Universidad de Cantabria
ETSII Telecomunicación
2º Curso de Ingeniería e Ingeniería Técnica de Telecomunicación
Teoría de la Comunicación

SOLUCIONES HOJA DE PROBLEMAS 6

1. a) $\eta_Y(t)=0$, $R_Y(t_1,t_2)=½\, R_X(t_1,t_2)\cos(\Omega_0(t_1-t_2)) \Rightarrow R_Y(\tau)=½\, R_X(\tau)\cos(\Omega_0\tau)$
b) **Y**(t) estacionario s.a.

2. a) $\eta_Y(t)=1-2F_X(a)$, $R_Y(t_1,t_2)=1-4F_X(a)+4F_X(a,a;t_1-t_2) \Rightarrow R_Y(\tau)=1-4F_X(a)+4F_X(a,a;\tau)$
Y(t) estacionario en s.a.
$f_Y(y;t)=F_X(a)\delta(y+1)+(1-F_X(a))\delta(y-1)$ no depende de t $\Rightarrow$ Y(t) estacionario 1er orden
b) $C_Y(\tau)=4F_X(a,a;\tau)-4F^2{}_X(a)$ Var[**Y**(t)]$=C_Y(\tau=0)=4F_X(a,a;0)-4F^2{}_X(a)$
máximo para a=mediana de **X**

3. $\eta_X(t)= \eta_A +\eta_B\, t=½(a_0+a_1)+ ½(b_0+b_1)t$
$R_X(t_1,t_2)=(a_0^2+a_1^2+a_0a_1)/3+t_1t_2(b_0^2+b_1^2+b_0b_1)/3+(t_1+t_2)\,(a_0+a_1)\,(b_0+b_1)/4$
$C_X(t_1,t_2)=(a_1-a_0)^2/12+t_1t_2(b_1+b_0)^2/12=\sigma_A^2+t_1t_2\sigma_B^2$
No es estacionario. No es ergódico

4. a) $$f_Z(z;t)=f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\left(1-e^{-z/b}\right) & 0<z<a\\[2mm] \dfrac{e^{-z/b}}{a}\left(e^{a/b}-1\right) & a<z<\infty\end{cases}$$
b) $C_{YZ}(t_1,t_2)= R_Y(t_1,t_2)+\eta_Y\eta_X \Rightarrow C_{YZ}(\tau)=R_Y(\tau)-\eta_Y^2 \Rightarrow$**Y**(t), **Z**(t) conjuntamente est. s. a.

5. a) $\eta_X(t)= \eta_X=0$, $R_X(t_1,t_2)= R_X(\tau)=(A^2/2)\cos(\Omega_0\tau)$
b) $M_T=(A/T\omega_0)\mathrm{sen}(\Omega_0T)\cos(\phi)$ $\lim_{T\to\infty} M_T=0=\eta_X \Rightarrow$ **X**(t) ergódico respecto a la media
$\lim_{T\to\infty} A_T(\tau)=(A^2/2)\cos(\Omega_0\tau) = R_X(\tau) \Rightarrow$ **X**(t) ergódico respecto a la autocorrelación
c) $\eta_Y(t)= \eta_Y= A^2/2$, $R_Y(t_1,t_2)= R_Y(\tau)=(A^4/8)(2+\cos(2\Omega_0\tau))$
d) $\lim_{T\to\infty} M_T= A^2/2 =\eta_Y \Rightarrow$ **Y**(t) ergódico respecto a la media
$\lim_{T\to\infty} A_T(\tau)=(A^4/8)(2+\cos(2\Omega_0\tau))=R_y(\tau) \Rightarrow$ **X**(t) ergódico respecto a autocorrelación
e) $S_Y(\Omega)=TF[R_Y(\tau)]=(A^4/8)(4\pi\delta(\Omega)+\pi\delta(\Omega+2\Omega_0)+ \pi\delta(\Omega-2\Omega_0))$

6. a) $\hat{X}(t_1+\tau)=aX(t_1)+b$, con $a=\dfrac{R_X(\tau)-\eta_X^2}{R_X(0)-\eta_X^2}=\dfrac{C_X(\tau)}{C_X(0)}$ y $b=\eta_X(1-a)$
b) Error_mínimo = $\mathrm{Var}[X(t1+\tau)](1-r_X^2(t_1,t_1+\tau)) = (C_X^2(0)-C_X^2(\tau))/C_X(0)$

7. a) $\eta_X(t)= \eta_X = \eta$, $R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau) = (\sigma^2+\eta^2)e^{-|\tau|/T}$, $C_X(\tau) = (\sigma^2+\eta^2)e^{-|\tau|/T}-\eta^2$
X(t) Estacionario s.a. y Estacionario orden 2
b) $S_X(\Omega)=\left(\sigma^2+\eta^2\right)\dfrac{2T}{1+(\Omega T)^2}$

8. a) $\eta_X(t)=\eta_X=0$, $R_X(t_1,t_2)=R_X(\tau)=(A^2/2)E[\cos(\Omega\tau)]$ $\Rightarrow$ **X**(t) Estacionario s.a.

b) $S_X(\Omega)=(A^2/2)\pi[f_\Omega(\Omega)+f_\Omega(-\Omega)]$

9. $\eta_X(t)=\eta_X=0$, $R_X(t_1,t_2)=R_X(\tau)=\sigma^2\cos(\Omega_0\tau)$ $\Rightarrow$ **X**(t) Estacionario s.a.

$f_X(x;t)=g_t(A,B)$ depende de t $\Rightarrow$ **X**(t) No Estacionario orden 1

10. a) $R_X[m]=\sigma^2\delta[m]$, $S_X(\omega)=\sigma^2$

b) $\mathbf{Y}[n]$ es $N\left(0,\sqrt{a_0^2+a_1^2}\right) \Rightarrow f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi(a_0^2+a_1^2)}}e^{\frac{-y^2}{2(a_0^2+a_1^2)}}$ $\quad -\infty<y<\infty$

c) $R_{XY}[m]=a_0\delta[m]+a_1\delta[m+1]$

d) $R_Y[m]=(a_0^2+a_1^2)\delta[m]+a_0a_1\delta[m+1]+a_0a_1\delta[m-1]$

$S_Y(\omega)=(a_0^2+a_1^2)+2a_0a_1\cos(\omega)$

11. a) $R_{XW}(0)=1-e^{-at_0}$, $R_{ZW}(0)=1-e^{-at_0}+a$, $R_W(0)=1-e^{-at_0}+a/2$

b) $S_W(\Omega)=\left(\dfrac{2\text{sen}(\Omega t_0)}{\Omega}+1\right)\dfrac{a^2}{a^2+\Omega^2}$

c) $a=\ln(2t_0)/t_0$

12. a) $\eta_Y=\eta_X H(0)=0$, $\sigma_Y^2=\sigma_X^2\int_0^\infty h^2(\alpha)d\alpha=\dfrac{\sigma_X^2}{2a}$

b) $R_{YY}(\tau)=\dfrac{\sigma_X^2}{2a}e^{-a|\tau|}$, $S_{YY}(\Omega)=\dfrac{\sigma_X^2}{a^2+\Omega^2}$

c) $\hat{\mathbf{Z}}(t)=-a\mathbf{Z}(t-t_0)$, $\text{error\_min}=\infty$