Tema 7: Procesos Estocásticos

Teoría de la Comunicación

Curso 2007-2008

Contenido

Contenido

Procesos Estocásticos

- **Definición**: Un Proceso Estocástico $X(t)$ es una función que asocia una señal a cada posible resultado de un experimento aleatorio.

$$S \in \Omega \qquad \longrightarrow \qquad X(t,S) \in \mathbb{R}$$

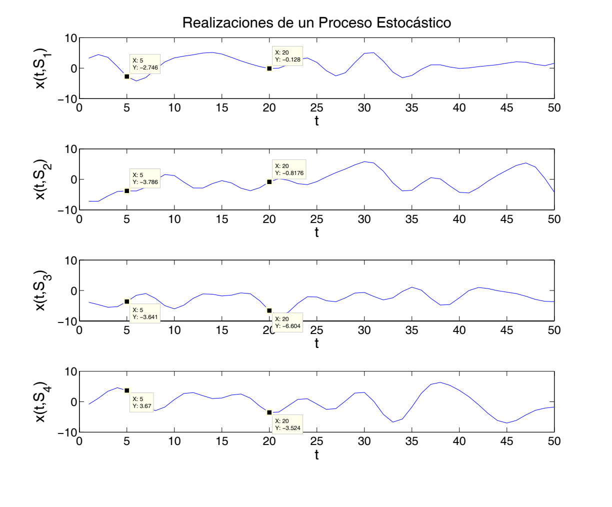
Variable independiente: $t \in T \in \mathbb{R}$ (T espacio de tiempos)

Interpretación

- Si se fija el suceso: $X(t, S_0)$ es una señal
- Si se fija el tiempo: $X(t_0, S)$ es una variable aleatoria
- Si se fijan ambos: $X(t_0, S_0)$ es un nº real
- Si ambos varían: $X(t, S)$ es un proceso estocástico

Procesos Estocásticos. Ejemplo

- Realizaciones de un Proceso Estocástico



Clasificación de Procesos Estocásticos

- En función del Espacio de Tiempos T:
  - T continuo: Proceso Estocástico
  - T discreto: Secuencia Estocástica
- En función del espacio de estados $\mathcal{S} = \{X(t,S) \quad \forall t \in T \quad \forall S \in \Omega\}$

	T continuo	T discreto
$\mathcal{S}$ continuo	Proceso Estocástico Continuo	Secuencia Estocástica Continua
$\mathcal{S}$ discreto	Proceso Estocástico Discreto	Secuencia Estocástica Discreta

- Otra Clasificación:
  - Deterministas (o predecibles): Los valores futuros se pueden predecir de manera exacta a partir de los valores anteriores
    - Ejemplo: $X(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$ con Θ v.a. uniforme en $(-\pi, \pi)$
  - No Deterministas (impredecibles): No se pueden predecir de manera exacta los valores futuros

Contenido

F.D. y fdp de primer orden

- Fijando $t \quad \Rightarrow \quad X(t_1)$ es una v.a.
  - Función Distribución de primer orden:

$$F_X(x_1; t_1) = P(X(t_1) \leq x_1)$$

  - Función Densidad de Probabilidad de primer orden:

$$f_X(x_1; t_1) = \frac{\delta F_X(x_1; t_1)}{\delta x_1}$$

- Observaciones:
  - Ambas funciones se han de conocer para todo $t_1 \in T$
  - En general, el proceso estocástico no queda completamente caracterizado por las funciones de primer orden

F.D. y fdp de segundo orden

- Considerando dos instantes t_1, $t_2 \Rightarrow$ v.a. bidimensional $(X(t_1), X(t_2))$
  - Función Distribución de segundo orden:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2)$$

  - Función Densidad de Probabilidad de segundo orden:

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\delta^2 F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\delta x_1 \delta x_2}$$

- Observaciones:
  - Ambas funciones se han de conocer para todo par (t_1, t_2)
  - En general, el proceso estocástico no queda completamente caracterizado por las funciones de segundo orden
  - Obtención de las marginales (funciones de primer orden):

$$F_X(x_1; t_1) = F_X(x_1, x_2 = \infty; t_1, t_2)$$

$$f_X(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2$$

F.D. y fdp de orden n

- Considerando n instantes $t_1, t_2, \ldots, t_n$
- Caracterización Conjunta de n variables aleatorias
  - Función Distribución de orden n:

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P(X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_n) \leq x_n)$$

  - Función Densidad de Probabilidad de orden n:

$$f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\delta^n F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_n}$$

- Observaciones:
  - Un proceso estocástico queda completamente caracterizado[a] si conocemos su fdp (o F.D.) de orden n
    - $\forall n$
    - $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$
    - $\forall t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$

[a] En la práctica, suele bastar con conocer la fdp o F.D. de segundo orden.

Contenido

Media de un Proceso Estocástico

- **Definición**:

$$\eta_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x;t)dx$$

  - En general, $\eta_X(t)$ depende del tiempo
  - Se requiere la fdp de primer orden

Autocorrelación de un Proceso Estocástico

- **Definición**:

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1 dx_2$$

  - En general, la autocorrelación depende de t_1 y t_2

Autocovarianza de un Proceso Estocástico

- **Definición**:

$$C_X(t_1,t_2) = E\left[(X(t_1)-\eta_X(t_1))\,(X(t_2)-\eta_X(t_2))\right] =$$
$$= E[X(t_1)X(t_2)] - \eta_X(t_1)\eta_X(t_2) = R_X(t_1,t_2) - \eta_X(t_1)\eta_X(t_2)$$

Valor Cuadrático Medio (Potencia) de un Proceso Estocástico

- Es el momento no centrado de orden 2 de la v.a. $X(t)$:

$$m_2(t) = E\left[X^2(t)\right] = R_X(t,t)$$

Varianza de un Proceso Estocástico

- Es el momento centrado de orden 2 de la v.a. $X(t)$:

$$\mu_2(t) = \sigma_X^2(t) = \text{Var}\left[X(t)\right] = E\left[X^2(t)\right] - \eta_X^2(t) = C_X(t,t)$$

Coeficiente de Autocorrelación

- Definición análoga al caso de 2 variables aleatorias:

$$r_X(t_1,t_2) = \frac{C_X(t_1,t_2)}{\sqrt{\text{Var}\left[X(t_1)\right]\text{Var}\left[X(t_2)\right]}} = \frac{C_X(t_1,t_2)}{\sqrt{C_X(t_1,t_1)C_X(t_2,t_2)}}$$

  - $-1 \leq r_X(t_1,t_2) \leq 1$
  - $r_X(t_1,t_2)$ indica el grado de relación lineal entre $X(t_1)$ y $X(t_2)$

Ejemplo

- $X(t) = at + Y$ con Y v.a. uniforme en $(0,1)$, $a = cte.$
  - Media: $\eta_X(t) = at + 1/2$
  - Autocorrelación: $R_X(t_1,t_2) = a^2 t_1 t_2 + \frac{1}{2}a(t_1+t_2) + \frac{1}{3}$
  - Autocovarianza: $C_X(t_1,t_2) = \frac{1}{12}$
  - Varianza: $\sigma_X^2(t) = \text{Var}\left[X(t)\right] = C_X(t,t) = \frac{1}{12}$
  - Valor Cuadrático Medio: $E\left[X^2(t)\right] = R_X(t,t) = a^2t^2 + at + \frac{1}{3}$
  - Coeficiente de Autocorrelación: $r_X(t_1,t_2) = 1$

Ruido Blanco

- Un Proceso Estocástico es Ruido Blanco sii:

$$C_X(t_1, t_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_X(t_1, t_2) = \eta_X(t_1)\eta_X(t_2) \qquad \forall t_1 \neq t_2$$

  - Las variables aleatorias $X(t_1)$, $X(t_2)$ están incorreladas
  - No se puede estimar linealmente $X(t_2)$ a partir de $X(t_1)$ ($\forall t_1 \neq t_2$)
  - Realizaciones de Ruido Blanco: Carácter Errático

Ruido Blanco Estricto

- Un Proceso Estocástico es Ruido Blanco Estricto sii:

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1; t_1) f_X(x_2; t_2) \qquad \forall t_1 \neq t_2$$

  - Las variables aleatorias $X(t_1)$, $X(t_2)$ son independientes
  - No hay ninguna relación (ni lineal ni no lineal) entre $X(t_1)$ y $X(t_2)$

Caracterización de Procesos Estocásticos Discretos en el tiempo

- Secuencias Estocásticas: Espacio de tiempos $T = \{\ldots, t_{-1}, t_0, t_1, \ldots\}$

$$X[n] = X(t_n) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- Definiciones Análogas a las de Procesos Estocásticos Continuos
  - Función Distribución: $F_X[x;n] = P(X[n] \leq x)$
  - fdp:

$$f_X[x;n] = \frac{\delta F_X[x;n]}{\delta x}$$

  - Media: $\eta_X[n] = E\left[X[n]\right]$
  - Autocorrelación: $R_X[n_1, n_2] = E\left[X[n_1]X[n_2]\right]$
  - Autocovarianza: $C_X[n_1, n_2] = R_X[n_1, n_2] - \eta_X[n_1]\eta_X[n_2]$
  - Valor Cuadrático Medio (Potencia): $m_2[n] = E\left[X^2[n]\right]$
  - Varianza:

$$\sigma_X^2[n] = \text{Var}\left[X[n]\right] = E\left[\left(X[n] - \eta_X[n]\right)^2\right] = E\left[X^2[n]\right] - \eta_X^2[n]$$

  - Coeficiente de Autocorrelación: $r_X[n_1, n_2] = \frac{C_X[n_1,n_2]}{\sqrt{C_X[n_1,n_1]C_X[n_2,n_2]}}$

Caracterización de dos Procesos Estocásticos

- Procesos Estocásticos $X(t)$, $Y(t)$
  - Función Distribución Conjunta:

$$F_{XY}(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M; t_1, \ldots, t_N, t_1', \ldots, t_M')$$

  - fdp Conjunta: $f_{XY}(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M; t_1, \ldots, t_N, t_1', \ldots, t_M')$

Estadísticos de dos Procesos Estocásticos

- Correlación Cruzada: $R_{XY}(t_1, t_2) = E\left[X(t_1)Y(t_2)\right]$
- Covarianza Cruzada:

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E\left[\left(X(t_1) - \eta_X(t_1)\right)\left(Y(t_2) - \eta_Y(t_2)\right)\right]$$

- Propiedades:

$$\begin{array}{rcl} R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2, t_1) & \qquad & C_X(t_1, t_2) = C_X(t_2, t_1) \\ R_{XY}(t_1, t_2) = R_{YX}(t_2, t_1) & & C_{XY}(t_1, t_2) = C_{YX}(t_2, t_1) \\ R_{XY}(t_1, t_2) \neq R_{XY}(t_2, t_1) & & C_{XY}(t_1, t_2) \neq C_{XY}(t_2, t_1) \end{array}$$

Contenido

Proceso Estocástico Estacionario de Orden 1

- **Definición**: Se dice que un proceso estocástico es estacionario de orden uno sii:
$$f_X(x;t) = f_X(x;t+\Delta) \qquad \forall t, \forall \Delta$$
es decir, la fdp (y F.D.) de orden 1 no dependen de t, lo que implica:
$$\eta_X(t) = \eta_X = \text{cte.} \qquad \sigma_X^2(t) = \sigma_X^2 = \text{cte.}$$

Proceso Estocástico Estacionario de Orden 2

- **Definición**: Se dice que un proceso estocástico es estacionario de orden dos sii:
$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;t_1+\Delta,t_2+\Delta) \qquad \forall t_1,t_2,\ \forall \Delta$$
- Implicaciones:
  - La fdp (y F.D.) de orden dos no depende de los tiempos absolutos t_1, t_2 sino solamente de la diferencia $\tau = t_1 - t_2$
  - Un P.E. estacionario de orden 2 también lo es de orden 1
  - $R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1-t_2) = R_X(\tau)$

Proceso Estocástico Estacionario en Sentido Estricto

- **Definición**: Un proceso estocástico es estacionario en sentido estricto sii es estacionario de orden $n \quad \forall n$

Proceso Estocástico Estacionario en Sentido Amplio

- **Definición**: Un P.E. es estacionario en sentido amplio[a] sii:
  - $\eta_X(t) = E[X(t)] = \eta_X =$ cte.
  - $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau) = E\left[X(t+\tau)X(t)\right]$
- En el caso discreto:
  - $\eta_X[n] = E[X[n]] = \eta_X =$ cte.
  - $R_X[n_1, n_2] = R_X[n_1 - n_2] = R_X[m] = E\left[X[n+m]X[n]\right]$
- Observación:

Estacionario de orden 2 $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ Estacionario en Sentido Amplio

[a] WSS: Wide Sense Stationary

Ejemplo 1

- Tono de fase aleatoria: $X(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$ $\quad \Theta$ uniforme en $(-\pi, \pi)$

$$f_X(x;t) = f_X(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} \quad |x| \leq A \quad \Rightarrow \quad \text{Estacionario orden 1}$$

  - Media:

$$\eta_X(t) = E\left[A\cos(\omega t + \Theta)\right] = A\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta = 0 = \text{cte.}$$

  - Autocorrelación:

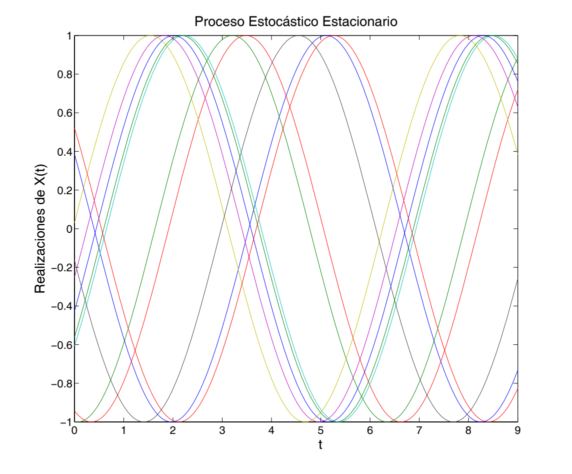
$$R_X(t_1, t_2) = E\left[X(t_1)X(t_2)\right] = E\left[A^2\cos(\omega t_1 + \Theta)\cos(\omega t_2 + \Theta)\right] =$$

$$= \frac{A^2}{2}\left\{\underbrace{E\left[\cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\Theta)\right]}_{0} + E\left[\cos(\omega(t_1 - t_2))\right]\right\} =$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(\omega(t_1 - t_2)) \quad \Rightarrow \quad R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

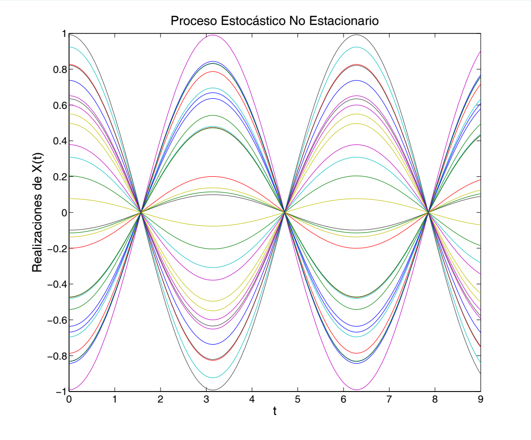
Ejemplo 1. Continuación

- $X(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$ es estacionario en sentido amplio
- Realizaciones del Proceso Estocástico



Ejemplo 2

- $X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ con A v.a. uniforme en $(-a, a)$
- $X(t)$ es una v.a uniforme en $[-a\cos(\omega t + \theta), a\cos(\omega t + \theta)]$
- Dependencia con $t \quad \Rightarrow \quad$ Proceso Estocástico No Estacionario



Procesos Conjuntamente Estacionarios

- **Definición**: Los procesos estocásticos $X(t)$, $Y(t)$ son conjuntamente estacionarios en sentido amplio sii:
  - $X(t)$, $Y(t)$ son estacionarios en sentido amplio por separado
  - $R_{XY}(t+\tau,t) = E\left[X(t+\tau)Y(t)\right] = R_{XY}(\tau)$

Algunas Propiedades de los Procesos Estacionarios

- Propiedades de $R_X(\tau)$
  - $R_X(\tau) = R_X(-\tau) \qquad \forall\tau$
  - $|R_X(\tau)| \leq R_X(0) \qquad \forall\tau$
- Propiedades de $R_{XY}(\tau)$
  - $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \qquad \forall\tau$
  - $|R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_X(0)R_Y(0)} \qquad \forall\tau$
  - Para $Z(t) = X(t) + Y(t)$

$$R_Z(\tau) = E\left[Z(t+\tau)Z(t)\right] = E\left[\left(X(t+\tau)+Y(t+\tau)\right)\left(X(t)+Y(t)\right)\right]$$

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau)$$

Procesos Estocásticos Independientes

- **Definición**: Dos procesos estocásticos son independientes sii:

$$f_{XY}(x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_M;t_1,\ldots,t_N,t'_1,\ldots,t'_M) =$$
$$= f_X(x_1,\ldots,x_N;t_1,\ldots,t_N)f_Y(y_1,\ldots,y_M;t'_1,\ldots,t'_M) \qquad \forall N,M$$

Procesos Estocásticos Incorrelados

- **Definición**: Dos procesos estocásticos son incorrelados sii:

$$C_{XY}(t+\tau,t) = 0 \qquad \forall t,\tau$$

- $X(t)$ no se puede estimar de manera lineal a partir de la observación de $Y(t)$

Procesos Estocásticos Ortogonales

- **Definición**: Dos procesos estocásticos son ortogonales sii:

$$R_{XY}(t+\tau,t) = 0 \qquad \forall t,\tau$$

- Ejemplo (ruido en RX): $Z(t) = X(t) + Y(z)$ con $X(t), Y(t)$ ortogonales

$$R_Z(t+\tau,t) = R_X(t+\tau,t) + R_Y(t+\tau,t)$$

Contenido

Procesos Estocásticos Ergódicos

- **Pregunta**: Dada una realización de un proceso estocástico . . . ¿Podemos caracterizarlo estadísticamente?
- **Intuición**: Un proceso estocástico es ergódico si se puede caracterizar estadísticamente a partir de una realización

Promedio Temporal y Autocorrelación Temporal

- Dada una realización $X(t, S_0)$ de un P.E. se define
    - **Promedio Temporal**:

$$M_X(S_0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t, S_0) dt$$

    - **Autocorrelación Temporal**:

$$A_X(\tau, S_0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t + \tau, S_0) X(t, S_0) dt$$

- En general, $M_X(S)$ es una v.a. y $A_X(\tau, S)$ es un proceso estocástico

Ergodicidad Respecto a la Media

- **Definición**: Un P.E. $X(t)$ es ergódico respecto a la media sii:
  - $X(t)$ es estacionario en sentido amplio
  - El promedio temporal es igual a la media

$$M_X(S) = \eta_X \qquad \forall S$$

- Condiciones para que $X(t)$ (WSS) sea ergódico respecto a la media
  - **Teorema 1**: Condición Necesaria y Suficiente

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)C_X(\tau)d\tau = 0$$

  - **Teorema 2**: Condición Suficiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C_X(\tau)|d\tau < \infty$$

  - **Teorema 3**: Condición Suficiente

$$C_X(0) < \infty \qquad \lim_{|\tau|\to\infty} C_X(\tau) = 0$$

Ejemplo 1

- $X(t) = A$ con A variable aleatoria uniforme en $(0, 1)$
  - Promedio estadístico ("vertical"): $\eta_X = E[X(t)] = E[A] = 1/2$
  - Promedio temporal ("horizontal"): $M_X = \text{lím}_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A dt = A$
- $\eta_X \neq M_X \quad \Rightarrow \quad$ no es ergódico respecto a la media

Ejemplo 2

- Lanzamiento de una moneda y dos formas de onda

$$X(t, \text{“}cara''') = \cos(\omega t) \qquad X(t, \text{“}cruz''') = e^{-ct}$$

- $\eta_X(t) \quad \Rightarrow \quad$ No es WSS $\quad \Rightarrow \quad$ No es ergódico respecto a la media

Ejemplo 3

- $X(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$ $\qquad$ Θ uniforme en $(-\pi, \pi)$
- $X(t)$ es estacionario en sentido amplio:

$$\eta_X = 0 \qquad R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

- Promedio Temporal:

$$M_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\cos(\omega t + \Theta)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2T\omega}\sin(\omega t + \Theta)|_{-T}^{T} =$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2T\omega}\left(\sin(\omega T + \Theta) - \sin(-\omega T + \Theta)\right) =$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A}{T\omega}\sin(\omega T)\cos(\Theta) = 0 = \eta_X$$

- WSS y $\eta_X = M_X$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ Ergódico respecto a la media

Ergodicidad Respecto a la Autocorrelación

- **Definición**: Un P.E. $X(t)$ es ergódico respecto a la autocorrelación sii:
  - $X(t)$ es estacionario en sentido amplio
  - La Autocorrelación Temporal es igual a la Autocorrelación

$$A_X(\tau, S) = R_X(\tau) \qquad \forall \tau, S$$

Ejemplo

- $X(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$ $\qquad$ Θ uniforme en $(-\pi, \pi)$

$$\eta_X = 0 \qquad R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

- Autocorrelación Temporal:

$$A_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)A\cos(\omega t+\Theta)dt =$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau) = R_X(\tau) \quad \Rightarrow \quad \text{Ergódico resp. Autocorrelación}$$

Contenido

Caracterización Espectral de Procesos Estocásticos WSS

- **Objetivo**: Caracterización frecuencial de un proceso estocástico WSS
- **Herramienta**: Transformada de Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df$$

Primera Aproximación

- Obtención de la T.F. de cada Realización $x(t) = X(t, S)$
  - Problemas:
    - En general, $x(t)$ puede no tener Transformada de Fourier

      Cond. suficiente para ∃T.F. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$
    - Buscamos el espectro del P.E., no de una realización

Segunda Aproximación

- Consideración de una ventana temporal

$$X_T(t,S) = \begin{cases} X(t,S) & -T < t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad X_T(\omega,S) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t,S)e^{-j\omega t}dt$$

  - Ventajas:
    - Energía finita ⇒ Existe Transformada de Fourier. Tª de Parseval:

$$E_T(S) = \int_{-T}^{T} (X_T(t,S))^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega,S)|^2 \, d\omega$$

  - Inconvenientes:
    - Seguimos considerando realizaciones
    - Sólo consideramos un intervalo temporal ($T \to \infty \;\Rightarrow\; E_T(S) \to \infty$)

$$P_T(S) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (X_T(t,S))^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(\omega,S)|^2}{2T} d\omega$$

Solución: Densidad Espectral de Potencia

- Consideramos la Potencia

$$P_X = \lim_{T\to\infty} E[P_T(S)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E[X_T^2(t,S)]dt = R_X(0) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{E\left[|X_T(\omega,S)|^2\right]}{2T} d\omega$$

- **Densidad Espectral de Potencia (DEP)**

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E\left[|X_T(\omega,S)|^2\right]}{2T}$$

- Además, la DEP y la Función de Autocorrelación satisfacen la relación:

$$S_X(\omega) = \text{TF}\left[R_X(\tau)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$
$$R_X(\tau) = \text{TIF}\left[S_X(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

Densidad Espectral de Potencia de P.E. Discretos en el tiempo

- Definición análoga

$$S_X(\Omega) = \text{TF}\left[R_X[m]\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X[m] e^{-j\Omega m}$$

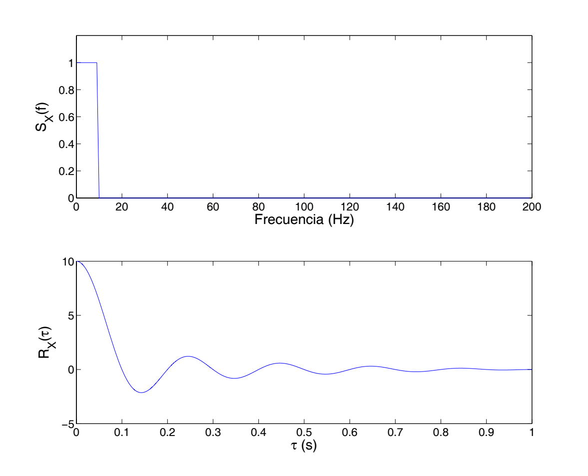
$$R_X[m] = \text{TIF}\left[S_X(\Omega)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} S_X(\Omega) e^{j\Omega m} d\Omega$$

- En este caso, la DEP es periódica de periodo 2π

$$P_X = R_X[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} S_X(\omega) d\omega$$

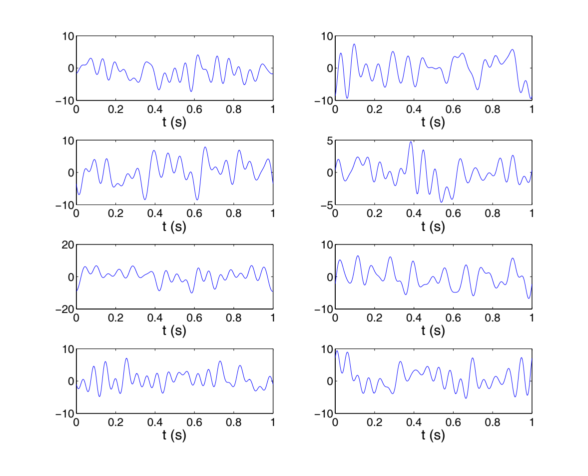
Densidad Espectral de Potencia

- Ejemplo 1:
  - DEP y Función de Autocorrelación de un Proceso Estocástico



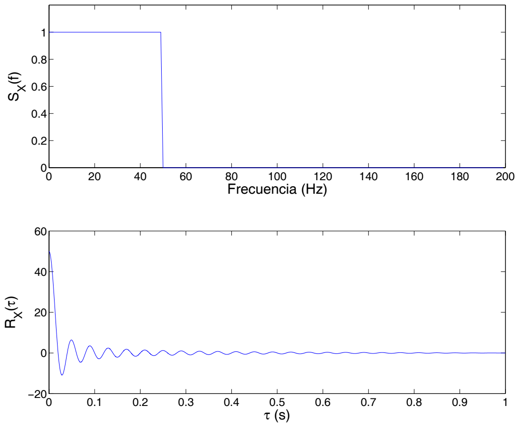
Densidad Espectral de Potencia

- Ejemplo 1:
  - Realizaciones del Proceso Estocástico



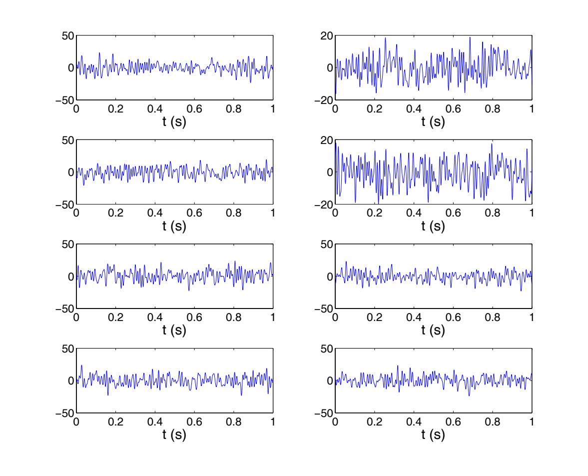
Densidad Espectral de Potencia

- Ejemplo 2:
  - DEP y Función de Autocorrelación de un Proceso Estocástico



Densidad Espectral de Potencia

- Ejemplo 2:
  - Realizaciones del Proceso Estocástico



Densidad Espectral de Potencia

- **Propiedades**:
  - $S_X(\omega)$ es una función real
  - La DEP es no negativa: $S_X(\omega) \geq 0$
  - Para P.E. reales, la DEP es par: $S_X(-\omega) = S_X(\omega)$
  - $S_X(\omega) = \text{TF}\left[R_X(\tau)\right]$
  - Analogía con una fdp: La DEP indica como se distribuye la potencia de un P.E. con la frecuencia

Ejemplo 1

- $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$, con Θ uniforme en $(-\pi, \pi)$
  - Función de Autocorrelación: $R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$
  - Densidad Espectral de Potencia:

$$S_X(\omega) = \text{TF}\left[R_X(\tau)\right] = \frac{A^2}{2}\pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]$$

  - Potencia: $P_X = R_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)d\omega = \frac{A^2}{2}$

Ejemplo 2

- Ruido Blanco con media cero:
  - Densidad Espectral de Potencia:

$$S_X(\omega) = \frac{N_0}{2} \text{Watt/Hz}$$

  - Autocorrelación: $R_X(\tau) = C_X(\tau) = \text{TIF}\left[S_X(\omega)\right] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$
  - Potencia en una Ancho de Banda BW (en Hercios):

$$P_{BW} = BW N_0 = \sigma^2$$

- Caso discreto: Ruido Blanco de media cero y varianza σ^2
  - Autocorrelación:

$$R_X[m] = C_X[m] = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ \sigma^2 & m = 0 \end{cases}$$

  - Densidad Espectral de Potencia: $S_X(\Omega) = \text{TF}\left[R_X[m]\right] = \sigma^2 \quad \forall\Omega$

Densidad Espectral de Potencia Cruzada

- **Definición**: Sean $X(t)$, $Y(t)$ dos procesos estocásticos conjuntamente estacionarios, se define la DEP cruzada como

$$S_{XY}(\omega) = \text{TF}\left[R_{XY}(\tau)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{XY}(\tau) = \text{TIF}\left[S_{XY}(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

- En el caso discreto:

$$S_{XY}(\Omega) = \text{TF}\left[R_{XY}[m]\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{XY}[m] e^{-j\Omega m}$$

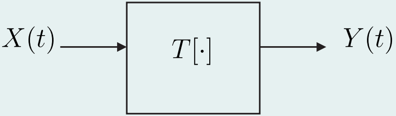
$$R_{XY}[m] = \text{TIF}\left[S_{XY}(\Omega)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} S_{XY}(\Omega) e^{j\Omega m} d\Omega$$

- Particularidades:
  - $S_{XY}(\omega)$ puede ser compleja y puede no ser par
  - $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega)$

Contenido

Sistemas con Entradas Aleatorias

- **Planteamiento General**: Supongamos que un proceso estocástico $X(t)$ es la entrada a un determinado sistema $T[\cdot]$. Nuestro objetivo consiste en caracterizar el proceso estocástico de salida $Y(t)$



- En general, $Y(t)$ se podría caracterizar a partir de la estadística de $X(t)$ y del conocimiento del sistema $T[\cdot]$ (determinista)
- Para simplificar el problema, aquí nos centraremos en dos tipos particulares de sistemas:
  - Sistemas sin Memoria (Transformación de Procesos Estocásticos)
  - Sistemas LTI (Filtrado de Procesos Estocásticos)

Sistemas sin Memoria

- Sistemas del tipo
$$Y(t) = g\left(X(t)\right)$$
- La salida en el instante t sólo depende de la entrada en el instante t
- Equivale a una función de una variable aleatoria
- Obtención de la fdp de primer orden:
  - A partir de $f_X(x;t)$ y de la función $g(\cdot)$ $\Rightarrow$ Teorema Fundamental
  - Obtención de la media:

$$\eta_Y(t) = E[Y(t)] = E[g(X(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x;t) dx$$

Sistemas sin Memoria (Continuación)

- Obtención de la fdp de segundo orden:

$$\left.\begin{aligned} Y(t_1) &= g(X(t_1)) \\ Y(t_2) &= g(X(t_2)) \end{aligned}\right\} \quad \text{Funciones de 2 variables aleatorias}$$

  - Teorema Fundamental:

$$f_Y(y_1, y_2; t_1, t_2) = \sum_i \frac{f_X(x_{1i}, x_{2i}; t_1, t_2)}{|J(x_{1i}, x_{2i})|} = \sum_i \frac{f_X(x_{1i}, x_{2i}; t_1, t_2)}{|g'(x_{1i})g'(x_{2i})|}$$

  - Obtención de la Función de Autocorrelación

$$R_Y(t_1, t_2) = E\left[Y(t_1)Y(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1)g(x_2)f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1dx_2$$

Observaciones sobre la Estacionariedad

$X(t)$ est. sentido estricto	$\Rightarrow$	$Y(t)$ est. sentido estricto
$X(t)$ est. de (hasta) orden n	$\Rightarrow$	$Y(t)$ est. de (hasta) orden n
$X(t)$ WSS	$\not\Rightarrow$	$Y(t)$ WSS

Ejemplo

- **Detector Cuadrático**: $Y(t) = X^2(t)$
  - fdp de primer orden:
    - Raíces:
      $y = g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{y}, \quad x_2 = -\sqrt{y} \quad (y \geq 0)$
    - Derivada: $g'(x) = 2x$
    - fdp: $f_Y(y;t) = \frac{f_X(\sqrt{y};t)}{2\sqrt{y}} + \frac{f_X(-\sqrt{y};t)}{2\sqrt{y}}$
  - fdp de orden 2:

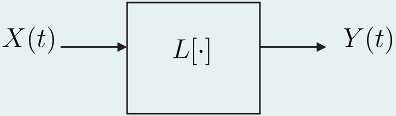
$$Y(t_1) = X^2(t_1)$$
$$Y(t_2) = X^2(t_2)$$

    - Raíces ($y_1 \geq 0$,$y_2 \geq 0$):

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 & = x_1^2 \\ y_2 & = x_2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} x_1 & = \pm\sqrt{y_1} \\ x_2 & = \pm\sqrt{y_2} \end{array}$$

      4 parejas de soluciones !!
    - Jacobiano: $J(x_1, x_2) = 4x_1x_2$
    - fdp: $f_Y(y_1, y_2; t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{4} \frac{f_X(\pm\sqrt{y_1}, \pm\sqrt{y_2}; t_1, t_2)}{4\sqrt{y_1 y_2}}$

Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo



- Utilizaremos $L[X(t)]$ (en lugar de $T[X(t)]$) para distinguir que se trata de un operador lineal
- Características:
  - Permiten un estudio general
  - Se pueden caracterizar en el dominio de la frecuencia
  - Aparecen con frecuencia en aplicaciones prácticas

Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo

- Repaso:
  - Linealidad: $L\left[\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i L\left[x_i(t)\right]$
  - Invarianza temporal:

$$y(t) = L[x(t)] \quad \Rightarrow \quad y(t+c) = L[x(t+c)] \qquad \forall c$$

  - Respuesta al impulso y convolución: $h(t) = L[\delta(t)]$

$$y(t) = L[x(t)] = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

  - Caracterización Frecuencial: $L\left[e^{j\omega_0 t}\right] = H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$

$$H(\omega) = \text{TF}\left[h(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

  - Causalidad:

$$x(t) = 0 \quad \forall t < t_0 \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = 0 \quad \forall t < t_0$$

  - Estabilidad: $|x(t)| < M \quad \forall t \qquad \Rightarrow \qquad \exists K \quad |y(t)| < K \quad \forall t$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$$

Caracterización Estadística de Sistemas LTI

- **Teorema**: Los operadores $E[\cdot]$ y $L[\cdot]$ son intercambiables

$$E\left[L\left[x(t)\right]\right] = L\left[E\left[x(t)\right]\right]$$

La demostración es directa a partir de la linealidad de $E[\cdot]$ y $L[\cdot]$

Media del Proceso Estocástico de Salida

- Obtención de la media

$$\eta_Y(t) = E\left[Y(t)\right] = E\left[L[X(t)]\right] = L\left[E[X(t)]\right] = L[\eta_X(t)]$$
$$\eta_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_X(t-\alpha) h(\alpha) d\alpha = \eta_X(t) * h(t)$$

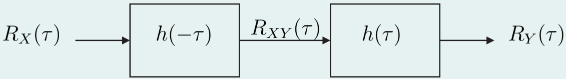
- Caso particular: $X(t)$ est. en sentido amplio ($\eta_X(t) = \eta_X$)

$$\eta_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_X h(\alpha) d\alpha = \eta_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) d\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \eta_Y = \eta_X H(0)$$

Autocorrelación del Proceso Estocástico de Salida

- Asumiendo que $X(t)$ es estacionario en sentido amplio

$$R_Y(\tau) = E\left[Y(t+\tau)Y(t)\right] = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$



- Correlación Cruzada Entrada-Salida

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau) \qquad R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau)$$

Densidad Espectral de Potencia

- A partir de la definición: $S_Y(\omega) = \text{TF}\left[R_Y(\tau)\right]$
- Y teniendo en cuenta: TF $[h(\tau)] = H(\omega)$, TF $[h(-\tau)] = H(-\omega)$
  - Además, para $h(\tau)$ real: $H(-\omega) = H^*(\omega)$
- Obtenemos:

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega)H^*(\omega)H(\omega) = S_X(\omega)\left|H(\omega)\right|^2$$

Ejemplo

- **Filtrado de Ruido Blanco con Media Cero**:
  - Autocorrelación de la Entrada: $R_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$
  - DEP de la entrada: $S_X(\omega) = \frac{N_0}{2}$
  - Sistema LTI: $h(t) \quad \rightarrow \quad H(\omega)$
  - Autocorrelación de la salida:

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = \frac{N_0}{2}\left(h(\tau) * h(-\tau)\right)$$

  - DEP de la salida:

$$S_Y(\omega) = \frac{N_0}{2}\left|H(\omega)\right|^2$$

Ejemplo

- **Promediador de Media Móvil**:
  - Respuesta del Sistema:

$$Y(t) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt$$

  - Función de trasferencia:

$$H(\omega) = \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$$

  - DEP de la salida:

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega)\frac{\sin^2(\omega T)}{(\omega T)^2}$$