Tema 3:
Función de Variable Aleatoria

Teoría de la Comunicación

Curso 2007-2008

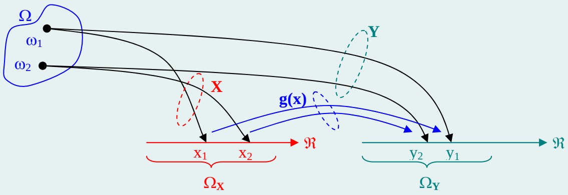
Contenido

Contenido

Definición

- **Motivación**: Sistema cuya entrada es una v.a. X
  - Salida v.a. Y
  - ¿Que podemos decir sobre la salida?
    - ¿Podemos calcular $F_Y(y)$, $f_Y(y)$?
    - ¿Nos debemos conformar con estadísticos (media, varianza,...)?
- **Definición**: Consideremos un espacio probabilístico $< \Omega, \mathcal{F}, P >$ y una v.a. X ligados a ε. Entonces, dada $g(x)$ una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, la expresión $Y = g(X)$ es una nueva v.a. definida como:

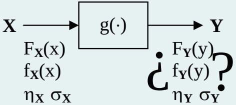
$$\begin{array}{llcl} Y: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega \in \Omega & \longrightarrow & g\left[X(\omega)\right] \in \mathbb{R} \end{array}$$



Contenido

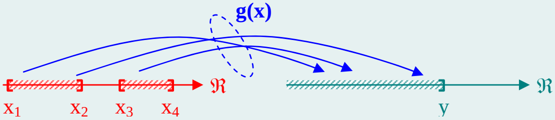
Función Distribución de una función de Variable Aleatoria

- **Caracterización de una función de v.a.**: Trataremos de caracterizar la v.a Y a partir del conocimiento estadístico de la v.a. X y de la función de transformación $y = g(x)$.



- **Cálculo de la Función Distribución**: $F_Y(y)$ a partir de $F_X(x)$ y $g(x)$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in B_X) \qquad \underbrace{B_X = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad g(x) \leq y\}}_{\text{Necesitamos obtener estas regiones}}$$



Cálculo de la Función Distribución

1 X continua, $g(x)$ monótona creciente (continua en Ω_X)

$$x_2 > x_1 \qquad \Rightarrow \qquad g(x_2) > g(x_1)$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in B_X) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

- **Ejemplo**: $y = g(x) = ax + b$, con $a > 0$

$$x = g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a} \qquad \Rightarrow \qquad F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Supongamos X v.a. exponencial con $c > 0$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-cx} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-c\frac{y-b}{a}} & y \geq b \\ 0 & y < b \end{cases}$$

2 X continua, $g(x)$ monótona decreciente (continua en Ω_X)

$$x_2 > x_1 \qquad \Rightarrow \qquad g(x_2) < g(x_1)$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in B_X) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

Cálculo de la Función Distribución

3 X continua, $g(x)$ no monótona, no constante en ningún intervalo

- La región B_X viene dada por la unión de intervalos del tipo

$$B_X = [-\infty, x_1] \cup [x_2, x_3] \cup \dots$$

donde x_i son las raíces de $y = g(x)$.

$$F_Y(y) = F_X(x_1) + F_X(x_3) - F_X(x_2) + \dots$$

- **Ejemplo**: $y = g(x) = x^2$
  - Obtenemos las raíces:

$$\begin{array}{llll} y < 0 & \Rightarrow & y = x^2 & \text{no tiene solución} \\ y \geq 0 & \Rightarrow & y = x^2 & x_1, x_2 = \pm\sqrt{y} \end{array}$$

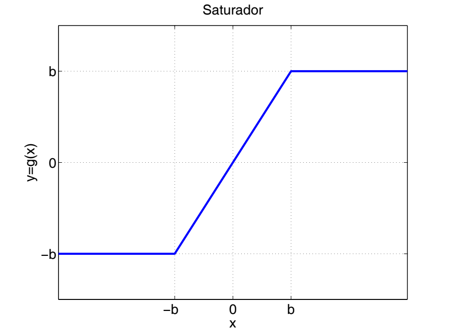
  - Supongamos X v.a. uniforme en $[-1/2, 1/2]$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -\frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 2\sqrt{y} & 0 \leq y \leq \frac{1}{4} \\ 1 & y > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Cálculo de la Función Distribución

4 X continua, $g(x)$ constante en algún intervalo de $\Omega_X \Rightarrow Y$ mixta

- **Ejemplo**: Saturador



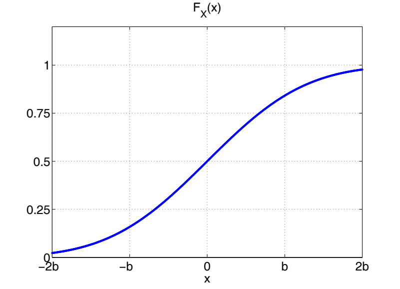
$$B_X = \begin{cases} \emptyset & y < -b \\ (-\infty, y] & -b \leq y < b \\ (-\infty, \infty) & b \leq y \end{cases} \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -b \\ F_X(y) & -b \leq y < b \\ F_X(\infty) = 1 & b \leq y \end{cases}$$

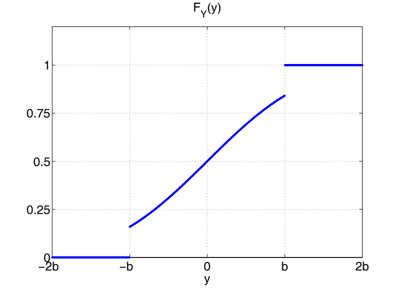
Cálculo de la Función Distribución

4 X continua, $g(x)$ constante en algún intervalo de $\Omega_X \Rightarrow Y$ mixta

- **Ejemplo**: Saturador. Supongamos $X \sim \mathcal{N}(0, b)$

$$\Omega_X = \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \qquad \Omega_Y = [-b, b]$$





Cálculo de la Función Distribución

5 X continua, $g(x)$ escalonada $\Rightarrow Y$ discreta

- **Ejemplo**: Función escalón (cuantificador)

$$g(x) = u(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

  - Supongamos $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$
  - Rango de entrada $\Omega_X = (-\infty, \infty)$
  - Rango de salida $\Omega_Y = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad Y$ v.a. Bernoulli

$$P(Y = 0) = P(X < 0) = F_X(0) = \mathcal{G}(0) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y = 1) = P(X \geq 0) = 1 - F_X(0) = \frac{1}{2}$$

Cálculo de la Función Distribución

6 X discreta $\Rightarrow$ Y discreta

$$\Omega_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad \Rightarrow \quad \Omega_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$$

$$P(Y = y_k) = \sum_i P(X = x_i) \qquad \text{con } g(x_i) = y_k$$

- **Ejemplo**: $y = g(x) = x^2$
  - Supongamos $\Omega_X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$P(X = k) = \frac{1}{5} \qquad k = -2, \ldots, 2$$

  - Entonces: $\Omega_Y = \{0, 1, 4\}$

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{5}$$

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{2}{5}$$

$$P(Y = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = \frac{2}{5}$$

Contenido

Teorema Fundamental

- **Teorema**: Sea X una v.a. continua y $g(x)$ una función no constante en ningún intervalo de Ω_X. Entonces la fdp de la variable aleatoria $Y = g(X)$ viene dada por

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

  - $g'(x)$ es la derivada de $g(x)$
  - x_i son las raíces de $y = g(x)$

$$g(x_1) = g(x_2) = \ldots = g(x_n) = y$$

  - Si no existen raíces de $y = g(x)$ entonces $f_Y(y) = 0$

- **Generalización**: Si $g(x)$ es constante, de valor y_0, en alguna región $C \in \Omega_X$ entonces

$$P(Y = y_0) = \int_C f_X(x)dx \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Función } \delta(y - y_0) \text{ en } f_Y(y)$$

Teorema Fundamental. Ejemplos

1 y 2 X v.a. exponencial y $g(x) = ax + b$ con $a \neq 0$

- Obtención de las raíces: $x_1 = (y - b)/a$ (solución única)
- Derivada: $g'(x) = a$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|} = \begin{cases} \frac{c}{|a|} e^{-c\frac{y-b}{a}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- Para $a > 0$:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{c}{a} e^{-c\frac{y-b}{a}} & y \geq b \\ 0 & y < b \end{cases}$$

- Para $a < 0$:

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{c}{a} e^{-c\frac{y-b}{a}} & y \leq b \\ 0 & y > b \end{cases}$$

Teorema Fundamental. Ejemplos

3 X v.a. uniforme en $[-1/2, 1/2]$ y $g(x) = x^2$

- Obtención de las raíces:

$$\begin{array}{lclll} y < 0 & \Rightarrow & y = x^2 & \text{no tiene solución} \\ y > 0 & \Rightarrow & y = x^2 & x_1, x_2 = \pm\sqrt{y} \end{array}$$

- Derivada: $g'(x) = 2x$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} = \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \qquad \text{para } y \geq 0$$

- Cuidado con las regiones !!

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 0 & \Rightarrow \quad \frac{1}{4} > y > 0 \\ 0 < x < \frac{1}{2} & \Rightarrow \quad 0 < y < \frac{1}{4} \end{cases}$$

- Finalmente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}} & 0 < y \leq \frac{1}{4} \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Teorema Fundamental. Ejemplos

4 X v.a. Gaussiana $\mathcal{N}(\eta,\sigma)$, $y = g(x) = e^x$

- Obtención de las raíces:

$$\begin{array}{llll} y \leq 0 & \Rightarrow & y = e^x & \text{no tiene solución} \quad f_Y(y) = 0 \\ y > 0 & \Rightarrow & y = e^x & x_1 = \ln(y) \end{array}$$

- Derivada: $g'(x) = e^x$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{f_X(\ln(y))}{|e^{\ln(y)}|} = \frac{1}{y} f_X\left(\ln(y)\right) \qquad y > 0$$

- Conocemos $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{|x-\eta|^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$
- Finalmente, Y es una v.a. lognormal

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(y)-\eta)^2}{2\sigma^2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

Contenido

Generación de Números Aleatorios

- Todos los ordenadores son capaces de generar numeros aleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1 (Ej: Función rand en Matlab)

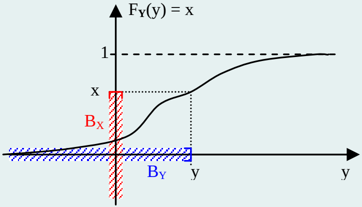
$$U_n = \frac{X_n}{m} \qquad X_{n+1} = (aX_n + c)\text{mod}_m$$

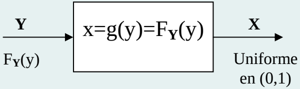
- En ocasiones necesitaremos generar secuencias aleatorias que sigan una distribución distinta de la uniforme.
- ¿Podremos generar variables aleatorias con cualquier distribución a partir de transformaciones de una v.a. uniforme?

Generación de Números Aleatorios

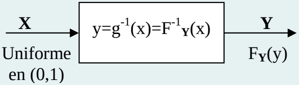
- Supongamos que disponemos de una v.a. Y con una función distribución conocida $F_Y(y)$ y que le aplicamos la transformación $X = g(Y) = F_Y(Y)$

$$F_X(x) \equiv P(X \leq x) = P(B_X) = P(B_Y) = P(Y \leq y) \equiv F_Y(y) = x \quad 0 < x < 1$$





- Caso inverso: Dada una v.a. X uniforme entre 0 y 1, obtendremos Y con $F_Y(y)$ sin más que aplicar la transformación inversa $Y = F_Y^{-1}(X)$



Generación de Números Aleatorios. Ejemplos

- **Gaussiana**:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F_Y(y) = \mathcal{G}(\frac{y-\eta}{\sigma}) = \frac{1}{2} + \text{erf}\left(\frac{y-\eta}{\sigma}\right)$$

$$F_Y^{-1}(x) = \sigma\mathcal{G}^{-1}(x) + \eta = \sigma\text{erf}^{-1}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \eta$$

- **Exponencial**: $(c > 0)$

$$f_Y(y) = ce^{-cy} \qquad y > 0$$

$$F_Y(y) = 1 - e^{-cy} \qquad y > 0$$

$$F_Y^{-1}(x) = -\frac{1}{c}\ln(1-x)$$

Generación de Números Aleatorios. Ejemplos

- **Laplace**:

$$f_Y(y) = \frac{c}{2} e^{-c|y-\eta|} \qquad c > 0$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{c(y-\eta)} & y < \eta \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-c(y-\eta)} & y \geq \eta \end{cases}$$

$$F_Y^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} \ln(2x) + \eta & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{c} \ln(2-2x) + \eta & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- **Cauchy**:

$$f_Y(y) = \frac{c/\pi}{y^2 + c^2} \qquad c > 0$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{c}\right)$$

$$F_Y^{-1}(x) = c \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Contenido

Momentos de Una Variable Aleatoria

- Consideremos la transformación $Y = g(X)$
  - **Media**:
  $$\eta_Y = E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$$
  sin embargo, se puede calcular como
  $$\eta_Y = E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$
  - **Teorema**: El operador esperanza matemática es un operador lineal
  $$E[aX + b] = aE[X] + b$$
  - **Varianza**:
  $$\sigma_Y^2 = \text{Var}\,[g(X)] = E\left[g^2(X)\right] - E\left([g(X)]\right)^2$$
  $$\text{Var}\,[aX + b] = a^2 \text{Var}[X] = a^2 \sigma_X^2$$

Momentos de Una Variable Aleatoria

- Los momentos de una v.a. son nºs reales que proporcionan información estadística parcial
  - **Momento no centrado de orden n:**

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx = E[X^n] \qquad \forall n = 1, 2, \ldots$$

    - Caso particular:

$$m_1 = E[X] = \eta_X$$

  - **Momento centrado de orden n:**

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta_X)^n f_X(x)dx = E[(X - \eta_X)^n] \qquad \forall n = 2, 3, \ldots$$

    - Caso particular:

$$\mu_2 = E[(X - \eta_X)^2] = \sigma_X^2$$