Tema 6: Teoremas Asintóticos

Teoría de la Comunicación

Curso 2007-2008

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Contenido

Contenido

Teorema del Límite Central

- **Teorema**: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_N$ v.a. independientes con medias y varianzas

$$\eta_i = E[X_i], \qquad \sigma_i^2 = E[(X_i - \eta_i)^2], \qquad i = 1, \ldots, N,$$

y la v.a. $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$, entonces

$$\lim_{N \to \infty} P(y_1 < Y \leq y_2) = \mathcal{G}\left(\frac{y_2 - \eta_Y}{\sigma_Y}\right) - \mathcal{G}\left(\frac{y_1 - \eta_Y}{\sigma_Y}\right),$$

donde

$$\mathcal{G}(y) = \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Es decir, Y se aproxima a una distribución $\mathcal{N}(\eta_Y, \sigma_Y)$, con

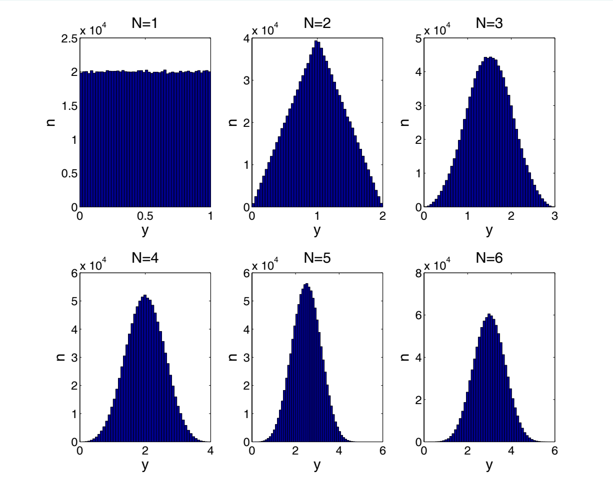
$$\eta_Y = \sum_{i=1}^{N} \eta_i, \qquad \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2$$

Comentarios

- Se puede aplicar siempre que una v.a. no predomine sobre el resto
- La aproximación es buena a partir de $N \simeq 6$
  - Aproximación fiable con N pequeño.
  - Sobre todo para los valores centrales.
- El Teorema asegura que $F_Y(y)$ tiende a ser Gaussiana
  - En principio no dice nada sobre la fdp.
  - Si X_i son v.a. continuas $f_Y(y)$ tiende a ser Gaussiana
- **Teorema de la Convolución**: La fdp de la suma de v.a. independientes es la convolución de las fdp's
  - Podemos decir que la convolución de fdp's tiende a ser Gaussiana!
- El Teorema del Límite Central sugiere una manera alternativa de generar variables aleatorias Gaussianas
- **Ejemplo**: Receptor de Comunicaciones: Interferencias, Ruido Térmico, Ruido Galáctico ...

Ejemplo

- Suma de N v.a. independientes uniformes en [0,1] (10^6 realizaciones y 100 bins)



Contenido

Teorema de DeMoivre-Laplace

- **Teorema**: Dadas $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes de Bernoulli con

$$\eta_i = E[X_i] = p, \qquad \sigma_i^2 = E[(X_i - \eta_i)^2] = pq, \qquad i = 1, \ldots, n$$

y la v.a. Binomial $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} P(k_1 < X \leq k_2) \overset{\text{T}^{\text{a}}\text{ Lim. Cent.}}{=} \mathcal{G}\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \mathcal{G}\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P(k-1 < X \leq k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \underset{n\gg 1}{\simeq} \int_{x=k-1}^{k} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}}_{\simeq \text{cte. para } npq\gg 1} dx$$

Por lo tanto, $B(n, p)$ se puede aproximar por

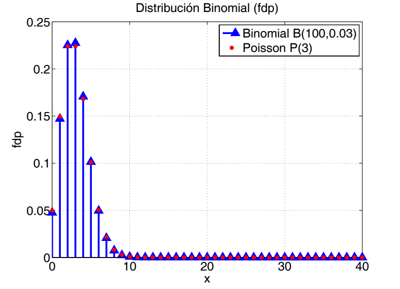
$$P(X = k) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

Comentarios

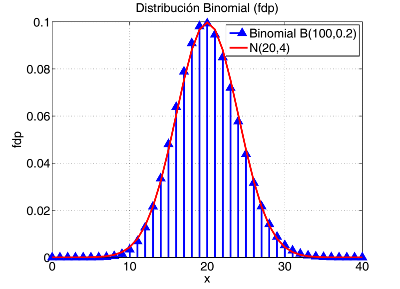
- Buena aproximación, incluso para n pequeña, en el centro de la función
- Aproximación de $B(n,p)$: $\begin{cases} \mathcal{P}(np) & n \gg 1, np < 5 \\ \mathcal{N}(np, npq) & n \gg 1, np \gg 1 \end{cases}$

Ejemplo

$$B(n = 100, p = 0.03)$$



$$B(n = 100, p = 0.2)$$



Contenido

Desigualdad de Chebychev

- Sea X una variable aleatoria con media η y varianza σ^2, se tiene

$$P(|X-\eta| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \qquad \forall \epsilon$$

  - En función del suceso contrario:

$$P(|X-\eta| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \quad \xrightarrow{\epsilon = K\sigma} \quad P(|X-\eta| < K\sigma) \geq 1 - \frac{1}{K^2}$$

  - Aproximación general pero muy conservadora.
  - Demostración:

$$P(|X-\eta| \geq \epsilon) = \int_{-\infty}^{\eta-\epsilon} f_X(x)dx + \int_{\eta+\epsilon}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{|x-\eta|\geq\epsilon} f_X(x)dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\eta)^2 f_X(x)dx \geq \int_{|x-\eta|\geq\epsilon} (x-\eta)^2 f_X(x)dx \geq$$
$$\geq \epsilon^2 \int_{|x-\eta|\geq\epsilon} f_X(x)dx = \epsilon^2 P(|X-\eta| \geq \epsilon)$$

Contenido

Ley de Los Grandes Números

- **Teorema**: Dadas n realizaciones independientes de un exp. aleatorio ε, y un suceso A con $P(A) = p$, se verifica

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n \to \infty} P(|f_A - p| \leq \epsilon) = 1,$$

donde $f_A = \frac{n_A}{n}$ es la frecuencia relativa del suceso A.

- **Demostración**: (n_A es una v.a. $B(n,p)$)

$$P(|f_A - p| \leq \epsilon) = P(p - \epsilon \leq \frac{n_A}{n} \leq p + \epsilon) = P(np - n\epsilon \leq n_A \leq np + n\epsilon)$$

$$\begin{aligned} P(|f_A - p| \leq \epsilon) &= \mathcal{G}\left(\frac{np + n\epsilon - np}{\sqrt{npq}}\right) - \mathcal{G}\left(\frac{np - n\epsilon - np}{\sqrt{npq}}\right) \\ &= \mathcal{G}\left(\frac{n\epsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \mathcal{G}\left(\frac{-n\epsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\mathcal{G}\left(\frac{n\epsilon}{\sqrt{npq}}\right) - 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} P(|f_A - p| \leq \epsilon) = \lim_{n \to \infty} 2\mathcal{G}\left(\frac{n\epsilon}{\sqrt{npq}}\right) - 1 = 1$$

Ley de Los Grandes Números

- **Aplicación Práctica**:
  - Suceso A con $P(A) = p$
  - ¿n? para que $P(|f_A - p| \leq \epsilon) \geq \mu$
- Ejemplo:
  - $P(A) = p = 0.6$
  - $\epsilon = 0.01$
  - $\mu = 0.98$

$$P(|f_A - 0.6| \leq 0.01) \simeq 2\mathcal{G}\left(\frac{n \cdot 0.01}{\sqrt{n \cdot 0.6 \cdot 0.4}}\right) - 1$$

$$P(|f_A - 0.6| \leq 0.01) \geq 0.98 \qquad \Rightarrow \qquad n \geq 13253$$

- ¿Y si desconocemos $P(A) = p$?

$$\lim_{n \to \infty} P(|f_A - p| \leq \epsilon) = 2\mathcal{G}\left(\frac{n\epsilon}{\sqrt{npq}}\right) - 1 \underset{pq \leq 1/4}{\geq} 2\mathcal{G}(2\epsilon\sqrt{n}) - 1$$

$$2\mathcal{G}(0.02\sqrt{n}) - 1 \simeq 0.98 \qquad \Rightarrow \qquad n \geq 13572$$