

## 2.1. Introducción

La concentración<sup>1</sup> es el conjunto de métodos y técnicas, incluidos sus fundamentos teóricos y científicos, que permite adaptar y modificar una mena tal como se recibe de mina, para su uso posterior y obtener una rentabilidad en el proceso.

Las operaciones de concentración en minería son el resultado de aplicar una tecnología minera a una mena, se excluyen los procesos metalúrgicos que implican reacciones químicas, con el objetivo primario y básico de separar la mena útil del resto de productos que carecen de valor y como consecuencia aumentar la ley en el componente útil.

Se pretende obtener una agrupación independiente, lo más segregada posible de los componentes minerales que forman la mena, de tal manera que se obtenga o facilite:

- Su agrupación posterior obteniendo leyes mayores.
- Su tratamiento por otros procesos de tal forma que permita extraer el mineral.
- Un producto vendible como resultado del proceso.
- En cualquier caso, para obtener un beneficio.

## 2.2. Concepto de ley

La ley expresa la mayor o menor calidad de un producto, indicando la proporción que tiene en el elemento valioso. Se puede definir como:

“Ley: Cantidad de metal contenida en una mena”.

Con la inclusión amplia bajo el concepto de metal, en el sentido de abarcar la totalidad de las menas, rocas y minerales que son objeto de beneficio en la mineralúrgica.

La ley, también denominada *contenido*, *grado*, o *título*, representa la fracción del componente frente al total de la muestra:

$$\text{Ley (A)} = (\text{contenido kg componente A}) / (\text{peso total de la muestra}).$$

Para un elemento A de  $a_1$  kg dentro de una muestra de  $m_1$  Kg, las expresiones para la ley pueden ser, entre otras las siguientes:

- Expresión en *forma de fracción*; ley =  $a_1 / m_1$
- En *tanto por ciento*; ley =  $(a_1 / m_1) \cdot 100$
- En *p.p.m.*; ley =  $(a_1 / m_1) \cdot 10^6$
- Otras utilidades: *Quilate*<sup>2</sup>, unidad de peso para las perlas y piedras preciosas que equivale a 1 / 140 del peso de una onza (1 onza  $\approx$  28,7 gr). Un quilate = 205 mg.
- Otras expresiones: “plata de ley”, “oro de ley”. El oro de 100% de pureza equivale a 24 quilates. Ej.: Un contenido de oro<sup>3</sup>, en peso, de 18 quilates, representa una ley del 75%.

Se pueden utilizar como convenga, pero siempre de forma homogénea, es decir, todos con el mismo criterio, (todos en tanto por uno, todos %, etc.).

<sup>1</sup> DRAE: *Concentrar*: De con- y centro. Reunir en un centro o punto lo que estaba separado.

<sup>2</sup> Quilatera: plancha perforada con diámetros variables para medir los quilates de las perlas. 0,2.

<sup>3</sup> Para menas valiosas, Au, Ag, etc., se pueden dar expresiones de ley en la forma oz/t, onzas por tonelada (1 onza = 28,7 gr).

La ley normalmente se expresa en función del contenido del producto final vendible, y así para las menas metálicas la ley se suele expresar en función del contenido en el metal (Cu, Fe, Zn, Hg, etc.); para las menas no metálicas se suele expresar en función de la mena principal vendible (contenido de  $\text{CaF}_3$  en las menas de fluorita; menas de diamantes en quilates; carbón según el contenido en cenizas; etc.). Algunos metales que se venden en forma de óxidos, como el wolframio ( $\text{WO}_3$ ) o el uranio ( $\text{U}_3\text{O}_2$ ), se da la ley en función del contenido en óxido.

**Ley teórica máxima:** Esta se obtiene por la proporción que representa el peso de un elemento químico frente al peso molecular del compuesto del que forma parte (fórmula química). *Ejemplo:* La calcopirita que es una de las principales menas de cobre, tiene una formulación química dada por:

Calcopirita:  $\text{S}_2\text{CuFe}$

Con los pesos atómicos: Fe: 55,8; Cu: 63,5; S: 32;  
el peso molecular es de ( $\text{S}_2\text{CuFe}$ ) = 183,3 gr.

La ley máxima en cobre para una mena de calcopirita es de:

$$\text{ley (max Cu)} = 63,5 / 183,3 = 0,3464 \longrightarrow 34,64 \%$$

Igualmente se tiene:

$$\text{ley (max Fe)} = 55,8 / 183,3 = 0,3044 \longrightarrow 30,44 \%$$

### 2.3. Operaciones de concentración, control del proceso

También denominado contabilidad mineralúrgica por el concepto de “balance” que implica el método.

En los procesos de concentración se recaba información para seguir el proceso y para conocer y controlar en todo momento la bondad o rendimiento del mismo, así como para permitir la comparación con otros procesos o técnicas similares. El esquema más sencillo, para un solo componente útil (elemento, mena, etc.), es del tipo que se adjunta a continuación, siendo:

- Alimentación:

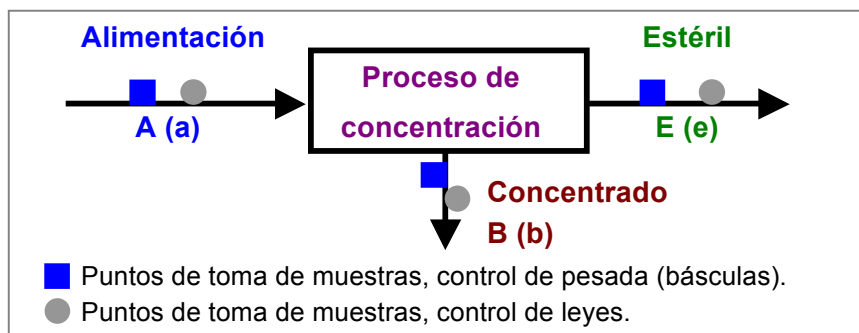
- A: Cantidad de la alimentación en peso, t ó t/h.
- a: Ley en la mena principal.
- $(1 - a)$  : Ley de la ganga en la alimentación.

- Concentrado:

- B: Cantidad de concentrado en peso, t ó t/h.
- b: Ley de la mena principal en el concentrado.
- $(1 - b)$  : Ley de la ganga en el concentrado.

- Estéril:

- E: Cantidad de estéril en peso, t ó t/h.
- e: Ley de la mena principal en el estéril.
- $(1 - e)$  : Ley de la ganga en el estéril.



**Figura 2.1.** Esquema de un proceso de concentración. Toma de Muestras.

Un proceso, tal como el representado en el esquema, con un componente principal útil (mena) y el resto ganga, y con las definiciones anteriores, verifica las relaciones siguientes:

- (1)  $A = B + E$  ; la masa en el proceso se mantiene constante<sup>4</sup> y este principio es:  
 (2)  $A \cdot a = B \cdot b + E \cdot e$  ; aplicable a cada componente.  
 (3)  $A \cdot (1 - a) = B \cdot (1 - b) + E \cdot (1 - e)$  ;

La ecuación (3) es una combinación lineal de (1) y de (2) por lo que el sistema, desde un punto de vista formal, se reduce a las ecuaciones básicas:

- (1)  $A = B + E$  ;  
 (2)  $A \cdot a = B \cdot b + E \cdot e$  ;

El sistema tiene 6 variables: A, B, E, a, b, e, y dos ecuaciones luego exige para su solución conocer al menos 4 de las variables. Esto condiciona las medidas necesarias mínimas. Los sistemas de control del proceso para un esquema como el descrito, de uso corriente en mineralurgia, tienen dos escalones.

**A) Sistema de control mínimo:** Este sistema consiste en la medida de 4 variables, normalmente las tres leyes  $a$ ,  $b$ , y  $e$  y una de las pesadas,  $A$  ó  $B$ , frecuentemente  $B$  que es el elemento vendible. Un segundo sistema de medida es el formado por dos leyes y dos pesadas,  $a$ ,  $b$  y  $A$ ,  $B$  por la dificultad mayor que entraña medir  $E$ , altos volúmenes y  $e$ , leyes muy bajas, que incorpora mayores errores.

Un ejemplo de disposición de estas medidas responde al esquema siguiente:

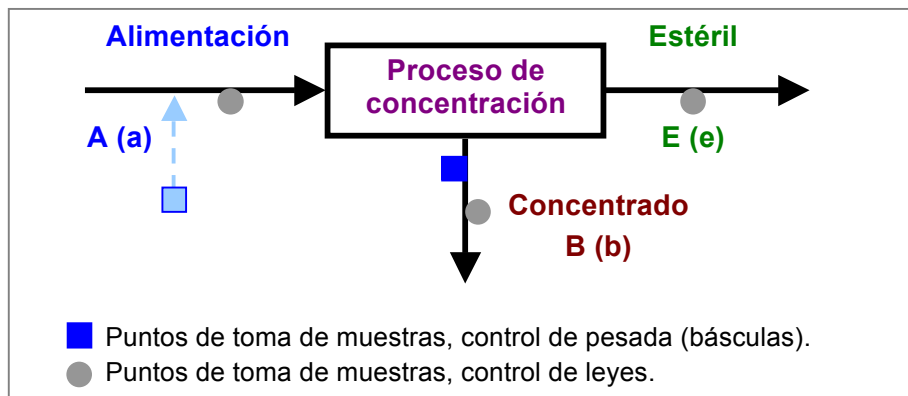


Figura 2.2. Sistema de control mínimo.

**B) Sistema de control entrada-salida:** Este sistema consiste en la medida de 5 variables (4 + 1) normalmente las tres leyes  $a$ ,  $b$ , y  $e$  y dos de las pesadas,  $A$  y  $B$ . Este procedimiento con una variable libre permite controlar el proceso y a la vez controlar la calidad del propio método de control (pesadas más laboratorio).

La diferencia entre el valor calculado para la quinta variable y el valor obtenido por medición debe estar dentro de un rango y su desviación nos dará una indicación del proceso y del método de control.

<sup>4</sup> Las masas en los procesos tienen variaciones conforme a la ley de Einstein,  $E = mc^2$ , y se admiten los valores siguientes según el proceso (relación  $(\Delta m/m)$ ):  
 Físico 0; Mecánico 0; Químico  $10^{-9}$ ; Energía Nuclear  $10^{-3}$ ; Subnuclear  $10^0 = 1$ .

*Ejemplo de aplicación* para controlar la precisión del proceso, incluido el método de medida; comparación entre el valor medido de A y el obtenido en cálculo.

Variables medidas:  $A_{medida}$ ,  $B_{medida}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $e$ .

Variable calculada:  $A_{calculado}$

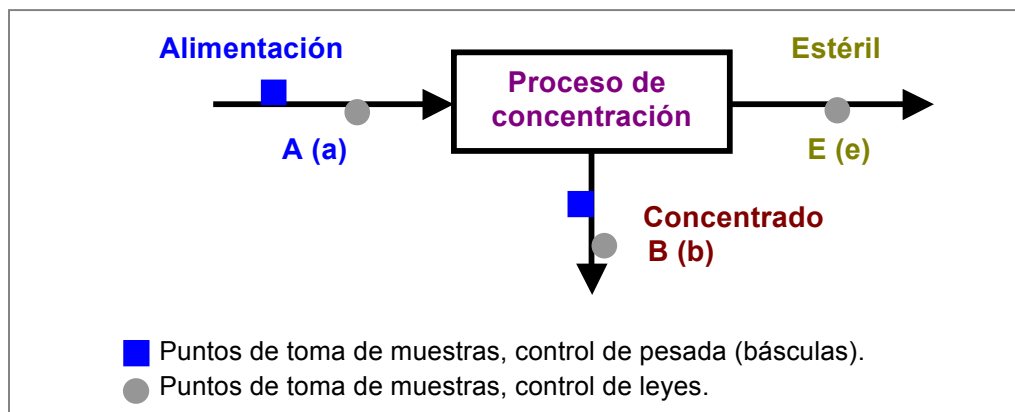
$$Rp = \frac{(a - e) \cdot B_{medida}}{(b - e) \cdot A_{calculada}} ;$$

$$A_{calculada} = B_{medida} \cdot (b - e) / (a - e)$$

$$Ind_{calidad} = \frac{(A_{medida} - A_{calculada})}{A_{medida}} = 1 - \frac{B_{medida}}{A_{medida}} \cdot \frac{(b - e)}{(a - e)}$$

Si el conjunto de las medidas tomadas en el proceso nos da un error, supongamos del 2%, todas las variables y cálculos realizados estarán, al menos, afectadas de similar error.

Un ejemplo de disposición de los puntos de medida responde al esquema siguiente:



**Figura 2.3.** Sistema de control entrada-salida.

En los procesos interesa que las pesadas y las tomas de muestras se realicen de forma periódica, a intervalos regulares, y respetando los mismos puntos de control para obtener series comparables.

Los controles deben de ser periódicos y con la misma periodicidad cada día (cada 3 horas, cada turno, etc.), ya que normalmente la ley (a) es variable según las diferentes condiciones de la explotación y (b) y (e) también son variables según la marcha del lavadero, afectada ésta, entre otras causas, por las modificaciones necesarias para adaptarse a las condiciones cambiante de la alimentación.

## 2.4. Definición de parámetros

Para el seguimiento de un proceso de concentración se definen una serie de parámetros, usados normalmente, que están relacionados con la marcha del proceso y nos indican la calidad del resultado y las variaciones del mismo. Estos parámetros son el resultado de operaciones sencillas sobre valores medidos en el proceso. Los más usuales en tecnología mineralúrgica se dan en la tabla siguiente.

Parámetro	Definición y observaciones
<i>Rendimiento ponderal o rendimiento en peso, <math>R_p</math></i>	
$R_p = B / A$	Es la relación, en peso, entre el concentrado total obtenido (B) en la operación y el valor en peso de la alimentación (A).
<i>Rendimiento metálico o recuperación, <math>R_m</math></i>	
$R_m = B \cdot b / A \cdot a$	Es la fracción de la mena contenida en el concentrado (B·b) con relación al total de mena (A·a) existente en la alimentación. Mena se refiere al producto final valioso, metal en el caso de minas metálicas, mineral útil para menas no metálicas, etc.
<i>Tasa de concentración, ratio de concentración o relación de enriquecimiento, <math>T</math></i>	
$T = b / a$	Es la relación entre la ley de la mena en el concentrado (b) y la ley de la mena en la alimentación (a).
<i>Ratio de concentración, relación de concentración, <math>r_c</math></i>	
$r_c = A / B = 1 / R_p$	Es el inverso del rendimiento ponderal, valor > 1, indica el número de veces que es superior la alimentación (A), expresada en peso, con relación al concentrado obtenido (B), expresado en la misma unidad.
<i>Relaciones inmediatas</i>	
$R_p = 1 / r_c$	$r_c = 1 / R_p$
$R_m = R_p \cdot T$	$T = R_m / R_p$
$E = A - B$	$E = A \cdot (1 - R_p)$

**Tabla 2.1.** Concentración: Definición de parámetros.

Variación de los parámetros definidos anteriormente al modificar el funcionamiento de un proceso. Para una misma alimentación (A) se aumenta la ley del concentrado  $b_1 > b$ . En este supuesto se dan las modificaciones siguientes:

Parámetro	Definición y observaciones
<i>Rendimiento ponderal o rendimiento en peso, <math>R_p</math>;</i>	
	$R_p < 1$
$R_p = B / A$	$b_1 > b$ implica $B_1 < B$ , normalmente $R_{p1} < R_p$ ; $B_1 / A < B / A$
<i>Rendimiento metálico o recuperación, <math>R_m</math>;</i>	
	$R_m < 1$
$R_m = B \cdot b / A \cdot a$	$b_1 > b$ implica $B_1 < B$ $R_{p1} < R_p$ ; $B_1 \cdot b_1 / A \cdot a < B \cdot b / A \cdot a$
<i>Tasa de concentración, ratio de concentración o relación de enriquecimiento, <math>T</math></i>	
$T = b / a$	$b_1 > b$ $T_1 > T$ ; $b_1 / a > b / a$ ; $T > 1$
<i>Ratio de concentración, relación de concentración, <math>r_c</math>;</i>	
	$r_c > 1$
$r_c = A / B = 1 / R_p$	$B_1 < B$ $r_{c1} > r_c$ ; $A / B_1 > A / B$

**Tabla 2.2.** Variación de los parámetros básicos al modificar el proceso  $A = A_1$ ;  $b_1 > b$ .

Existe una economía óptima en la regulación de los procesos de concentración, normalmente es función del tipo de mena y del proceso tecnológica utilizado, en la combinación del grado o pureza del concentrado con la cantidad recuperada. Al aumentar el rendimiento ponderal, mayor re-

cuperación en peso, implica una disminución de la ley del concentrado y a la inversa, al aumentar la ley del concentrado se disminuye la recuperación en peso.

Los límites para el concentrado son  $B < A$  y  $b > a$ ; y siempre  $(b \text{ y } a) \gg e$ .

El control y seguimiento de un proceso, para la obtención de un solo concentrado, se puede realizar mediante un cuadro de mando o cuadro de control tal como el indicado a continuación, en el que se refleja el balance de masas y su distribución, (también es normal expresar los datos en t y en %). Si el proceso es continuo se puede usar la unidad (t/h), unidades de flujo de material.

Elemento	Peso (t)	Fracción en peso	Ley	Contenido de metal (t)	Distribución del metal
Alimentación	<b>A</b> medido	$A / A$ $= 1$	<b>a</b> medido	$A \cdot a$	$A \cdot a / A \cdot a = 1$
Concentrado	<b>B</b> medido	$B/A$ $= R_p$	<b>b</b> medido	$B \cdot b$	$B \cdot b / A \cdot a$ $= R_m$
Estéril	$E = A - B$ $= A \cdot (1 - R_p)$	$E / A$ $= (1 - R_p)$	<b>e</b> medido	$E \cdot e$	$E \cdot e / A \cdot a$
Casilla de control	$B + E$ $\cong A$	$R_p + E/A$ $\cong 1$	$a, b, e < 1$ $(= ?)$	$B \cdot b + E \cdot e$ $\cong A \cdot a$	$R_m + E \cdot e / A \cdot a$ $\cong 1$

**Tabla 2.3.** Balance general de un proceso de concentración.

## 2.5. Resultados expresados en función de las leyes de la alimentación, concentrado y estéril para un concentrado

En los procesos de concentración se conocen con precisión las leyes, a, b, c; obtenidas por muestreo representativo y posterior trabajo en laboratorio, y se obtienen con un cierto error debido a la continuidad del proceso, básculas de pesada continua con errores del 3 – 5%, contenido en humedad del producto, oscilaciones en la regularidad de la carga, etc.

La toma de muestras regular, en los mismos lugares, y la comparación de los valores y parámetros resultantes permiten identificar si el proceso está estabilizado y estacionario, así como identificar las variaciones debidas a cambios en la alimentación (variación de la ley) o en proceso, (recuperaciones diferentes).

En el proceso, tal como se indicó anteriormente, existen dos ecuaciones independientes por la conservación de las masas para el total (lo que entra en el proceso es igual a lo que sale) y para el metal. Existen tres masas, alimentación, concentrado y estéril, luego no es posible resolver de forma matemática exacta el sistema sólo en función de las leyes, pero si es posible obtener el valor de ratios, y entre ellos los definidos para los procesos mineralúrgicos anteriores.

Las ecuaciones son:

$$A = B + E$$

$$A \cdot a = B \cdot b + E \cdot e$$

El sistema se puede resolver por sustitución, pero la solución mediante determinantes permite su generalización a dos, tres, o mas componentes con facilidad lógica.

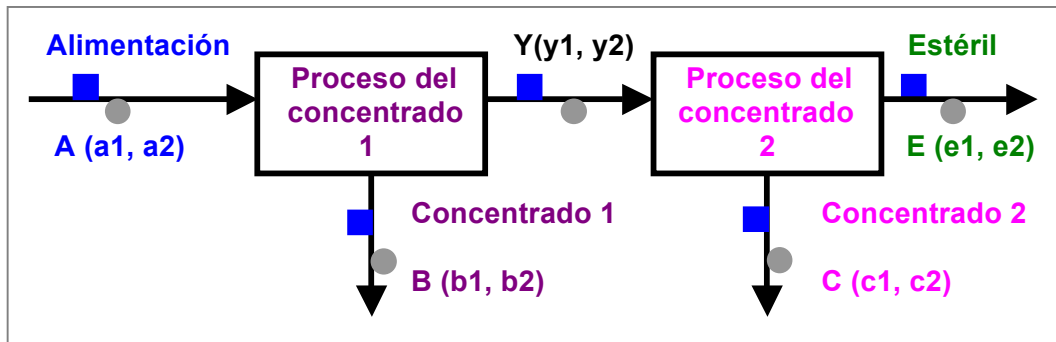
Así se tiene: 
$$B = \frac{A \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & e \end{vmatrix}}; \quad R_p = B / A = (e - a) / (e - b) = (a - e) / (b - e); \quad (5)$$

$$R_m = R_p \cdot (b / a) = (b / a) \cdot (a - e) / (b - e)$$

$$T = b / a ; \quad r_c = 1 / R_p = (b - e) / (a - e)$$

## 2.6. Concentración doble

El esquema para una operación en la que se obtienen dos concentrados, con un diseño de bloques e información entrada-salida, es del tipo:



**Figura 2.4.** Esquema de concentración doble.

Las variables del proceso, siguiendo el mismo criterio utilizado para un concentrado son las indicadas a continuación:

Concepto	Peso t ó t/h	Ley del elemento 1	Ley del elemento 2
Alimentación	A	a1	a2
Concentrado 1	B	b1	b2
Residuos1ª Concentración	Y	y1	y2
Concentrado 2	C	c1	c2
Estéril	E	e1	e2

**Tabla 2.4.** Concentración doble: Definición de variables.

El caso anterior es aplicable a la concentración de Cu / Zn y en este orden. En este sistema, la existencia de óxidos de hierro en porcentajes significativos, actúa como veneno y perjudica la recuperación general del sistema. Es necesario eliminar la mayor parte posible de óxidos de hierro, por ejemplo con una etapa de ciclones.

Los elementos útiles existentes en la alimentación tienen las leyes dadas por a1 y a2 y, sometidos a un proceso de concentración, ambos elementos se distribuyen entre las diferentes salidas del mismo.

<sup>5</sup> Se tiene normalmente  $a \gg e; b \gg e$

El proceso 1 diseñado preferentemente para obtener la mayor recuperación en el elemento 1, y dado la imperfección de todos los procesos técnicos, no puede evitar que parte del contenido del elemento 2 en la alimentación vaya con el concentrado 1 y, tal como vimos para un concentrado, una parte del elemento 1 saldrá con el residuo de esta operación y será la alimentación del proceso 2, distribuyéndose entre el concentrado 2 y el estéril general del proceso.

El sistema admite dos tratamientos en base a la toma de muestras en el punto intermedio entre el proceso 1 y el 2. Si se realiza este muestreo se pueden estudiar como dos sistemas independientes en el que los residuos de la concentración 1 son la alimentación de la concentración 2, y los parámetros son tal como se definieron para un solo componente.

El supuesto general en el que no se toman muestras intermedias responde a las ecuaciones de equilibrio siguiente, donde se aplica para el total y para cada uno de los elementos el balance de masas y los criterios de resolución ya indicados.

- (1)  $A = B + C + E$ .
- (2)  $A \cdot a_1 = B \cdot b_1 + C \cdot c_1 + E \cdot e_1$ .
- (3)  $A \cdot a_2 = B \cdot b_2 + C \cdot c_2 + E \cdot e_2$ .
- (4)  $A \cdot (1 - a_1 - a_2) = B \cdot (1 - b_1 - b_2) + C \cdot (1 - c_1 - c_2) + E \cdot (1 - e_1 - e_2)$ .

La última ecuación (4), corresponde al balance general de la ganga en el proceso, y es una combinación lineal de las ecuaciones 1, 2 y 3 más sencillas, por lo que es información redundante, no aporta información útil.

La solución para el sistema, en función de las leyes, viene dada por:

$$B = \frac{A \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & c_2 & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & c_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & e_2 \end{vmatrix}} = \frac{A \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_1 - e_1 & c_1 - e_1 & e_1 \\ a_2 - e_2 & c_2 - e_2 & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b_1 - e_1 & c_1 - e_1 & e_1 \\ b_2 - e_2 & c_2 - e_2 & e_2 \end{vmatrix}} = \frac{A \cdot \{(a_1 - e_1)(c_2 - e_2) - (a_2 - e_2)(c_1 - e_1)\}}{(b_1 - e_1)(c_2 - e_2) - (b_2 - e_2)(c_1 - e_1)}$$

El rendimiento ponderal y el rendimiento metálico, para el proceso 1 será:

$$Rp(1) = \frac{B}{A} = \frac{\{(a_1 - e_1)(c_2 - e_2) - (a_2 - e_2)(c_1 - e_1)\}}{(b_1 - e_1)(c_2 - e_2) - (b_2 - e_2)(c_1 - e_1)} ; \quad Rm(1) = Rp(1) \cdot b_1 / a_1$$

De igual forma, para el proceso de concentración 2, se tiene:

$$C = \frac{A \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & e_1 \\ b_2 & a_2 & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & c_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & e_2 \end{vmatrix}} = \frac{A \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b_1 - e_1 & a_1 - e_1 & e_1 \\ b_2 - e_2 & a_2 - e_2 & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b_1 - e_1 & c_1 - e_1 & e_1 \\ b_2 - e_2 & c_2 - e_2 & e_2 \end{vmatrix}} = \frac{A \cdot \{(b_1 - e_1)(a_2 - e_2) - (b_2 - e_2)(a_1 - e_1)\}}{(b_1 - e_1)(c_2 - e_2) - (b_2 - e_2)(c_1 - e_1)}$$

El rendimiento ponderal y el rendimiento metálico, para el proceso 2 será:

$$Rp(2) = \frac{C}{A} = \frac{\{(b_1 - e_1)(a_2 - e_2) - (b_2 - e_2)(a_1 - e_1)\}}{(b_1 - e_1)(c_2 - e_2) - (b_2 - e_2)(c_1 - e_1)} ; \quad Rm(2) = Rp(2) \cdot c_2 / a_2$$



Para el estéril, por similitud con el supuesto de un solo concentrado, se tiene:

$E = A - B - C$ ; siendo:  $Rp(1) = B / A$ ;  $Rp(2) = C / A$ ; y por sustitución:

$E = A \cdot \{1 - Rp(1) - Rp(2)\}$ . La fórmula es recurrente para el supuesto de 3, 4, etc., concentrados.

### 2.6.1. Concentración doble. 2º procedimiento. Unión de dos procesos de concentración simple

El estudio de una concentración doble como dos sistemas simples de un solo concentrado, se realiza aplicando las expresiones ya obtenidas para el caso de un concentrado, y mediante la creación formal y el control en el proceso de los residuos de la primera concentración a través de la variable Y con las leyes  $y_1$  e  $y_2$  ya definidas para el metal 1 y 2 respectivamente. La formulación es sencilla.

El esquema para una operación en la que se obtienen dos concentrados, con un diseño de bloques e información entrada-salida, es del tipo ya descrito y responde al esquema general siguiente:

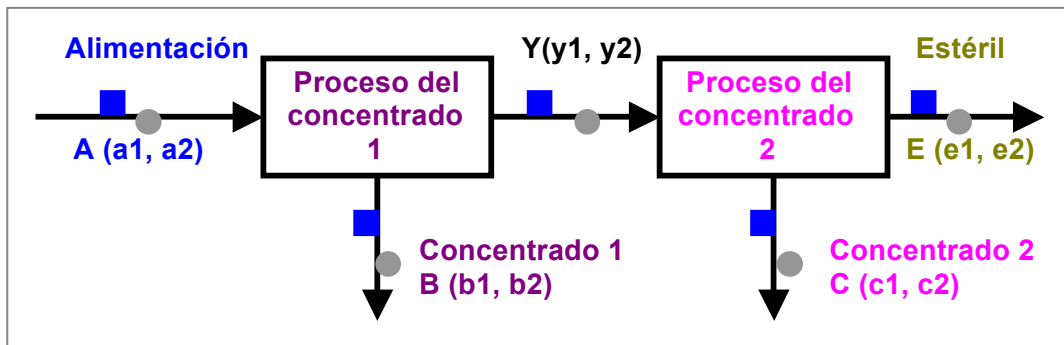
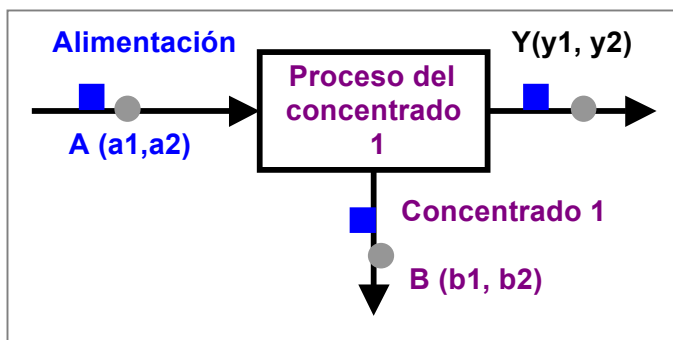


Figura 2.5. Esquema de concentración doble.

Las variables Y,  $y_1$ ,  $y_2$ , medidas en el proceso las leyes y calculados los tonelajes aplicando las expresiones para un concentrado, son *variables de transferencia* que realizan la conexión formal entre el proceso (1) y el proceso (2). La salida de un proceso es la entrada del siguiente.

El desglose como dos procesos independientes y las ecuaciones básicas de los mismos son las siguientes:

#### Proceso (1)



$$(1.1) \quad A = B + Y$$

$$(1.2) \quad A \cdot a_1 = B \cdot b_1 + Y \cdot y_1$$

$$(1.3) \quad A \cdot a_2 = B \cdot b_2 + Y \cdot y_2$$

Figura 2.6. Esquema de concentración doble, proceso 1.

Proceso (2)

$$(2.1) \quad Y = C + E$$

$$(2.2) \quad Y \cdot y_1 = C \cdot c_1 + E \cdot e_1$$

$$(2.3) \quad Y \cdot y_2 = C \cdot c_2 + E \cdot e_2$$

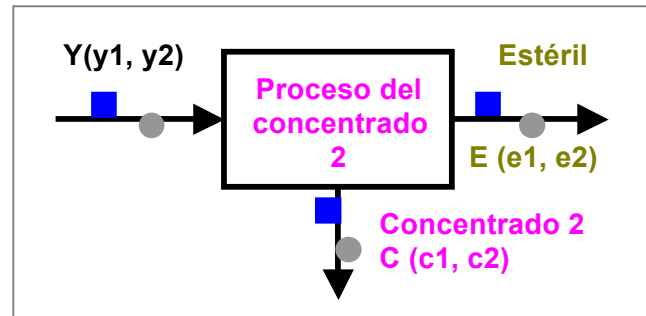


Figura 2.7. Esquema de concentración doble, proceso 2.

Por sustitución del grupo de ecuaciones (2, i) en el conjunto (1, i) se obtienen las mismas expresiones (1), (2) y (3) del apartado anterior 2.5 del estudio general. Este sistema exige la medida de parámetros intermedios en el proceso, práctica que es habitual para conocer de forma independiente la regularidad de los grupos de máquinas, pero aumenta el número de muestras necesarias.

En procesos de cierta complejidad industrial y tonelajes elevados, puede no existir este punto único de toma de muestras intermedio. Es el caso de varias líneas de producción en paralelo con punto de salida único o mezclado. Siempre es posible regular cada proceso de forma independiente.

Los rendimientos ponderal y metálico son los siguientes:

**Proceso (1):**  $R_p(1) = B/A = (a_1 - y_1) / (b_1 - y_1)$ ;  $R_m(1) = R_p(1) \cdot b_1/a_1$

El valor de Y (t ó t/h) se obtiene de la relación  $Y = A \cdot (1 - R_p(1))$  que sustituyendo da:

$$Y = A \cdot (b_1 - a_1) / (b_1 - y_1)$$

**Proceso (2):**  $R'_p(2) = C/Y = (y_2 - e_2) / (c_2 - e_2)$ ;  $R'_m(2) = R'_p(2) \cdot c_2/y_2$

El valor de E (t ó t/h) se obtiene de la relación  $E = Y \cdot (1 - R'_p(2))$ ;

Sustituyendo da  $E = A \cdot \{1 - R_p(1)\} \cdot \{1 - R'_p(2)\}$

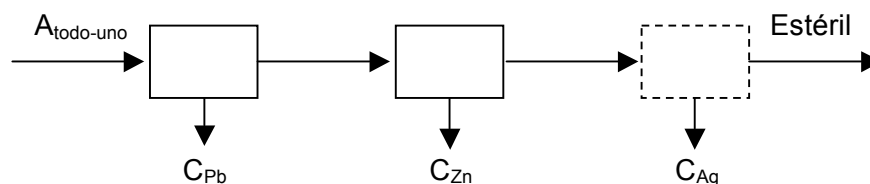
## 2.7. Operaciones de concentración múltiple

Desde un punto de vista formal se puede extrapolar el método anterior de cálculo, pero desde un punto de vista técnico y práctico, el método anterior está condicionado por la precisión y calidad de las medidas, necesitando acotar estas entre márgenes estrechos de precisión, tanto menores cuanto más pequeños son los valores obtenidos en las leyes de los concentrados.

Se transcribe, por el valor didáctico, el ejemplo expuesto en la tabla 72 del libro (manual) de Taggart<sup>6</sup>, para un proceso múltiple de concentración. Los datos, copia literal, son los que se dan en la tabla a continuación.

Con la denominación de ensayo<sup>7</sup>, en minería, se considera la operación por la cual se averigua el metal o metales que contiene la mena, y la proporción en que cada mena forma parte del total (normalmente en unidades de peso).

Las ecuaciones del proceso son, considerando  $C_{Pb}$  la cantidad del concentrado de plomo y ( $Pb$ ) la ley del plomo (ídem para los demás componentes, se obtiene):



<sup>6</sup> Taggart, capítulo 19, Milling calculations, pág. 190 y siguientes.

<sup>7</sup> Ensayo, aplicado a las monedas, identifica los análisis para descubrir su ley.

- (1)  $A = C_{Pb} + C_{Zn} + Est.$
- (2)  $A(Pb) = C_{Pb}(Pb) + C_{Zn}(Pb) + Est(Pb).$
- (3)  $A(Zn) = C_{Pb}(Zn) + C_{Zn}(Zn) + Est(Zn).$
- (4)  $A(Ag) = C_{Pb}(Ag) + C_{Zn}(Ag) + Est(Ag).$

En el proceso, de dos concentrados, existe un tercero elemento (plata), que se reparte entre el concentrado de plomo y el de cinc, con mayor porcentaje en el de plomo y que también interviene en el proceso a efectos de balance.

Se observa, según los elementos utilizados para la solución, la aparición de discrepancias tales como valores negativos o superiores al 100%, que evidentemente, no son posibles en la realidad.

Mediante procedimientos matemáticos-informáticos de ajuste se pueden obtener soluciones reales admisibles para el proceso. Se adjunta un ejemplo de cálculo utilizando excel con la función Solver.

Concepto	Pb %	Zn %	Ag onzas / t	Pesos calculados en (%) – Utilizando los datos (a)			
				M – Pb – Zn	M – Pb – Ag	M – Zn – Ag	Pb – Zn – Ag
<b>Ensayo actual</b>							
Alimentación	11,34	31,85	13,2	100,69	100,4	100,0	102,84
Concentrado de Pb	21,4	9,1	25,1	39,93	40,4	40,0	39,74
Concentrado de Zn	5,4	56,2	6,2	50,9	50,0	50,0	49,68
Colas (estériles)	0,8	1,1	0,6	9,86	10,0	10,0	13,42
<b>Ensayo erróneo posible</b>							
Alimentación	11,3	31,8	13,3	99,93	100,07	*****	*****
Concentrado de Pb	21,3	9,0	25,0	39,93	12,17	*****	*****
Concentrado de Zn	5,4	56,0	6,3	50,2	172,2	*****	*****
Colas (estériles)	0,7	1,0	0,7	9,8	-84,3	*****	*****

(a) M: Ecuación de masas; Pb: Ecuación del plomo; Zn: Ecuación del cinc; Ag: Ecuación para la plata.

**Tabla 2.5.** Libro referenciado, Tabla 72 (\*). Efecto de pequeños errores en ensayos y muestras usadas para calcular los pesos en un proceso de concentración para tres productos.

(\*) Taggart. Handbook of Mining Processig.

### 2.7.1. Solución mediante herramientas de cálculo

Este procedimiento y el ejemplo correspondiente (año 1956) admite una solución con la utilización de técnicas modernas de cálculo; Solución con herramientas tipo solver de excel, programas tipo Matlab o Gams (específico éste último para la búsqueda de soluciones de sistemas múltiples lineales) que aproximan la solución de forma razonada con una dedicación en tiempo y fiabilidad aceptable.

Se adjunta la solución de los sistemas propuestos en el ejemplo de la Tabla 2.5, donde se observa la precisión de estos métodos y el alcance de los mismos.

Llegado a este punto es relevante indicar que la solución económico-matemática de las ecuaciones del sistema resultante, en una operación de concentración múltiple, más de un concentrado, es independiente del orden de los elementos, pero que desde un punto de vista práctico de operación técnica del sistema, es muy importante el orden en que se concentran los diferentes elementos útiles que contiene la mena.

Esto es de tal relevancia que condiciona el rendimiento metálico general de la operación llegando incluso, con un orden erróneo, a ser una operación no rentable. Como ejemplo se puede indicar que en la concentración de una mena compleja de Cu y Zn que contenga pirita (FeS), en una fase previa se elimina el mayor contenido de pirita posible ya que interfiere el los reactivos, luego se concentra el Cu y después el Zn.

Si la operación se hiciese al contrario, primero concentrar el Zn, es muy dificultoso concentrar el Cu posteriormente, el rendimiento baja y se encarece el proceso. El orden no interfiere en la contabilidad matemática, pero si interfiere y mucho en el rendimiento técnico del proceso, incluso llegando a hacerlo no rentable.

Concepto	Ley Pb	Ley Zn	Ley Ag	Ley Ag	Pesos calculados en (%) - Utilizando los datos (a)			
	%	%	oz / t	%	M - Pb - Zn	M - Pb - Ag	M - Zn - Ag	Pb - Zn - Ag
<b>Ensayo actual</b>								
Alimentación	11,34	31,85	13,2	0,03788	100,69	100,4	100	102,84
Concentrado de Pb	21,4	9,1	25,1	0,07204	39,93	40,4	40	39,74
Concentrado de Zn	5,4	56,2	6,2	0,01779	50,9	50	50	49,68
Colas (estériles)	0,8	1,1	0,6	0,00172	9,86	10	10	13,42
<b>Ensayo posible, erroneo</b>								
Alimentación	11,3	31,8	13,3	0,03817	99,93	100,07	****	****
Concentrado de Pb	21,3	9	25	0,07175	39,93	12,17	****	****
Concentrado de Zn	5,4	56	6,3	0,01808	50,2	172,2	****	****
Colas (estériles)	0,7	1	0,7	0,00201	9,8	-84,3	****	****

(a) M: Ecuación de masas; Pb: Ecuación para el plomo; Zn: Ecuación para el cinc; Ag: Ecuación para la plata

Nota: Los valores están dados en %. Esto equivale a considerar una alimentación con un caudal de 100 t/(Ud tiempo) y la diferencia a este valor nos da la precisión del método.

**Ecuaciones generales del sistema, siendo:**

A: Alimentación; Pb: Concentrado de plomo; Zn: Concentrado de cinc; Est: Estériles

(Pb), (Zn), (Ag): Ley del plomo, cinc y plata en A, Pb, Zn y Est.

A.(Pb): Cantidad de plomo en la alimentación

Zn(Ag): Cantidad de plata en el concentrado de Zn

M:  $A = Pb + Zn + Est$

Pb:  $A(Pb) = Pb(Pb) + Zn(Pb) + Est(Pb)$

Zn:  $A(Zn) = Pb(Zn) + Zn(Zn) + Est(Zn)$

Ag:  $A(Ag) = Pb(Ag) + Zn(Ag) + Est(Ag)$

**Solución mediante excel, resolver el sistema**

$A * X = B$  tal que  $X = A^{-1} * B$

A: matriz coeficientes, X: matriz incógnitas

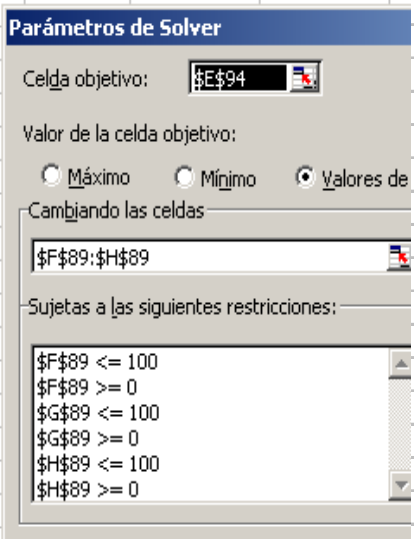
B: términos independientes

**1.- Solución general - Método (A)**

Datos:	Matriz coeficientes (matriz "A" de excel)				Termino independiente			
<b>ensayo actual</b>	Cont. Pb	Con. Zn	Est	Var-error-1	vector "B" de excel			
M:	1	1	1	1	=	100	A	<b>vector B</b>
<b>matriz A</b> Pb:	21,4	5,4	0,8	1	=	1134	A(Pb)	
Zn:	9,1	56,2	1,1	1	=	3185	A(Zn)	
Ag:	0,07204	0,01779	0,00172	1	=	3,7884	A(Ag)	
<b>matriz A<sup>-1</sup></b>	-0,03554	0,050206	-0,004188	-0,010478	Pb:	40,00	<b>X = A<sup>-1</sup> * B</b>	
	-0,014802	-0,007296	0,0187569	0,0033406	Zn:	50,00		
	1,0493248	-0,039491	-0,014562	-0,995272	Est:	10,00		
	0,0010166	-0,003419	-6,97E-06	1,0024092	Var-error-1	0,00		
					A:	100,00		
Datos:	Matriz coeficientes (matriz "A" de excel)				Termino independiente			
<b>ensayo erroneo</b>	Cont. Pb	Con. Zn	Est	Var-error-2	vector "B" de excel			
M	1	1	1	1	=	100	A	
Pb	21,3	5,4	0,7	1	=	1130	A(Pb)	
Zn	9	56	1	1	=	3180	A(Zn)	
Ag	0,07175	0,01808	0,00201	1	=	3,8171	A(Ag)	
	-0,030862	0,0502611	-0,004291	-0,015109	Pb:	40,01	<b>X = A<sup>-1</sup> * B</b>	
	-0,013693	-0,007311	0,0188059	0,0021976	Zn:	50,18		
	1,0441905	-0,039556	-0,014512	-0,990122	Est:	9,79		
	0,0003641	-0,003395	-3,02E-06	1,0030335	Var-error-2	0,02		
					A:	100,00		

Estudio del ejemplo mediante el planteamiento de un sistema de ecuaciones (se busca una solución matemática cuasi-exacta) mediante la consideración de una variable de error.

1.- Solución general - Método (B)								
f(x): Pb + Zn + Est - A = 0					<b>Solución mediante excel - Solver</b> Resolver la función: $F = f(x)^2 + f(y)^2 + f(z)^2 + f(u)^2 = 0$			
f(y): Pb(Pb) + Zn(Pb) + Est(Pb) - A(Pb) = 0								
f(z): Pb(Zn) + Zn(Zn) + Est(Zn) - A(Zn) = 0					<b>Nota:</b> El método busca una solución posible			
f(u): Pb(Ag) + Zn(Ag) + Est(Ag) - A(Ag) = 0								
<b>Datos:</b>		Matriz coeficientes						
<b>ensayo actual</b>		Cont. Pb	Con. Zn	Est	A	Pb	Zn	Est
f(x):		1	1	1	100	40,0000053	49,9999987	10,0000055
f(y):		21,4	5,4	0,8	1134			
f(z):		9,1	56,2	1,1	3185	A:	100,00001	
f(u):		0,072037	0,017794	0,001722	3,7884			
		f(x) =	9,54E-06	F =	1,28E-08			
		f(y) =	0,000111					
		f(z) =	-1,8E-05					
		f(u) =	3,7E-07					
<b>Datos:</b>		Matriz coeficientes						
<b>ensayo erroneo</b>		Cont. Pb	Con. Zn	Est	A	Pb	Zn	Est
f(x):		1	1	1	100	40,0073	50,1807	9,8119
f(y):		21,3	5,4	0,7	1130			
f(z):		9	56	1	3180			A: 99,9999569
f(u):		0,07175	0,018081	0,002009	3,8171			
		f(x) =	-4,3E-05	F =	0,000383			
		f(y) =	0,000121					
		f(z) =	-0,00072					
		f(u) =	-0,01955					
				f(z) =	-0,00072			
				f(u) =	-0,01955			



2.- Soluciones parciales						
	<b>ensayo actual</b>		M - Pb - Zn			
M	1	1	1	=	100	A
Pb	21,4	5,4	0,8	=	1134	A(Pb)
Zn	9,1	56,2	1,1	=	3185	A(Zn)
	-0,03552893	0,05017027	-0,00418844		40,00	
	-0,01480524	-0,00728425	0,01875694		50,00	
	1,05033416	-0,04288602	-0,0145685		10,00	
	<b>ensayo erroneo</b>		M - Pb - Zn			
M	1	1	1	=	100	A
Pb	21,3	5,4	0,7	=	1130	A(Pb)
Zn	9	56	1	=	3180	A(Zn)
	-0,03085631	0,05020997	-0,00429067		40,01	
	-0,01369363	-0,00730327	0,01880592		50,18	
	1,04454994	-0,0429067	-0,01451525		9,81	
					A: 100,00	
	<b>ensayo actual</b>		M - Pb - Ag			
M	1	1	1	=	100	A
Pb	21,4	5,4	0,8	=	1134	A(Pb)
Ag	0,072037	0,017794	0,001722	=	3,7884	A(Ag)
	-0,64661654	2,10526316	-602,551675		40,00	
	2,72180451	-9,21052632	2698,38359		50,00	
	-1,07518797	7,10526316	-2095,83191		10,00	
					A: 100,00	
	<b>ensayo erroneo</b>		M - Pb - Ag			
M	1	1	1	=	100	A
Pb	21,3	5,4	0,7	=	1130	A(Pb)
Ag	0,07175	0,01808	0,00201	=	3,8171	A(Zn)
	-0,54782609	4,86956522	-1424,02666		12,17	
	2,25217391	-21,1304348	6241,47856		172,17	
	-0,70434783	16,2608696	-4817,4519		-84,35	
					A: 100,00	
	<b>ensayo actual</b>		M - Zn - Ag			
M	1	1	1	=	100	A
Zn	9,1	56,2	1,1	=	3185	A(Zn)
Ag	0,072037	0,017794	0,001722	=	3,7884	A(Ag)
	-0,02061066	-0,00429069	14,7098849		40,00	
	-0,01697123	0,01877179	-2,13573646		50,00	
	1,03758189	-0,01448109	-12,5741484		10,00	
	<b>ensayo erroneo</b>		M - Zn - Ag			
M	1	1	1	=	100	A
Zn	9	56	1	=	3180	A(Zn)
Ag	0,07175	0,018081	0,002009	=	3,8171	A(Ag)
	-0,02547031	-0,00433537	14,8360789		40,30	
	-0,01447705	0,01881242	-2,15797511		50,14	
	1,03994736	-0,01447705	-12,6781038		9,56	
					A: 100,00	

Soluciones parciales para diferentes planteamientos; el método exacto no existe dado que las variables y sus medidas llevan en si mismas una componente de desviación o incertidumbre.

<b>Ejercicio 1.-</b>	Se producen, en un proceso de concentración, 249,2 t de concentrado con un 42 % de ley en el metal. La alimentación tiene una ley de 3,5 % y los estériles tienen 0,79 % de ley.																									
1.-	Obtener los parámetros generales de un proceso de concentración. (rendimiento ponderal, rendimiento metálico, tasa de concentración y el radio de concentración)																									
2.-	Hacer un balance general del proceso indicando tonelajes, leyes y distribución del metal																									
3.-	Se mantiene la alimentación constante y se mejora el sistema de recuperación. Se obtiene una ley en el concentrado del 47 %. Calcular el concentrado y los nuevos valores para Rm y Rp																									
3.-	El control de la alimentación, mediante pesada continua, da un valor medio de 3.830 t / día. Calcular el error general del sistema a través del índice de calida ( La precisión de un sistema correcto con, control diario por turno, correctamente realizado, está entre el 0,5 y el 1% en un mes ).																									
<b>Solución:</b>	Esquema del proceso	Se realiza un control del tipo entrada / salida																								
	$A = 3.830 \text{ t/día}$ $a(\%) = 3,5$ <b>Proceso de concentración</b> $e(\%) = 0,79$ $E = ?$																									
	$B = 249,2 \text{ t/h}$ $b(\%) = 42$ El concentrado, elemento vendible, se controla de forma precisa																									
1.-	Rendimiento ponderal																									
	$R_p = \frac{B}{A} = \frac{249,2}{3789,5} = 0,0658 = 6,5761 \%$ $A = B / R_p$ $A = 3789,5 \text{ t/h}$																									
	Rendimiento metálico																									
	$R_m = R_p \times \frac{b}{a} = 0,0658 \times \frac{42}{3,5} = 0,7891 = 78,913 \%$																									
	Tasa de concentración	Radio de concentración																								
	$T = \frac{b}{a} = \frac{42}{3,5} = 12$	$r = \frac{1}{R_p} = 15,207$																								
2.-	Balance general del proceso (2)																									
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>Concepto</th> <th>Peso (t)</th> <th>Peso (%)</th> <th>Ley (%)</th> <th>Metal (t)</th> <th>Distribución del metal (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Alimentación</td> <td><math>A = B/R_p</math> 3789,5</td> <td><math>A = B + E</math> 100</td> <td>medido 3,5</td> <td>A.a 132,63</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>Concentrado</td> <td>medido 249,2</td> <td><b>Rp</b> 6,5761</td> <td>medido 42</td> <td>B.b 104,66</td> <td><b>Rm</b> 78,913</td> </tr> <tr> <td>Estéril</td> <td><math>E = A - B</math> 3540,3</td> <td>93,424</td> <td>medido 0,79</td> <td>E.e 27,968</td> <td>21,087</td> </tr> </tbody> </table>	Concepto	Peso (t)	Peso (%)	Ley (%)	Metal (t)	Distribución del metal (%)	Alimentación	$A = B/R_p$ 3789,5	$A = B + E$ 100	medido 3,5	A.a 132,63	100	Concentrado	medido 249,2	<b>Rp</b> 6,5761	medido 42	B.b 104,66	<b>Rm</b> 78,913	Estéril	$E = A - B$ 3540,3	93,424	medido 0,79	E.e 27,968	21,087	
Concepto	Peso (t)	Peso (%)	Ley (%)	Metal (t)	Distribución del metal (%)																					
Alimentación	$A = B/R_p$ 3789,5	$A = B + E$ 100	medido 3,5	A.a 132,63	100																					
Concentrado	medido 249,2	<b>Rp</b> 6,5761	medido 42	B.b 104,66	<b>Rm</b> 78,913																					
Estéril	$E = A - B$ 3540,3	93,424	medido 0,79	E.e 27,968	21,087																					
3.-	Aplicando las expresiones anteriores para el valor de b 47 % ; se obtiene: proceso(3)																									
	<table border="1" style="width: 50%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>Proceso</th> <th>(3)</th> <th>(2)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Rp(3) =</td> <td>0,0586</td> <td>0,0658</td> </tr> <tr> <td>Rm(3) =</td> <td>0,7875</td> <td>0,7891</td> </tr> <tr> <td>B = A.Rp</td> <td>222,24</td> <td>249,2</td> </tr> <tr> <td><math>(B_3 - B_1) / B_1 =</math></td> <td colspan="2">-10,82 %</td> </tr> </tbody> </table>	Proceso	(3)	(2)	Rp(3) =	0,0586	0,0658	Rm(3) =	0,7875	0,7891	B = A.Rp	222,24	249,2	$(B_3 - B_1) / B_1 =$	-10,82 %											
Proceso	(3)	(2)																								
Rp(3) =	0,0586	0,0658																								
Rm(3) =	0,7875	0,7891																								
B = A.Rp	222,24	249,2																								
$(B_3 - B_1) / B_1 =$	-10,82 %																									
	<table border="1" style="width: 50%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>Concepto</th> <th>Peso (t)</th> <th>Peso (%)</th> <th>Ley (%)</th> <th>Metal (t)</th> <th>Distribución del metal (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Alimentación</td> <td>medido 3789,5</td> <td><math>A = B + E</math> 100</td> <td>medido 3,5</td> <td>A.a 132,63</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>Concentrado</td> <td><math>B = A.R_p</math> 222,24</td> <td><b>Rp</b> 5,8645</td> <td>medido 47</td> <td>B.b 104,45</td> <td><b>Rm</b> 78,752</td> </tr> <tr> <td>Estéril</td> <td><math>E = A - B</math> 3567,3</td> <td>94,135</td> <td>medido 0,79</td> <td>E.e 28,181</td> <td>21,248</td> </tr> </tbody> </table>	Concepto	Peso (t)	Peso (%)	Ley (%)	Metal (t)	Distribución del metal (%)	Alimentación	medido 3789,5	$A = B + E$ 100	medido 3,5	A.a 132,63	100	Concentrado	$B = A.R_p$ 222,24	<b>Rp</b> 5,8645	medido 47	B.b 104,45	<b>Rm</b> 78,752	Estéril	$E = A - B$ 3567,3	94,135	medido 0,79	E.e 28,181	21,248	
Concepto	Peso (t)	Peso (%)	Ley (%)	Metal (t)	Distribución del metal (%)																					
Alimentación	medido 3789,5	$A = B + E$ 100	medido 3,5	A.a 132,63	100																					
Concentrado	$B = A.R_p$ 222,24	<b>Rp</b> 5,8645	medido 47	B.b 104,45	<b>Rm</b> 78,752																					
Estéril	$E = A - B$ 3567,3	94,135	medido 0,79	E.e 28,181	21,248																					
4.-	Error del control																									
	$Ind\_calida(1) = 1 - (B_{med} / A_{med}) * (1 / R_p) = 0,0106 \rightarrow 1,06 \%$ ref. B1, A1																									
	$Ind\_calida(1) = 1 - (B_{med} / A_{med}) * (1 / R_p) = 0,0000 \rightarrow 0,00 \%$ no hay ref. de B(3)																									