Introducción a la Teoría de Automátas

Universidad de Cantabria

Primeras Consideraciones

- Fijar un modelo de cálculo que haga referencia a los fundamentos de la comunicación y el lenguaje.
- Todo cálculo algorítmico consiste en un proceso de comunicación:
  Algo es emitido (input), manipulado (transmisión) y respondido (output)
- Orientado hacia lo que es susceptible de ser comunicado (tanto el input como el output son objetos comunicables).

Un Poco de Historia

Círculo de Viena, donde la participación de Hahn fue central y al que Gödel se incorpora

Este influyente conjunto de matemáticos y lógicos se ve roto por el nazismo pero influye muy notablemente la filosofía y la lógica de primeros de siglo (hasta finales de los 30).

Primera cuestión:

¿ Qué es susceptible de ser comunicado?.

Un Poco de Historia

Círculo de Viena, donde la participación de Hahn fue central y al que Gödel se incorpora

Este influyente conjunto de matemáticos y lógicos se ve roto por el nazismo pero influye muy notablemente la filosofía y la lógica de primeros de siglo (hasta finales de los 30).

Primera cuestión:

¿ Qué es susceptible de ser comunicado?.

Un Poco de Historia

Esta pregunta se encuentra ligada al desarrollo de las computadoras digitales, cuyo primer modelo se desarrolla en 1946.

No solo es necesario conocerlo, sino tambien necesario hacerlo de forma automática.

Una respuesta posible :

Es comunicable todo aquello expresable en un alfabeto finito.

A partir de esta idea consideraremos :
Σ : un conjunto finito que denominaremos alfabeto
Σ^* : el conjunto de todas las palabras expresables sobre este alfabeto finito.

Una respuesta posible :

Es comunicable todo aquello expresable en un alfabeto finito.

A partir de esta idea consideraremos :
Σ : un conjunto finito que denominaremos alfabeto
Σ^* : el conjunto de todas las palabras expresables sobre este alfabeto finito.

Dos Precisiones Importantes

Lo comunicado (el significante) es una palabra sobre un alfabeto finito, pero el significado (la componente semántica) no es claramente finito.

Ejemplo

Sea D^1 el conjunto de números reales dado por:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$$

El conjunto no es finito, ni contable y su existencia es discutible

Si $\mathbb{R}$ existe, expreso un conjunto cuyo cardinal no es numerable mediante una expresión sobre un alfabeto finito.
Los significantes están sobre un alfabeto finito, no así los significados.

Dos Precisiones Importantes

Usaremos el lenguaje de la Teoría de la Recursividad.

Definición (Notaciones)

Sea Σ un conjunto finito que llamaremos alfabeto.

- *Una palabra sobre Σ es una lista finita de símbolos de Σ. Podemos formalmente identificar las listas $x = x_1 \cdots x_n$ de símbolos ($x_i \in \Sigma$) con los elementos del producto cartesiano Σ^n. Se denota $\mid x \mid = n$ la longitud de la palabra $x_1 \cdots x_n$.*
- *El conjunto de todas las palabras sobre el alfabeto Σ se denotará mediante Σ^* y podemos identificarlo con la unión disjunta*

$$\Sigma^* = \dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} \Sigma^n$$

- *Los subconjuntos L de Σ^* se denominan lenguajes*

Dos Precisiones Importantes

Insistamos en la notación $x_1 \cdots x_n$ para expresar la palabra $(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma^n$. Los ")" y las ", " pudieran ser elementos del alfabeto.

Ejemplos

- Identificación obvia, cuando $\Sigma = \{a\}$ es un alfabeto de una sola palabra, entre Σ^* y $\mathbb{N}$.
- "El Quijote", entendido como el libro completo es, para nuestro contexto una palabra sobre el alfabeto del castellano, i.e. $\{a, b, \ldots, z\}$, $\{A, B, \ldots, Z\}$, $\{?, Á, !, ``," , ``." , \dot{:}, ``\sharp" ..\}$, donde las "," y "." son los obvios, $\dot{:}$ es el "punto-y-aparte" y $\sharp$ son los espacios entre palabras.

Otro Ejemplo

El “Otello” de Shakespeare no es una palabra del castellano
Es una palabra sobre el alfabeto castellano que no es un alfabeto, sino un lenguaje $\mathcal{C} \subseteq \Sigma^*$ que se incluye las palabras incluidas en el Diccionario de la RAE (ver autómatas finitos).
El “Otello” pertenece al lenguaje inglés $I \subseteq \Sigma^*$.

Variarán tanto los alfabetos como los conjuntos llamados lenguajes, teniendo la comunicación occidental en común el alfabeto. La simplicidad del alfabeto no tiene relación con la simplicidad del lenguaje .

Primeras Concreciones sobre lo Computable

¿Cómo podemos modelar **qué es un problema**?
¿Qué es resolver un problema?
¿Qué es hacerlo de forma eficiente?

Resolver un problema es encontrar un algoritmo

Definición

- *Todo algoritmo evalúa una correspondencia $f : D \longrightarrow S$ donde D son los datos y S las soluciones.*
- *Un problema es una correspondencia $f : D \longrightarrow S$ entre dos conjuntos. Resolver un problema es evaluar f.*
- *Un problema $f : D \longrightarrow S$ es susceptible de ser resuelto solamente si D y S son lenguajes expresables sobre un alfabeto finito. Uniendo alfabetos, uno podría suponer que son lenguajes sobre un alfabeto común Σ.*
- *Un problema es, por tanto, evaluar una correspondencia $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$. Los elementos del dominio (los datos) se suelen llamar inputs (también son susceptibles de ser llamados inputs aquellos $x \in \Sigma^*$ tales que no existe $f(x)$). Los elementos del rango de f son las soluciones y se denominan outputs.*

Problemas decisionales

Una subclase de problemas: **problemas decisionales.**

Se trata de evaluar funciones parcialmente definidas $f : \Sigma^* \longrightarrow \{0, 1\}$.

La idea es resolver los problemas que tienen respuesta positiva o negativa.

Uno de los problemas a estudiar es si una palabra se encuentra dentro del lenguaje.
Por ejemplo, dado un texto:
¿Es fácil reconocer si está en lenguaje español sintácticamente y con sentido perfecto mediante un computador?

No todos los lenguajes tienen esta propiedad.

Un lenguaje L se denominará lenguaje recursivamente enumerable cuando se puede decidir a través de un algoritmo la pertenencia de una palabra a un lenguaje.

Su definición formal es que su función característica sea parcialmente computable, i.e. cuando $f : \Sigma^* \longrightarrow \{0, 1\}$ sea computable y:

- $L \subseteq D(f)$, representando D el dominio de f
- f(L) =1

Un lenguaje L se denominará lenguaje recursivamente enumerable cuando se puede decidir a través de un algoritmo la pertenencia de una palabra a un lenguaje.
Su definición formal es que su función característica sea parcialmente computable, i.e. cuando $f : \Sigma^* \longrightarrow \{0, 1\}$ sea computable y:

- $L \subseteq D(f)$, representando D el dominio de f
- f(L) =1

Problemas Decisionales

Para perfilar la noción de función computable y problema resoluble por un algoritmo necesitamos más definiciones. Empezaremos manipulando varios objetos de Σ^*, estos nos ayudaran a definir lenguajes y resolver algunos problemas básicos.