Universidad de Cantabria
ETSII Telecomunicación
2º Curso de Ingeniería e Ingeniería Técnica de Telecomunicación
Teoría de la Comunicación

HOJA DE PROBLEMAS 4

1. Sea (**X**,**Y**) una v.a. bidimensional cuya fdp conjunta viene dada por:

$$f_{XY}(x,y) = c(2x + y) \quad \text{en la región} \quad \begin{cases} 2 < x < 6 \\ 0 < y < 5 \end{cases}$$

Obtenga:

a) la constante c
b) las funciones de distribución marginales $F_X(x)$ y $F_Y(y)$
c) las funciones densidad de probabilidad marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$
d) P(3<**X**<4,**Y**>2)
e) P(**X**>3)
f) P(**X**+**Y**>4)
g) la función de distribución conjunta.
h) ¿son **X** e **Y** independientes?

2. Sean **X** e **Y** dos v.a.'s de Bernoulli independientes, con P(**X**=1)=P(**Y**=1)=p, P(**X**=0)=P(**Y**=0)=q=1-p. Se forma la v.a. **Z**=**X**⊕**Y**, donde el símbolo ⊕ denota la operación "OR exclusiva", definida en la siguiente tabla:

X	**Y**	**Z=X⊕Y**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a) Demuestre que las v.a.'s **X** y **Z** no son, en general, independientes.
b) Calcule la covarianza de las v.a.'s **X** y **Z.**
c) Determine los posibles valores de p que hacen que **X** y **Z** estén incorreladas; para dichos valores de p, ¿ son **X** y **Z** independientes?

3. Sea la v.a. bidimensional (**X**,**Y**) continua con fdp conjunta de valor constante en la región del plano dada por

$$R = \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 1 \end{cases}$$

y nula en el resto. Obtenga $F_{XY}(x,y)$, $F_X(x)$ y $F_Y(y)$.

4. Se escoge un punto de forma aleatoria en el intervalo (0,T) y un segundo punto, también aleatoriamente, pero siempre a la derecha del anterior, y se definen las v.a.'s **X**: "posición del primer punto" e **Y**: "distancia del segundo al primero".

a) Demuestre que la fdp conjunta de las v.a.'s **X** e **Y** es:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{T(T-x)} \begin{cases} 0 < x < T \\ 0 < y < T - x \end{cases}$$

b) ¿Están **X** e **Y** incorreladas?

c) Calcule P(**Y**<**X**).

5. Dadas las v.a.'s continuas **X** e **Y** , se sabe que **X** es uniforme en (0,1) y la $f_Y(y|x)$ no depende de y si se verifica $-x<y<x$, anulándose fuera de dicho recinto. Calcular:

a) La fdp conjunta, $f_{XY}(x,y)$, dibujando el rango de dicha v.a. bidimensional.

b) E(**XY**).

c) La fdp marginal de y, $f_Y(y)$. ¿Están **X** e **Y** incorreladas?

6. Sea (**X**,**Y**) una variable bidimensional con función densidad de probabilidad conjunta f(x,y)=K en la región del espacio siguiente: $R=\{y>0,\ x^2+y^2<1\}$. Se pide:

a) Dibuje el rango de la variable bidimensional (**X**,**Y**) y determine el valor de la constante K.

b) Calcule la función densidad de probabilidad marginal f(x) y la condicional f(y|x). ¿Son **X** e **Y** independientes?

c) Calcule E[**XY**] y obtenga la probabilidad $P(0.5<x^2+y^2<1)$.