omega_o)\right]=0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left[Y_N(V_o,\omega_o)\right]=-\mathrm{Re}\left[Y_L(\omega_o)\right]\\&\mathrm{Im}\left[Y_T(V_o,\omega_o)\right]=0\end{aligned}$$

Resistencia negativa

Resonancia a $\omega_o$

Condiciones de estado estacionario.

# Oscilador a resistencia negativa

- Condición de arranque de la oscilación:

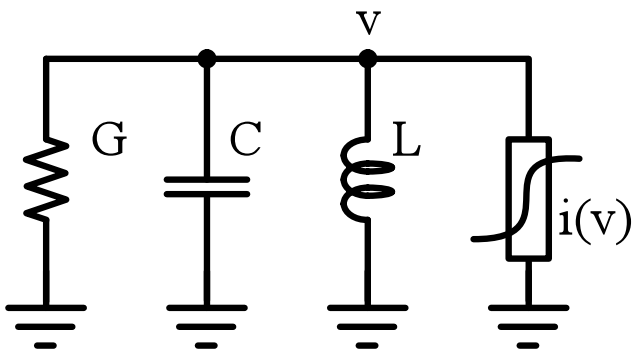
$$\mathrm{Re}\left[Y_T\left(V\cong 0,\omega_o^{'}\right)\right]<0$$

$$\mathrm{Im}\left[Y_T\left(V\cong 0,\omega_o^{'}\right)\right]=0$$

- Condición de estabilidad de Kurokawa:

$$\frac{\partial \mathrm{Re}(Y_{To})}{\partial V}\frac{\partial \mathrm{Im}(Y_{To})}{\partial \omega}-\frac{\partial \mathrm{Im}(Y_{To})}{\partial V}\frac{\partial \mathrm{Re}(Y_{To})}{\partial \omega}>0$$

# Oscilador de Van der Pol




$$i(v) = av + bv^3$$

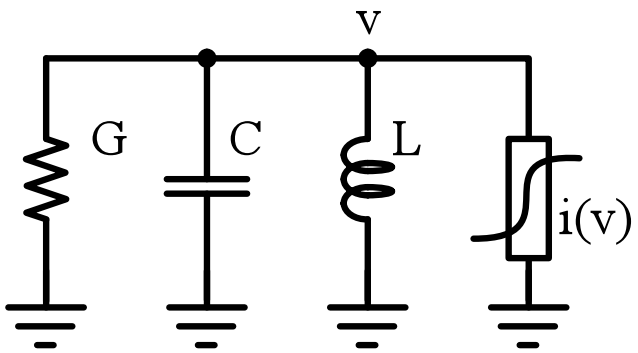
$$C\frac{dv}{dt} + Gv(t) + i_L(t) + i(v) = 0$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v(t)}{L}$$

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + G\frac{dv}{dt} + \frac{di_L}{dt} + \frac{di(v)}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad C\frac{d^2v}{dt^2} + G\frac{dv}{dt} + \frac{v(t)}{L} + \frac{d(av + bv3)}{dt}\frac{dv}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{G}{C}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v(t) + \frac{1}{C}(a + 3bv^2)\frac{dv}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{G+a}{C} + \frac{3bv^2}{C}\right)\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v(t) = 0$$

# Oscilador de Van der Pol




$$i(v)=av+bv^3$$

En el arranque de la oscilación:

$$3bv^2 \approx 0$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\left(\frac{G+a}{C}\right)\frac{dv}{dt}+\frac{1}{LC}v(t)=0$$

En el dominio de Laplace:

$$\left(s^2+\left(\frac{G+a}{C}\right)s+\frac{1}{LC}\right)V(s)=0$$

Polinomio característico del sistema.

# Oscilador de Van der Pol

Las raíces concuerdan con los valores propios del sistema:

$$s=-\frac{G+a}{2C}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{G+a}{C}\right)^2-\frac{4}{LC}}$$

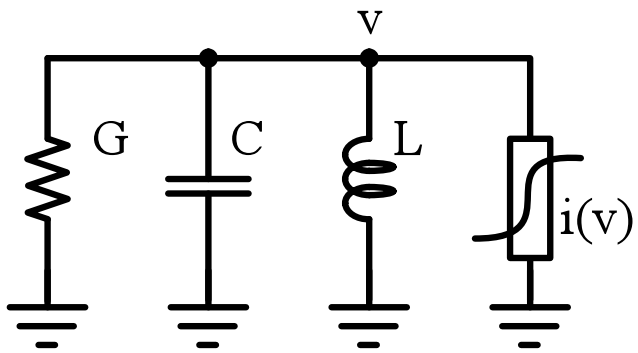
Asumiendo un radicando negativo, el sistema será inestable (arrancará a oscilar) si la parte real de los polos es positiva:

$$-\frac{G+a}{2C}>0$$

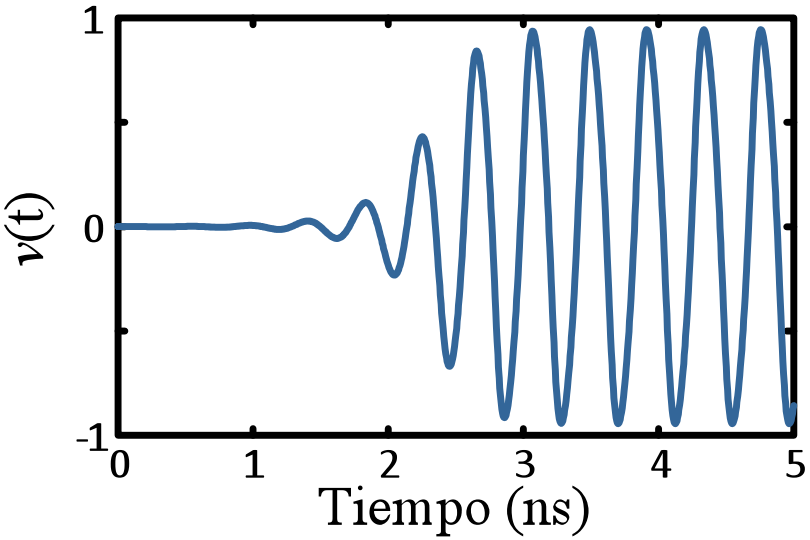
La frecuencia de oscilación viene determinada por la parte imaginaria. Si consideramos que:

$$\left(\frac{G+a}{C}\right)^2\ll\frac{4}{LC}\quad\Rightarrow\quad\omega_o\approx\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

# Oscilador de Van der Pol




$$i(v) = av + bv^3$$




$$a = -0,04\Omega^{-1}; \quad b = 0,03\Omega^{-1}/\mathrm{V}^2$$

$$G = \frac{1}{50}\Omega^{-1}$$

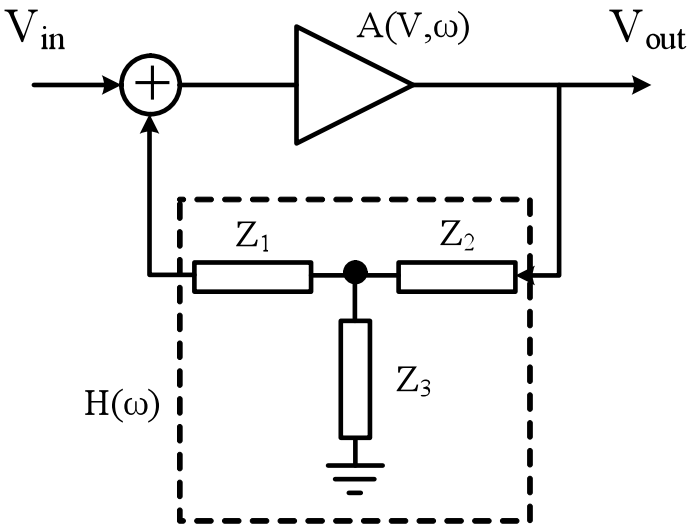
$$L = 1,5 \text{ nH}$$

$$C = 2,9 \text{ pF}$$

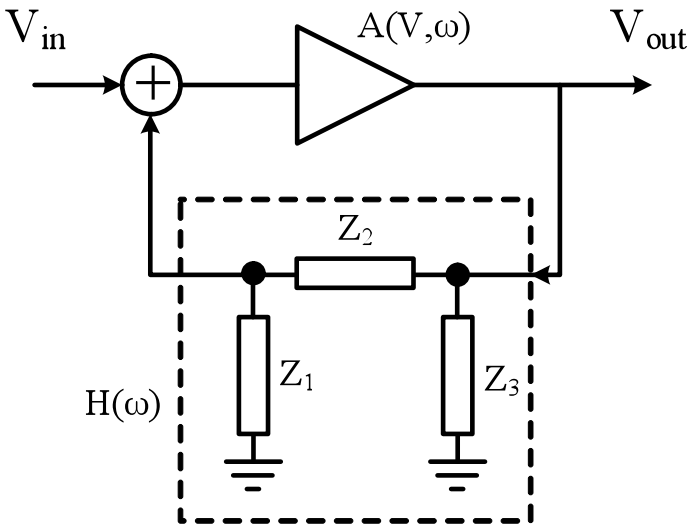
$$\omega_o = 2\pi f_o \approx 2,4 \text{ GHz}$$

# Tipos de osciladores

Las dos aproximaciones (realimentada y resistencia negativa) son equivalentes en muchos casos.

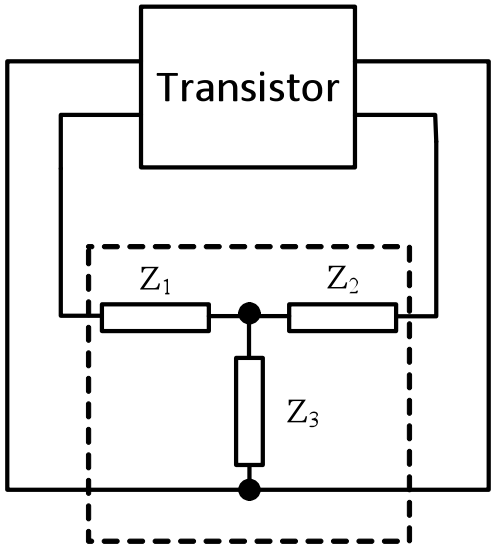



Red tipo T.

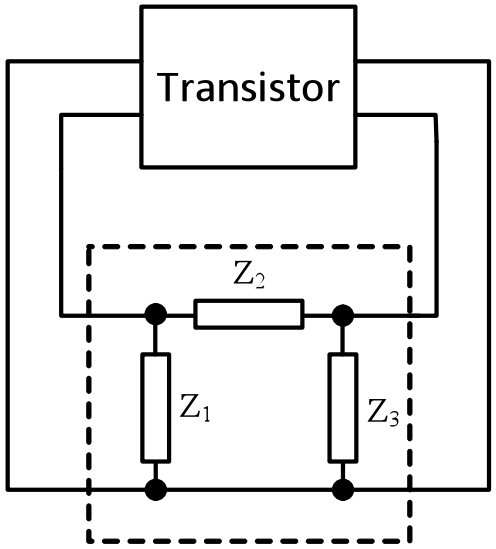



Red tipo Pi.

# Tipos de osciladores




Red tipo T.



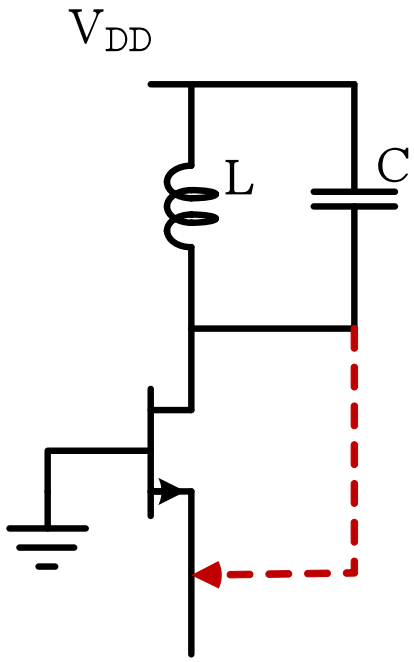

Red tipo Pi.

A frecuencias de RF y microondas la mayoría de osciladores incorpora sólo un transistor y un circuito resonante (LC).

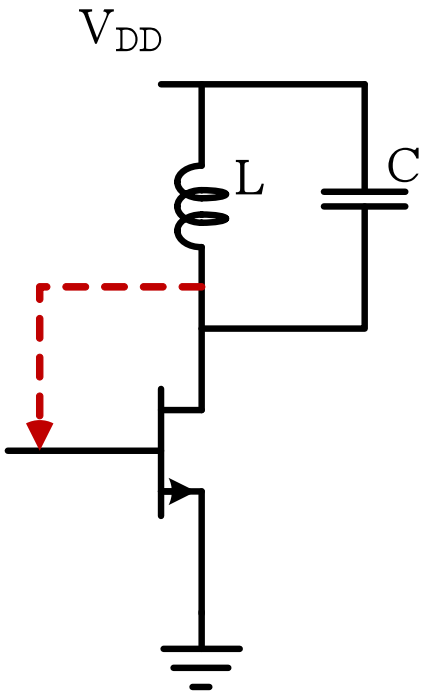
Menor costo y menor ruido.

# Osciladores LC

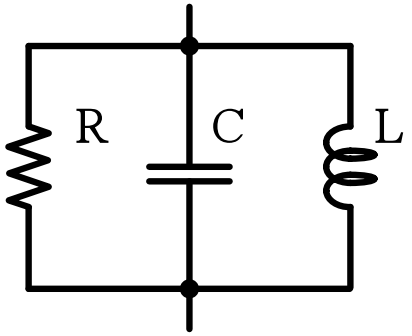
Partiendo del modelo realimentado:




Realimentación a fuente.




Realimentación a puerta.



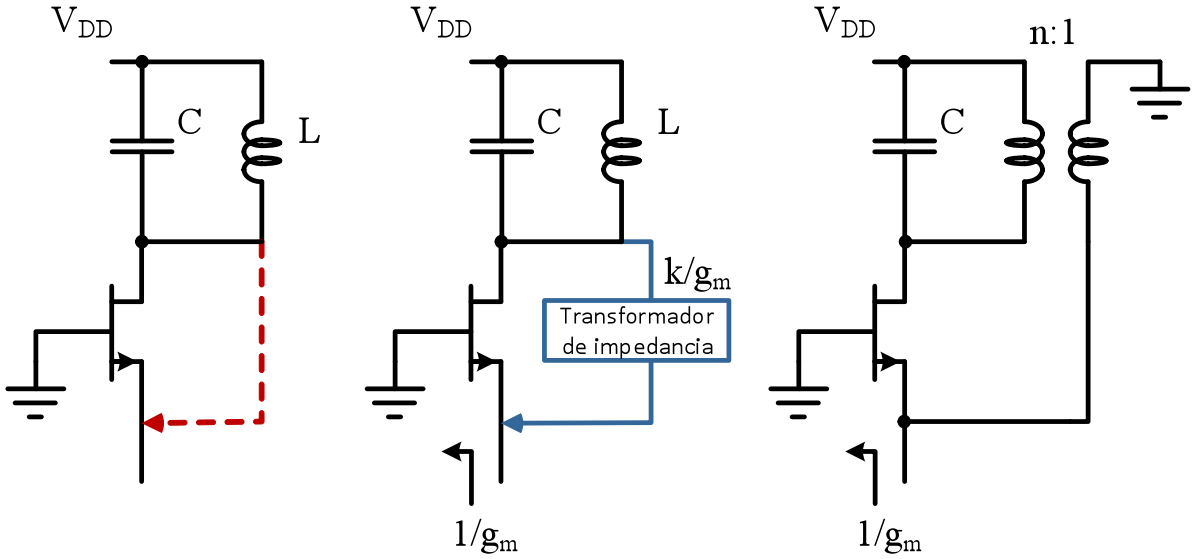

$$Q_P = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{RC\omega_o}$$

Factor de calidad cargado:

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_e xt}$$

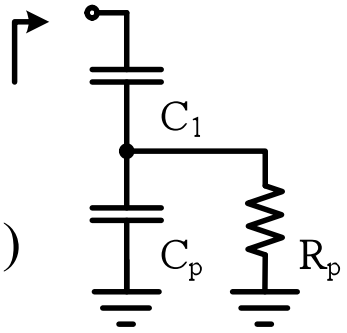
# Osciladores LC

La impedancia vista desde el terminal de fuente es $1/g_m$

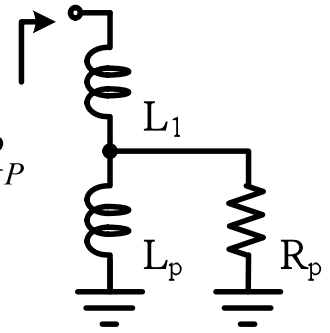



Transformadores pasivos:

$$R_{tot} \approx (1 + C_P / C_1)^2 R_P$$
$$C_{tot} \approx (C_1 C_P)/(C_1 + C_P)$$

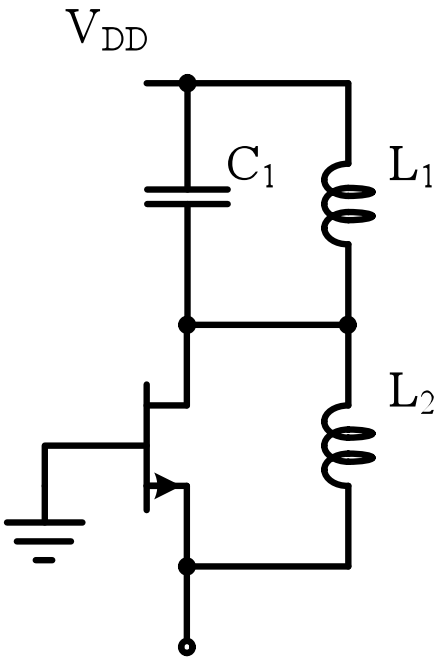



$$R_{tot} \approx (1 + L_1 / L_P)^2 R_P$$
$$L_{tot} \approx L_1 + L_P$$

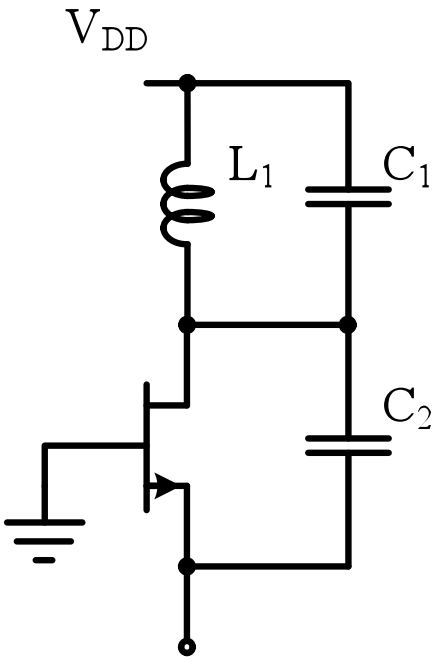


# Osciladores LC

## Hartley



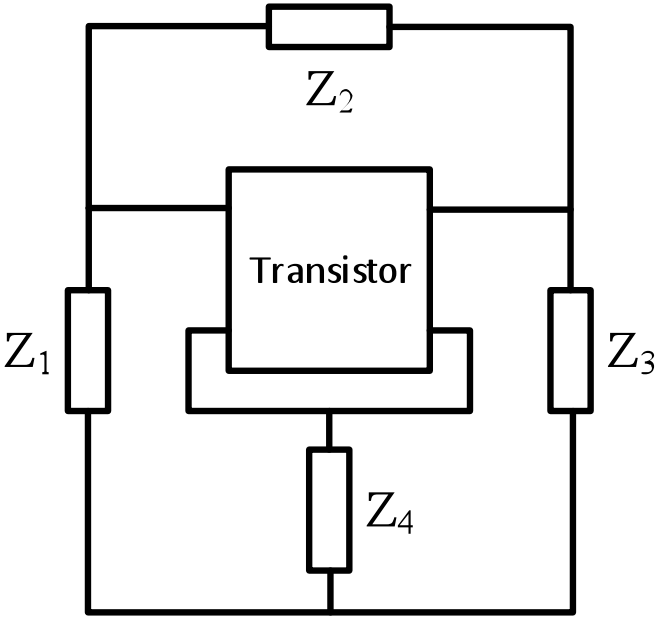

## Colpitts




Dependiendo del terminal que se considere común, pueden obtenerse distintas variantes.

# Oscilador a transitor

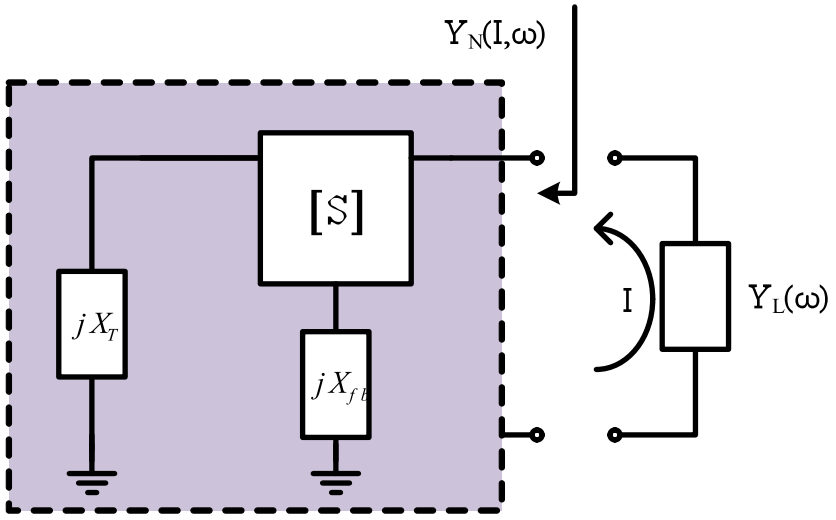
Las impedancias $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$ y $Z_4$ son, en general, complejas.




Pueden obtenerse diferentes combinaciones, p. ej. $Z_i = \infty$ , $Z_i = 0$, etc.

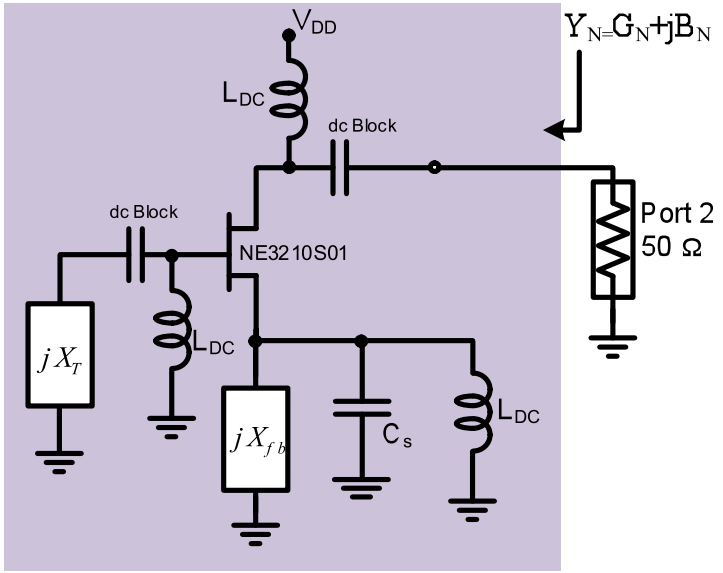
# Ejemplo de diseño
# Oscilador a FET (I)

Elegimos una configuración de realimentación serie. El objetivo es maximizar la resistencia negativa de la parte negativa: doble barrido en las fases de $\Gamma_T$ y $\Gamma_{fb}$.



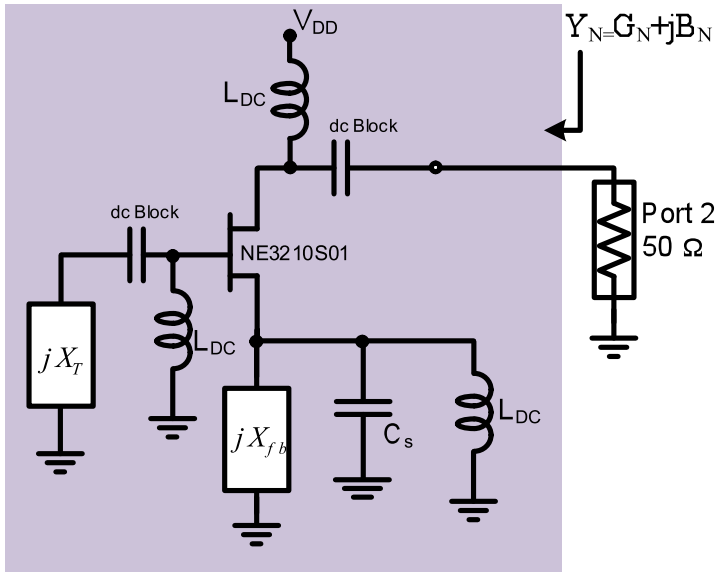

$$\Gamma_T = 1e^{j\phi_T} \qquad \Gamma_{fb} = 1e^{j\phi_{fb}}$$

$$V_{DD} = 4\ \text{V};\ V_{GG} = 0\ \text{V}$$



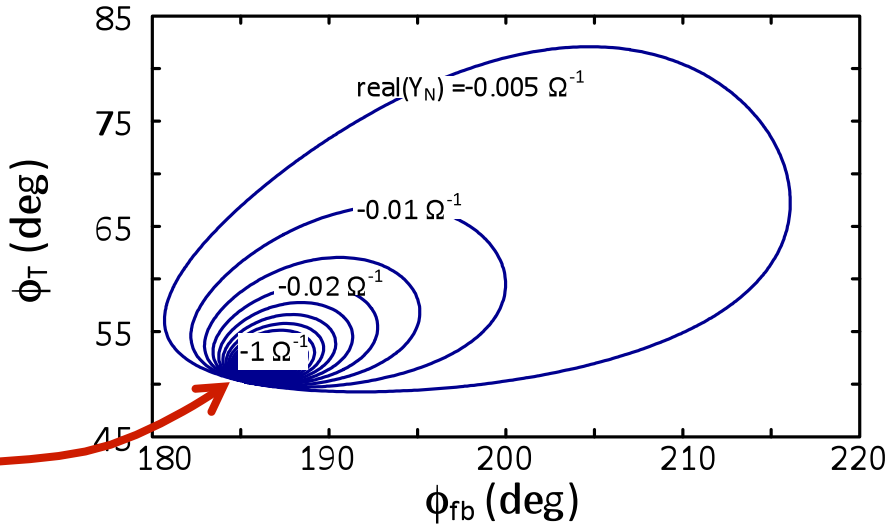

$$f_o = 5\ \text{GHz}$$

# Ejemplo de diseño
# Oscilador a FET (II)




Debido al doble barrido: $Y_N(\phi_T, \phi_{fb})$

Representado $\phi_T$ y $\phi_{fb}$ para distintos valores de Re($Y_N$) < 0:




Elegimos el valor más negativo:

$$\phi_{To} = 187^o ; \phi_{fb} = 53^o$$

# Ejemplo de diseño
# Oscilador a FET (III)

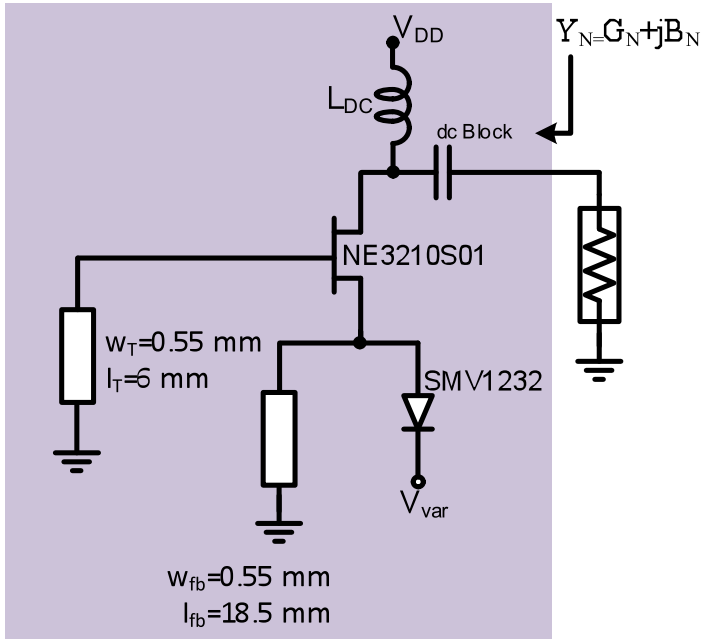
$$\phi_{To} = 187^{o}; \phi_{fb} = 53^{o}$$

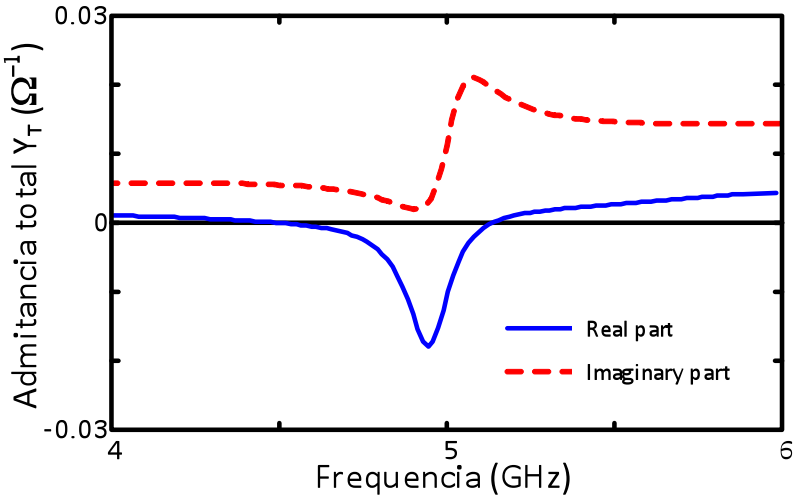
## Inductancia

Implementada en línea microstrip.

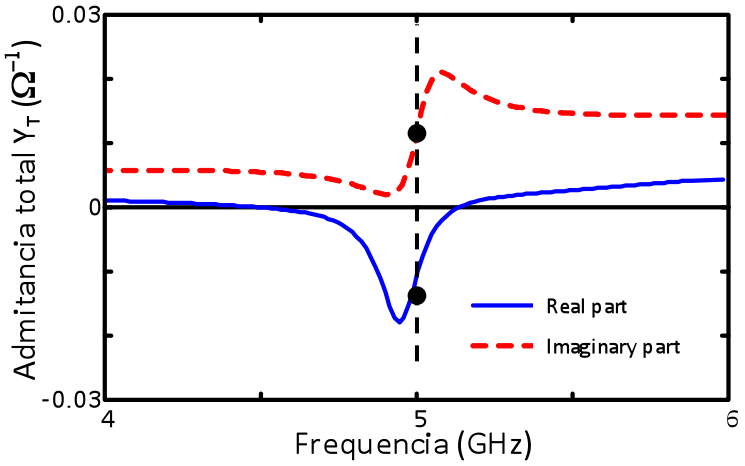
## Capacidad

Varactor + capacidad.
implementada en línea microstrip.



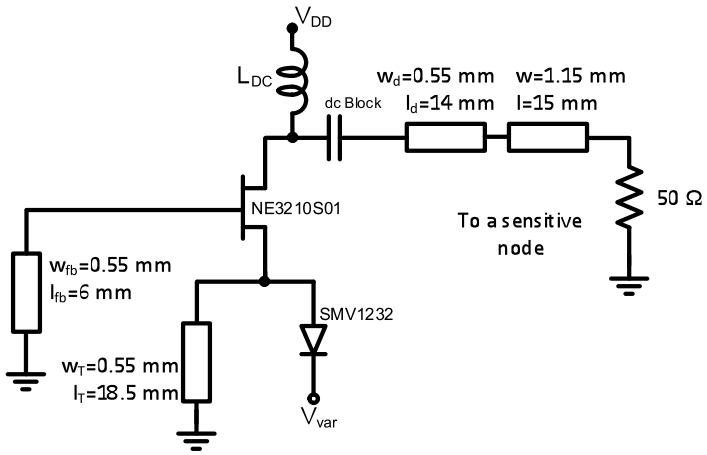
# Ejemplo de diseño
# Oscilador a FET (IV)

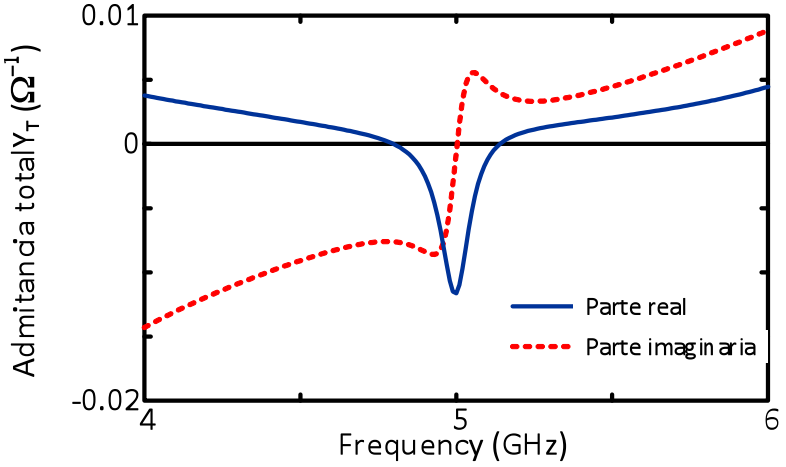



$$Y_N(V \cong 0, \omega_o) = -0.016 + j0.013\ \Omega^{-1}$$

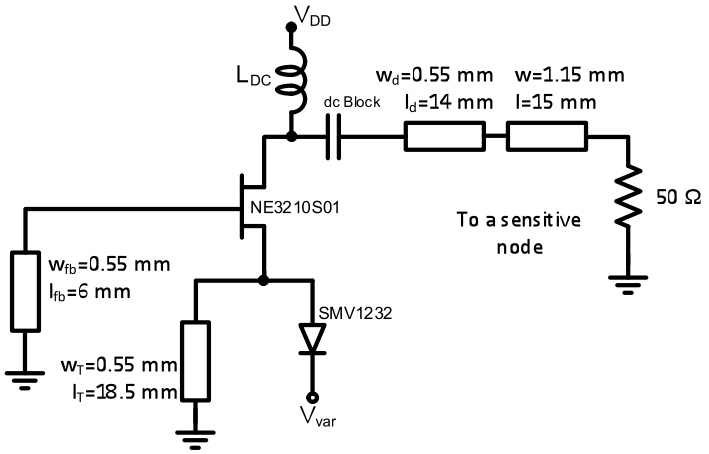
Para cumplir la condición de arranque debemos añadir una inductancia L = 2.529 nH en paralelo para que la parte imaginaria sea nula.

Implementando en línea microstrip y realizando algún pequeño ajuste, tenemos:

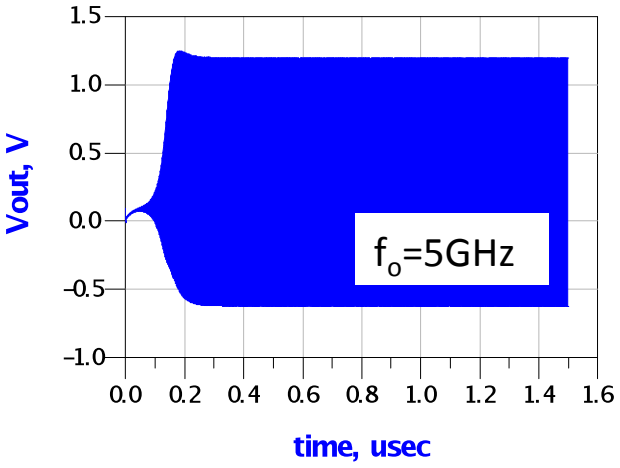


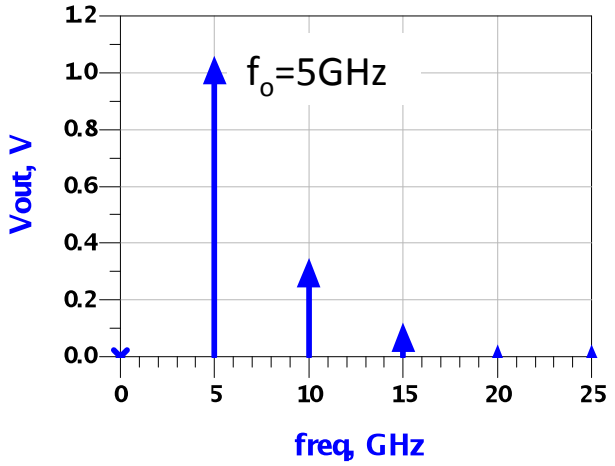
# Ejemplo de diseño
# Oscilador a FET (V)




Simulación en el dominio del tiempo.




Simulación en el dominio de la frecuencia.

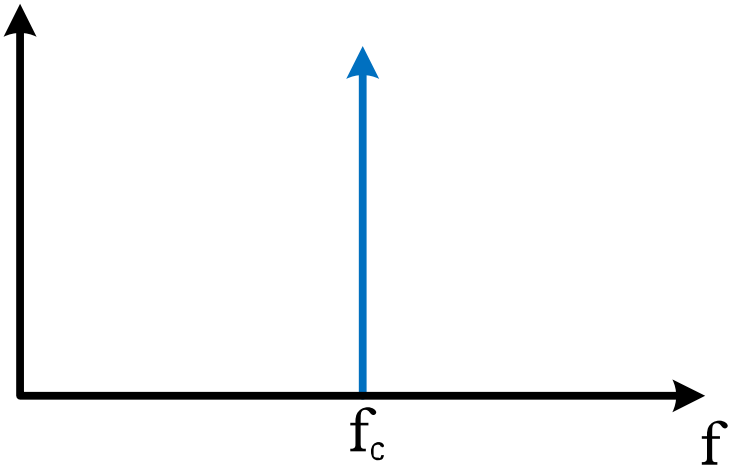


# Ruido de fase del oscilador

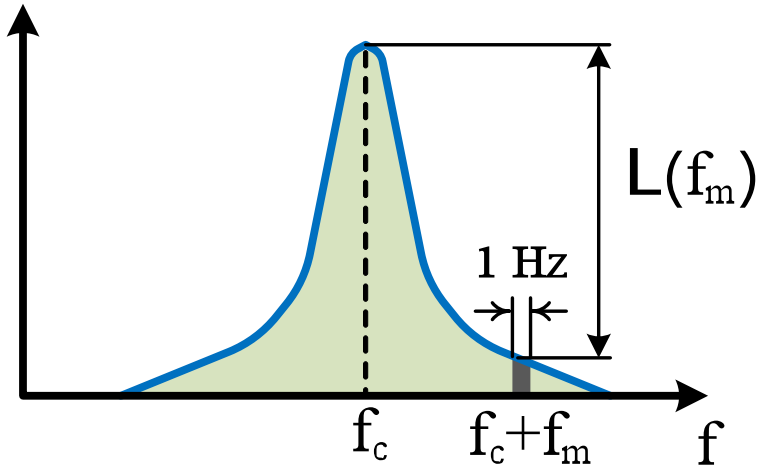
- Al igual que otros circuitos, los osciladores son sensibles al ruido.
- En el caso del oscilador este ruido afectará a la amplitud y frecuencia de salida.
- Las variaciones de amplitud suele despreciarse y sólo se considera la variación aleatoria de la frecuencia debida al ruido.
- Las variaciones aleatorias en el periodo o desviación de los cruces por cero con respecto a su posición ideal en el eje temporal.

# Ruido de fase del oscilador

Estas variaciones aleatorias crean bandas laterales en el espectro de salida.




Oscilador ideal.




Oscilador afectado por ruido de fase.

Puede ser un serio problema en sistemas modulados en fase.

# Ruido de fase del oscilador

Expresamos la salida como una señal modulada:

$$v(t)=V(t)\cos\left(\omega_c t+\Delta\theta(t)\right)$$

Para el análisis de ruido de fase consideramos que $V(t)=V=\text{Cte.}$

y que la portadora está modulada en fase a la frecuencia $\omega_m$.

$$v(t)=V\cos\left(\omega_c t+\Delta\theta\sin\omega_m t\right)$$

$$\Delta\theta=\frac{\Delta\omega}{\omega_m}$$

$$v(t)=V\cos\omega_c t\cos(\Delta\theta\sin\omega_m t)-V\sin\omega_c t\sin(\Delta\theta\sin\omega_m t)$$

# Ruido de fase del oscilador

Asumiendo una desviación de fase $\Delta\phi$ suficientemente pequeña:

$$v(t) = V\cos\omega_c t - V\Delta\theta\sin\omega_c t\sin\omega_m t$$

$$= V\cos\omega_c t - V\frac{\Delta\theta}{2}\left[\cos(\omega_c+\omega_m)t - \cos(\omega_c-\omega_m)t\right]$$

La modulación genera bandas laterales a frecuencias $\pm\omega_m$ de la portadora $\omega_c$.

La densidad espectral de la banda lateral será:

$$\mathcal{L}(f_m) = \left(\frac{V_{ssb}(f_m)}{V}\right)^2 = \frac{\Delta\theta^2}{4} = \frac{\Delta\theta_{rms}^2}{2}$$

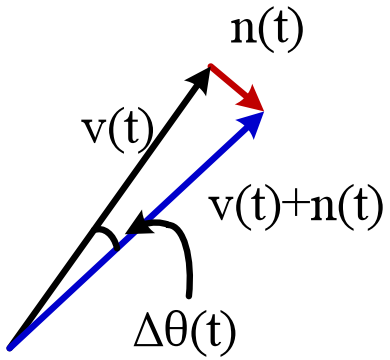
# Ruido de fase del oscilador

Dado que el ensanchamiento del espectro se debe a ruido y no a una señal sinusoidal, la densidad espectral de potencia:

$$\mathcal{L}(f_m)=\frac{1}{2}\underbrace{\Delta\theta^2_{rms}}$$

Valor RMS del proceso de ruido.

Por otra parte, combinando los fasores de la señal periódica y del ruido:




$$\Delta\theta(t)=acos\left(\frac{n(t)}{v(t)}\right)\approx\frac{n(t)}{v(t)}$$

# Ruido de fase del oscilador

El la potencia de ruido puede definirse como:

$$\overline{n^2(t)} = FKT_oR$$

F: factor de ruido del amplificador en el lazo.
K: constante de Boltzmann 1,37 · $10^{-23}$ J/K.
To = 290°K.
R: resistencia de carga sobre la que se mide n(t).

La potencia de la señal se obtiene de:

$$\overline{v^2(t)} = PR$$

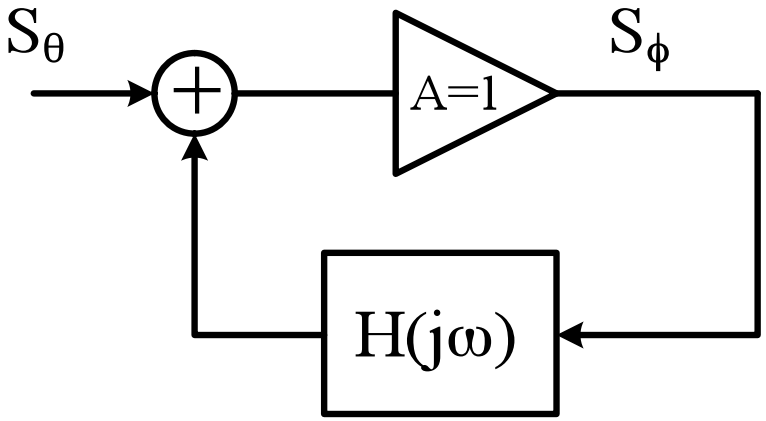
P: potencia disipada en R.

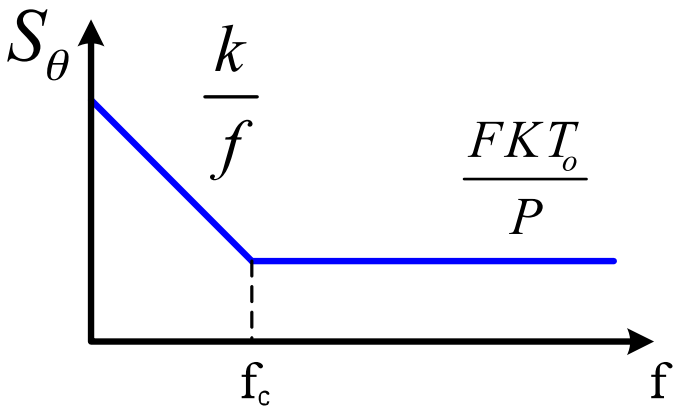
---

$$\mathcal{L}(f_m) = \frac{1}{2}\frac{FKT_o}{P}$$

Sólo tiene en cuenta el ruido blanco.

# Modelo de Leeson

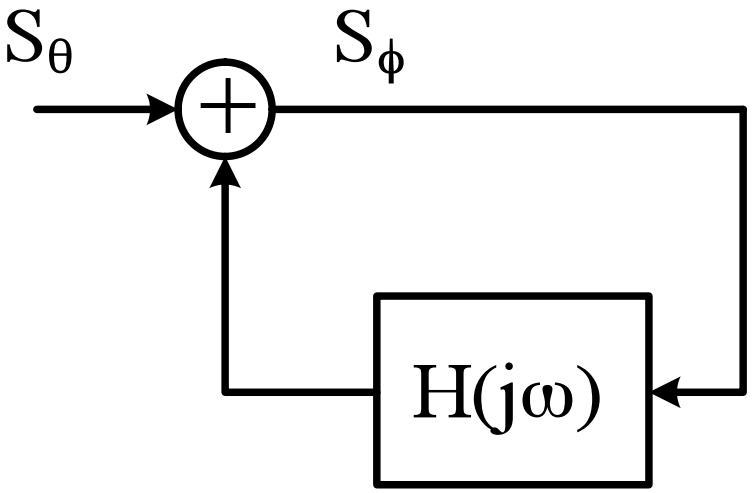



Filtro paso banda.

$$S_\theta(f_m) = 2\mathcal{L}(f_m) = \Delta\theta^2_{rms} = \overline{\Delta\theta^2} = \frac{FKT_o}{P}\left(1+\frac{f_c}{f_m}\right)$$

# Modelo de Leeson




Función de transferencia en lazo cerrado:

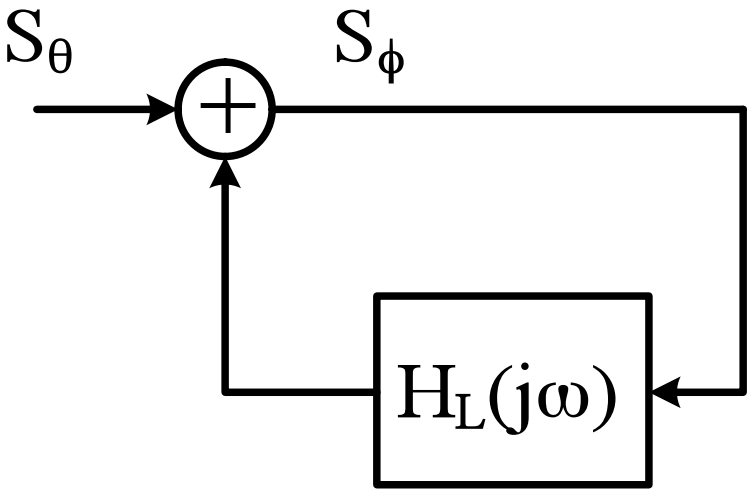
$$G(j\omega)=\frac{1}{1-H(j\omega)}$$

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o}-\frac{\omega_o}{\omega}\right)}$$

Cuyo equivalente paso bajo es:

$$H_L(j\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_L}} \qquad \omega_L=\frac{\omega_o}{Q}$$

# Modelo de Leeson




La densidad espectral de ruido a la salida será:

$$S_\phi(\omega) = S_\theta(\omega)\left|G(\omega)\right|^2$$

$$= S_\theta(\omega)\left(1+\frac{\omega_L^2}{\omega^2}\right)$$

$$\mathcal{L}(f_m) = \frac{1}{2}S_\phi(f_m) = \underbrace{\frac{FKT_o}{2P}}_{N_f}\left(1+\frac{f_c}{f_m}\right)\left(1+\frac{f_L^2}{f_m^2}\right)$$

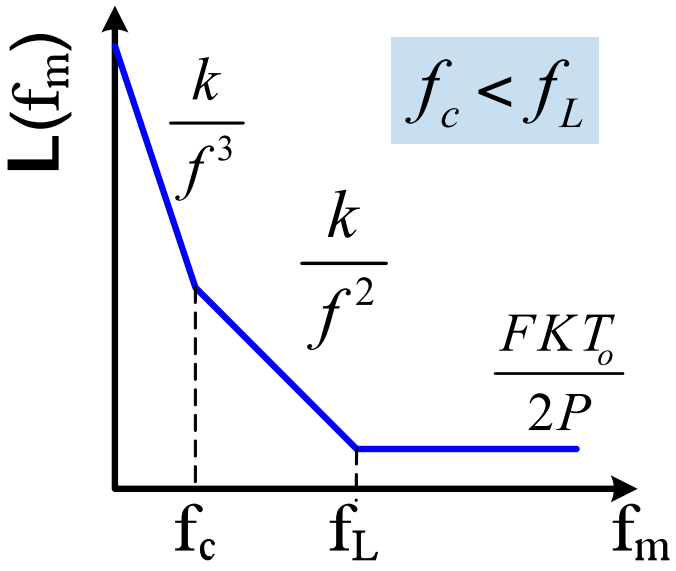
# Modelo de Leeson

$$\mathcal{L}(f_m) = N_f \left(1+\frac{f_c}{f_m}\right)\left(1+\frac{f_L^2}{f_m^2}\right)$$

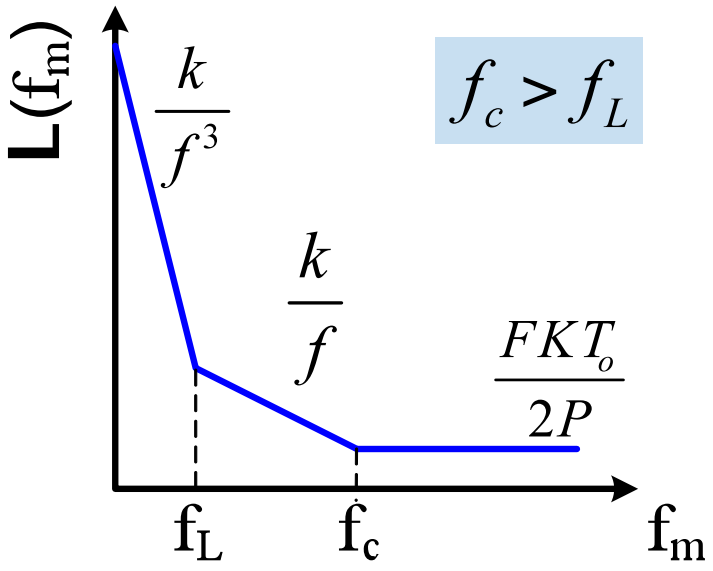
Puntos de transición:

$$f_m = f_c$$

$$f_m = f_L = \frac{f_o}{2Q}$$




$f_c < f_L$




$f_c > f_L$

# Modelo de Leeson

$$\mathcal{L}(f_m) = N_f \left(1 + \frac{f_c}{f_m}\right)\left(1 + \frac{(f_o/2Q)^2}{f_m^2}\right)$$

$$\mathcal{L}(f_m) = N_f + N_f \frac{f_c}{f_m} + N_f \frac{f_o^2}{4Q^2 f_m^2} + N_f \frac{f_c f_o^2}{4Q^2 f_m^3}$$

# Lazos de enganche en fase Phase-Locked Loops (PLL)

# Índice

- Introducción.
- Componentes del lazo:
  - Oscilador controlado por tensión (VCO).
  - Señal de referencia.
  - Detector de fase.
  - Filtro de lazo.
- Ecuaciones de lazo y modelo nolineal.
- Margen de enganche.

# Introducción

En general, no se utiliza un oscilador a frecuencia de RF o microondas de manera directa en un transmisor o receptor.

Ruido de fase.

Portadoras moduladas en fase
o frecuencia.

Los lazos enganchados en fase son uno de los circuitos más comúnmente utilizados tanto en telecomunicaciones como en instrumentos de medida.

# Introducción

Los lazos enganchados en fase son uno de los circuitos más comúnmente utilizados tanto en telecomunicaciones como en instrumentos de medida.

Dependiendo del principio de funcionamiento pueden dividirse en lazos:

- Analógicos.
- Digitales.
- Híbridos.

# Lazo enganchado en fase analógico

**Principales características:**

- El detector de fase es un multiplicador analógico.
- Todos los componentes del lazo son analógicos.

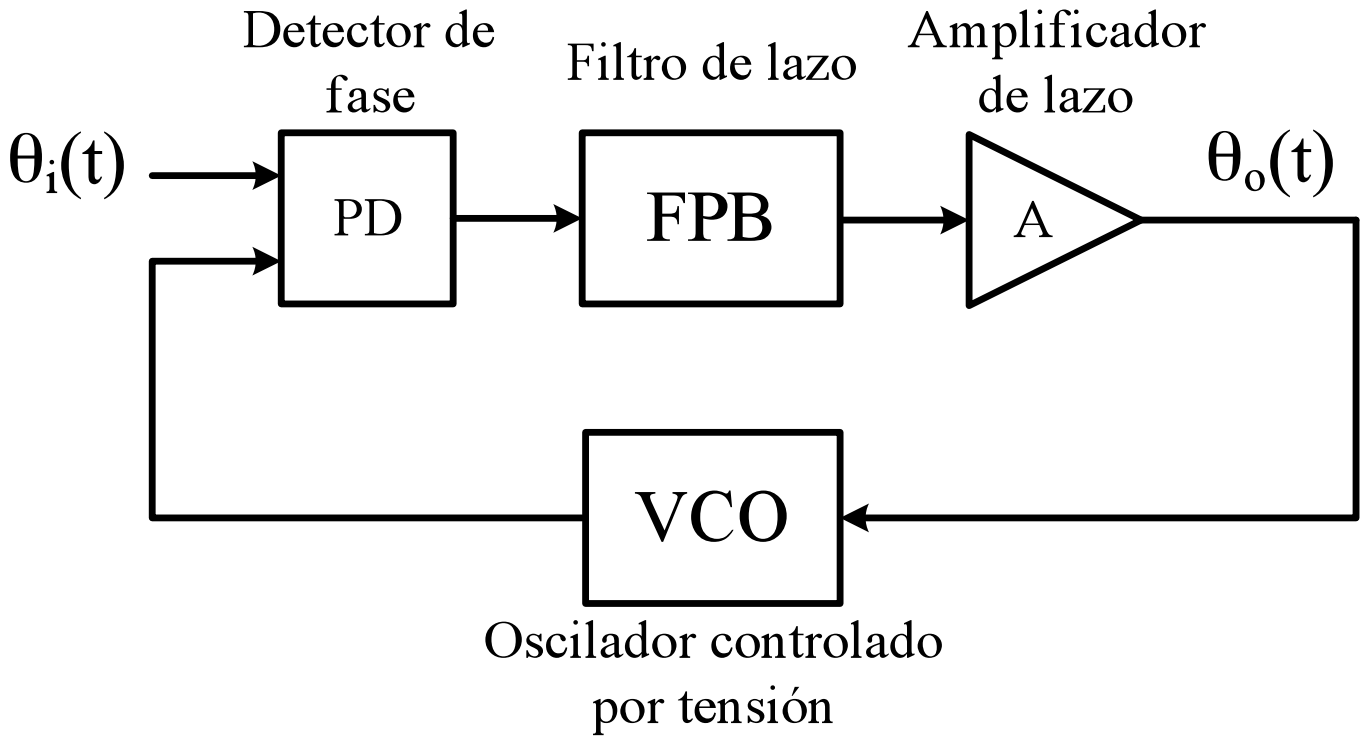
**Modelo matemático:**

- El funcionamiento del lazo enganchado en fase se modela mediante una ecuación diferencial ordinaria

**Condiciones:**

- Por simplicidad, en principio se considera el caso sin ruido.
- Supondremos que la única no linealidad del lazo es el detector de fase. Los demás componentes se consideran lineales

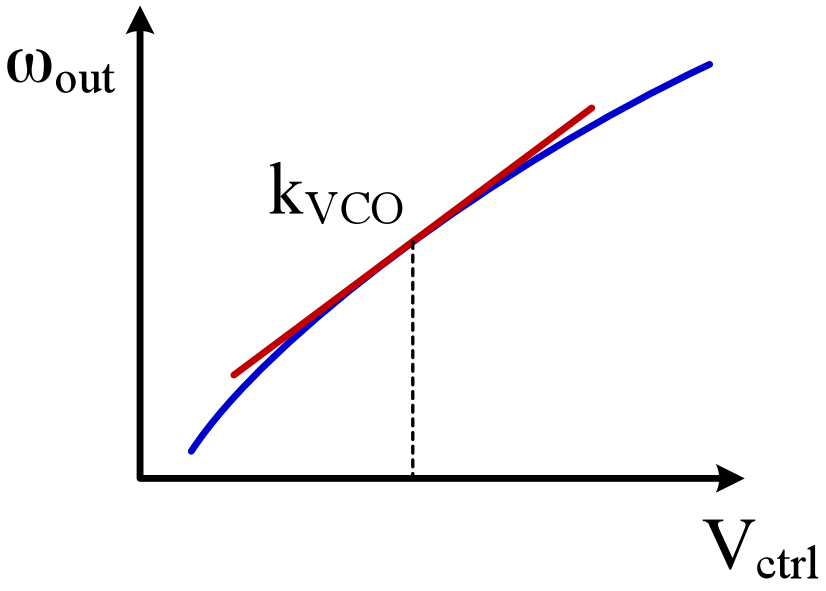
# Lazo de enganche en fase



# Oscilador controlado por tensión

**Voltage Controlled Oscillator (VCO):**

- Componente que genera una señal sinusoidal.
- La frecuencia instantánea de la señal se controla mediante un voltaje de entrada.

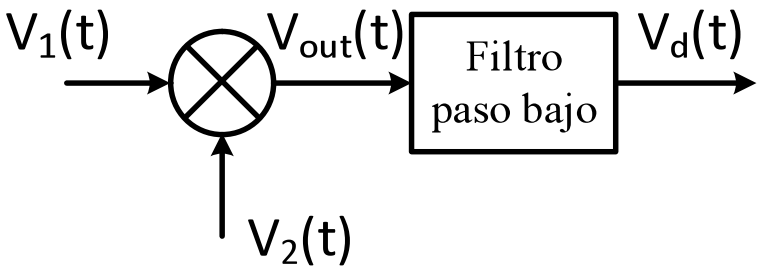



$$\omega = \omega_o + K_{VCO} V_{ctrl}$$

# Detector de fase analógico

**Phase detector (VCO):**

- Se modela como un multiplicador analógico.
- Genera una señal de salida proporcional a la diferencia de fases de las señales a su entrada.




$$V_1(t) = A\cos\left(\omega_o t + \phi_1(t)\right)$$

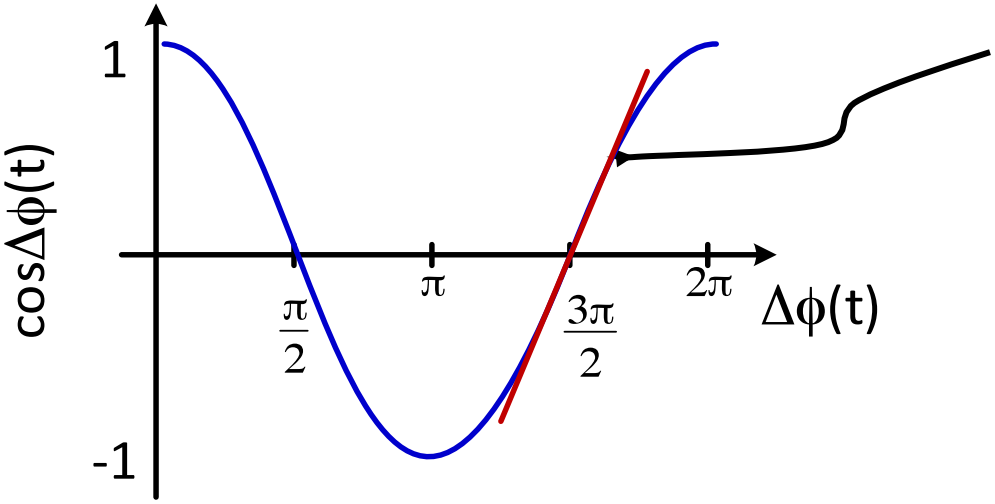
$$V_2(t) = B\cos\left(\omega_o t + \phi_2(t)\right)$$

# Detector de fase analógico

$$V_{out}(t) = KV_1(t)V_2(t)$$

$$= \frac{1}{2} ABK\left[\cos\left(2\omega_o t + \phi_1(t) + \phi_2(t)\right) + \cos\Delta\phi(t)\right]$$

$$\Delta\phi(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$$

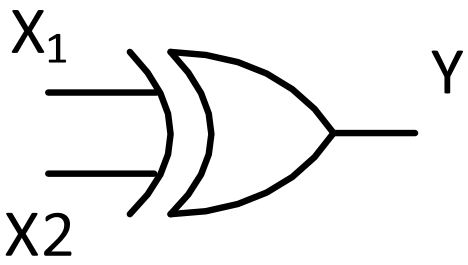



Zona de comportamiento lineal.

$$\cos\Delta\phi(t) \approx \phi_1(t) - \phi_2(t)$$

$$K_d = \frac{1}{2} ABK$$

# Detector XOR



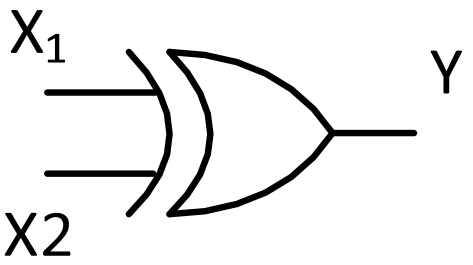

**Detector XOR (eXclusive OR):**

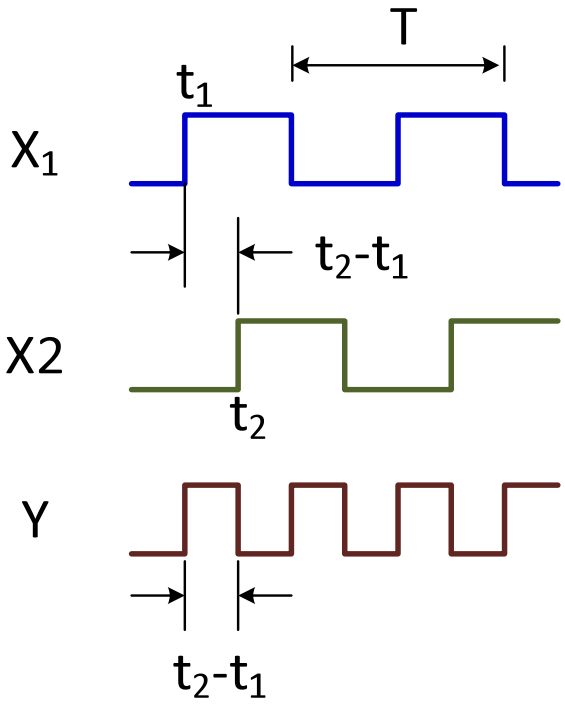
- Señales de entrada cuadradas.
- Detector de fase digital.

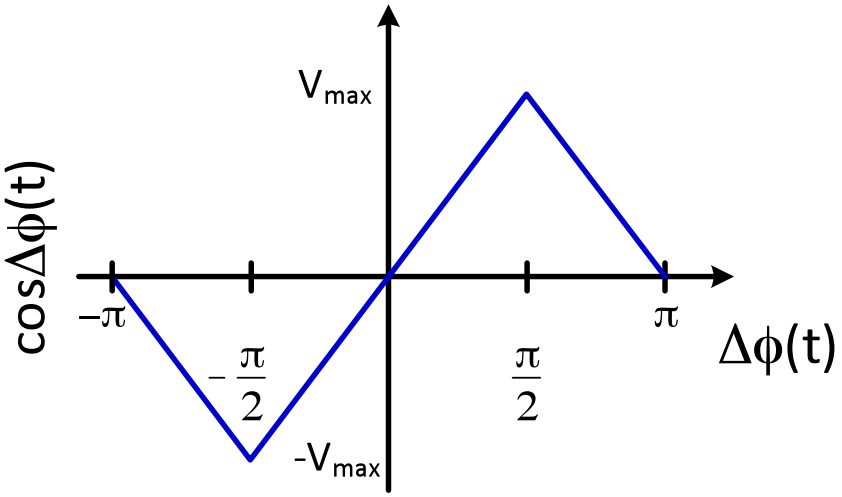
| X1 | X2 | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

$$V_d = V_{max}$$

# Detector XOR




$$V_d = V_{max}\frac{t_2 - t_1}{T} = V_{max}\frac{\theta}{\pi}$$

$$K_d = \frac{V_{max}}{\pi}$$

# Detector de fase-frecuencia

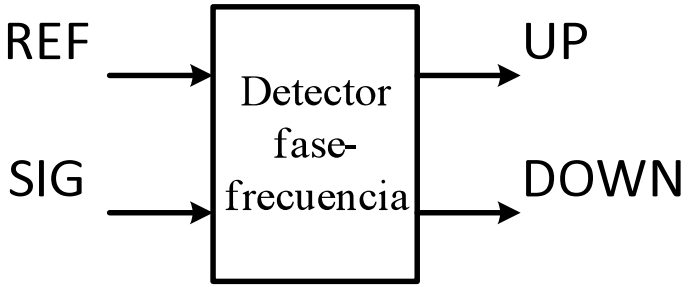
**Phase Frequency Detector:**

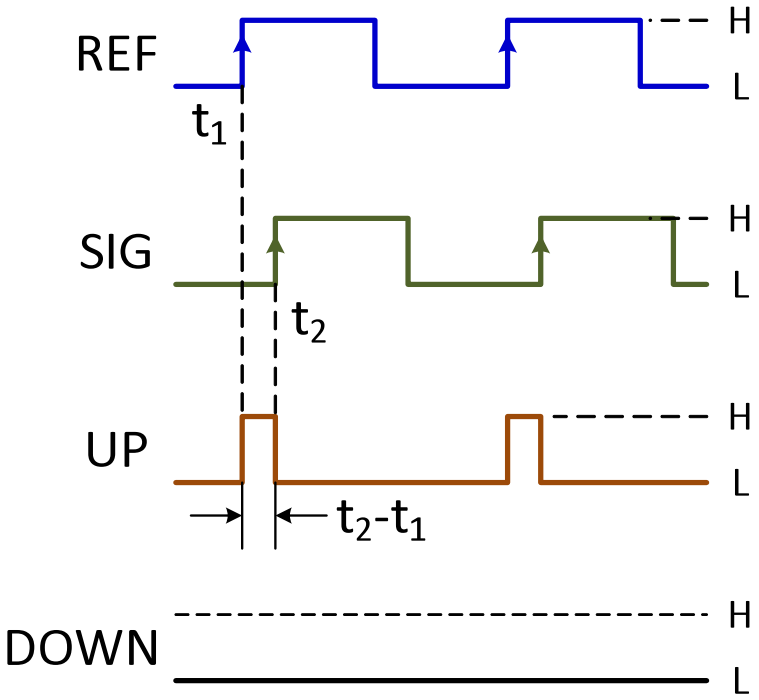
- Construido a base de circuitos de lógica secuencial.
- Puede operar como discriminador de frecuencia y también como detector de fase.

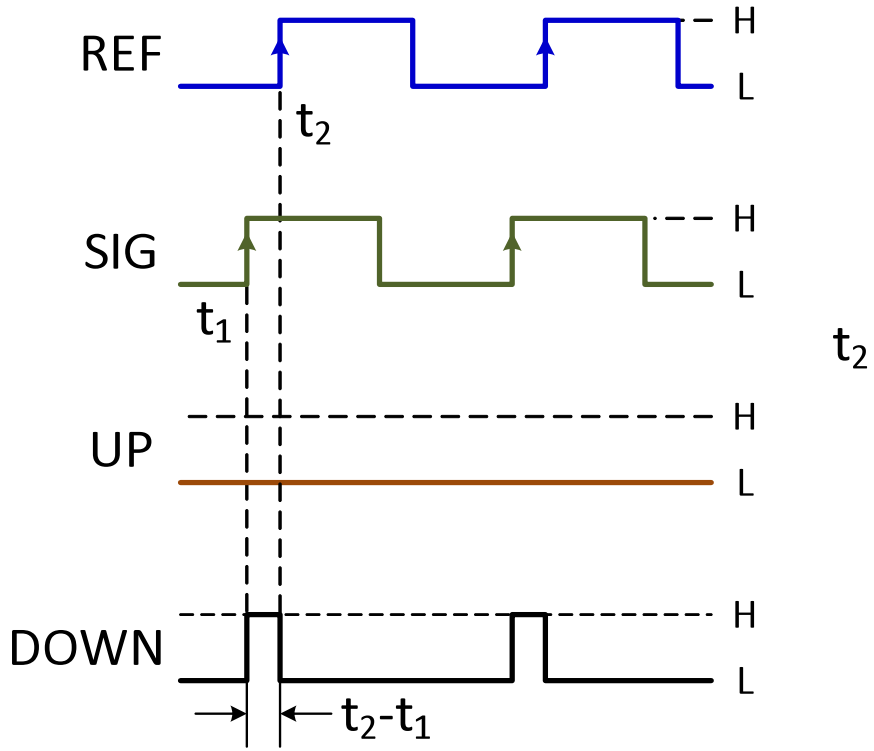
Mide el tiempo relativo entre flancos REF y SIG. Al detectar un flanco la salida pasa a '1' hasta que detecta el segundo:

- Cuando detecta un flanco en la entrada REF, la salida pasa a valer '1' hasta que detecta el flanco de la señal SIG.
- La salida 'UP' pasa a '1' si el flanco de REF se detecta primero. La salida 'DOWN' pasa a 1 si el flanco de SIG se detecta antes.

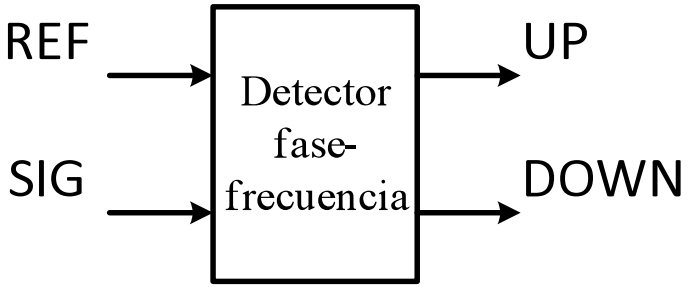
# Detector de fase-frecuencia

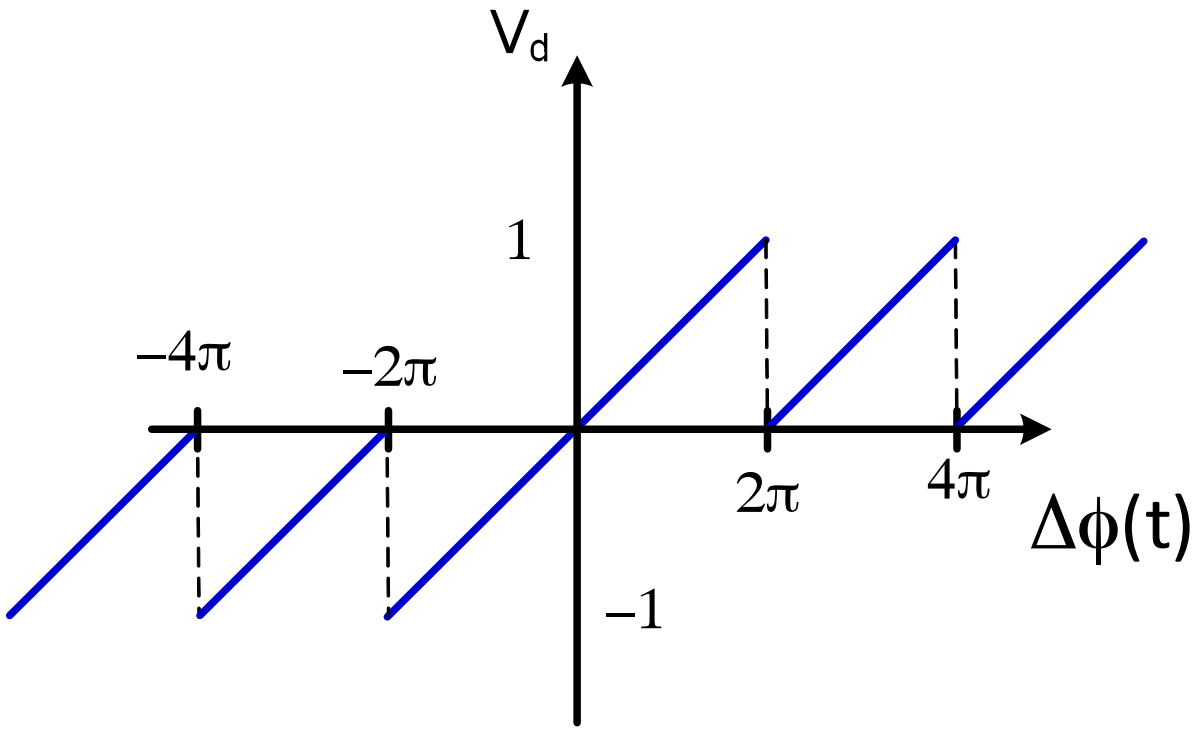


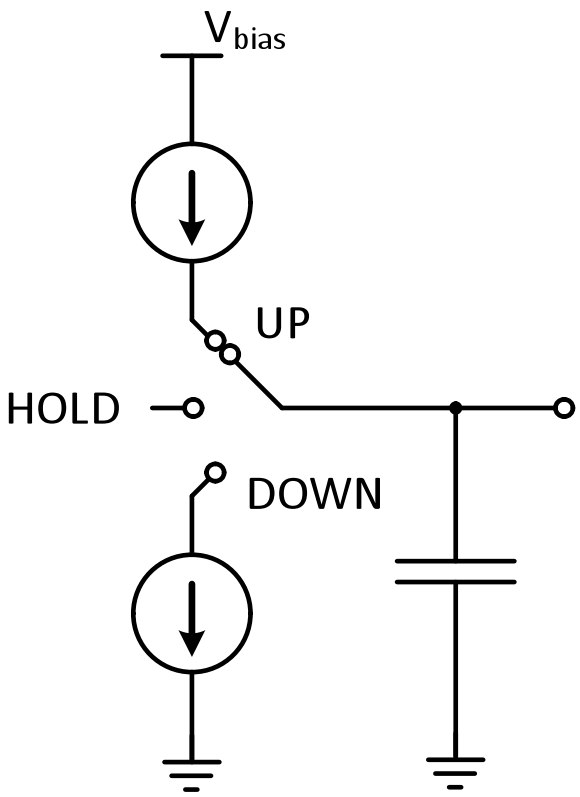
# Detector de fase-frecuencia




$$K_d = \frac{V_H - V_L}{4\pi}$$

# Bomba de corriente



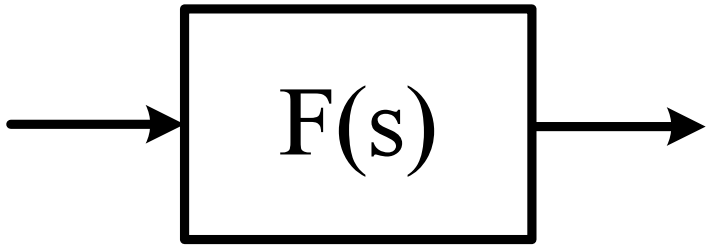

**Charge Pump:**

- Circuito utilizado a la salida de los circuitos PFD para proveer la entrada al filtro de lazo.
- Convierten la diferencia de fase (pulsos en las salidas UP y DOWN) en corriente.
- Pulsos positivos(UP) y pulsos negativos (DOWN).
- Sin pulsos de conmutación se mantiene en el estado HOLD.

# Filtro de lazo

**Características:**

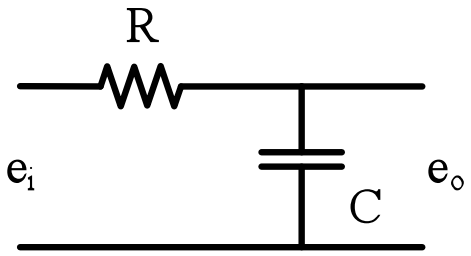
- Filtro paso bajo.
- Se caracteriza mediante su función de transferencia F(s).
- El filtro paso bajo suprime el ruido y espurios de la salida del PD.

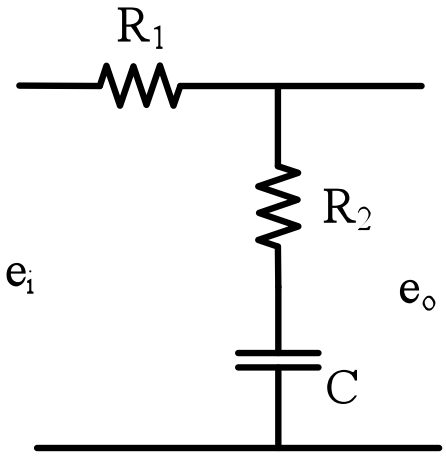



Determina la dinámica del lazo enganchado en fase.

# Filtros pasivos

Filtros baso bajo pasivos:




$$F(s)=\frac{1}{1+sRC}$$

$$|F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$$

$$F(s)=\frac{1+sCR_2}{1+sC(R_2+R_2)}$$

$$|F(\omega)|=\sqrt{\frac{1+\omega^2R_2^2C^2}{1+\omega^2C^2(R_1+R_2)^2}}$$

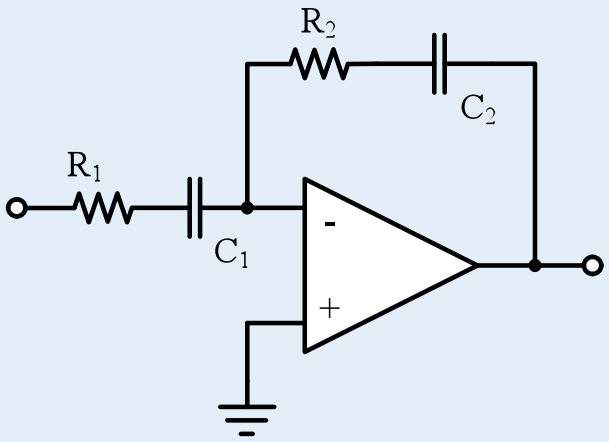
# Filtros activos

Suelen utilizarse filtros activos para mejorar el rendimiento del filtro (integrador 1/s).

- Implementados con amplificadores operacionales.
- Permiten reducir el valor de las resistencias.
- Limitados en frecuencia.
- Aumentan el consumo de potencia del PLL.

# Filtros activos

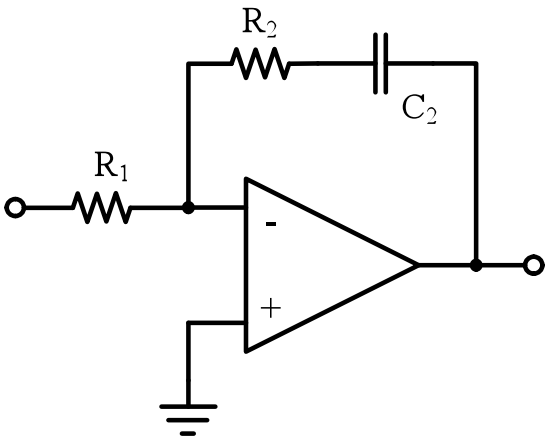
Ejemplos de implementación:




$$F(s) = -\frac{C_1}{C_2}\left(\frac{s\tau_2 + 1}{s\tau_1 + 1}\right)$$

$$\tau_1 = R_1 C_1$$

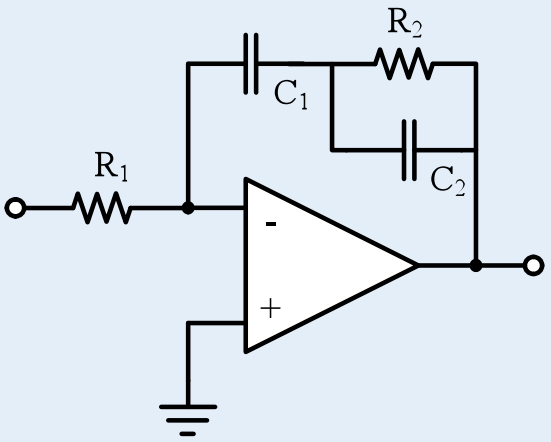
$$\tau_2 = R_2 C_2$$




$$F(s) = -\left(\frac{s\tau_2 + 1}{s\tau_1}\right)$$

$$\tau_1 = R_1 C_2$$

$$\tau_2 = R_2 C_2$$




$$F(s) = -\frac{1}{s\tau_1}\left(\frac{1 + s\tau_2}{1 + s\tau_3}\right)$$

$$\tau_1 = R_1 C_1$$

$$\tau_2 = R_2 (C_1 + C_2)$$

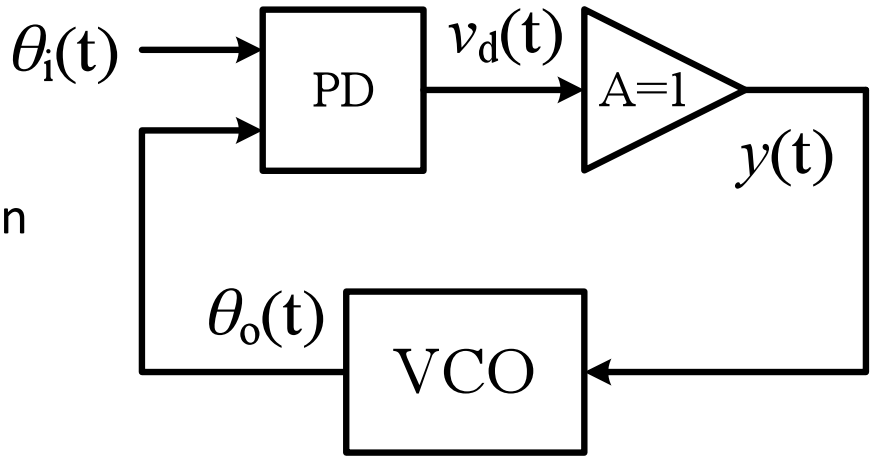
$$\tau_3 = R_2 C_2$$

# Análisis simplificado del lazo

$$v_d(t) = K_d \sin \underbrace{\phi(t)}$$

Error de fase.

$$\theta_i(t) = \omega_i t$$




Expresamos la salida con respecto a la entrada:

$$\theta_o(t) = \omega_i t + \phi(t)$$

Donde Ø(t) incluye el error de frecuencia:

$$\Delta\omega_o = \omega_o - \omega_i$$

$$\frac{d\theta_o}{d} = \omega_o + AK_V y(t)$$

Frecuencia instantánea del VCO.

# Análisis simplificado del lazo

Referenciando la entrada y salida con respecto a $\omega_o t$:

$$\tilde{\theta}_o(t) = \theta_o(t) - \omega_o t = (\omega_i - \omega_o)t + \phi(t)$$

$$\tilde{\theta}_i(t) = \theta_i(t) - \omega_o t = (\omega_i - \omega_o)t$$

Calculamos la variación de la frecuencia instantánea del VCO:

$$\frac{d\theta_o}{d} = \omega_o + K_V A y(t) \quad \rightarrow \quad \frac{d\tilde{\theta}_o}{d} = K_V A y(t)$$

Utilizando resultados anteriores tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left[(\omega_i - \omega_o)t + \phi(t)\right] = K_V A y(t) \quad \rightarrow \quad \frac{d\phi}{d} = \omega_o - \omega_i + K_V K_d A \sin\phi$$

# Análisis simplificado del lazo

En el estado estacionario:

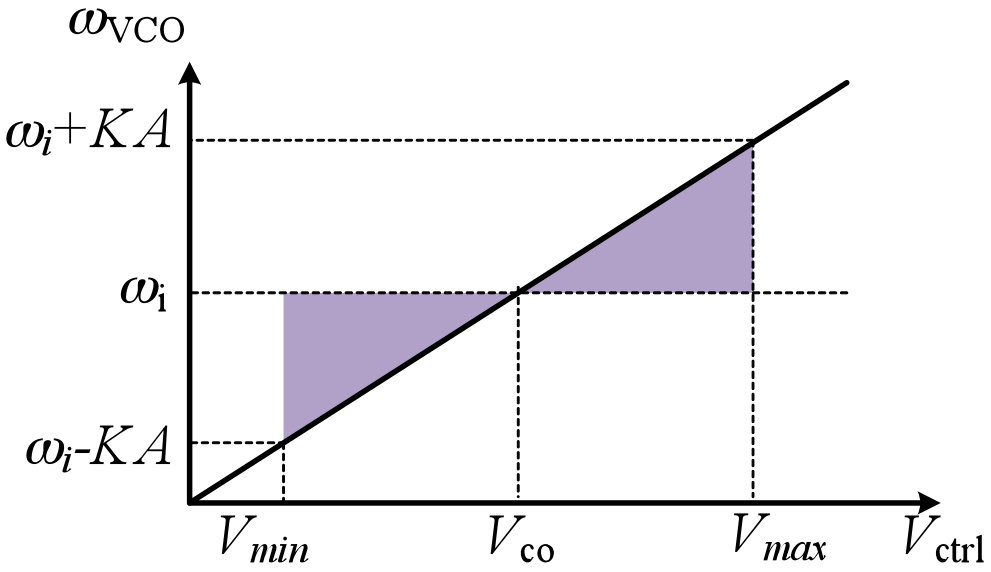
$$\frac{d\phi}{dt}=0 \quad \rightarrow \quad K_V K_d A \sin\phi = \omega_i - \omega_o$$

Condición de enganche en fase:

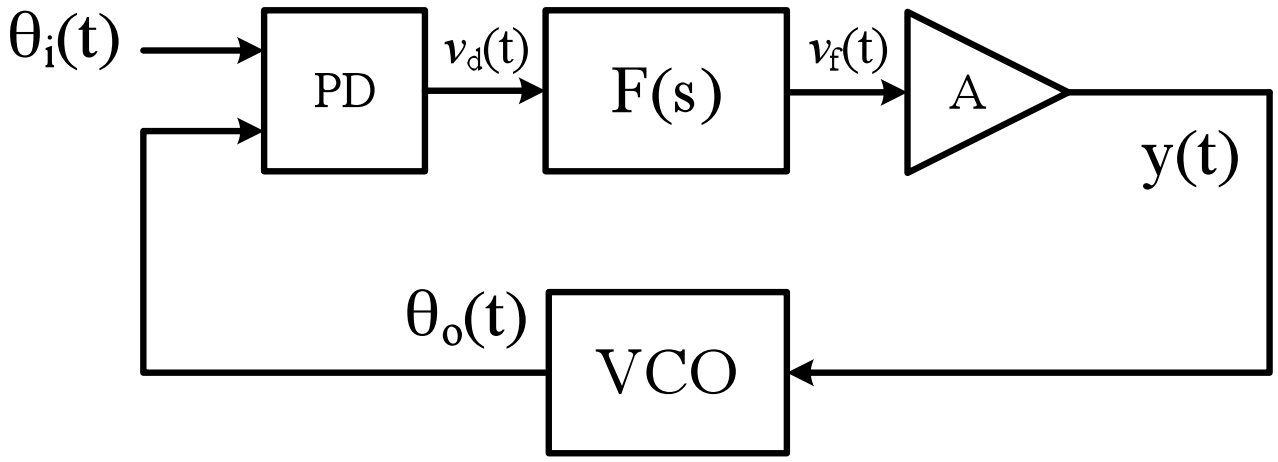
$$\left|\frac{\omega_i-\omega_o}{KA}\right| \leq 1$$

$$f_{VCO}(V_{\min}) = \omega_i - KA$$

$$f_{VCO}(V_{\max}) = \omega_i + KA$$



# Análisis del lazo de enganche en fase




Utilizando las mismas expresiones que en el caso simplificado:

$$\frac{d\tilde{\theta}_o}{d} = K_V A y(t); \quad \frac{d\theta_o}{d} = \omega_o + AK_V y(t); \quad v_d(t) = K_d \sin\phi(t)$$

# Análisis del lazo de enganche en fase

$$\frac{d}{dt}\left[(\omega_i-\omega_o)t+\phi(t)\right]=K_V A y(t)$$

$$s\left[(\omega_i-\omega_o)t+\phi\right]=K_V K_d A F(s)\sin\phi$$

Si consideramos la función de transferencia del filtro de lazo F(s):

$$F(s)=\frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$$

$$(s+\tau_2 s^2)\left[(\omega_i-\omega_o)t+\phi\right]=KA\sin\phi(1+\tau_1 s)$$

Operando y reemplazando el operador s = d/dt:

$$\omega_i-\omega_o+\frac{d\phi}{dt}+\tau_2\frac{d^2\phi}{dt^2}=KA\sin\phi+KA\tau_1\cos\phi\frac{d\phi}{dt}$$

# Análisis del lazo de enganche en fase

Ecuación del lazo enganchado en fase:

$$\tau_2 \frac{d^2\phi}{dt^2} + (1 - KA\tau_1 \cos\phi)\frac{d\phi}{dt} - KA\sin\phi + \omega_i - \omega_o = 0$$

En el caso del análisis simplificado:

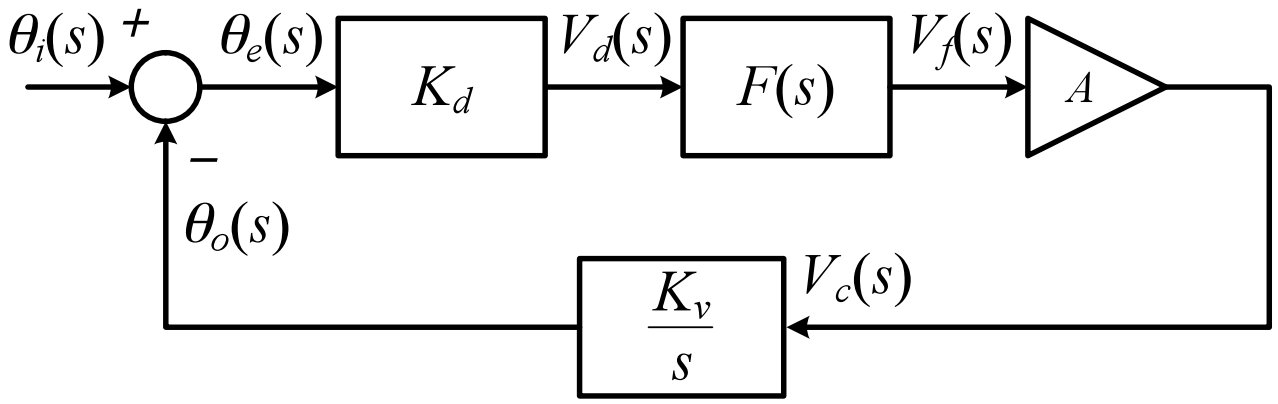
$$\tau_1 = 0; \tau_2 = 0 \qquad \frac{d\phi}{dt} - KA\sin\phi + \omega_i - \omega_o = 0$$

Obtenemos el mismo resultado.

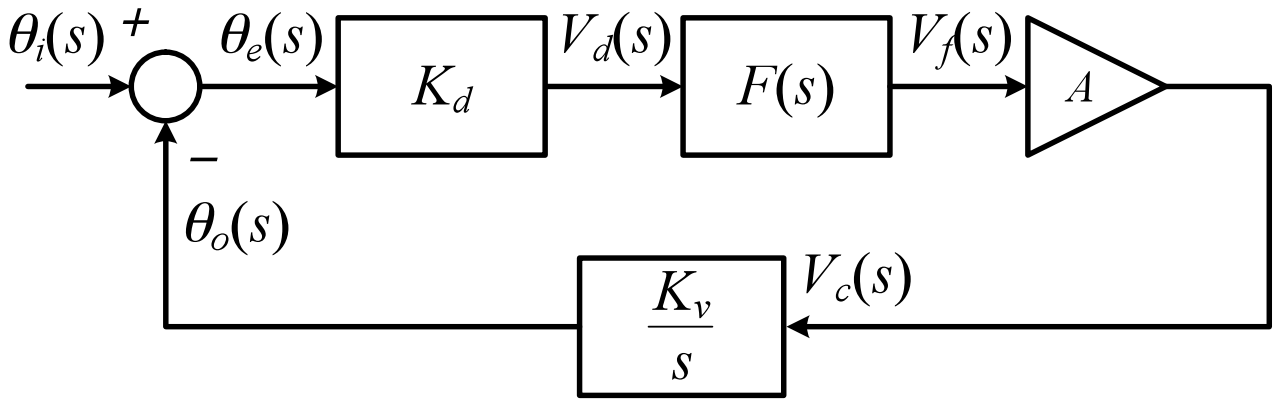
# Función de transferencia

Un sistema lineal puede caracterizarse mediante funciones de transferencia:

- La señal de salida es una función de la señal de entrada.
- Las funciones de transferencia proporcionan la respuesta de sistema lineal a una entrada arbitraria en una forma cerrada.



# Función de transferencia




$$\theta_e(s) = \theta_i - \theta_o$$

$$V_d(s) = K_d \theta_e(s)$$

$$V_f(s) = K_d F(s) \theta_e(s)$$

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s} K_v V_c(s)$$

$$V_c(s) = A K_d(s) F(s) \theta_e(s)$$

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s} A K_v K_d F(s)(\theta_i(s) - \theta_o(s))$$

# Función de transferencia

Simplificando la notación:

$$\theta_o = \frac{1}{s} A \underbrace{K}_{K_v K_d} F(s)(\theta_i - \theta_o)$$

$$H(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{AKF(s)}{s + AKF(s)}$$

Comportamiento paso bajo.

Definiendo una función de transferencia en función del error de fase:

$$\theta_e = \theta_i(s) - \theta_o(s) = \theta_i\left[1 - H(s)\right]$$

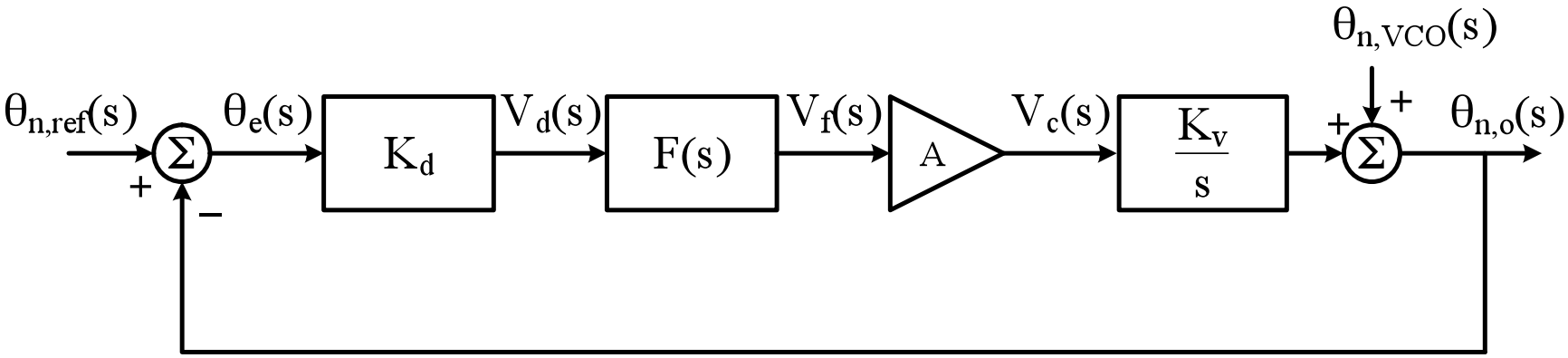
$$H_{\theta_e}(s) = \frac{\theta_e(s)}{\theta_i(s)} = \frac{s}{s + AKF(s)}$$

Comportamiento paso alto.

Los parámetros de ambas funciones de transferencia dependen de:

- Ganancia de lazo K.
- Función de transferencia del filtro de lazo F(s).

# Ruido de fase




$$\theta_{n,o}(s)=H_1(s)\theta_{n,ref}(s)+H_2(s)\theta_{n,VCO}(s)$$

$$\theta_{n,o}=\underbrace{K_dK_v}_{K}F(s)A\frac{1}{s}\left(\theta_{n,ref}-\theta_{n,o}\right)$$

$$\theta_{n,o}\left(s+KAF\right)=AKF\theta_{n,ref}$$

$$\theta_{n,o}=\theta_{n,VCO}-\theta_{n,o}K_dF(s)AK_V\frac{1}{s}$$

$$\theta_{n,o}\left(s+KAF(s)\right)=s\theta_{n,VCO}$$

# Ruido de fase

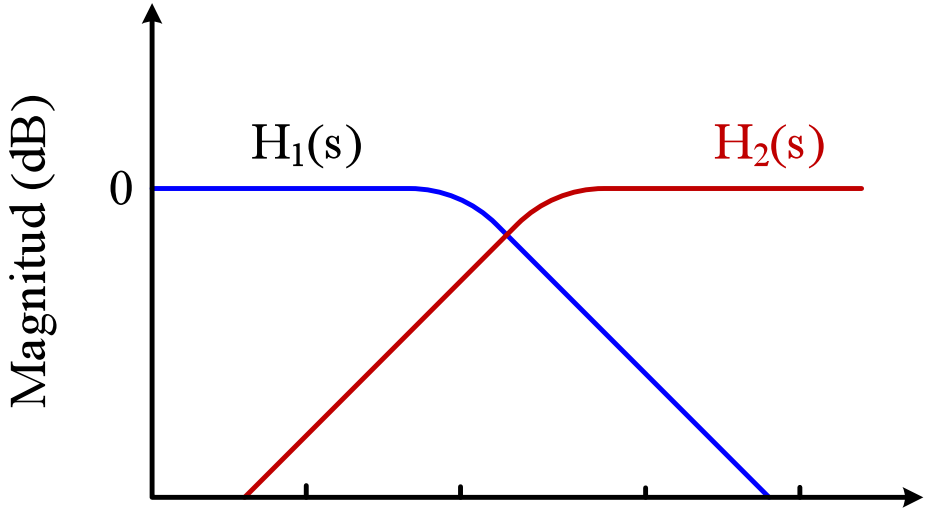
$$H_1(s)=\frac{\theta_{n,o}(s)}{\theta_{n,i}(s)}=\frac{AKF(s)}{s+AKF(s)}$$

Comportamiento paso bajo.

$$H_2(s)=\frac{\theta_{n,o}(s)}{\theta_{n,i}(s)}=\frac{s}{s+AKF(s)}$$

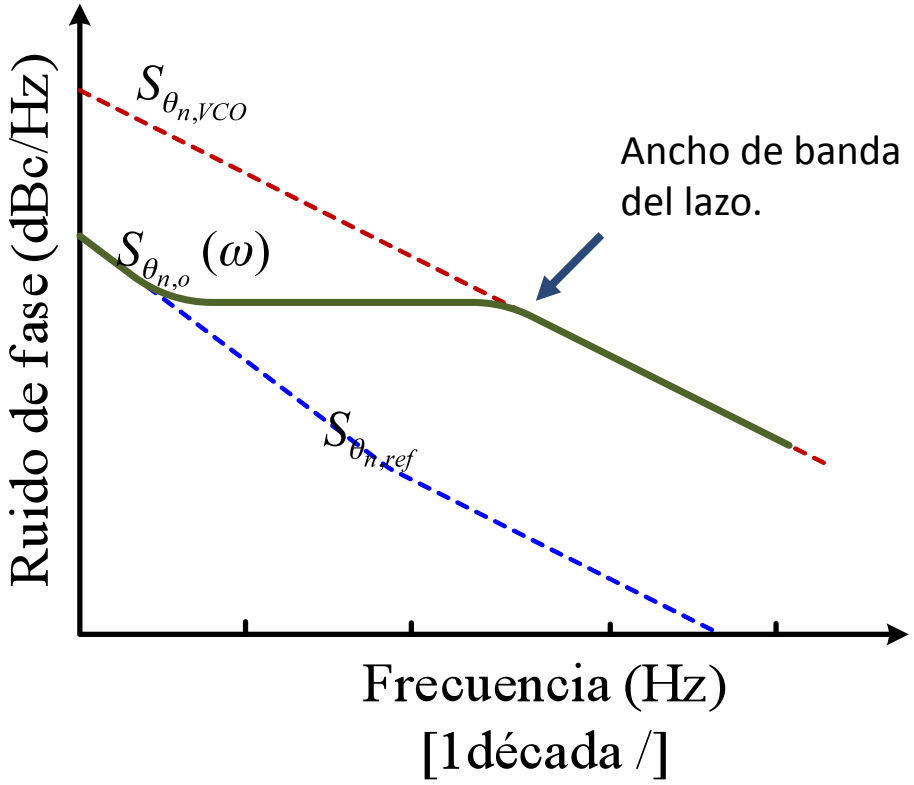
Comportamiento paso alto.

$$\theta_{n,o}(s)=H_1(s)\theta_{n,ref}(s)+H_2(s)\theta_{n,VCO}(s)$$



# Ruido de fase

$$S_{\theta_{n,o}}(\omega)=\left|H_1(\omega)\right|^2 S_{\theta_{n,ref}}(\omega)+\left|H_2(\omega)\right|^2 S_{\theta_{n,VCO}}(\omega)$$



# Estabilidad

El PLL es un sistema realimentado podría llegar a inestabilizarse.

No debe generar ninguna señal en ausencia de una señal de entrada.

El sistema será estable si todos las raíces de su ecuación característica tienen parte real negativa:

$$s + AKF(s) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Re}(s_i) < 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$