Tema 1:
Teoría de la Probabilidad

Teoría de la Comunicación

Curso 2007-2008

Contenido

Contenido

Tipos de Experimentos

- **Deterministas**: Resultado Previsible con Certidumbre.
  - Ejemplo: Averiguar espacio recorrido por un cuerpo en caída libre en el vacío al cabo de un cierto tiempo t.

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

- **Aleatorios**: Resultado No Previsible con Certidumbre.
  - Posibles Causas:
    - Leyes desconocidas (ruido en comunicación).
    - El proceso de medida afecta al desarrollo del experimento.
    - Experimento intrínsecamente aleatorio.
  - Ejemplo: Cuerpo en caída libre con fricción del aire, variación de g con la altura, ... $\Rightarrow s = \frac{1}{2}gt^2$ será tan solo una aproximación del valor real.

Definiciones y Notación

- **Experimento Aleatorio**: $\varepsilon =$ fenómeno físico + observación.
- Dado un Experimento Aleatorio ε, obtendremos un **resultado** al efectuar una **realización**.
- **Suceso**: Conjunto de resultados de un ε. Se denota con letras mayúsculas.
  - Un suceso se verifica si, tras la realización de un experimento, el resultado pertenece a dicho suceso.
- **Suceso Elemental**: Suceso formado por un único resultado.
  - Si suceso es un *conjunto* $\Rightarrow$ Suceso elemental es *conjunto unitario*.
- **Suceso Seguro o Espacio Muestral** Ω: El formado por todos los resultados del experimento.

Ejemplos

- ε_1: Giro de una ruleta y observación del número obtenido.

$$\Omega_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 36\} \Rightarrow |\Omega_1| = 37 \text{ sucesos elementales}$$
$$A = \{\text{“obtener número impar”}\} = \{1, 3, 5, \ldots, 35\} \Rightarrow |A| = 18$$

- ε_2: Giro de una ruleta y observación del color.

$$\Omega_2 = \{\text{“rojo”}, \text{“negro”}\} \Rightarrow |\Omega_2| = 2$$

- ε_3: Giro hasta obtener 0 y observamos el nº de intentos

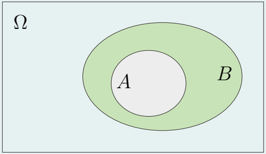
$$\Omega_3 = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}^+ \Rightarrow |\Omega_3| = \infty$$
$$A = \{\text{“nº intentos”} \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow |A| = 5$$

- ε_4: Giro y observación del tiempo que tarda en parar

$$\Omega_4 = [0, \infty) = \mathbb{R}^+ \qquad A = \{3 \leq t < 7\} = [3, 7)$$

Relaciones

- **Implicación o Inclusión**:
  - $A \subset B$ sii (si y solo si) siempre que se verifica A se verifica B.
  - Ejemplo: $A = \{$"Alumno Ing. Teleco"$\} \subset B = \{$"Universitario"$\}$.
  - Notación de Venn:

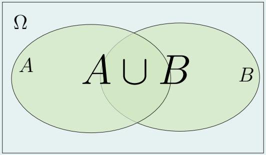


- **Igualdad**:

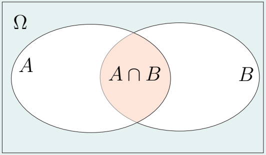
$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \text{ y } B \subset A$$

Operaciones

- **Unión ($\cup$) o Suma ($+$):**
  - Si se verifica $A \cup B$ se verifica A **o** se verifica B.

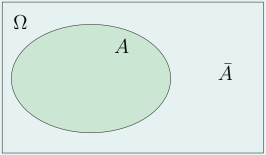


- **Intersección ($\cap$) o Producto ($\cdot$):**
  - $A \cap B$ se verifica si y solo si se verifica A **y** se verifica B.

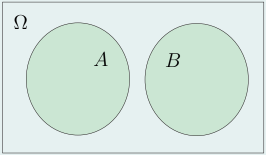


Otras Definiciones

- **Suceso Imposible ($\emptyset$)**: Aquel que no se verifica nunca:
  - Para todo A: $A \cup \emptyset = A$ $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$
- **Suceso Contrario o Complementario $\bar{A}$**: Dado A, se verifica $\bar{A}$ si y solo si no se verifica A.
- **Sucesos Incompatibles**: No se verifican simultáneamente $A \cap B = \emptyset$.



Suceso Contrario



Sucesos Incompatibles

Contrario $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Incompatible

Consideremos un conjunto $\mathcal{F}$ de sucesos[1]

Álgebra de Sucesos

- **Intuición**:
  - Dados varios sucesos en $\mathcal{F}$, es deseable que también estén en $\mathcal{F}$ tanto sus contrarios, como sus uniones e intersecciones.
- **Definición Formal**: $\mathcal{F}$, conjunto finito de sucesos, es un álgebra de sucesos sii
  - $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$.
  - $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$.
  - $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.

σ-Álgebra o Álgebra de Borel

- $\mathcal{F}$, conjunto infinito numerable de sucesos, es un σ-álgebra sii
  - $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$.
  - $A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A}_i \in \mathcal{F}$.
  - $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

[1] Matemáticamente, $\mathcal{F}$ es una colección de subconjuntos de Ω.

Álgebra de Boole

- Un álgebra de sucesos, o un σ-álgebra, con las operaciones $\cup$, $\cap$ es un álgebra de Boole.
- **Propiedades**:
  - **Cierre**: $A \cap B \in \mathcal{F} \quad ; \quad A \cup B \in \mathcal{F}$.
  - **Conmutativa**: $A \cap B = B \cap A \quad ; \quad A \cup B = B \cup A$.
  - **Asociativa**:
    $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad ; \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
  - **Distributiva**:
    $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad ; \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  - **Elemento Neutro**: $A \cup \emptyset = A \quad ; \quad A \cap \Omega = A$.
  - **Elemento Contrario**: $A \cup \bar{A} = \Omega \quad ; \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$.
  - **Idempotencia**: $A \cup A = A \quad ; \quad A \cap A = A$.
  - **Leyes de Morgan**[a]: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad ; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

[a] En general se satisface el **Principio de Dualidad**: Si en una igualdad se reemplaza $\cup$ por $\cap$, $\cap$ por $\cup$, Ω por $\emptyset$ y $\emptyset$ por Ω la igualdad se mantiene.

Contenido

Población de n elementos. Se trata de formar subpoblaciones (agrupaciones) de r elementos y evaluar cuantas hay.

Sin Repetición. Elementos a, b, c

- **Variaciones**:
  - Orden y Naturaleza ($r = 2.\ ab, ac, bc, ba, ca, cb$).

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- **Combinaciones**:
  - Naturaleza ($r = 2.\ ab, ac, bc$). Ej: Primitiva.

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

- **Permutaciones**:
  - n elementos diferenciados por el orden ($abc, acb, bac, bca, cab, cba$).

$$P_n = V_{n,n} = n!$$

Con Repetición

- **Variaciones**:
  - Ej: Quiniela, Lotería ($r = 2$. $ab, ac, bc, ba, ca, cb, aa, bb, cc$).

$$VR_{n,r} = n^r$$

- **Combinaciones**: ($r = 2$. ab, ac, bc, aa, bb, cc).

$$CR_{n,r} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$$

- **Permutaciones**:
  - Partimos de n elementos y formamos agrupaciones de r.
  - Elemento i-ésimo aparece r_i veces ($r = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$).
  - Ej: $r_a = 0, r_b = 1, r_c = 2$. bcc, cbc, ccb.

$$PR_r^{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \frac{r!}{r_1! r_2! \ldots r_n!}$$

Contenido

Definición Clásica o de Laplace

- **Definición**:

$$P(A) = \frac{\text{nº casos favorables a } A}{\text{nº casos posibles}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- **Ventaja**: Definición *a priori*. No requiere experimentación.
- **Inconvenientes**:
  - Requiere Ω finito.
  - Exige sucesos elementales equiprobables.
  - Ejemplos:
    - ε_1: Lanzamiento de dos dados y observación de la suma. $P(A) = 1/11$.
    - ε_2: Lanzamiento de dos dados indistinguibles y observación de las puntuaciones individuales. $P(A) = 1/7$.
    - ε_3: Lanzamiento de dos dados distinguibles y observación de las puntuaciones individuales. $P(A) = 1/6$.

Definición Frecuencial (Von Mises, 1930)

- **Definición**:
  - Frecuencia relativa del suceso A:

$$f_A = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ veces que se verifica } A}{\text{n}^{\text{o}} \text{ veces que se realiza el experimento}} = \frac{n_A}{n}$$

  - **Probabilidad**:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_A$$

- **Ventaja**:
  - Conexión con la Ley de los Grandes Números.
- **Inconvenientes**:
  - Poca utilidad. Requiere un nº elevado de experimentos.
  - Dificultades matemáticas para el desarrollo de la Teoría de la Probabilidad.

Definición Axiomática

- Axiomas de Kolmogorov
  - Dados ε, Ω, $\mathcal{F}$. Se define la función probabilidad

$$\begin{array}{rccc} P\colon & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A \in \mathcal{F} & \longrightarrow & P(A) \in \mathbb{R} \end{array}$$

    que verifica los siguientes axiomas:

    i) $P(A) \geq 0, \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$
    ii) $P(\Omega) = 1.$
    iii) $A, B \in \mathcal{F}, \quad A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B).$

  - La terna $< \Omega, \mathcal{F}, P >$ se denomina **Espacio Probabilístico**.

- **Propiedades** (Deducidas de los Axiomas):

  1) $P(\emptyset) = 0.$
  2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A).$
  3) $A \subset B \quad \Rightarrow P(A) \leq P(B).$
     - Corolario:

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad A \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(\Omega) = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

  4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

Definición Axiomática. Ejemplos

- Ejemplo 1:
  - Ω discreto y finito. N sucesos elementales.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\} = \{\omega_1\} \cup \ldots \cup \{\omega_N\} \quad \omega_i \cap \omega_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

  - Suponemos que conocemos $P(\omega_i) = p_i$. Entonces:

$$P(\Omega) = P(\cup_{i=1}^{N} \omega_i) \stackrel{iii)}{=} \sum_{i=1}^{N} P(\omega_i) = \sum_{i=1}^{N} p_i \stackrel{ii)}{=} 1$$

  - Supongamos A unión de M sucesos elementales

$$P(A) = P(\omega_{k_1} \cup \omega_{k_2} \cup \omega_{k_M}) \stackrel{iii)}{=} p_{k_1} + p_{k_2} + \ldots + p_{k_M}$$

    - Caso particular: N sucesos elementales equiprobables ($p_i = p = 1/N$)

$$P(A) = Mp = \frac{M}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad \text{Definición Clásica !!}$$

Definición Axiomática. Ejemplos

- Ejemplo 2:
  - Ω infinito numerable. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N, \ldots\}$

$$P(\Omega) = P(\cup_{i=1}^{\infty}\omega_i) \stackrel{iii)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \stackrel{ii)}{=} 1$$

  - No hay diferencia con el caso anterior.
  - **Conclusión**: En un espacio muestral discreto, únicamente es necesario conocer las probabilidades de los sucesos elementales.

Nota

Serie geométrica: $a_{k+1} = a_k r$, con $r =$razón.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \frac{a_n}{1-r}$$

Serie aritmética: $a_{k+1} = a_k + d$, con $d =$diferencia.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Definición Axiomática. Ejemplos

- Ejemplo 3:
  - Si Ω es un conjunto no numerable, sus probabilidades no pueden ser determinadas en función de las probabilidades elementales.
  - Ejemplo: Recta real $\Omega = \mathbb{R}$.
    - Espacio probabilístico formado por sucesos del tipo
    $$A = \{x_1 \leq x \leq x_2\},$$
    así como sus uniones e intersecciones.
    - Estos son los únicos sucesos de interés.

$$x_1 \to x_2 \quad \Rightarrow \quad P(A) \to 0 \quad \text{pero no imposible !!.}$$

Contenido

Probabilidad Condicional

- Espacio probabilístico $< \Omega, \mathcal{F}, P >$
- **Definición**: Se define la probabilidad de A condicionada a M, y se denota como $P(A|M)$, al cociente

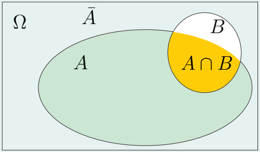
$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$$

donde se asume $P(M) \neq 0$.

Interpretación frecuencial. Ejemplo

- Encuesta a una población de N personas $\Rightarrow |\Omega| = N$.
  $A = \{\text{“es un hombre”}\} \quad \rightarrow \quad n_A \quad \Rightarrow \quad P(A) \simeq \frac{n_A}{N}$
  $B = \{\text{“mide más de 1.85 metros”}\} \quad \rightarrow \quad n_B \quad \Rightarrow \quad P(B) \simeq \frac{n_B}{N}$
- Observamos que n_{AB} personas son hombres y miden más de 1.85. $P(A \cap B) \simeq \frac{n_{AB}}{N}$.
- Probabilidad de que una persona de más de 1.85 sea hombre:

$$P(A|B) \simeq \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{N}}{\frac{n_B}{N}} \simeq \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Probabilidad Condicional

- Axiomas de Kolmogorov:
  - i) $P(A|M) = \frac{P(A\cap M)}{P(M)} \geq 0.$
  - ii) $P(\Omega|M) = \frac{P(\Omega\cap M)}{P(M)} = \frac{P(M)}{P(M)} = 1.$
  - iii) $A, B \in \mathcal{F}, \quad A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A\cup B|M) = P(A|M) + P(B|M).$
- Propiedades:
  1) $M \subset A \quad \Rightarrow P(A|M) = \frac{P(A\cap M)}{P(M)} = \frac{P(M)}{P(M)} = 1.$
  2) $A \subset M \quad \Rightarrow P(A|M) = \frac{P(A)}{P(M)} \geq P(A).$
  3) $A \cap M = \emptyset \quad \Rightarrow P(A|M) = 0.$

Independencia de Sucesos

- **Definición**: Dos sucesos A y B son estadísticamente independientes sii:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- De otra manera: $P(A|B) = P(A) \quad ; \quad P(B|A) = P(B)$
- Generalización:
  - Independencia de tres sucesos:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

  - Independencia de N sucesos: Nº de condiciones

$$\binom{N}{2} + \binom{N}{3} + \ldots + \binom{N}{N} = 2^N - 1 - N$$

Ejemplo

- Extracción al azar de una carta de la baraja española:
  - $\Omega = \{$“as de oros”, “dos de oros”, $\ldots\}$, $|\Omega| = 40$ sucesos elementales.
    - $A = \{$“rey”$\}$ $\Rightarrow$ $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{40}$.
    - $B = \{$“sota o caballo”$\}$ $\Rightarrow$ $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{8}{40}$.
    - $C = \{$“oros”$\}$ $\Rightarrow$ $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{10}{40}$.
  - Análisis de independencia:
    - $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$, $P(A)P(B) = 32/(40)^2$. No son independientes[a].
    - $P(A \cap C) = P($“rey de oros”$) = 1/40$, $P(A)P(C) = 1/40$. Son independientes.
    - $P(B \cap C) = P($“sota o caballo de oros”$) = 2/40$, $P(B)P(C) = 2/40$. Son independientes.

[a] Dos sucesos incompatibles no son independientes y viceversa. Salvo en el caso trivial de que uno de ellos sea el suceso imposible.

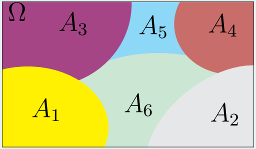
Contenido

Teorema de la Multiplicación (Demostración sencilla por inducción)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_N| \cap_{i=1}^{N-1} A_i)$$

Partición

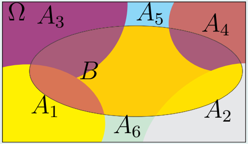
- **Definición**: Sea $< \Omega, \mathcal{F}, P >$ ligado a ε. $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathcal{F}$ son partición de Ω sii
  - i) $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$.
  - ii) $\cup_{i=1}^{N} A_i = \Omega$.



Teorema de la Probabilidad Total

- **Teorema**: Sea $< \Omega, \mathcal{F}, P >$ ligado a ε y $\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ partición de Ω; para todo $B \in \mathcal{F}$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{N} P(B|A_i)P(A_i)$$



- **Demostración**:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_N) = (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_N)$$

Además $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = \emptyset$, $\forall i \neq j$ (incompatibles 2 a 2). Entonces (axioma iii)

$$P(B) = \sum_{i=1}^{N} P(B \cap A_i) \overset{\text{Prob. cond.}}{=} \sum_{i=1}^{N} P(B|A_i)P(A_i)$$

Teorema de Bayes

- **Teorema**: Sea $< \Omega, \mathcal{F}, P >$ ligado a ε y $\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ partición de Ω; para todo $B \in \mathcal{F}$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(B|A_j)P(A_j)}$$

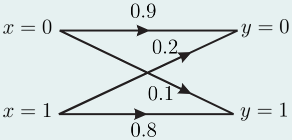
- **Definiciones**:
  - $P(A_i)$: Prob. a priori: (modelo, experiencia, medidas pasadas)
  - $P(A_i|B)$: Prob. a posteriori.
  - $P(B|A_i)$: Verosimilitud.
- **Demostración**:

$$P(A_i \cap B) \overset{\text{Prob. cond.}}{=} P(A_i)P(B|A_i) = P(B)P(A_i|B)$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \overset{\text{T. Prob. Tot.}}{=} \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Ejemplos

- **Sistema de Comunicaciones Binario**:



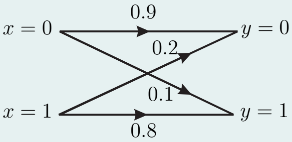
$$P(y = 0|x = 0) = 0.9$$
$$P(y = 0|x = 1) = 0.2$$
$$P(y = 1|x = 0) = 0.1$$
$$P(y = 1|x = 1) = 0.8$$

- Probabilidades a priori: $P(x = 0) = P(x = 1) = 0.5$
- $\Omega = \{(x = 0, y = 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.
- $\{x = 0\} = \{(0, 0), (0, 1)\} \quad ; \quad \{\{x = 0\}, \{x = 1\}\}$ es partición.
- **Probabilidad Total**:

$$P(y = 0) = P(y = 0|x = 0)P(x = 0) + P(y = 0|x = 1)P(x = 1) = 0.55$$
$$P(y = 1) = \ldots\ldots = 1 - P(y = 0) = 0.45$$

Ejemplos

- **Sistema de Comunicaciones Binario** (continuación)



$$P(y=0|x=0)=0.9$$
$$P(y=0|x=1)=0.2$$
$$P(y=1|x=0)=0.1$$
$$P(y=1|x=1)=0.8$$

- **Bayes** (vemos y y queremos conocer x):

$$P(x=0|y=0)=\frac{P(y=0|x=0)P(x=0)}{P(y=0)}=0.82$$

$$P(x=1|y=1)=\frac{P(y=1|x=1)P(x=1)}{P(y=1)}=0.89$$

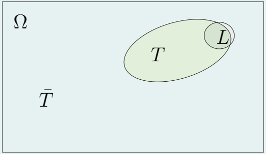
$$P(\text{error})=P\left(\{x=0\cap y=1\}\cup\{x=1\cap y=0\}\right)\overset{\text{suc. inc.}}{=}$$
$$=P\left(\{x=0\cap y=1\}\right)+\left(\{x=1\cap y=0\}\right)\overset{\text{prob. cond.}}{=}$$
$$=P(y=1|x=0)P(x=0)+P(y=0|x=1)P(x=1)=0.15$$

Ejemplos

- **Test de la Vaca Loca**:
  - $L = \{$“una vaca está loca”$\}$.
  - $\bar{L} = \{$“una vaca no está loca”$\}$.
  - $T = \{$“test dice que una vaca está loca”$\}$.
  - $\bar{T} = \{$“test dice no loca”$\}$.
  - Probabilidad a priori $P(L) = 0.005$
  - Datos del laboratorio fabricante del test (verosimilitudes):

$$
\begin{aligned}
P(T|L) &= 0.95 \quad &\Rightarrow P(\bar{T}|L) = 1 - P(T|L) = 0.05 \\
P(\bar{T}|\bar{L}) &= 0.95 \quad &\Rightarrow P(T|\bar{L}) = 1 - P(\bar{T}|\bar{L}) = 0.05
\end{aligned}
$$

  - ¿Es un buen test? ¿Qué credibilidad tiene?



Contenido

Experimentos Compuestos

- **Definición**: Dados dos espacios probabilísticos ligados a dos experimentos aleatorios

$$< \Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1 > \longrightarrow \varepsilon_1$$
$$< \Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2 > \longrightarrow \varepsilon_2$$

se define el experimento compuesto (o producto) de ε_1 y ε_2, y se denota $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$, como la realización conjunta de ambos experimentos, resultando un nuevo espacio probabilístico

$$< \Omega, \mathcal{F}, P > \longrightarrow \varepsilon$$

donde
  - $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.
  - $\forall \quad A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2 \quad \Rightarrow \quad A_1 \times A_2 \in \mathcal{F}$.
- Generalización a N conjuntos trivial.

Experimentos Compuestos

- **¿Qué sucede con las probabilidades?**
  - En general, solo podemos decir lo siguiente:

$$P(\Omega_1 \times A_2) = P_2(A_2) \quad ; \quad \forall A_2 \in \mathcal{F}_2$$
$$P(A_1 \times \Omega_2) = P_1(A_1) \quad ; \quad \forall A_1 \in \mathcal{F}_1$$

    y no se puede afirmar nada sobre el resto de sucesos.

- **Definición**: Dos **experimentos** ε_1 y ε_2 son **independientes** sii

$$\forall \quad A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2 \quad \Rightarrow \quad P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2)$$

  - En la práctica, la intuición y el conocimiento del problema nos indicarán cuando dos experimentos son independientes.

Ejemplo

- ε_1: Lanzamiento de un dado y observación de la puntuación.
  - $\Omega_1 = \{1, 2, \dots, 6\}, \quad |\Omega_1| = 6.$
  - $P_1(\{i\}) = \frac{1}{6}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 6.$
- ε_2: Lanzamiento de una moneda y observación del resultado.
  - $\Omega_2 = \{\text{“cara”}, \text{“cruz”}\}, \quad |\Omega_2| = 2.$
  - $P_2(\{\text{“cara”}\}) = P_2(\{\text{“cruz”}\}) = \frac{1}{2}.$
- **Experimento Compuesto**:
  - $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$: Lanzamiento de dado y moneda.
  - $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(1, \text{“cara”}), (1, \text{“cruz”}), (2, \text{“cara”}), \dots, (6, \text{“cruz”})\}.$
  - $|\Omega| = |\Omega_1| \times |\Omega_2| = 12.$
  - $P\left(\{(i, \text{“cara”})\}\right) = P\left(\{(i, \text{“cruz”})\}\right) = \frac{1}{12}, \quad \forall i.$

Son experimentos independientes !!

Contenido

Ensayos de Bernoulli

- Experimento aleatorio (ensayo de Bernoulli)
  - Suceso A:
$$P(A) = p \qquad P(\bar{A}) = q = 1 - p$$
- Consideremos el siguiente experimento compuesto:
  - ε: N repeticiones independientes del mismo ensayo de Bernoulli.
  - Definimos el suceso A_k
$$A_k = \{A \text{“se verifica exactamente } k \text{ veces en cualquier orden”}\}$$
  - Entonces:
$$P(A_k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N$$

Ejemplo

- ε: Transmisión de palabras de 8 bits.
  - En el receptor, cada bit se recibe de forma independiente de los demás.
  - La probabilidad de recibirlo incorrectamente es $p = 0.05$.
- ¿Cuál es la probabilidad de recibir una palabra con más de dos bits erróneos?
  - ε_i: Recepción y observación del estado (correcto/erróneo) del i-ésimo bit de una palabra. $i = 1, \ldots, 8$.

$$\Omega_i = \{c, e\} \quad P_i(\{e\}) = p \quad P_i(\{c\}) = q = 1 - p$$

Es un ensayo de Bernoulli !!

Ejemplo (Continuación)

- Experimento compuesto: $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \times \ldots \times \varepsilon_8$.
- Suceso $B = \{$"más de dos bits erróneos"$\}$

$$B \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \ldots \times \mathcal{F}_8$$

- Escribimos: $A_k = \{$"recibir exactamente k bits erróneos"$\}$

$$B = A_3 \cup A_4 \cup \ldots \cup A_8 \qquad \bar{B} = A_0 \cup A_1 \cup A_2$$

- Como A_k, $k = 0, \ldots, 8$, son sucesos incompatibles:

$$P(\bar{B}) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) \qquad P(B) = 1 - P(\bar{B})$$

- Finalmente, teniendo en cuenta que

$$P(A_k) = \binom{8}{k} p^k q^{8-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, 8$$

se llega a

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 5.8 \cdot 10^{-3}$$