Tema 5: Estimación de una Variable Aleatoria

Teoría de la Comunicación

Curso 2007-2008

Contenido

1. Concepto de Estimación
2. Estimación con $g(X) = a =$ cte.
3. Estimación Mediante Una Recta
4. Estimación Sin Restricciones

Contenido

1. Concepto de Estimación
2. Estimación con $g(X) = a =$ cte.
3. Estimación Mediante Una Recta
4. Estimación Sin Restricciones

Definición General

- **Variable Aleatoria Observable**: X
- **Variable Aleatoria No Observable**: Y
- Estimar Y en función de X consiste en encontrar una función $g(\cdot)$ tal que

$$\hat{Y} = g(X),$$

donde $\hat{Y}$ es la estima de Y

  - Para poder estimar Y a partir de la observación de X ha de existir alguna relación entre las v.a. X e Y

Ejemplos

- Altura y Peso de una Persona
- Sistema de Comunicaciones

Criterios de Estimación

- Diferentes Criterios Proporcionan Diferentes Estimadores
  - Máxima Verosimilitud (ML)
  - Máximo a Posteriori (MAP)
  - Mínimo Error Cuadrático Medio (MMSE)
- Nos Centraremos en la Minimización del Error Cuadrático Medio

$$\text{MSE} = E[(\hat{Y} - Y)^2]$$

  - Interpretación Frecuencial:

$$\text{error medio} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{Y}_i - Y_i)^2$$

Contenido

1 Concepto de Estimación

2 Estimación con $g(X) = a =$ cte.

3 Estimación Mediante Una Recta

4 Estimación Sin Restricciones

Estimación con $g(X) = a =$ cte.

- Fijamos $\hat{Y} = a$
- Obtenemos el Error Cuadrático Medio

$$\text{MSE} = E[(\hat{Y} - Y)^2] = E[(a - Y)^2] = a^2 + E[Y^2] - 2aE[Y]$$

- Minimizamos respecto a a

$$\frac{\delta \text{MSE}}{\delta a} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a_{\text{opt}} - 2E[Y] = 0$$

- Estima

$$\hat{Y} = a_{\text{opt}} = E[Y] = \eta_Y$$

- Error Cuadrático Medio del Estimador

$$\text{MSE}_{\text{min}} = E[(\eta_Y - Y)^2] = \sigma_Y^2$$

Contenido

1 Concepto de Estimación

2 Estimación con $g(X) = a =$ cte.

3 Estimación Mediante Una Recta

4 Estimación Sin Restricciones

Estimación Mediante Una Recta

- Fijamos $\hat{Y} = g(X) = aX + b$ (regresión lineal)
- Obtenemos el Error Cuadrático Medio

$$\text{MSE} = E[(\hat{Y} - Y)^2] = E[(aX + b - Y)^2]$$

- Minimizamos respecto a a y b

$$a_{\text{opt}} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X^2} = r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \qquad b_{\text{opt}} = \eta_Y - r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\eta_X$$

- Estima: $\hat{Y} = r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - \eta_X) + \eta_Y$
- Error Cuadrático Medio del Estimador

$$\text{MSE}_{\text{min}} = E[(\hat{Y} - Y)^2] \overset{a,b \text{ opt.}}{=} (1 - r_{XY}^2)\sigma_Y^2$$

- Casos Límite:
  - $r_{XY} = 0, \quad \hat{Y} = \eta_Y, \quad \text{MSE}_{\text{min}} = \sigma_Y^2.$ X e Y son linealmente independientes.
  - $|r_{XY}| = 1, \quad \text{MSE}_{\text{min}} = 0.$ Relación lineal exacta entre X e Y.

Contenido

1 Concepto de Estimación

2 Estimación con $g(X) = a =$ cte.

3 Estimación Mediante Una Recta

4 Estimación Sin Restricciones

Estimación Sin Restricciones

- $\hat{Y} = g(X)$ (línea de regresión)
- Obtenemos el Error Cuadrático Medio

$$\text{MSE} = E[(Y - \hat{Y})^2] = E[(Y - g(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - g(x))^2 f_{XY}(x, y) dx dy$$

- Teniendo en cuenta $f_{XY}(x, y) = f_Y(y|x) f_X(x)$

$$\text{MSE} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_X(x)}_{\geq 0} \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(y - g(x))^2}_{\geq 0} \underbrace{f_Y(y|x)}_{\geq 0} dy \right\}}_{\varepsilon(x)} dx$$

- El problema se reduce a minimizar $\varepsilon(x)$ respecto a $g(x)$

$$\frac{\delta \varepsilon(x)}{\delta g(x)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y|x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_Y(y|x) dy$$

- Estima: $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y|x) dy = E[Y|X = x]$
- ¿Qué sucede si X e Y son independientes?