Tema 2:
Variables Aleatorias Unidimensionales

Teoría de la Comunicación

Curso 2007-2008

Contenido

Contenido

Variable aleatoria

- **Intuición**: Una variable aleatoria X es una función que asocia números a cada posible resultado de un experimento aleatorio.

$$\begin{array}{rccc} X\colon & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & S \in \Omega & \longrightarrow & X(S) \in \mathbb{R} \end{array}$$

- **Propiedades** X ha de cumplir las siguientes condiciones:
  - Un solo valor para cada resultado.
  - El conjunto $\{X \leq x\}$ es un suceso $\forall x$.
  - $P(\{X = \infty\}) = P(\{X = -\infty\}) = 0$.
- **Rango de una v.a.**: Conjunto de números reales que tienen asociado un resultado del espacio muestral

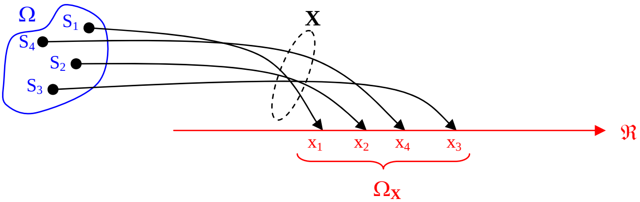
$$\Omega_X = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad \exists S \in \Omega, \quad X(S) = x\}$$

Ejemplos

ε: Observación de una carta de la baraja española extraída al azar

$$\Omega = \{\text{“as de oros”}, \text{“dos de oros”}, \ldots, \text{“rey de bastos”}\} \qquad |\Omega| = 40$$

1. $X(\text{“}n^o \text{ de } palo\text{”}) = n^o \quad \Rightarrow \quad \Omega_X = \{1, 2, \ldots, 7, 10, 11, 12\}$
2. $X(\text{“}n^o \text{ de } palo\text{”}) = 10 \times n^o \quad \Rightarrow \quad \Omega_X = \{10, 20, \ldots, 70, 100, 110, 120\}$
3. $X(\text{“}n^o \text{ de } palo\text{”}) = \begin{cases} 0 & \text{si es de oros} \\ 1 & \text{si no es de oros} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Omega_X = \{0, 1\}$



Contenido

Función Distribución

- **Definición**: Sea $< \Omega, \mathcal{F}, P >$ ligado a ε y X una v.a. Se define la Función de Distribución

$$\begin{array}{llll} F_X: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x \in \mathbb{R} & \longrightarrow & F_X(x) = P\left(\{X \leq x\}\right) \end{array}$$

- La función de distribución F_X contiene toda la información probabilística de la variable aleatoria X.

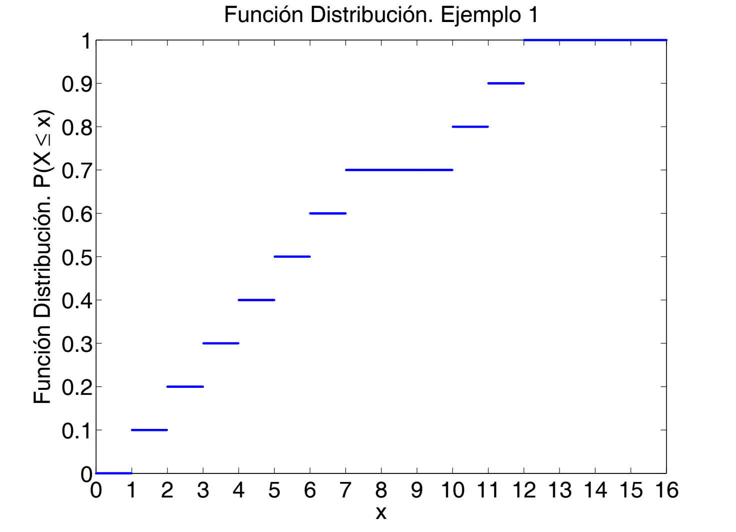
Ejemplo

- **Baraja española**:

$$\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12\}$$

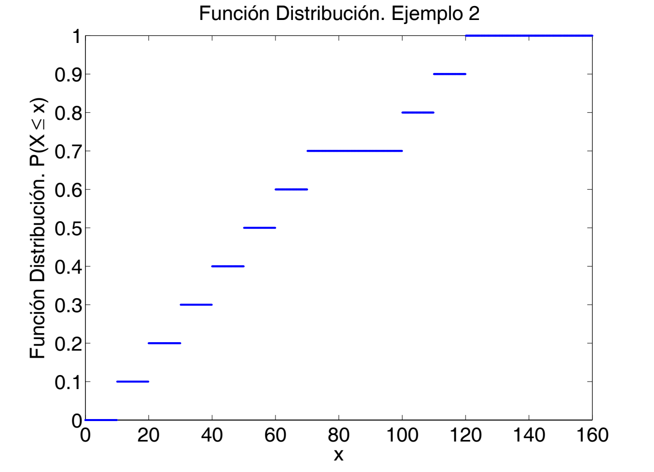
$$\begin{array}{ll} x = -3 & F_X(-3) = P\left(\{X \leq -3\}\right) = P(\emptyset) = 0 \\ x = 1 & F_X(1) = P\left(\{X \leq 1\}\right) = P(\{1\}) = 1/10 \\ x = 1.5 & F_X(1.5) = P\left(\{X \leq 1.5\}\right) = P(\{1\}) = 1/10 \\ x = 2 & F_X(2) = P\left(\{X \leq 2\}\right) = P(\{1, 2\}) = 2/10 \end{array}$$

Ejemplo


Función Distribución. Ejemplo 1
Función Distribución. P(X ≤ x)
x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

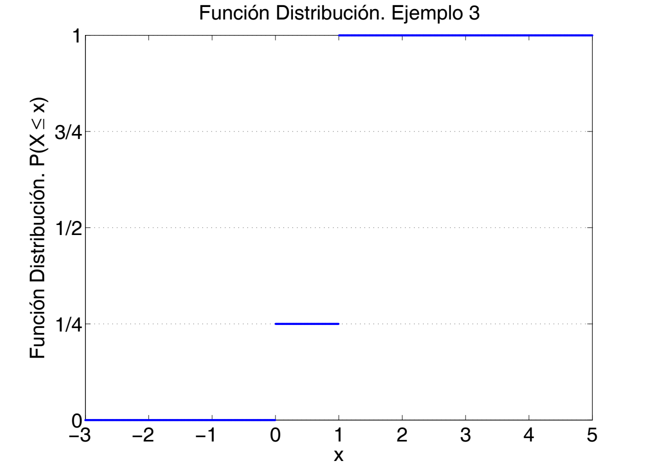
Otros Ejemplos

$$X(\text{“}n^o \text{ de } palo\text{”}) = 10 \times n^{\mathrm{o}} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega_X = \{10, 20, \ldots, 70, 100, 110, 120\}$$



Otros Ejemplos

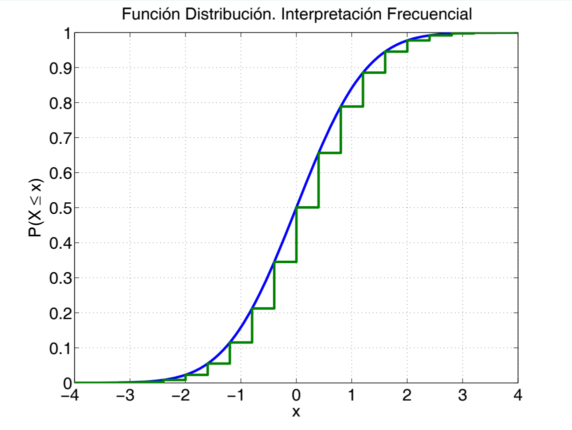
$$X(\text{“}n^o \text{ de } palo\text{”}) = \begin{cases} 0 & \text{si es de oros} \\ 1 & \text{si no es de oros} \end{cases} \Rightarrow \Omega_X = \{0, 1\}$$



Interpretación frecuencial

n realizaciones $\Rightarrow$ n valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $\qquad$ n_x: nº de resultados $\leq x$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n_x}{n} \overset{\text{def. frec.}}{=} P(X \leq x) = F_X(x)$$



Función Distribución. Propiedades

1. $F_X(-\infty) = \text{lím}_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad F_X(\infty) = \text{lím}_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
2. FD es no decreciente

$$\forall x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

3. FD es continua por la derecha

$$F_X(x^+) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} F_X(x + \epsilon) = F_X(x)$$

4. $P(\{X = x_0\}) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-) \qquad F_X(x_0^-) = \text{lím}_{\epsilon \to 0, \epsilon > 0} F_X(x_0 - \epsilon)$
5. $\forall x_1 < x_2$

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$
$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1^-)$$
$$P(x_1 < X < x_2) = F_X(x_2^-) - F_X(x_1)$$
$$P(x_1 \leq X < x_2) = F_X(x_2^-) - F_X(x_1^-)$$

*Observación: si $x_1 < x_2$ y $F_X(x_1) = F_X(x_2^-) \quad \Rightarrow \quad (x_1, x_2) \cap \Omega_X = \emptyset$

6. $P(X > x) = 1 - F_X(x)$

Contenido

Variables Aleatorias Continuas

- **Definición**:

$$X \text{ v.a. continua} \Leftrightarrow F_X(x) \text{ continua } \{F_X(x) = F_X(x^+) = F_X(x^-)\}$$

Si X es continua $\Rightarrow \Omega_X$ es infinito no numerable

- **Propiedad**: $P(X = x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-) = 0$

Ejemplo

- Un circuito requiere un resistencia de valor $(910\Omega - 1090\Omega)$
  - Se emplea una resistencia estándar de $1K\Omega$ y tolerancia $10\,\%$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 900 \\ \frac{x-900}{200} & 900 \leq x \leq 1100 \\ 1 & x > 1100 \end{cases}$$

  - Probabilidad:

$$P(910 < X \leq 1090) = F_X(1090) - F_X(910) = 0.9$$

Variables Aleatorias Discretas

- **Definición**:

$$X \text{ v.a. discreta} \Leftrightarrow F_X(x) \text{ escalonada, } \Omega_X \text{ discreto}$$

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{N} P(X = x_i) \underbrace{u(x - x_i)}_{\text{función escalón}} \qquad \sum_{i=1}^{N} P(X = x_i) = F_X(\infty) = 1$$

- **Propiedades**:
  - $P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i^-) \neq 0$
  - $P(x_{i-1} < X < x_i) = F_X(x_i^-) - F_X(x_{i-1}) = 0 \quad (x_{i-1}, x_i) \cap \Omega_X = \emptyset$
- **Ejemplo**: Baraja española

Variables Aleatorias Mixtas

- Mezcla de las dos anteriores
  - Función Distribución no escalonada pero con discontinuidades.
  - Ω_X continuo. $\exists x_0$, $P(X = x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-) \neq 0$
- ¿Ejemplos?

Contenido

Función densidad de probabilidad (fdp)

- **Definición**: Dada una $F_X(x)$ ligada a una v.a. X, se define la fdp como

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

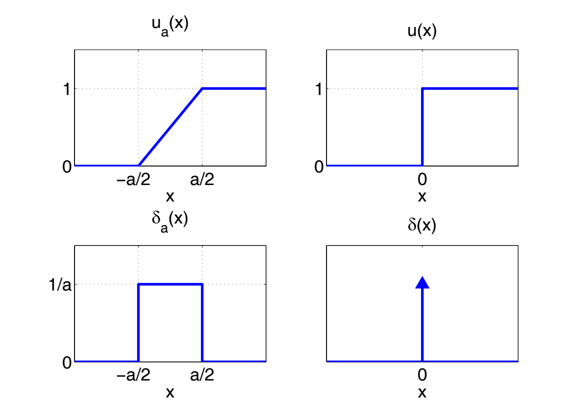
- Casos particulares:
  - Si X v.a. continua $\Rightarrow$ No hay problemas con la derivada.[a]
  - Si X v.a. discreta $\Rightarrow$ No existe la derivada en Ω_X

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{N} P(X = x_i) \frac{du(x - x_i)}{dx} = \sum_{i=1}^{N} P(X = x_i) \underbrace{\delta(x - x_i)}_{\text{Delta de Dirac}}$$

[a] Aunque en ciertos puntos no sea derivable, dichos puntos carecen de interés.

Delta de Dirac

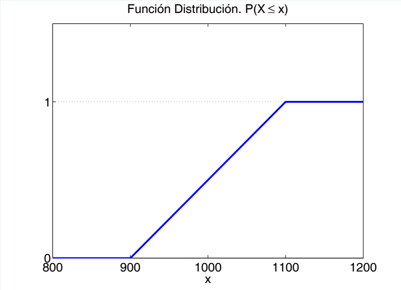
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \qquad g(x) * \delta(x) = g(x) \qquad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)g(x-t)dt$$

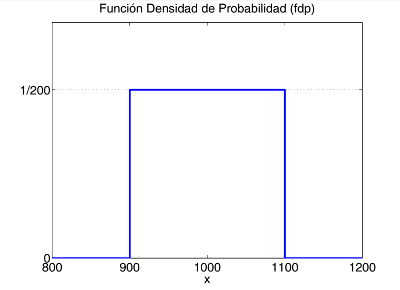


Función Densidad de Probabilidad (fdp)

- **Ejemplo**: Resistencia de $1K \pm 10\,\%$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 900 \\ \frac{x-900}{200} & 900 \leq x \leq 1100 \\ 1 & x > 1100 \end{cases} \qquad f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 900 \\ \frac{1}{200} & 900 < x < 1100 \\ 0 & x > 1100 \end{cases}$$

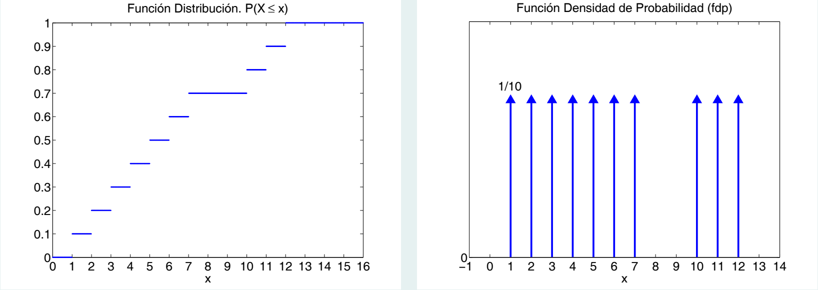




Función Densidad de Probabilidad (fdp)

- **Ejemplo**: Baraja española $\Omega_X = \{1, 2, \ldots, 7, 10, 11, 12\}$

$$F_X(x) = \sum_{x_i \in \Omega_x} \frac{1}{10} u(x - x_i) \qquad f_X(x) = \sum_{x_i \in \Omega_x} \frac{1}{10} \delta(x - x_i)$$



Función Densidad de Probabilidad (fdp)

- **Propiedades**:
  1. $f_X(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
  3. $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$
  4. $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$
  5. Si X es una v.a. continua

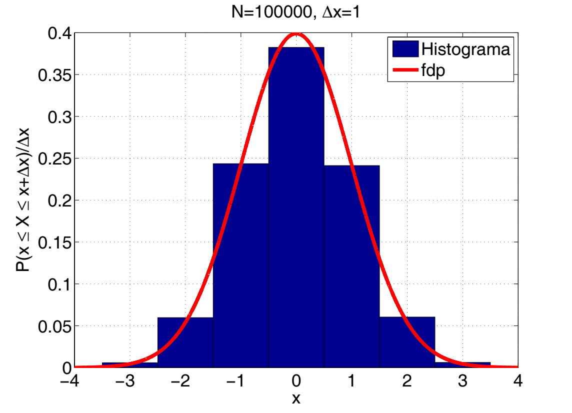
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \overset{\text{def. deriv.}}{=} \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\text{Prob. intervalo}}{\text{long. intervalo}}$$

Función Densidad de Probabilidad (fdp)

- **Interpretación frecuencial**: N realizaciones de v.a. X
  - n_x: nº de resultados pertenecientes a un intervalo de longitud Δx

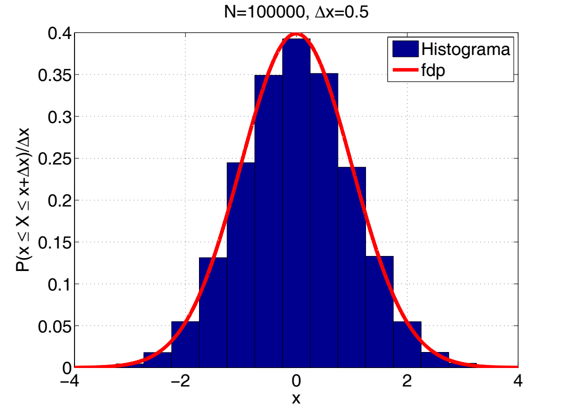
$$P_X(x \le X \le x + \Delta x) \simeq f_X(x)\Delta x \simeq n_x/N$$



Función Densidad de Probabilidad (fdp)

- **Interpretación frecuencial**: N realizaciones de v.a. X
  - n_x: nº de resultados pertenecientes a un intervalo de longitud Δx

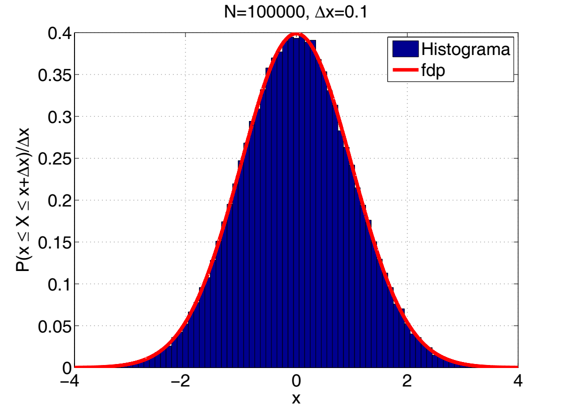
$$P_X(x \leq X \leq x + \Delta x) \simeq f_X(x)\Delta x \simeq n_x/N$$



Función Densidad de Probabilidad (fdp)

- **Interpretación frecuencial**: N realizaciones de v.a. X
  - n_x: nº de resultados pertenecientes a un intervalo de longitud Δx

$$P_X(x \leq X \leq x + \Delta x) \simeq f_X(x)\Delta x \simeq n_x/N$$

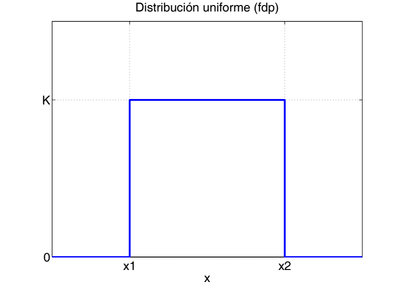


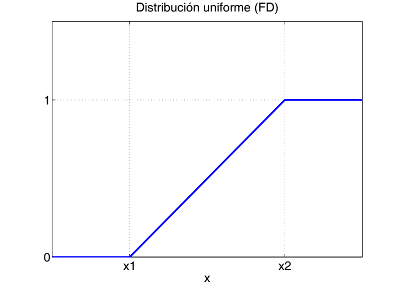
Contenido

Distribución Uniforme

$$\Omega_X = [x_1, x_2]$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 1 & x > x_2 \end{cases}$$

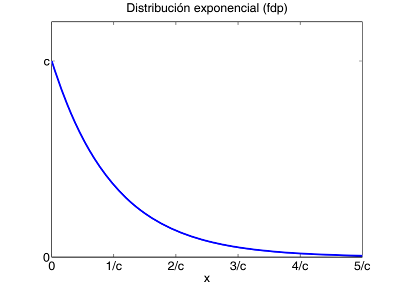


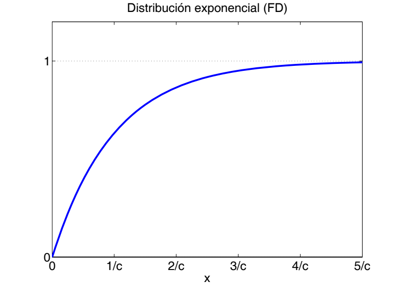


Distribución Exponencial

$$\Omega_X = [0, \infty) \qquad \text{parámetro } c$$

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{-cx} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-cx} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

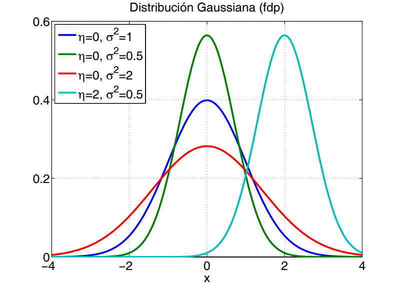


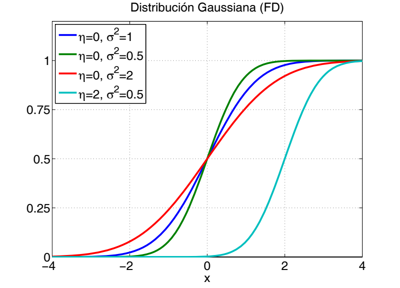


Distribución Gaussiana o Normal

$\Omega_X = (-\infty, \infty)$ parámetros η, σ $\mathcal{N}(\eta, \sigma)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$





Distribución Gaussiana o Normal

- **Caso Particular**: $\eta = 0$, $\sigma = 1$

$$F_X(x) = \mathcal{G}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

- **Caso General**: $\mathcal{N}(\eta, \sigma)$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\eta)^2}{2\sigma^2}} du \underset{t=\frac{u-\eta}{\sigma}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\eta}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mathcal{G}(\frac{x-\eta}{\sigma})$$

- **Otras funciones**
  - Función error:

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mathcal{G}(x) - \frac{1}{2}$$

  - Función $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \mathcal{G}(x) = \mathcal{G}(-x)$$

$\mathcal{G}(x)$

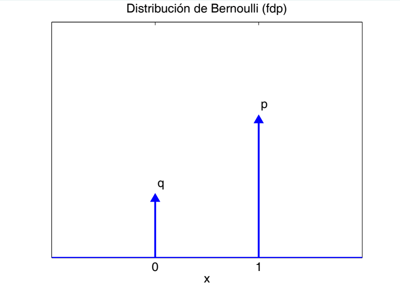
Segunda cifra decimal del valor de x

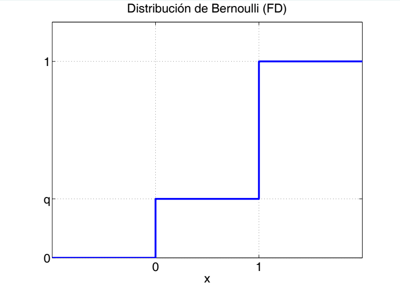
x	0.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Distribución de Bernoulli

$$\Omega_X = \{0, 1\} \qquad P(X = x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ q = 1 - p & x = 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = q\delta(x) + p\delta(x-1) \qquad F_X(x) = qu(x) + pu(x-1)$$



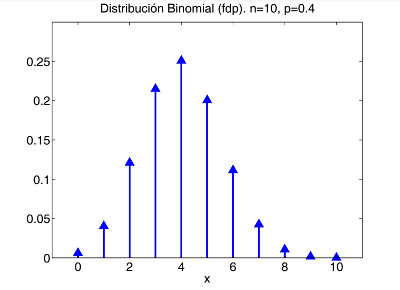


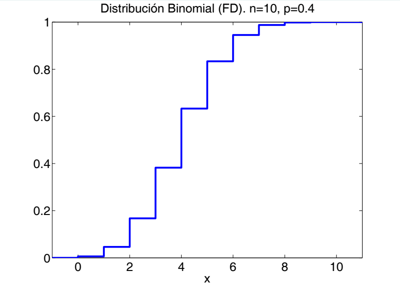
Distribución Binomial

- n ensayos de Bernoulli independientes.
- Suceso A con p cte. en todos los ensayos. ($q = 1 - p$).
- X v.a. binomial cuenta el nº de veces que se verifica el suceso A.

$$X = \sum_{k=0}^{n} X_i \qquad B(n,p) \qquad \Omega_X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta(x-k) \qquad F_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} u(x-k)$$





Distribución Binomial

- **Propiedades**:
  - $F_X(n) = 1$

$$(a+b)^n \overset{\text{T}^{\text{a}}\ \text{Binomial}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad p+q=1$$

- Aproximación:
  - p constante y $n \to \infty$:

    Aproximable por $\mathcal{N}(\eta = np, \sigma = \sqrt{npq})$
  - $p \to 0$, $n \to \infty$, $np = a = cte$:

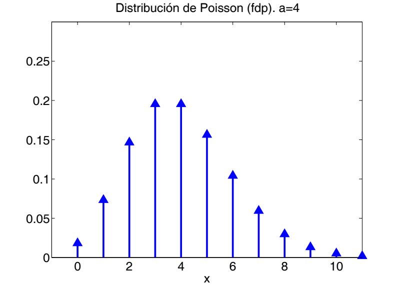
    Aproximable por Poisson de parámetro a

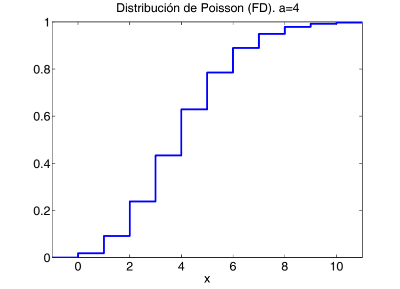
Distribución de Poisson

$$\Omega_X = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}^+ \qquad \text{parámetro } a > 0 \qquad \mathcal{P}(a)$$

$$P(X = k) = e^{-a} \frac{a^k}{k!}$$

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k!} \delta(x - k) \qquad F_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k!} u(x - k)$$





Distribución de Poisson

- **Propiedades**:
  - $F_X(\infty) = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k!} = e^{-a} e^{a} = 1$$

- Aproximación de la distribución Binomial:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np=a}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{a^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k} \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n} =$$

$$= \frac{a^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n} = e^{-a} \frac{a^k}{k!}$$

  - Regla heurística: $n \gg 1$, $p \ll 1$ y $a = np < 5$

Ejemplo

- Distribución Binomial

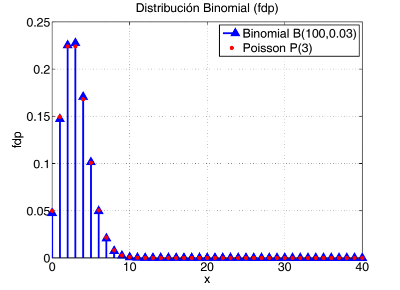
$$B(n = 100, p = 0.03)$$

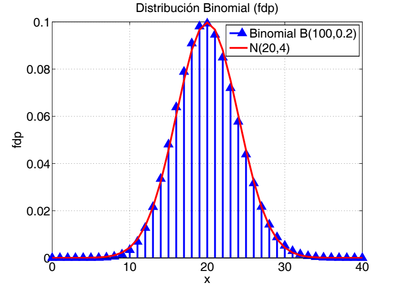
- Aproximación: $\mathcal{P}(3)$

- Distribución Binomial

$$B(n = 100, p = 0.2)$$

- Aproximación: $\mathcal{N}(20, 4)$





Ejemplo

- **Dispositivo electrónico**:
  - n componentes con fallos independientes.
  - Componentes con tiempo de vida exponencial de parámetro c
- **Distribución del nº de componentes que fallan en** $[0, t_0]$
  - X_i v.a. fallo componente i-ésimo

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{fallo} \\ 0 & \text{no fallo} \end{cases} \qquad \Omega_{X_i} = \{0, 1\}$$

  - n repeticiones independientes ensayo Bernoulli (prob. cte.)
  - X v.a. nº fallos: Binomial $B(n, p)$ $\qquad X = \sum_{i=1}^{N} X_i$
  - T v.a. tiempo de vida de un componente

$$f_T(t) = \begin{cases} ce^{-ct} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad p = P(T \leq t_0) = F_T(t_0) = 1 - e^{-ct_0}$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(1 - e^{-ct_0}\right)^k \left(e^{-ct_0}\right)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Ejemplo

- **Prob. de fallo de un componente en un año es 10^{-3}, ¿Prob. de que de 1000 componentes ninguno falle en 2 años?**:

$$P(T \leq 1 \text{ año}) = 10^{-3} = F_T(1) = 1 - e^{-c} \quad \Rightarrow \quad c \simeq 10^{-3} \text{ años}^{-1}$$

$$P(T \leq 2 \text{ años}) = F_T(2) = 1 - e^{-2 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-3} = p$$

  - $X \sim B(n, p)$ con $n = 1000$, $p = 0.002$

$$P(\text{“0 fallos en 2 años”}) = P(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 q^n = e^{-2} \simeq 0.135$$

  - Aproximación mediante v.a. Y Poisson ($n \gg 1$, $p \ll 1$, $a \simeq 2 < 5$)

$$P(Y = k) = e^{-a} \frac{a^k}{k!} \qquad P(Y = 0) = e^{-a} = e^{-2}$$

Contenido

Distribución Condicional

- **Definición**: Se define la Función Distribución Condicional de una v.a. X dado que se verifica el suceso M como

$$F_X(x|M) = P(\{X \leq x\}|M) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap M)}{P(M)}$$

Función Densidad de Probabilidad (fdp) Condicional

- **Definición**:

$$f_X(x|M) = \frac{dF_X(x|M)}{dx} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{P(\{x < X \leq x + \Delta x\}|M)}{\Delta x}$$

Propiedades

Ambas funciones cumplen todas las propiedades de las funciones distribución y densidad

Ejemplo

- Variable aleatoria X. Se verifica el suceso $M = \{b < X \leq a\}$.

$$F_X(x|M) = F_X(x|b < X \leq a) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{b < X \leq a\})}{P(\{b < X \leq a\})}$$

- **Función Distribución Condicionada**
  - $x \geq a$:

$$\{X \leq x\} \cap \{b < X \leq a\} = \{b < X \leq a\} \qquad \Rightarrow \qquad F_X(x|M) = 1$$

  - $b \leq x < a$:

$$\{X \leq x\} \cap \{b < X \leq a\} = \{b < X \leq x\} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad F_X(x|M) = \frac{P(\{b < X \leq x\})}{P(\{b < X \leq a\})} = \frac{F_X(x) - F_X(b)}{F_X(a) - F_X(b)}$$

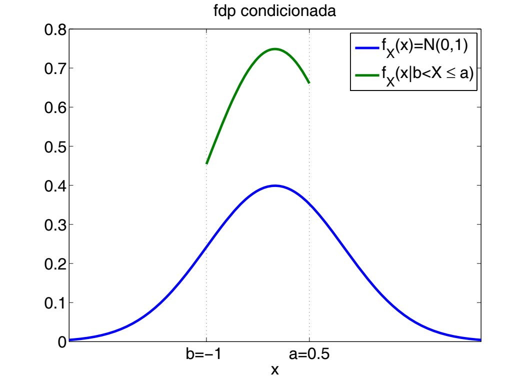
  - $x < b$:

$$\{X \leq x\} \cap \{b < X \leq a\} = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad F_X(x|M) = 0$$

Ejemplo

- **fdp condicionada**:

$$f_X(x|b < x \leq a) = \frac{f_X(x)}{F_X(a) - F_X(b)} \qquad b \leq x < a$$



Recordemos ...

$$P(B) \overset{A_i \text{ partición}}{=} \sum_i P(B|A_i)P(A_i) \qquad P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Analizemos $P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B)$

- $B = \{X \leq x\}$

$$P(A|X \leq x) = \frac{F_X(x|A)}{F_X(x)} P(A)$$

- $B = \{x_1 < X \leq x_2\}$

$$P(A|x_1 < X \leq x_2) = \frac{F_X(x_2|A) - F_X(x_1|A)}{F_X(x_2) - F_X(x_1)} P(A)$$

- $B = \{X = x\}$

$$P(A|X = x) = \lim_{\Delta x \to 0} P(A|x < X \leq x + \Delta x) = \frac{f_X(x|A)}{f_X(x)} P(A)$$

Teorema de la Probabilidad Total

- **Teorema**: Sea $< \Omega, \mathcal{F}, P >$ ligado a ε y $\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ partición de Ω

$$F_X(x) \underset{B=\{X\leq x\}}{=} \sum_{i=1}^{N} F_X(x|A_i)P(A_i) \quad \Rightarrow \quad f_X(x) = \sum_{i=1}^{N} f_X(x|A_i)P(A_i)$$

Teorema de la Probabilidad Total (Versión continua)

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X=x)f_X(x)dx$$

Teorema de Bayes (Versión continua)

$$f_X(x|A) = \frac{P(A|X=x)}{P(A)} f_X(x) = \frac{P(A|X=x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} P(A|X=x)f_X(x)dx}$$

Ejemplo

- T: v.a. exponencial tiempo de vida de un componente

$$f_T(t) = \begin{cases} ce^{-ct} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-ct} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$P(\{\text{“fallo antes de } t_1 \text{ segundos”}\}) = P(T \leq t_1) = F_T(t_1) = 1 - e^{-ct_1}$$

- En un instante t_0 se comprueba que un componente sigue funcionando. ¿Cual es la probabilidad de que falle antes de t_1 segundos adicionales?

$$P(t_0 < T \leq t_0 + t_1 | T > t_0) = \frac{P(\{t_0 < T \leq t_0 + t_1\} \cap \{T > t_0\})}{P(T > t_0)} =$$

$$= \frac{P(t_0 < T \leq t_0 + t_1)}{1 - P(T \leq t_0)} = \frac{F_T(t_0 + t_1) - F_T(t_0)}{1 - F_T(t_0)} =$$

$$= \frac{e^{-ct_0}(1 - e^{-ct_1})}{e^{-ct_0}} = 1 - e^{-ct_1} = F_T(t_1)$$

La v.a. exponencial es Sin Memoria

Contenido

Media de una Variable Aleatoria

- **Definición**: Dada una v.a. X se define su media como

$$\eta = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

- Interpretación frecuencial

$$\eta = \sum_i p_i x_i \simeq \sum_i \frac{n_{x_i}}{n} x_i = \frac{1}{n} \sum_i n_{x_i} x_i$$

- Media Condicional

$$E[X|M] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x|M) dx$$

- Otras medidas:
  - **Moda**: Valor x_m que maximiza $f_X(x_m)$.
  - **Mediana**: $x_m \in \Omega_X$ es mediana de X sii $F_X(x_m) = 1/2$

Varianza de una Variable Aleatoria

- **Definición**: Dada una v.a. X se define su varianza como

$$\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X-\eta)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\eta)^2 f_X(x)dx$$

- Se puede ver como una medida de la dispersión en torno a la media.
- Además:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\eta)^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2+\eta^2-2x\eta) f_X(x)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx - \eta^2$$

- Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]} \geq 0$ (unidades de X)

Variables aleatorias continuas

- **Variable Aleatoria Uniforme**:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

  - **Media**:

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} x \frac{1}{x_2 - x_1} dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

  - **Varianza**:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - \eta^2 = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \frac{1}{x_2 - x_1} dx - \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} =$$

$$= \frac{x_2^3 - x_1^3}{3(x_2 - x_1)} - \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} = \cdots = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}$$

- Interpretación:
  - fdp simétrica $\Rightarrow$ media en el centro
  - A menor $(x_2 - x_1) \Rightarrow$ menor dispersión $\Rightarrow$ menor σ^2

Variables aleatorias continuas

- **Variable Aleatoria Exponencial**:

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{-cx} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

  - **Media**:

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = c \int_0^{\infty} x e^{-cx} dx \overset{\text{Int. partes}}{=} \frac{1}{c}$$

  - **Varianza**:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - \eta^2 = c \int_0^{\infty} x^2 e^{-cx} dx - \eta^2 \overset{\text{Int. partes}}{=} \frac{1}{c^2}$$

- Interpretación:
  - Al aumentar $c \Rightarrow f_X(x)$ decrece más rápidamente.
  - Al aumentar $c \Rightarrow$ valores más probables en torno a cero.
  - Al aumentar $c \Rightarrow$ menor dispersión.

Variables aleatorias continuas

- **Variable Aleatoria Gaussiana**: $\mathcal{N}(a,b)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$$

- **Media**:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}\,dx \overset{t=\frac{x-a}{b}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}b}\int_{-\infty}^{\infty}(bt+a)e^{-\frac{t^2}{2}}\,b\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} bte^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{\text{0 por impar}} + \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right] = a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= a\mathcal{G}(\infty) = a$$

Variables aleatorias continuas

- **Variable Aleatoria Gaussiana**: $\mathcal{N}(a,b)$
  - **Varianza**: Sabemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx = \sqrt{2\pi}b$$

derivando respecto a b

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a)^2}{b^3} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Finalmente:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx = b^2$$

- Interpretación:
  - Gaussiana centrada en $\eta = a$
  - $\sigma = b$ controla la dispersión en torno a a

Variables aleatorias discretas

- **Variable Aleatoria de Bernoulli**:

$$\Omega_X = \{0, 1\} \qquad P(X = 1) = p \qquad P(X = 0) = q = 1 - p$$

$$f_X(x) = q\delta(x) + p\delta(x - 1)$$

  - **Media**:

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \sum_i p_i x_i = q0 + p1 = p$$

  - **Varianza**:

$$\sigma^2 = \sum_i p_i x_i^2 - \eta^2 = q0^2 + p1^2 - p^2 = pq$$

- Interpretación:
  - Media en p
  - Máxima varianza para $p = \frac{1}{2}$

Variables aleatorias discretas

- **Binomial**: $B(n, p)$

$$\Omega_X = \{0, 1, \ldots, n\} \qquad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Partiremos del Binomio de Newton:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

derivando respecto a p:

$$n(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^{k-1} q^{n-k}$$

y multiplicando por p

$$np(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^k q^{n-k}$$

Variables aleatorias discretas

- **Binomial**: $B(n,p)$
  - **Media**:

$$\eta = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^k q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} \overset{p+q=1}{=} np$$

Para obtener la varianza volvemos a derivar y multiplicar:

$$n(p+q)^{n-1} + np(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 p^{k-1} q^{n-k}$$

$$np\left[(p+q)^{n-1} + p(n-1)(p+q)^{n-2}\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 p^k q^{n-k}$$

  - **Varianza**:

$$\sigma^2 \overset{p+q=1}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 p^k q^{n-k} - \eta^2 = np(1-p) = npq$$

- Observaciones:
  - Media y varianza como Bernoulli multiplicadas por n
  - Técnica de derivar y multiplicar frecuente en el cálculo de η y σ^2

Variables aleatorias discretas

- **Poisson**: $\mathcal{P}(a)$

$$\Omega_X = \mathbb{N}^+ \qquad P(X=k) = e^{-a}\frac{a^k}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Partimos del desarrollo en serie

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

derivando y multiplicando por a

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{a^{k-1}}{k!} \quad \xrightarrow{\times a} \quad ae^a = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{a^k}{k!}$$

- **Media**:

$$\eta = \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-a}\frac{a^k}{k!} = e^{-a}ae^a = a$$

Variables aleatorias discretas

- **Poisson**: $\mathcal{P}(a)$

$$\Omega_X = \mathbb{N}^+ \qquad P(X=k) = e^{-a}\frac{a^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

Para obtener la varianza volvemos a derivar y multiplicar

$$e^a + ae^a = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{a^{k-1}}{k!} \qquad \xrightarrow{\times a} \qquad ae^a(1+a) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{k!}$$

  - **Varianza**:

$$\sigma^2 = \sum_i p_i x_i^2 - \eta^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-a}\frac{a^k}{k!} - a^2 =$$
$$= e^{-a} a e^a (1+a) - a^2 = a$$

- Interpretación
  - Al disminuir a $f_X(x)$ se concentra en torno a 0
  - Aproximación de $B(n,p)$, $np = a$

Contenido

Desigualdad de Chebychev

- Sea X una variable aleatoria con media η y varianza σ^2, se tiene

$$P(|X-\eta| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \qquad \forall \epsilon$$

  - En función del suceso contrario:

$$P(|X-\eta| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \quad \xrightarrow{\epsilon = K\sigma} \quad P(|X-\eta| < K\sigma) \geq 1 - \frac{1}{K^2}$$

  - Aproximación general pero muy conservadora.
  - Demostración:

$$P(|X-\eta| \geq \epsilon) = \int_{-\infty}^{\eta-\epsilon} f_X(x)dx + \int_{\eta+\epsilon}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{|x-\eta|\geq\epsilon} f_X(x)dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\eta)^2 f_X(x)dx \geq \int_{|x-\eta|\geq\epsilon} (x-\eta)^2 f_X(x)dx \geq$$
$$\geq \epsilon^2 \int_{|x-\eta|\geq\epsilon} f_X(x)dx = \epsilon^2 P(|X-\eta| \geq \epsilon)$$

Ejemplo

- Calcular $P(|X-\eta|<K\sigma)$
  - Desigualdad de Chebychev:

$$P(|X-\eta|<K\sigma) \geq 1-\frac{1}{K^2}$$

  - Distribución Gaussiana $\mathcal{N}(\eta, \sigma)$

$$\begin{aligned} P(|X-\eta|<K\sigma) &= P(\eta-K\sigma<X<\eta+K\sigma) = \\ &= F_X(\eta+K\sigma)-F_X(\eta-K\sigma) = \\ &= \mathcal{G}(K)-\mathcal{G}(-K) = 2\mathcal{G}(K)-1 \end{aligned}$$

Ejemplo

- Calcular $P(|X-\eta| < K\sigma)$
  - Distribución Uniforme en $[x_1, x_2]$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1} & x_1 < x < x_2 \\ 1 & x > x_2 \end{cases} \qquad \eta = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \sigma^2 = \frac{(x_2-x_1)^2}{12}$$

$$P(|X-\eta| < K\sigma) = F_X(\eta + K\sigma) - F_X(\eta - K\sigma)$$

Asumimos

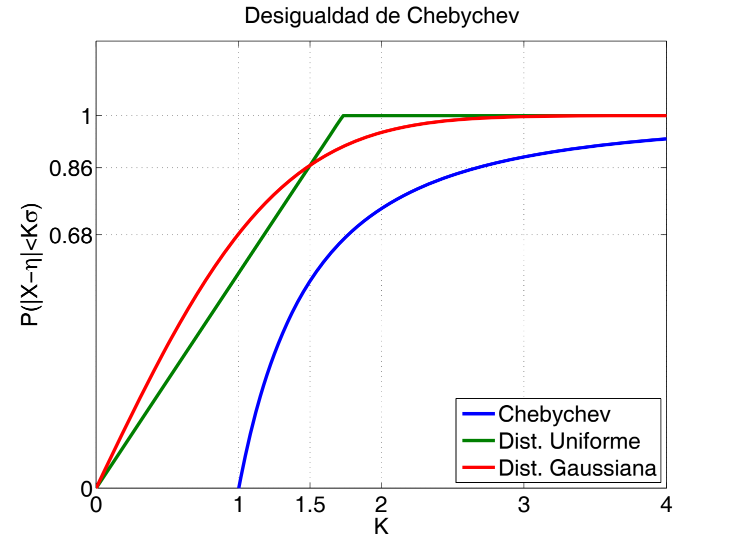
$$\begin{cases} \eta + K\sigma \leq x_2 \\ \eta - K\sigma \geq x_1 \end{cases}$$

entonces:

$$P(|X-\eta| < K\sigma) = \frac{\eta + K\sigma - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{\eta - K\sigma - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{2K\sigma}{x_2 - x_1} = \frac{K}{\sqrt{3}}$$

$$P(|X-\eta| < K\sigma) = \begin{cases} \frac{K}{\sqrt{3}} & 0 < K < \sqrt{3} \\ 1 & K > \sqrt{3} \end{cases}$$

Ejemplo


Desigualdad de Chebychev
P(|X−η|<Kσ)
1
0.86
0.68
0
0
1
1.5
2
3
4
K
Chebychev
Dist. Uniforme
Dist. Gaussiana

Resumen Matemáticas

- Desarrollo en serie

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

- Binomio de Newton

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

- Límite:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}$$

Resumen Matemáticas

- Serie Geométrica: $a_{k+1} = a_k r$ con $r < 1$

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \frac{a_n}{1-r}$$

- Progresión Aritmética: $a_{k+1} = a_k + d$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_n + a_1}{2} n$$

- Integración por partes.
- Derivar y multiplicar (media y varianza de v.a. discretas).