Tema 4: Variable Aleatoria Bidimensional

Teoría de la Comunicación

Curso 2007-2008

Contenido

Contenido

Variable Aleatoria Bidimensional

- **Experimento Compuesto**: $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$ con $< \Omega, \mathcal{F}, P >$
  - ε_1 con esp. prob. $< \Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1 >$

$$\begin{array}{rlcl} X: & \Omega_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega_1 \in \Omega_1 & \longrightarrow & X(\omega_1) \in \mathbb{R} \end{array}$$

  - ε_2 con esp. prob. $< \Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2 >$

$$\begin{array}{rlcl} Y: & \Omega_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega_2 \in \Omega_2 & \longrightarrow & Y(\omega_2) \in \mathbb{R} \end{array}$$

- **Variable Aleatoria Bidimensional**:

$$\begin{array}{rccl} (X,Y): & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\omega_1,\omega_2) \in \Omega & \longrightarrow & (X(\omega_1), Y(\omega_2)) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

- **Rango o Recorrido**:

$$\Omega_{XY} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | \exists (\omega_1,\omega_2) \in \Omega \text{ con } X(\omega_1) = x, Y(\omega_2) = y \right\}$$

- Análogo al caso unidimensional:
  - Caso bidimensional $\Rightarrow$ Sucesos: areas

$$\{X \leq x, Y \leq y\} = \{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}$$

Contenido

Función Distribución Conjunta

- **Definición**: Se define la Función Distribución Conjunta de la v.a. bidimensional (X, Y) como

$$\begin{array}{rccl} F_{XY}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) \in \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & F_{XY}(x,y) = P\left(X \leq x, Y \leq y\right) \end{array}$$

- F_{XY} contiene toda la información probabilística de la variable aleatoria (X, Y).
- $F_{XY}(x, y)$ representa la probabilidad de que la v.a. bidimensional tome valores en el cuadrante (x, y).

Función Distribución Conjunta. Propiedades

1. $F_{XY}(x,-\infty) = F_{XY}(-\infty,y) = 0 \qquad F_{XY}(\infty,\infty) = 1$
2. $F_{XY}(x,\infty) = F_X(x) \qquad F_{XY}(\infty,y) = F_Y(y)$
3. $0 \leq F_{XY}(x,y) \leq 1$
4. FD es no decreciente (en x y en y).
5. $\forall x_1 < x_2$

$$P(x_1 < X \leq x_2, Y \leq y) = F_{XY}(x_2,y) - F_{XY}(x_1,y)$$

6. $\forall x_1 < x_2, \forall y_1 < y_2$

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F_{XY}(x_2,y_2) + F_{XY}(x_1,y_1) - F_{XY}(x_1,y_2) - F_{XY}(x_2,y_1)$$

Función Densidad de Probabilidad Conjunta

- **Definición**:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\delta^2 F_{XY}(x,y)}{\delta x \delta y}$$

f_{XY} contiene toda la información probabilística de (X,Y)

Propiedades

1. $f_{XY}(x,y) \geq 0$
2. $F_{XY}(x,y) = \int_{\alpha=-\infty}^{x} \int_{\beta=-\infty}^{y} f_{XY}(\alpha,\beta) d\alpha d\beta$
3. $\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dx dy = 1$
4. $P((X,Y) \in D) = \int\int_D f_{XY}(x,y) dx dy$
5. Concepto de densidad:

$$f_{XY}(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+}} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x, y < Y \leq y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$

Funciones Marginales

- Marginal de X:

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty)$$
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy$$

- Marginal de Y:

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dx$$

Contenido

Clasificación en función del Rango de la v.a. Bidimensional

1. Rango = Conjunto de puntos aislados
2. Rango = Conjunto de líneas
3. Rango = Área no nula

1: Rango = Conjunto de Puntos Aislados

- X e Y v.a. discretas. $\Omega_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $\Omega_Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$
- $P(x_i, y_k) = P(X = x_i, Y = y_k) = p_{ik}$
- Función Distribución:

$$F_{XY}(x,y) = \sum_{\substack{x_i \leq x \\ y_k \leq y}} p_{ik} = \sum_{(x_i,y_k)\in\Omega_{XY}} p_{ik} u(x - x_i) u(y - y_k)$$

- Función Densidad de Probabilidad:

$$f_{XY}(x,y) = \sum_{(x_i,y_k)\in\Omega_{XY}} p_{ik} \delta(x - x_i) \delta(y - y_k)$$

- $P((x,y) \in D) = \sum_{(x_i,y_k)\in D} p_{ik}$
- Marginales: $P(X = x_i) = \sum_k p_{ik}$ $\qquad P(Y = y_k) = \sum_i p_{ik}$
- Ejemplos: Lanzamiento de dos monedas independientes
  1. X cara o cruz, Y cara o cruz.
  2. X cara o cruz primera moneda. Y número de caras.

2: Rango = Conjunto de Líneas

1. X discreta, Y continua (o viceversa)
   - Ω_{XY} conjunto de líneas verticales (u horizontales)
   - $\forall x_i \in \Omega_X, y \in \Omega_Y \qquad \exists P(X = x_i, Y \leq y)$
   - Función Distribución:

$$F_{XY}(x, y) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i, Y \leq y) = \sum_{x_i \in \Omega_X} P(X = x_i, Y \leq y) u(x - x_i)$$

   - Función Densidad de Probabilidad:

$$f_{XY}(x, y) = \sum_{x_i \in \Omega_X} \frac{\delta P(X = x_i, Y \leq y)}{\delta y} \delta(x - x_i)$$

   - Marginales:

$$P(X = x_i) = P(X = x_i, Y \leq \infty) \qquad F_Y(y) = \sum_{x_i \in \Omega_X} P(X = x_i, Y \leq y)$$

2. X continua, $Y = g(X) \qquad \Rightarrow \qquad \Omega_{XY}$: línea $y = g(x)$
3. $X = g(Z)$, $Y = h(Z) \qquad \Rightarrow \qquad F_{XY}(x, y)$ en función de $F_Z(z)$

3: Rango = Área no Nula

- X e Y continuas (o mixtas)
  - **Ejemplo**: V.a. uniforme en Ω_{XY}

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} K & (x,y) \in \Omega_{XY} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

  - Obtención de K:

$$\int\int_{\Omega_{XY}} K dx dy = K \text{Area}(\Omega_{XY}) = 1 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{\text{Area}(\Omega_{XY})}$$

  - **Caso Particular**: Ω_{XY} rectángulo $x_1 < x < x_2, \quad y_1 < y < y_2$.
    - Marginales:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dy = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1} & x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dx = \begin{cases} \frac{1}{y_2 - y_1} & y_1 < y < y_2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

    - Ambas vuelven a ser uniformes (éste es un caso especial)

Contenido

Función Distribución Condicionada

- **Definición**: Para un suceso $M \in \mathbb{R}^2$, la función distribución de (X, Y) condicionada a M se define como:

$$F_{XY}(x, y|M) = P(X \leq x, Y \leq y|M) = \frac{P(\{X \leq x, Y \leq y\} \cap M)}{P(M)}$$

- Marginales:

$$F_X(x|M) = F_{XY}(x, \infty|M) \qquad F_Y(y|M) = F_{XY}(\infty, y|M)$$

Función Densidad de Probabilidad Condicionada

- **Definición**:

$$f_{XY}(x, y|M) = \frac{\delta^2 F_{XY}(x, y|M)}{\delta x \delta y}$$

- Marginales:

$$f_X(x|M) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y|M) dy \qquad f_Y(y|M) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y|M) dx$$

Obtención de la Distribución Conjunta

- Sea $M = \{Y \leq y\}$:

$$F_X(x|M) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})}{P(Y \leq y)} = \frac{F_{XY}(x,y)}{F_Y(y)} = F_X(x|Y \leq y)$$

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x|Y \leq y)F_Y(y)$$

- Haciendo $M = \{X \leq x\}$:

$$F_{XY}(x,y) = F_Y(y|X \leq x)F_X(x)$$

Obtención de la fdp Conjunta

- A partir de $M = \{y < Y \leq y + \Delta y\}$ (o $M = \{x < X \leq x + \Delta x\}$):

$$\begin{array}{c} f_{XY}(x,y) = f_X(x|Y=y)f_Y(y) \\ f_{XY}(x,y) = f_Y(y|X=x)f_X(x) \end{array} \quad \equiv \quad \begin{array}{c} f_{XY}(x,y) = f_X(x|y)f_Y(y) \\ f_{XY}(x,y) = f_Y(y|x)f_X(x) \end{array}$$

Teorema de la Multiplicación

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x|y)f_Y(y) = f_Y(y|x)f_X(x)$$

Teorema de la Probabilidad Total

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x|y)f_Y(y)dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y|x)f_X(x)dx$$

Teorema de Bayes

$$f_Y(y|x) = \frac{f_X(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)} \qquad f_X(x|y) = \frac{f_Y(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}$$

Independencia de Variables Aleatorias

- Recordamos: Sucesos independientes $\Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- **Definición**: X e Y son variables aleatorias independientes sii los sucesos $\{X \leq x\}$, $\{Y \leq y\}$ son independientes para todo x, y, es decir

$$\begin{aligned} P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) &= P(X \leq x)P(Y \leq y) \\ F_{XY}(x,y) &= F_X(x)F_Y(y) \\ f_{XY}(x,y) &= f_X(x)f_Y(y) \\ f_X(x|y) &= f_X(x) \\ f_Y(y|x) &= f_Y(y) \end{aligned}$$

- En el caso discreto:

$$P(X = x_i, Y = y_k) = P(X = x_i)P(Y = y_k) \qquad \forall x_i \in \Omega_X, y_k \in \Omega_Y$$

- **Teorema**: Si las v.a. X e Y son independientes, las v.a. $Z = g(X)$, $W = h(Y)$ también son independientes.

Ejemplos

1. (X,Y) v.a uniforme en el rectángulo $x_1 < X < x_2$, $y_1 < Y < y_2$:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)} & (x,y) \in \Omega_{XY} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2-x_1} & x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y_2-y_1} & y_1 < y < y_2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad (X,Y) \text{ son independientes}$$

2. (X,Y) v.a. uniforme en el círculo unidad ($R = X^2 + Y^2 \leq 1$):

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad (X,Y) \text{ no son independientes}$$

$$f_Y(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} & -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

fdp condicionada uniforme $\qquad f_Y(y|x) \neq f_Y(y)$

Contenido

Función de una v.a. bidimensional

- (X, Y) v.a. bidimensional:

$$\begin{array}{rccc} (X,Y)\text{:} & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\omega_1, \omega_2) \in \Omega & \longrightarrow & (X(\omega_1), Y(\omega_2)) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

- Z v.a. función de (X, Y)

$$\begin{array}{rccc} Z\text{:} & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \longrightarrow & Z = g\left(X(\omega_1), Y(\omega_2)\right) \end{array}$$

- **Objetivo**: Caracterizar Z a partir del conocimiento de $g(\cdot)$ y suponiendo caracterizada la v.a. (X, Y)

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P((X,Y) \in B_{XY}) \qquad B_{XY} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | g(x,y) \leq z\right\}$$

  Proceso:

  - Búsqueda de B_{XY} para cada z
  - Obtención de $P(Z \leq z) = P((X,Y) \in B_{XY})$

- **Ejemplos**: Amplificador de entrada a un receptor, modulador, avión bimotor, salto de longitud (3 v.a.), ...

Función de v.a. bidimensional. Ejemplo 1

- X, Y variables aleatorias independientes
- $Z = X + Y$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(X + Y \leq z\right) = \int\int_{B_{XY}} f_{XY}(x,y)dxdy$$

- $B_{XY} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \leq z\right\}$

$$F_Z(z) = \int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)dxdy \overset{\text{v.a. indep}}{=}$$

$$= \int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{z-x} f_X(x)f_Y(y)dxdy = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x)F_Y(z-x)dx$$

- Derivando respecto a z:

$$f_Z(z) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \qquad \Leftrightarrow \qquad f_Z(z) = f_X(z) * f_Y(z)$$

Teorema de la Convolución

- **Teorema**: Sean X e Y v.a. independientes y $Z = X + Y$

$$f_Z(z) = f_X(z) * f_Y(z)$$

Otros resultados importantes

- Dadas las v.a. independientes $X_1, \ldots, X_N$, la combinación lineal

$$Y = b + \sum_{k=1}^{N} a_k X_k,$$

es una v.a. con media y varianza

$$\eta_Y = b + \sum_{k=1}^{N} a_k \eta_{X_k} \qquad \sigma_Y^2 = \sum_{k=1}^{N} a_k^2 \sigma_{X_k}^2$$

  - Si $X_1, \ldots, X_N$ son v.a. Gaussianas, Y es Gaussiana.
  - Si $N \to \infty$ entonces Y es Gaussiana independientemente de las distribuciones de $X_1, \ldots, X_N$ (Teorema del Límite Central)

Función de v.a. bidimensional. Ejemplo 2

- X, Y variables aleatorias independientes
- $Z = \text{máx}(X, Y)$
- $B_{XY}: \quad \{Z \leq z\} = \{X \leq z\} \cap \{Y \leq z\}$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\{X \leq z\} \cap \{Y \leq z\}\right) \overset{\text{v.a. indep}}{=}$$
$$= P(X \leq z)P(Y \leq z) = F_X(z)F_Y(z)$$

Función de v.a. bidimensional. Ejemplo 3

- ε: Lanzamiento de dos dados independientes
  - X: puntuación dado 1. Y: puntuación dado 2

$$\Omega_X = \{1, \ldots, 6\} \qquad P(X = x_i) = 1/6 \qquad \forall x_i = \Omega_X$$

$$\Omega_Y = \{1, \ldots, 6\} \qquad P(Y = y_k) = 1/6 \qquad \forall y_k = \Omega_Y$$

  - Z: Suma de puntuaciones

$$Z = X + Y \qquad \Leftrightarrow \qquad f_Z(z) = f_X(z) * f_Y(z)$$

Funciones de dos Variables Aleatorias

- (X, Y) v.a. bidimensional
- $g(\cdot), h(\cdot)$ funciones de (X, Y)

$$Z: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longrightarrow & Z = g(X,Y) \end{array} \qquad W: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longrightarrow & W = h(X,Y) \end{array}$$

- (Z, W) es una v.a. bidimensional
- **Objetivo**: Caracterizar Z y W de manera conjunta a partir del conocimiento de $g(\cdot), h(\cdot)$ y suponiendo caracterizada la v.a. (X, Y)

$$F_{ZW}(z, w) = P(Z \leq z, W \leq w) = P((X, Y) \in B_{XY})$$
$$B_{XY} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) \leq z, h(x, y) \leq w\right\}$$

- **Ejemplos**: Interferencias en sistemas wireless, Separación ciega de fuentes, ...

Teorema Fundamental

- **Teorema**: Sean X, Y v.a. continuas y $g(x, y)$, $h(x, y)$ funciones no constantes en ningún intervalo de Ω_{XY}. Entonces la fdp conjunta de las variables aleatorias $Z = g(X, Y)$, $W = h(X, Y)$ viene dada por

$$f_{ZW}(z, w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{XY}(x_i, y_i)}{|J(x_i, y_i)|}$$

  - $J(x, y)$ es el Jacobiano

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\delta z}{\delta x} & \frac{\delta z}{\delta y} \\ \frac{\delta w}{\delta x} & \frac{\delta w}{\delta y} \end{vmatrix} = \frac{1}{J(z, w)} \qquad J(z, w) = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta z} & \frac{\delta x}{\delta w} \\ \frac{\delta y}{\delta z} & \frac{\delta y}{\delta w} \end{vmatrix}$$

  - (x_i, y_i) son las raíces del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} z = g(x, y) \\ w = h(x, y) \end{array}\right\}$$

Teorema Fundamental

- **Ejemplo**: R, Θ v.a. independientes

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad r \geq 0 \quad \text{(Rayleigh)} \qquad f_\Theta(\theta) \sim \text{Uniforme en } (-\pi, \pi)$$

$$f_{R\Theta}(r, \theta) = f_R(r) f_\Theta(\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \qquad \begin{cases} r > 0 \\ -\pi < \theta < \pi \end{cases}$$

  - Transformación: $X = R\cos\Theta$, $Y = R\sin\Theta$
    - Jacobiano:

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta r} & \frac{\delta x}{\delta \theta} \\ \frac{\delta y}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

    - Raíces:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \overset{\text{sol. única}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta_1 &= \arctan(y/x) \end{aligned}\right.$$

Teorema Fundamental

- **Ejemplo** (Continuación): R, Θ v.a. independientes

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad r \geq 0 \quad \text{(Rayleigh)} \qquad f_\Theta(\theta) \sim \text{Uniforme en } (-\pi, \pi)$$

$$f_{R\Theta}(r,\theta) = f_R(r) f_\Theta(\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \qquad \begin{cases} r > 0 \\ -\pi < \theta < \pi \end{cases}$$

- Transformación: $X = R\cos\Theta$, $Y = R\sin\Theta$
  - Obtención de la fdp:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{f_{R\Theta(r_1,\theta_1)}}{|J(r_1,\theta_1)|} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \qquad \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{cases}$$

  - Marginales: $\mathcal{N}(0,\sigma)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad X, Y \text{ independientes}$$

Método de la v.a. Auxiliar

- **Motivación**: Dada (X,Y) v.a. bidimensional continua, formamos $Z = g(X,Y)$ y se desea obtener $f_Z(z)$
  1. Se define $W = h(X,Y)$ (normalmente $W = X$ o $W = Y$)
  2. $f_{ZW}(z,w)$ a partir de $f_{XY}(x,y)$ mediante el Tª Fundamental
  3. Se obtiene $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ZW}(z,w)dw$

Ejemplo

- X, Y v.a. independientes. $Z = X + Y$
  1. Definimos $W = Y$
  2. $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\delta z}{\delta x} & \frac{\delta z}{\delta y} \\ \frac{\delta w}{\delta x} & \frac{\delta w}{\delta y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \left.\begin{aligned} z &= x + y \\ w &= y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= z - w \\ y_1 &= w \end{aligned}\right.$$

$$f_{ZW}(z,w) = \frac{f_{XY}(x_1,y_1)}{|J(x_1,y_1)|} = f_{XY}(z-w,w) = f_X(z-w)f_Y(w)$$

  3. $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ZW}(z,w)dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-w)f_Y(w)dw = f_X(z) * f_Y(z)$

Contenido

Media de una Función de dos Variables Aleatorias

- **Definición**: $Z = g(X,Y)$

$$E\left[g(X,Y)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y)dxdy$$

- En el caso discreto:

$$E\left[g(X,Y)\right] = \sum_i \sum_k g(x_i, y_k) P(X = x_i, Y = y_k)$$

- Media condicionada:

$$E[g(X,Y)|M] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y|M)dxdy$$

Teorema

$$X, Y \text{ v.a. independientes} \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{array} \quad E[XY] = E[X]E[Y]$$

Varianza de una Función de dos Variables Aleatorias

$$\text{Var}[g(X,Y)] = E\left[g^2(X,Y)\right] - E\left[g(X,Y)\right]^2$$

Teorema

$$X, Y \text{ v.a. independientes} \quad \Rightarrow \quad \text{Var}[X+Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$$

Resumen

- Dadas $X_1, \ldots, X_N$ v.a. independientes:

$$Y = b + \sum_{k=1}^{N} a_k X_k \quad E[Y] = b + \sum_{k=1}^{N} a_k E[X_k] \quad \text{Var}[Y] = \sum_{k=1}^{N} a_k^2 \text{Var}[X_k]$$

- Además:
  - Si $X_1, \ldots, X_N$ son v.a. Gaussianas, Y es Gaussiana.
  - Si $N \to \infty$ entonces Y es Gaussiana independientemente de las distribuciones de $X_1, \ldots, X_N$ (Teorema del Límite Central)

Momento no centrado de orden (r, s)

$$m_{rs} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s f_{XY}(x,y)dxdy = E[X^r Y^s]$$

Momento centrado de orden (r, s)

$$\mu_{rs} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\eta_X)^r (y-\eta_Y)^s f_{XY}(x,y)dxdy = E[(X-\eta_X)^r (Y-\eta_Y)^s]$$

Casos Particulares

- **Medias**: $m_{10} = E[X] = \eta_X$, $m_{01} = E[Y] = \eta_Y$
- **Varianzas**: $\mu_{20} = E[(X-\eta_X)^2] = \sigma_X^2$, $\mu_{02} = E[(Y-\eta_Y)^2] = \sigma_Y^2$
- **Covarianza**:

$$\mu_{11} = \text{Cov}(X,Y) = E[(X-\eta_X)(Y-\eta_Y)] = C_{XY} = \sigma_{XY}$$

- **Coeficiente de Correlación**:

$$r_{XY} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}} \qquad -1 \leq r_{XY} \leq 1$$

Relación Estadística entre dos Variables Aleatorias

- **Independencia**: $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

$$f_X(x|y) = f_X(x) \qquad f_Y(y|x) = f_Y(y)$$

No existe relación estadística entre X e Y

- **Incorrelación**: No existe relación estadística lineal entre X e Y

$$C_{XY} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E[XY] = E[X]E[Y] \quad \Leftrightarrow \quad r_{XY} = 0$$

- **Ortogonalidad**: $E[XY] = 0$

Además. . .

$$X, Y \text{ v.a. independientes} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \quad X, Y \text{ incorreladas}$$

- $r_{XY} = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ Existe relación estadística lineal exacta entre X e Y

$$Y = aX + b$$