Universidad de Cantabria
ETSII Telecomunicación
2º Curso de Ingeniería e Ingeniería Técnica de Telecomunicación
Teoría de la Comunicación

HOJA DE PROBLEMAS 6

1. Sea **Y**(t) un p.e. definido como **Y**(t)=**X**(t)cos(Ω_0t+F), siendo **X**(t) un p.e. estacionario en sentido amplio que modula en amplitud una portadora de frecuencia constante Ω_0 y fase aleatoria uniformemente distribuida en $(-\pi,\pi)$. (La fase es independiente de **X**(t)).

a) Calcule la media y la función de autocorrelación de **Y**(t).

b) ¿Es estacionario en sentido amplio?.

2. Sea **X**(t) un p.e. estacionario de orden 2 con funciones de distribución de primer y segundo orden $F_X(x)$ y $F_X(x_1,x_2;\tau)$, respectivamente. Se forma el proceso:

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{cases} 1 \ , & \mathbf{X}(t) > a \\ -1 \ , & \mathbf{X}(t) \leq a \end{cases}$$

siendo a una constante tal que $f_X(a)>0$.

a) ¿Es el proceso **Y**(t) estacionario en sentido amplio?.¿Es estacionario de orden 1?.

b) Para dicho p.e. **Y**(t), calcule la autocovarianza y la varianza. ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar esta última?

3. Sea **X**(t) un p.e. definido como **X**(t)=**A**+**B**t, donde **A** y **B** son v.a's independientes y uniformemente distribuidas en (a_0, a_1) y (b_0, b_1), respectivamente. Calcule su media, función de autocorrelación y función de autocovarianza. ¿Es un proceso estacionario? ¿Es ergódico?.

4. Sean **X**(t) e **Y**(t) dos p.e.'s conjuntamente estacionarios e independientes, de autocovarianzas $C_X(\tau)$ y $C_Y(\tau)$ y f.d.p. de 1er orden $f_X(x)=1/a$ $(0<x<a)$ y $f_Y(y)=(1/b)\exp(-y/b)$ $(y>0)$, respectivamente (a y b son constantes positivas). Se construye un nuevo p.e. **Z**(t)=**X**(t)+**Y**(t) y se pide:

a) La fdp de primer orden de **Z**(t), $f_Z(z,t)$.

b) La covarianza cruzada de **Y**(t) y **Z**(t), $C_{YZ}(t_1,t_2)$.

5. Dado el proceso **X**(t)= Acos(Ω_0t + F), donde A y Ω_0 son constantes positivas y F una v.a. uniforme en $(-\pi,\pi)$. Calcular:

a) Media y autocorrelación de **X**(t).

b) Media y autocorrelación temporales de **X**(t). ¿Es **X**(t) ergódico con respecto a la media y la autocorrelación?

Sobre **X**(t) se efectúa la transformación sin memoria $g(x)=x^2$ obteniéndose el proceso **Y**(t). Calcular:

c) Media y autocorrelación de **Y**(t).

d) Media y autocorrelación temporales de **Y**(t). ¿Es **Y**(t) ergódico con respecto a la media y la autocorrelación?

e) Densidad espectral de potencia $S_Y(\Omega)$.

6. Considere un proceso estacionario en sentido amplio **X**(t), con media η_X y función de autocorrelación $R_X(\tau)$ conocidas. Suponga que el valor del proceso se observa en un instante t_1 y, a partir de dicho valor, se desea estimar (predecir) el valor que el proceso tendrá en el instante $t_1+\tau$ siendo $\tau>0$.

a) Calcule el estimador lineal óptimo (el de mínimo error cuadrático).

b) Calcule el mínimo error cuadrático medio cometido con la estima anterior en función de la autocorrelación. Escriba la expresión anterior en función de la autocovarianza.

7. El proceso **X**(t) posee una fdp de primer orden (Gaussiana)

$$f(x) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma)\exp[-(x-\eta)^2/2\sigma^2] \quad (-\infty < x < \infty)$$

y una fdp condicionada

$$f(x_2 \mid x_1;\tau) = (1/2\lambda)\exp[-|x_2 - ax_1|/\lambda]$$

donde $a = \exp(-|\tau|/T)$, $\tau = t_2 - t_1$, y $\lambda, T > 0$.

Se desea conocer:

a) Media, autocorrelación y autocovarianza del proceso **X**(t). ¿Es estacionario en sentido amplio?.¿Lo es de orden 2?.

b) Calcular la densidad espectral de potencia del proceso.

8. Sea el proceso **X**(t)=Acos(Wt+f), donde A es una constante positiva y W y f son v.a.'s independientes, con fdp's $f_\Omega(\Omega)$ y uniforme en $(-\pi,\pi)$, respectivamente.

a) Demostrar que **X**(t) es estacionario en sentido amplio.

b) Calcular su densidad espectral de potencia.

9. Sea el p.e. **X**(t)=**A**cos(Ω_0t)+**B**sen(Ω_0t), con **A** y **B** v.a.'s incorreladas de media nula y misma varianza σ^2. Demostrar que **X**(t) es estacionario en sentido amplio, pero no en sentido estricto.

10. Sea **X**[n] un p.e. discreto, blanco en sentido estricto y estacionario de segundo orden, con fdp de primer orden $f(x) = (1/\sqrt{2\pi})\exp(-x^2/2)$ $(-\infty < x < \infty)$. Se utiliza **X**[n] para formar el proceso **Y**[n]=a_0**X**[n] +a_1**X**[n-1]. Calcular:

a) La autocorrelación y la densidad espectral de potencia de **X**[n].

b) La fdp de primer orden de **Y**[n].

c) La correlación cruzada de **X**[n] e **Y**[n].

d) La autocorrelación y densidad espectral de potencia de **Y**[n].

11. Dados dos procesos ortogonales **X**(t) e **Y**(t) estacionarios en sentido amplio con autocorrelaciones $R_X(\tau)$=1 para $|\tau| < t_0$ $(t_0 > 0)$ y $R_Y(\tau) = \delta(\tau)$; respectivamente, se forma el proceso **Z**(t)=**X**(t)+**Y**(t). Este último proceso se aplica a la entrada de un sistema lineal, determinista e invariante, con respuesta al impulso $h(t) = a\exp(-at)U(t)$ (a>0), obteniéndose como salida un nuevo proceso **W**(t). Se pide:

a) Calcular los valores (en el origen de tiempos) de las correlaciones cruzadas $R_{XW}(0)$ y $R_{ZW}(0)$ y de la autocorrelación $R_W(0)$.

b) Obtenga la densidad espectral de potencia de **W**(t), $S_W(\Omega)$.

c) Suponga que **X**(t) representa una señal eléctrica alterada por una perturbación **Y**(t); se pretende que la salida del sistema lineal sea una estimación de **X**(t). Determine la constante "a" que minimiza el error cuadrático medio $e = E\left[(\mathbf{X}(t) - \mathbf{W}(t))^2\right]$

12. El proceso **X**(t) es un ruido blanco estricto y estacionario, de media nula y función de autocorrelación $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau)$. Se obtiene el proceso **Y**(t) haciendo pasar **X**(t) por un sistema lineal, invariante y <u>causal</u> con función de transferencia H(Ω) y respuesta al impulso h(t). Se pide:

a) Calcular la media y la varianza del proceso **Y**(t). Particularizar las expresiones anteriores cuando el proceso de salida viene dado por la expresión :

$$a\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t) - \frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt}$$

que corresponde a usar un filtro determinado por :

$$H(\Omega) = \frac{1}{a + j\Omega} \quad \text{y} \quad h(t) = e^{-at} u(t)$$

(siendo *a* una constante positiva y u(t) la función escalón).

b) Calcule la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de **Y**(t) para el filtro especificado en el apartado anterior.

c) Suponga ahora que a partir del mismo proceso de entrada **X**(t), obtenemos un nuevo proceso de salida, **Z**(t), de acuerdo a la expresión:

$$\mathbf{Z}(t) = -a\mathbf{Z}(t - t_0) + \mathbf{X}(t)$$

siendo en este caso $|a| < 1$. Obtenga el estimador $\hat{\mathbf{Z}}(t) = g(\mathbf{Z}(t - t_0))$ que minimiza el error cuadrático medio definido como

$$e = E\left\{[\mathbf{Z}(t) - \hat{\mathbf{Z}}(t)]^2\right\}$$

Calcule el mínimo error cuadrático medio.