

Topografía Minera

Tema 1. Aproximación a la teoría de la figura real de la Tierra



Julio Manuel de Luis Ruiz
Raúl Pereda García

Departamento de Ingeniería Geográfica y
Técnicas de Explotación de Minas

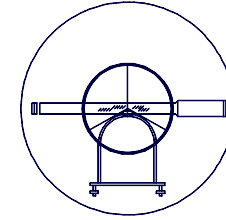
Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- El geoide, figura física.

1.2.- La superficie equipotencial.

1.3.- Repaso de las herramientas de cálculo.

1.4.- Relaciones fundamentales.

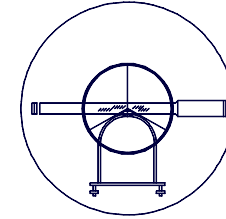
1.5.- Consideraciones complementarias.

1.6.- Ejercicios resueltos y propuestos.



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.1.- PARTICULARIDADES SIGNIFICATIVAS

INICIALMENTE:

Figura de la Tierra:

- Masa Fluida.**
- Compresible.**
- Deformable.**

ACTUALMENTE:

Figura de la Tierra:

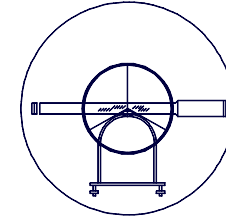
- Superficie equilibrio.**





UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

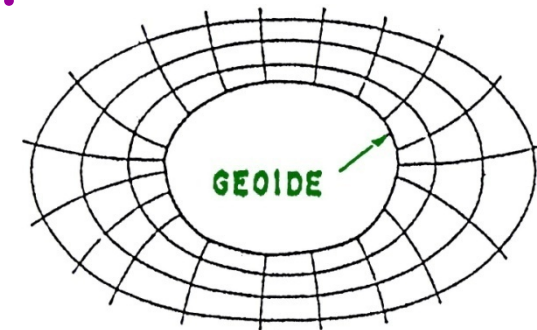
1.1.1.- PARTICULARIDADES SIGNIFICATIVAS

DEFINICIÓN DE GEOIDE

GEOIDE: Lugar geométrico de los puntos que sometidos a las siguientes fuerzas se encuentran en equilibrio:

- Fuerza de atracción de la masa tierra.
- Fuerza de atracción de la masa exterior.
- Fuerza centrífuga, debida a la rotación.

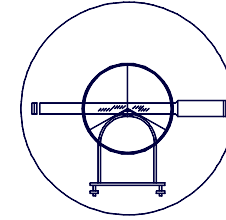
**SUPERFICIE
EQUIPOTENCIAL**





UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.1.- PARTICULARIDADES SIGNIFICATIVAS

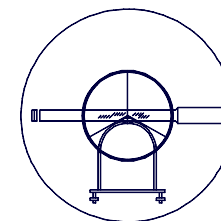
CARACTERIZACIÓN DE GEOIDE

- **Cualquier punto de la superficie se encuentra en EQUILIBRIO del conjunto de fuerzas que interactúan sobre él.**
- **La dirección de la gravedad en cualquier punto de es perpendicular al GEOIDE.**
- **Se define altura geoidal como la altura existente entre el GEOIDE y la FIGURA de APROXIMACIÓN debidas a las variaciones de densidad de la tierra. (+/-100m).**
- **Ecuación matemática de la superficie SIN DETERMINAR en su totalidad.**



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

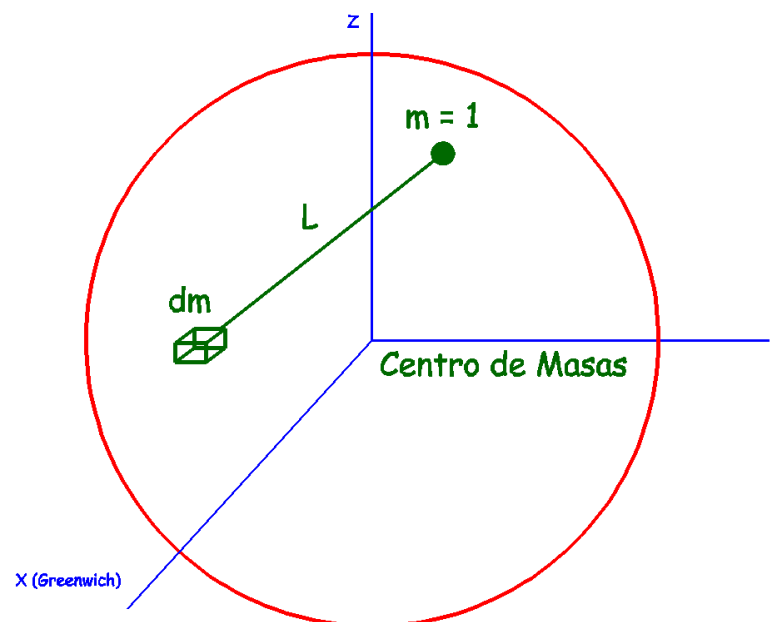
1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

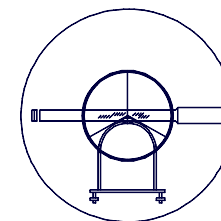
1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.2.- ESTUDIO DE FUERZAS INTERVINIENTES

FUNDAMENTOS BÁSICOS

Para llevar a cabo el estudio se toma un sistema tridimensional con origen en el centro de gravedad de la tierra, siendo el eje Z el eje de giro de la rotación terrestre. Sobre ese sistema se toma una masa unidad situada en un punto P y se estudian los efectos que sobre esa masa tienen las fuerzas intervinientes.





1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.2.- ESTUDIO DE FUERZAS INTERVINIENTES

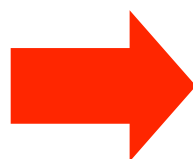
POTENCIAL FUERZA GRAVITATORIA

Sea un elemento de masa dm , situado en la posición Q (X_0, Y_0, Z_0). Se estudia el valor de la atracción que ejerce sobre la masa unidad situada en $P(x, y, z)$, mediante la Ley de la Gravitación Universal de Newton:

$$F_A = \frac{m_1 \cdot m_2}{L^2} \cdot G$$

$$|d\bar{F}| = \frac{1 \cdot dm}{L^2} \cdot G = \frac{dm}{L^2} \cdot G$$

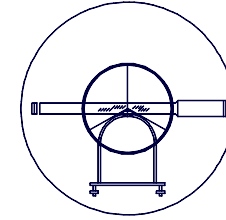
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{Kg \cdot seg^2}$$



$$d\bar{F} = [dFx, dFy, dFz]$$

$$|\bar{F}| = \iiint_{geoide} G \frac{dm}{L^2} = \iiint_{geoide} G \frac{\rho \cdot dV}{L^2}$$

$$L = \left[(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 \right]^{1/2}$$



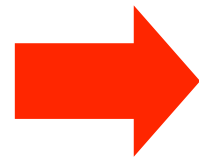
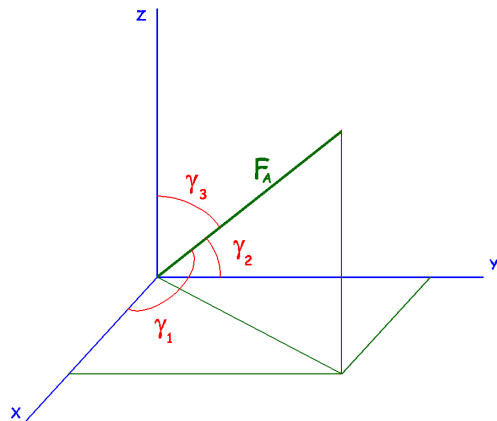
1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

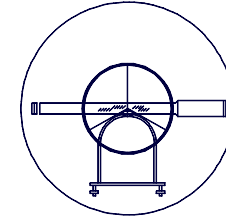
1.1.2.- ESTUDIO DE FUERZAS INTERVINIENTES

POTENCIAL FUERZA GRAVITATORIA

Al ser una fuerza ha de tener una dirección y un sentido, siendo $d\mathbf{F} = (dF_x, dF_y, dF_z)$, y considerando los cosenos directores $\text{Cos}\gamma_1$ $\text{Cos}\gamma_2$ $\text{Cos}\gamma_3$ de los ángulos que la dirección PQ tiene con los ejes de referencia, se tiene:



$$\left\{ \begin{array}{l} dF_x = -\overline{dF} \cdot \text{Cos}\gamma_1 \\ dF_y = -\overline{dF} \cdot \text{Cos}\gamma_2 \\ dF_z = -\overline{dF} \cdot \text{Cos}\gamma_3 \end{array} \right\} \text{signo}(-) \Leftrightarrow \text{Atracción}$$



1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.2.- ESTUDIO DE FUERZAS INTERVINIENTES

POTENCIAL FUERZA GRAVITATORIA

Operando se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} dF_x = -\overline{dF} \cdot \cos\gamma_1 \\ \cos\gamma_1 = \frac{X - X_0}{L} \\ \overline{dF} = G \cdot \frac{dm}{L^2} \end{array} \right\} \Rightarrow dF_x = -G \cdot \frac{X - X_0}{L^3} dm \Rightarrow F_x = -G \iiint \frac{X - X_0}{L^3} dm = -G \iiint \frac{X - X_0}{L^3} \rho \cdot dV$$

$$F_x = -G \iiint \frac{X - X_0}{L^3} \rho \cdot dV$$

$$F_y = -G \iiint \frac{Y - Y_0}{L^3} \rho \cdot dV$$

$$F_z = -G \iiint \frac{Z - Z_0}{L^3} \rho \cdot dV$$

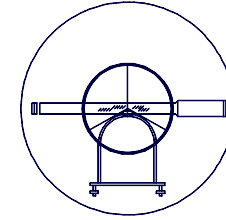


$$V(x,y,z) = \iiint G^* \frac{dm}{L}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.2.- ESTUDIO DE FUERZAS INTERVINIENTES

POTENCIAL FUERZA GRAVITATORIA

Configurando así la expresión del vector fuerza de atracción gravitatoria que se analiza:

$$\bar{F} = \left[-G \iiint \frac{X - X_0}{L^3} \cdot \rho \cdot dV, -G \iiint \frac{Y - Y_0}{L^3} \cdot \rho \cdot dV, -G \iiint \frac{Z - Z_0}{L^3} \cdot \rho \cdot dV \right]$$

Donde las variables de integración son X_0, Y_0, Z_0 (pues L depende de ellas), se busca entonces una función cuyas derivadas son las compuestas de la fuerza, es decir, un potencial o una función potencial (V):

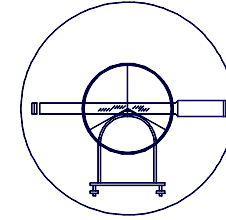
$$V(X, Y, Z) = G \iiint \frac{dm}{L}$$

V = Potencial, trabajo necesario llevar a cabo para separar dos partículas.



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.2.- ESTUDIO DE FUERZAS INTERVINIENTES

POTENCIAL FUERZA GRAVITATORIA

Esta función Potencial “V” presenta una singularidad evitable para $L = 0$, problema que se puede resolver considerando una separación finita entre los puntos. Para comprobar que:

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}; F_y = \frac{\partial V}{\partial y}; F_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

Tan sólo es necesario derivar bajo el signo integral y obtener la comprobación requerida:

$$V = G \cdot \iiint \frac{dm}{L} \rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[G \cdot \iiint \frac{dm}{L} \right]$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = G \cdot \iiint \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{L} \right) \cdot dm$$

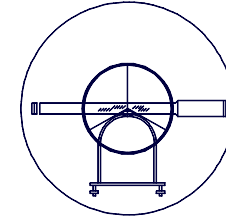
➔

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{L} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\left[(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 \right]^{1/2}} \right] =$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{L} \right) = - \frac{2(X - X_0)}{2 \cdot L^2 \cdot \left[(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 \right]} = \frac{X - X_0}{L^3}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.2.- ESTUDIO DE FUERZAS INTERVINIENTES

POTENCIAL FUERZA GRAVITATORIA

De igual forma se procede para las otras componentes, resultando:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{L} \right) = \frac{Y - Y_0}{L^3} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{L} \right) = \frac{Z - Z_0}{L^3}$$

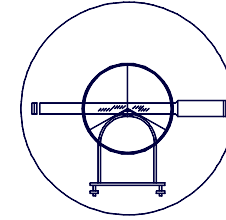
Por lo tanto se pueden establecer las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -G \iiint \frac{X - X_0}{L^3} dm = F_x \rightarrow F_x = \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -G \iiint \frac{Y - Y_0}{L^3} dm = F_y \rightarrow F_y = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -G \iiint \frac{Z - Z_0}{L^3} dm = F_z \rightarrow F_z = \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \right\} \bar{F} = (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \overline{grad V}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.2.- ESTUDIO DE FUERZAS INTERVINIENTES

POTENCIAL FUERZA CENTRÍFUGA

Si w es la velocidad angular de rotación, la fuerza centrífuga que actúa sobre la unidad de masa es:

$$f = \omega^2 \cdot l \rightarrow l = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

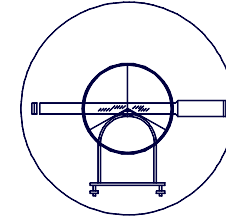
El valor medio de w es $1/24 = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$ con lo que se puede obtener el Potencial con total similitud conceptual al caso anterior:

$$V' = \int_0^1 \omega^2 \cdot l \cdot dl = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot l^2 = \frac{\omega^2}{2} \cdot (x^2 + y^2)$$
$$\bar{F}_c = graV'$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.3.- POTENCIAL GRAVÍFICO Y GRAVEDAD

FUNDAMENTO MATEMÁTICO

Componiendo todas las fuerzas intervinientes se obtiene la función global:

$$W = V + V' = G \iiint_v \frac{dm}{L} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

Este potencial total se denomina **POTENCIAL GRAVÍFICO** de este potencial se genera la fuerza de atracción, que referida sobre la unidad de masa, determina el valor de la aceleración de la gravedad.

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x} = -G \iiint \frac{X - X_0}{L^3} \cdot dm + \omega^2 \cdot x$$

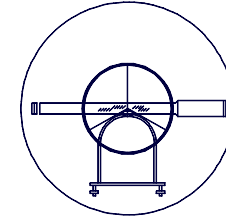
$$\gamma_y = \frac{\partial w}{\partial y} = -G \iiint \frac{Y - Y_0}{L^3} \cdot dm + \omega^2 \cdot y$$

$$\gamma_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -G \iiint \frac{Z - Z_0}{L^3} \cdot dm$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

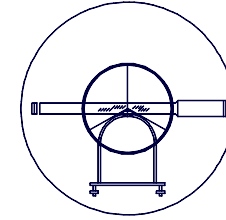
1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.3.- POTENCIAL GRAVÍFICO Y GRAVEDAD

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Para cada punto P, este potencial W tiene un valor y para que la superficie este en equilibrio, ha de verificar que este potencial sea constante. El problema está en averiguar el valor de la constante. Las **LÍNEAS DE FUERZA** son los lugares geométricos de las normales a las superficies equipotenciales.

Una **SUPERFICIE DE NIVEL** es aquella en la que en todos los puntos del plano tangente es normal a la fuerza de la gravedad, se deduce por lo tanto que las superficies de nivel son equipotenciales.



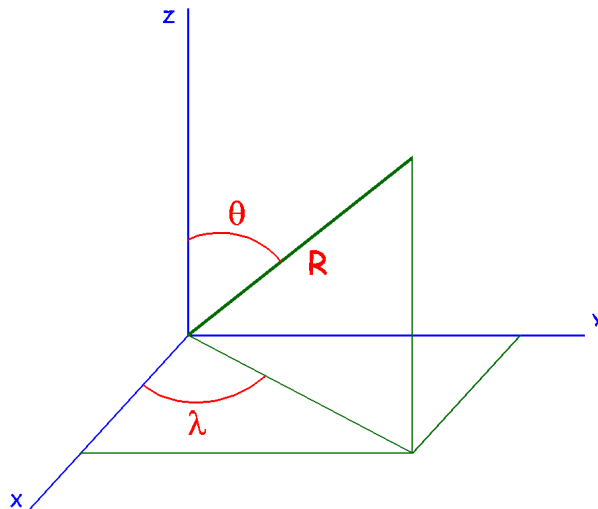
1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.3.- POTENCIAL GRAVÍFICO Y GRAVEDAD

MODELO DE GRAVEDAD ESFÉRICO

Considerando la tierra como una esfera de radio “R” y repitiendo el análisis en las coordenadas esféricas, resulta:



$$x = R \cdot \text{Sen}\theta \cdot \text{Cos}\lambda$$

$$y = R \cdot \text{Sen}\theta \cdot \text{Sen}\lambda$$

$$z = R \cdot \text{Cos}\theta$$

Campo Gravitatorio:

$$(F_R, F_\theta, F_\lambda) = \left(-\frac{G \cdot dm}{R^2}, 0, 0 \right)$$

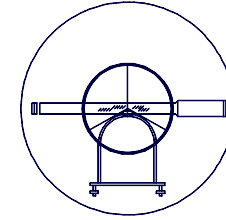
Campo Fuerza Centrífuga:

$$(f_R, f_\theta, f_\lambda) = (\omega^2 \cdot R \cdot \text{Sen}^2\theta, \omega^2 \cdot R \cdot \text{Sen}\theta \cdot \text{Cos}\theta, 0)$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.3.- POTENCIAL GRAVÍFICO Y GRAVEDAD

MODELO DE GRAVEDAD ESFÉRICO

El vector gravedad tiene las componentes:

$$(\gamma_R, \gamma_\theta, \gamma_\lambda) = \left[-\frac{G \cdot dm}{R^2} + \omega^2 \cdot R \cdot \text{Sen}^2\theta, \omega^2 \cdot R \cdot \text{Sen}\theta \cdot \text{Cos}\theta, 0 \right]$$

Considerando las componentes anteriores para toda la masa de la Tierra en su superficie resulta:

$$(\gamma_R, \gamma_\theta, \gamma_\lambda) = \left[-\frac{G \cdot M}{R^2} + \omega^2 \cdot R \cdot \text{Sen}^2\theta, \omega^2 \cdot R \cdot \text{Sen}\theta \cdot \text{Cos}\theta, 0 \right]$$

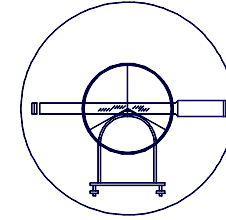
Se puede comprobar que el valor del potencial gravífico en coordenadas esféricas en las circunstancias anteriores, resulta:

$$W = V + V' = \frac{G \cdot M}{R} - \frac{1}{2} \omega^2 \cdot R^2 \cdot \text{Sen}^2\theta$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.3.- POTENCIAL GRAVÍFICO Y GRAVEDAD

MODELO DE GRAVEDAD ESFÉRICO

Considerando la latitud, en vez de la co-latitud resulta:

$$W = \frac{G \cdot M}{R} + \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \text{Cos}^2 \varphi$$

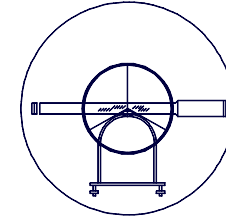
$$W = \frac{G \cdot M}{R} \left[1 + \frac{q'}{2} \text{Cos}^2 \varphi \right]$$

$$\text{siendo: } q' = \frac{R^3 \cdot \omega^2}{G \cdot M} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} R = 6.371 \text{ Km} \\ G = 6,67 \cdot 10^{-11} \\ M = 5,976 \cdot 10^{24} \text{ Kg} \\ \omega = 7,272 \cdot 10^{-5} \end{array} \right\} \Rightarrow q' = 3,45 \cdot 10^{-3}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.4.- EVALUACIÓN DEL VALOR REAL DE LA GRAVEDAD

IDEAS DE REFERENCIA

La fuerza del potencial gravífico sobre la unidad de masa, en cada punto de la superficie terrestre, determina el valor de la aceleración de la gravedad que se suele evaluar en las siguientes unidades:

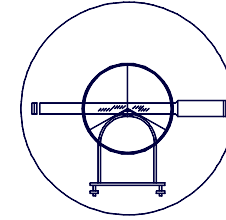
$$1 \text{ gal} = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2} = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre varía entre $9,78 \text{ m/s}^2$ y $9,83 \text{ m/s}^2$, precisándose determinaciones de gravedad sobre la superficie de la tierra con precisiones cercanas a la centésima de miligal.



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

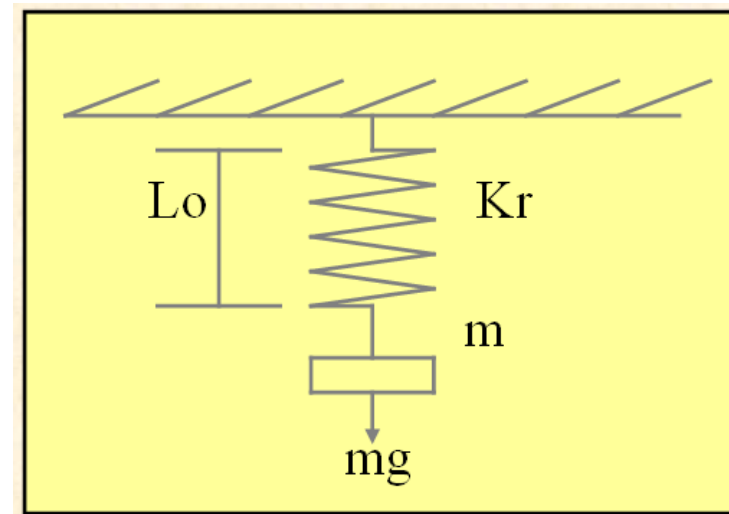
1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.4.- EVALUACIÓN DEL VALOR REAL DE LA GRAVEDAD

EL GRAVÍMETRO

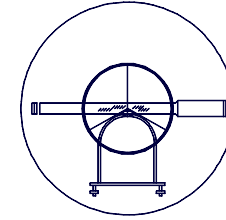
Los levantamientos gravimétricos suelen llevarse a cabo realizando mediciones relativas de la gravedad. Los gravímetros con cierta precisión utilizan el principio de la báscula de resorte con palanca en los que en uno de sus extremos está la masa sometida a la acción de la gravedad, contrarrestando la fuerza con un resorte de constante elástica k .





UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.4.- EVALUACIÓN DEL VALOR REAL DE LA GRAVEDAD

FUNDAMENTO DEL GRAVÍMETRO

Al efectuar la lectura en el gravímetro, el observable o dato leído es la variación de la longitud de un resorte y el objetivo es calcular g . En general será $g = f(L)$ donde “ f ” será una función llamada de calibración que hay que definir. Cada gravímetro viene ya de fábrica con una función “ f_0 ”, de calibración aproximada.

$$-m \cdot \gamma = K_T \cdot (L - L_0)$$

Diferenciando :

$$-m \cdot d\gamma = K_T \cdot dL$$

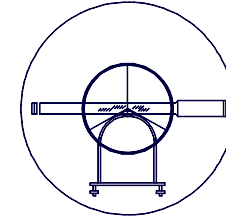
$$\frac{dL}{d\gamma} = -\frac{m}{K_T}$$

$$\frac{dL}{d\gamma} = \text{Sensibilidad}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.4.- EVALUACIÓN DEL VALOR REAL DE LA GRAVEDAD

CALIBRACIÓN DEL GRAVÍMETRO

En la calibración se determina no la función “f” sino su derivada “f'” que es el verdadero valor de la escala:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial L} = \frac{dg}{dL} = \frac{df(L)}{dL} = f'(L)$$

Así la diferencia de gravedad entre dos puntos será:

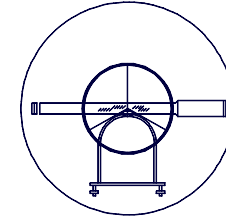
$$\Delta \gamma_i^j = \gamma_j - \gamma_i = f(L_j) - f(L_i) = \int_{L_i}^{L_j} f'(L) \cdot dL$$

Para calibrar se han de comparar diferencias de lecturas con diferencias de gravedades obteniendose así la f'(L).



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

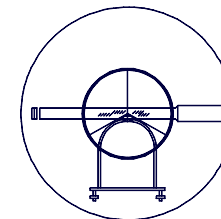
1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.4.- EVALUACIÓN DEL VALOR REAL DE LA GRAVEDAD

RED GRAVIMÉTRICA

Durante muchos años se utilizó el sistema de referencia Postdam, definiéndose a partir de 1971 un nuevo sistema aceptado en una Asamblea Internacional celebrada en Moscú llamado I.G.S.N.71 (International Gravity Standardization Net 1971).

La red que sirvió para definir el sistema está formado por 1.854 estaciones conectadas con 24.000 puntos de medidas relativas. El ajuste de la red da como error medio 0,1 mgal, pero por ejemplo, en la zona europea, el error es mas pequeño 0,01 mgal.

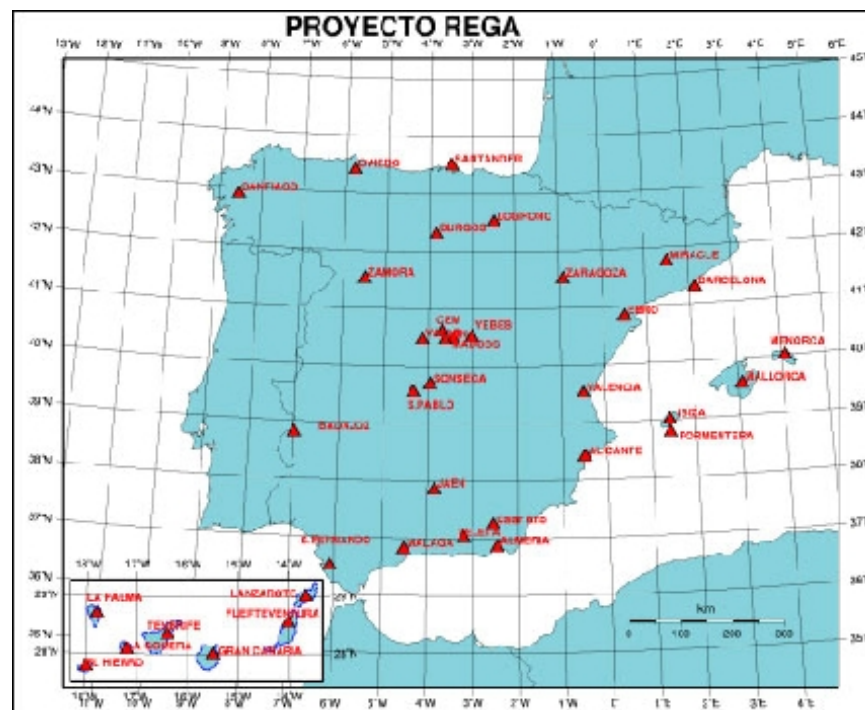
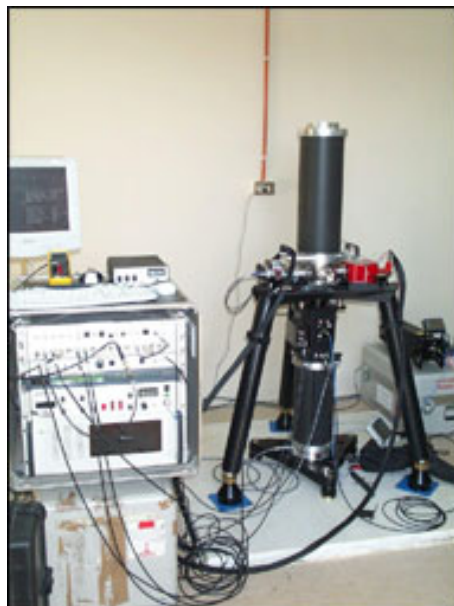


1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.4.- EVALUACIÓN DEL VALOR REAL DE LA GRAVEDAD

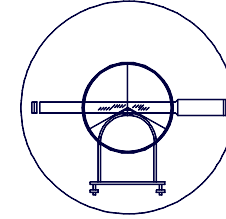
RED GRAVIMÉTRICA





UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.4.- EVALUACIÓN DEL VALOR REAL DE LA GRAVEDAD

MEDICIÓN DE LA GRAVEDAD

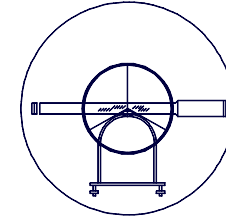
Para la medición de la gravedad de forma absoluta se emplean los gravímetros de alta precisión pero para medir y comparar la gravedad de dos puntos se suele utilizar el **METODO RELATIVO** consistente en someter a una masa fija a la acción del campo y evaluar las medidas de la fuerza elástica en los puntos considerados.





UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

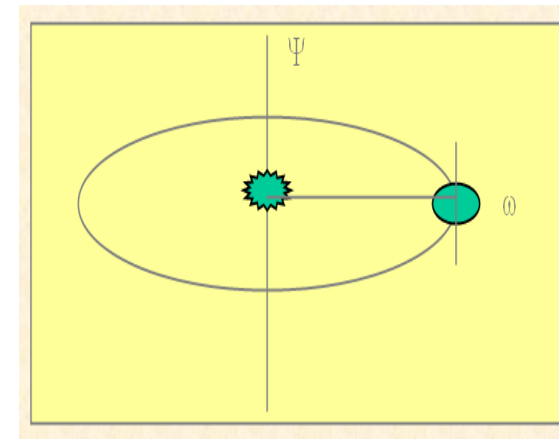
1.1.5.- CONSIDERACIONES ADICIONALES

EFECTO GIROSCÓPICO

La tierra está dotada de una doble rotación alrededor del sol y alrededor de su eje:

- $\psi = 1,992385 \cdot 10^{-7}$ rad/seg.
- $\omega = 7,272205 \cdot 10^{-5}$ rad/seg.

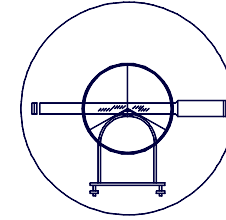
Esto hace que se comporte como un Giróscopo. Un giroscopio es un sistema de movimientos combinados, de aplicación en la mecánica de los sistemas.





UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.5.- CONSIDERACIONES ADICIONALES

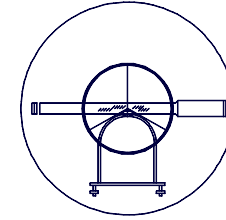
EFECTO GIROSCÓPICO

El efecto giroscópico se produce cuando dos ejes de rotación no son paralelos y en torno a uno de los ejes gira una masa, en ese instante aparece un momento que intenta juntar los dos ejes de rotación.

$$M = I \cdot \psi \wedge \omega$$

Siendo: M = Par giroscópico ; i = Momento de Inercia.

En el caso de la tierra, este par existe para corregir alteraciones en el sistema solar, debidas a causas externas como la variable Sol-Tierra-Luna por la falta de uniformidad en la figura, no ser homogénea la distribución de sus densidad, la gravitación de otros planetas.



1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.1.- EL GEOIDE, FIGURA FÍSICA

1.1.5.- CONSIDERACIONES ADICIONALES

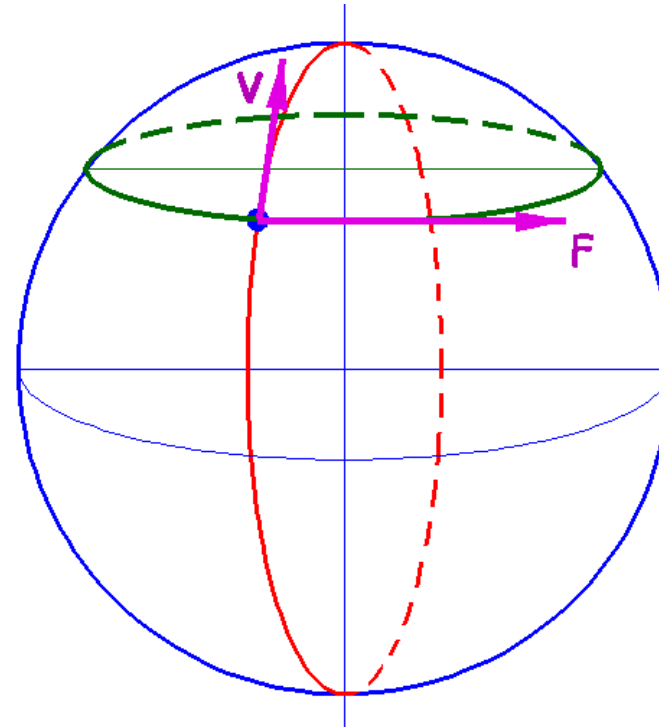
FUERZA DE COLIORIS

Dada una masa “m” sobre la tierra, en movimiento y a una velocidad “V”, sobre ella aparece una fuerza llamada **FUERZA DE COLIORIS**, cuyo valor resulta:

$$F = 2 \cdot m \cdot V \cdot \omega \cdot \text{Sen}(2 \cdot \theta)$$

$\omega = \text{Velocidad Angular}$

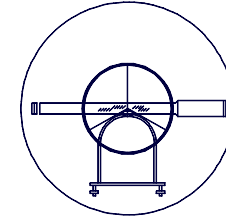
$\theta = \text{Colatitud}$





UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.2.- PLANTEAMIENTO SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

1.2.1.- DISTRIBUCIÓN DE SUPERFICIES

IDEAS DE REFERENCIA

Se considera un elemento de la superficie de nivel y un vector del plano tangente:

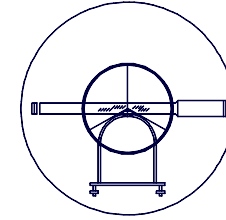
$$\frac{\overline{ds}}{|\overline{ds}|} \cdot \frac{\overline{\gamma}}{|\overline{\gamma}|} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{ds}}{|\overline{ds}|} \cdot \frac{\overline{\gamma}}{|\overline{\gamma}|} = 0 \Rightarrow \overline{ds} \cdot \overline{\gamma} = 0 \\ \gamma = -\text{gra}W = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) \end{array} \right\}$$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz = 0 \Rightarrow W = \text{Cte.}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.2.- PLANTEAMIENTO SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

1.2.1.- DISTRIBUCIÓN DE SUPERFICIES

CONSIDERACIONES SOBRE LAS SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

- 1.- En Geodesia toda superficie de nivel es equipotencial y viceversa.**
- 2.- En la Tierra, ninguna de las superficies equipotenciales son paralelas.**

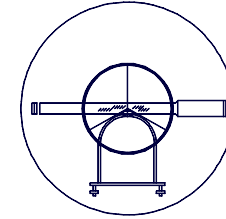
Esto se puede demostrar fácilmente suponiendo dos superficies equipotenciales $W = C_1$ y $W = C_2$ y dos líneas de fuerza que las cortan.





UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

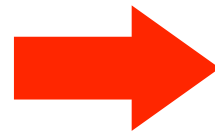
1.2.- PLANTEAMIENTO SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

1.2.1.- DISTRIBUCIÓN DE SUPERFICIES

CONSIDERACIONES SOBRE LAS SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

La diferencia de potencial, es el trabajo necesario para desplazar la unidad de masa de la posición inicial a la final. Se tiene que verificar por lo tanto en dos puntos diferentes de la superficie terrestre A y B:

$$\gamma_A \cdot Z_A = \gamma_B \cdot Z_B$$



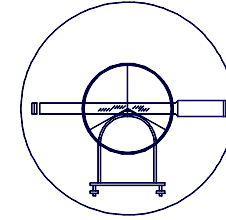
$$\frac{\gamma_A}{\gamma_B} \neq 1 \Rightarrow Z_A \neq Z_B$$

Siendo Z_A y Z_B las alturas de ambos puntos. Como la gravedad no es igual en todos los puntos, las dos superficies no pueden ser paralelas. Por cada punto pasa una única superficie equipotencial.



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

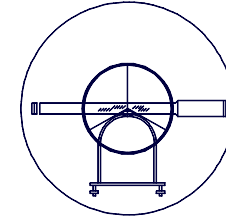
1.2.- PLANTEAMIENTO SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

1.2.1.- DISTRIBUCIÓN DE SUPERFICIES

CONSIDERACIONES SOBRE LAS SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Definiéndose con estas consideraciones los siguientes conceptos:

- **HORIZONTE:** el horizonte en un punto es el plano tangente a la única superficie equipotencial que pasa por ese punto.
- **VERTICAL:** en un punto es la normal al horizonte en ese punto o bien es la tangente en el punto a la única línea de fuerza que pasa por él.



1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.2.- PLANTEAMIENTO SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

1.2.2.- NÚMERO GEOPOTENCIAL Y ALTURA ORTOMÉTRICA

CONSIDERACIONES GENERALES

GEOIDE:

Es la superficie equipotencial más representativa, configurada por el nivel de los mares en calma, prolongada por debajo de los continentes.



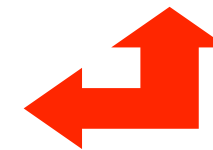
$$W = W_0$$



DETERMINACIÓN:

$dm = r(X_0, Y_0, Z_0) dv$
No integrales de volumen
 r no constante.

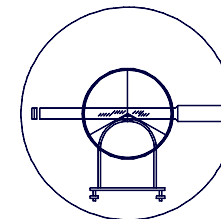
MODELOS MATEMÁTICOS:
Ostrogradsky // Green // Gauss // $r = Cte$





UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.2.- PLANTEAMIENTO SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

1.2.2.- NÚMERO GEOPOTENCIAL Y ALTURA ORTOMÉTRICA EL NÚMERO GEOPOTENCIAL

El NÚMERO GEOPOTENCIAL de un punto P de la superficie terrestre se define como el incremento del potencial de la fuerza de la gravedad entre el punto y la superficie origen:

$$C_P = W_O - W_P = -\int_{P_o}^P dW = \int_{P_o}^P \gamma \cdot dz \Rightarrow dW = -\gamma \cdot dz$$

El número geopotencial de un punto es independiente del itinerario de la nivelación empleada para relacionar el punto considerado con el nivel del mar y se evalúa en unidades geopotenciales. (u.g.p.):

$$1ugp = 1000 galmetro = 1kgalmetro$$

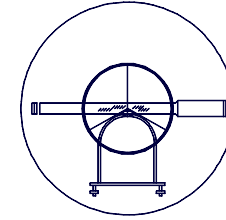
$$\gamma = 980 gal$$

$$c = \gamma \cdot H = 0,98H$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.2.- PLANTEAMIENTO SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

1.2.2.- NÚMERO GEOPOTENCIAL Y ALTURA ORTOMÉTRICA **EL NÚMERO GEOPOTENCIAL**

Tanto en Geodesia como en Topografía el número geopotencial se convierte en alturas convencionales.

A partir de la definición del número geopotencial se pueden definir algunos tipos de alturas, que algunos autores llaman alturas Geopotenciales siendo esta la relación entre el incremento de potencial y un determinado valor de la gravedad:

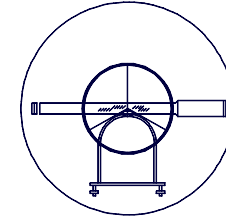
$$Z_i = \frac{W_O - W_P}{\gamma_i}$$

Según el potencial elegido y el valor de la gravedad, las alturas más usuales son alturas aproximadas, ortométricas, normales, dinámicas.



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.2.- PLANTEAMIENTO SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

1.2.2.- NÚMERO GEOPOTENCIAL Y ALTURA ORTOMÉTRICA LA ALTURA ORTOMÉTRICA

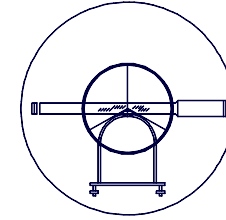
Se define como **ALTURA ORTOMÉTRICA** de un punto P, a la distancia lineal a lo largo de la vertical física (Curva) entre el punto y el geode. Se define también como la superficie entre la diferencia de potenciales gravitatorios reales entre el geode y el punto P y el valor de una gravedad real media:

$$Z_{ORT.} = \frac{W_O - W_P}{\gamma_m}$$
$$\gamma_m = \frac{1}{Z} \cdot \int_0^Z \gamma \cdot dZ$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.2.- PLANTEAMIENTO SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

1.2.2.- NÚMERO GEOPOTENCIAL Y ALTURA ORTOMÉTRICA

LA ALTURA ORTOMÉTRICA

El problema radica en determinar el valor medio de la gravedad real en el lugar de trabajo para ello se utilizan aproximaciones una de las mejores es la de Poincaré:

$$\gamma_Q = \gamma_P + 0,0848 \cdot (H_P - H_Q)$$

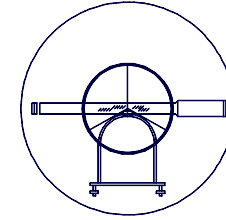
g = aceleración de la gravedad (Gal).

H = distancia lineal evaluada sobre la normal física desde el geoide hasta el punto cuestión (Km).



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.3.- BREVE REPASO POR LAS HERRAMIENTAS DE CÁLCULO

1.3.1.- TEORÍA DE CAMPOS

EL CAMPO ESCALAR

Un campo escalar queda definido por una función de punto:

$$\phi = \phi(xyz)$$

$$\phi = 3x^2y = \text{Ejemplo}$$

Concepto de GRADIENTE:

$$\text{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\bar{k} = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right] = \bar{\nabla} \cdot \phi$$

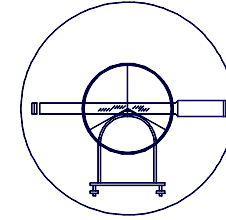
Siendo $\bar{\nabla}$ el operador de Hamilton o Nabla:

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.3.- BREVE REPASO POR LAS HERRAMIENTAS DE CÁLCULO

1.3.1.- TEORÍA DE CAMPOS

EL CAMPO VECTORIAL

Un campo vectorial queda definido por un vector:

$$\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

$$\bar{F} = (3x^2y, 2x, 3xy^2) = \text{Ejemplo}$$

Concepto de DIVERGENCIA:

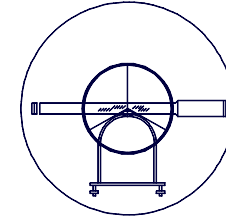
$$\text{div}\bar{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = \bar{\nabla} \cdot \bar{F}$$

$$\text{div}\bar{F} = \bar{\nabla} \cdot \bar{F}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.3.- BREVE REPASO POR LAS HERRAMIENTAS DE CÁLCULO

1.3.1.- TEORÍA DE CAMPOS

EL CAMPO VECTORIAL

Concepto de ROTACIONAL:

$$\bar{\nabla} \wedge \bar{F} = rotF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial & \partial & \partial \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

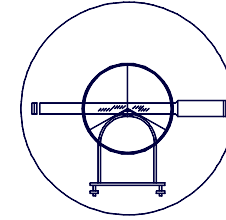
Concepto de LAPLACIANA:

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.3.- BREVE REPASO POR LAS HERRAMIENTAS DE CÁLCULO

1.3.1.- TEORÍA DE CAMPOS

CAMPOS TENSORIALES

Los campos **TENSORIALES** no se utilizan en procesos matemáticos comunes por lo que en esta asignatura no se imparten.

La tipología de los Campos también se puede clasificar en función de ciertos valores que pueden llegar a tener sus propiedades mas significativas:

$$\text{Solenoidales} \Rightarrow \text{div}V = 0$$

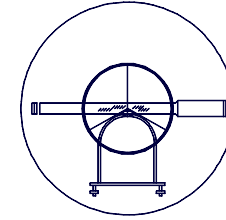
$$\text{Irrotacionales} \Rightarrow \text{rot}V = 0$$

$$\text{Armonicos} \Rightarrow \Delta V = 0$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.3.- BREVE REPASO POR LAS HERRAMIENTAS DE CÁLCULO

1.3.2.- INTEGRALES MÚLTIPLES

INTEGRAL CURVILÍNEA

La integral curvilínea es una generalización de la integral definida:

$$I = \int_c F(xyz) \cdot ds$$

Esta integra a lo largo de una curva en el espacio o en el plano, como caso particular y el integrando es una función definida entre dos puntos fijos de la curva. Lo usual es que la curva este en paramétricas:

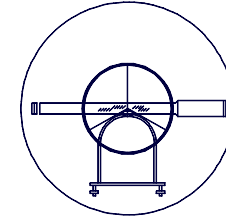
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \Rightarrow I = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), y(t), z(t)) \frac{ds}{dt} \cdot dt$$

En forma de vector: $I = \int_A^B \vec{F}(P) \cdot \overline{dP} = \int_A^B x(t)dx + y(t)dy + z(t)dz$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.3.- BREVE REPASO POR LAS HERRAMIENTAS DE CÁLCULO

1.3.2.- INTEGRALES MÚLTIPLES

INTEGRAL DOBLE

Dada una función $Z = f(xy)$, se establece una doble partición D_{xi} y D_{yi} , pudiéndose configurar en el limite la expresión:

$$\iint_R f(xy) \cdot dx dy$$

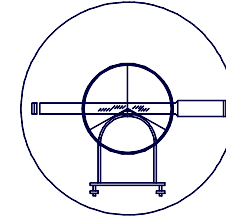
Una integral doble se puede interpretar como el volumen del cilindroide que genera la superficie establecida $Z = f(xy)$ con el plano OXY. De la misma forma que la integral curvilinea es la generalización de la integral definida, el concepto de integral de superficie es la generalización de la integral doble ya que esta se puede extender a una superficie (S):

$$\iint_S F[xy \cdot f(xy)] \cdot ds$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.3.- BREVE REPASO POR LAS HERRAMIENTAS DE CÁLCULO

1.3.2.- INTEGRALES MÚLTIPLES

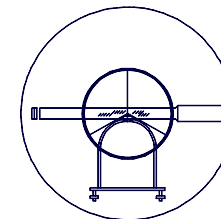
INTEGRAL TRIPLE

Es la máxima generalización del concepto de integral:

$$\iiint_V f(xyz) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Extendida a un cierto volumen V(dominio).

Una integral triple se puede transformar en una de superficie a través de una fórmula notable.



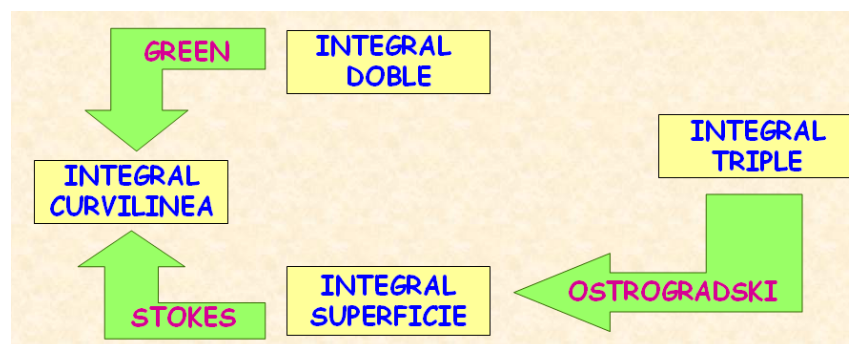
1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.4.- RELACIONES FUNDAMENTALES

1.4.1.- PLANTEAMIENTO GENERAL

FUNDAMENTO

Existen relaciones que permiten el paso entre las diferentes integrales, pudiendo establecer de una forma simplificada los diferentes flujos:

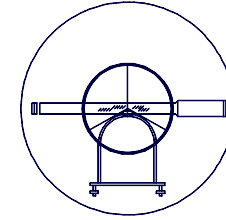


Todas estas relaciones ya han sido desarrolladas en otras asignaturas de la titulación y en este apartado única y exclusivamente se aplicaran directamente.



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.4.- RELACIONES FUNDAMENTALES

1.4.2.- EXPRESIÓN ANALÍTICA SIMPLIFICADA

IDENTIDADES NOTABLES

A.- IDENTIDADES DE GREEN

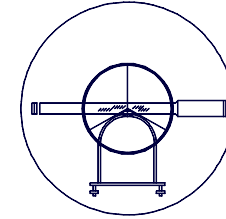
Dada una superficie (S) definida por su ecuación $Z = f(xy)$ y (C) una curva simple, cerrada y rectificable sobre la superficie. Si (xyz) es una función continua sobre (S), con apoyo de las expresiones de Green se llega a:

$$\int_C P(xyz)dx + Q(xyz)dy + R(xyz)dz =$$
$$= \iint_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.4.- RELACIONES FUNDAMENTALES

1.4.2.- EXPESIÓN ANALÍTICA SIMPLIFICADA

IDENTIDADES NOTABLES

B.- FORMULA DE OSTROGRADSKY

Definido un volumen (V), limitado por una superficie (S) y tres funciones P, Q, R con derivada continua, la fórmula transforma una integral triple en otra superficie. Se verifica la siguiente relación:

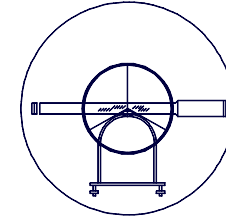
$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iint_S (P \cdot \cos \beta_1 + Q \cdot \cos \beta_2 + R \cdot \cos \beta_3) ds \end{aligned}$$

Siendo b_1, b_2, b_3 los ángulos que forman los ejes con la normal a (S).



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.4.- RELACIONES FUNDAMENTALES

1.4.2.- EXPESIÓN ANALÍTICA SIMPLIFICADA

IDENTIDADES NOTABLES

C.- FORMULA DE STOKES

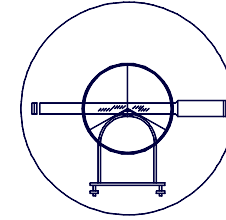
La relación transforma una integral de superficie en una curvilínea. La integral de superficie está extendida a una superficie abierta que se apoya en una determinada curva (C). La integral curvilínea está configurada a lo largo de la propia curva. Si $n = (\text{Cos } \beta_1, \text{Cos } \beta_2, \text{Cos } \beta_3)$ y X, Y, Z son tres funciones de (x, y, z) se verifica que:

$$\int_C (Xdx + Ydy + Zdz) = \iint_s \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \text{Cos } \beta_1 + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \text{Cos } \beta_2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \text{Cos } \beta_3 \right] ds$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.4.- RELACIONES FUNDAMENTALES

1.4.2.- EXPRESIÓN ANALÍTICA SIMPLIFICADA

FORMULAS DE GAUSS

A.- PRIMERA FORMULA DE GAUSS

Definido un campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$, la fórmula anterior se puede expresar de la siguiente forma, recordando el concepto de divergencia:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

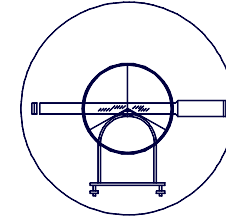
$$\text{como : } \vec{n} = (\operatorname{Cos} \beta_1, \operatorname{Cos} \beta_2, \operatorname{Cos} \beta_3)$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = P \cdot \operatorname{Cos} \beta_1 + Q \cdot \operatorname{Cos} \beta_2 + R \cdot \operatorname{Cos} \beta_3$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.4.- RELACIONES FUNDAMENTALES

1.4.2.- EXPRESIÓN ANALÍTICA SIMPLIFICADA

FORMULAS DE GAUSS

A.- PRIMERA FORMULA DE GAUSS

Aplicando la relación de Ostrogradsky:

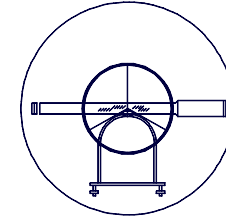
$$\Phi = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F} \cdot dv = \iint_S \bar{F} \cdot \bar{n} \cdot ds = \iint_S F_n \cdot ds$$

Siendo F_n la proyección de F sobre la normal es decir, se trata de la componente de F en la dirección de n .



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.4.- RELACIONES FUNDAMENTALES

1.4.2.- EXPESIÓN ANALÍTICA SIMPLIFICADA

FORMULAS DE GAUSS

A.- PRIMERA FORMULA DE GAUSS

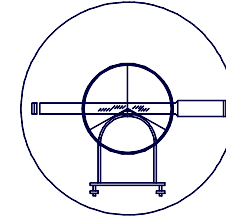
Esta primera fórmula, de especial trascendencia, tiene una concreta aplicación en el ámbito que se está considerando. Evaluando el flujo descompuesto en las tres direcciones cartesianas, resulta:

$$\begin{aligned} \text{Flujo} = \Phi &= \iint \bar{F} \cdot \bar{n} \cdot ds = \\ &= \iint (F_X \cdot \text{Cos}\beta_1 + F_Y \cdot \text{Cos}\beta_2 + F_Z \cdot \text{Cos}\beta_3) \cdot ds \end{aligned}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.4.- RELACIONES FUNDAMENTALES

1.4.2.- EXPESIÓN ANALÍTICA SIMPLIFICADA

FORMULAS DE GAUSS

A.- PRIMERA FORMULA DE GAUSS

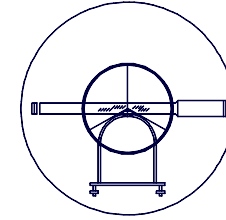
Calculando de forma individualizada los diferentes valores del flujo, resulta:

$$\left. \begin{aligned} \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right) dydz - F_x dydz &= \frac{\partial F_x}{\partial x} dx dydz \\ \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} dy \right) dx dz - F_y dx dz &= \frac{\partial F_y}{\partial y} dx dydz \\ \left(F_z + \frac{\partial F_z}{\partial z} dz \right) dx dy - F_z dx dy &= \frac{\partial F_z}{\partial z} dx dydz \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Phi = \iiint_V \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F} \cdot dv$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.4.- RELACIONES FUNDAMENTALES

1.4.2.- EXPRESIÓN ANALÍTICA SIMPLIFICADA

FORMULAS DE GAUSS

B.- SEGUNDA FORMULA DE GAUSS

Si existe una función escalar U de tal manera que:

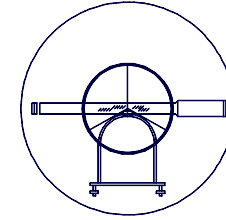
$$\overline{graU} = \overline{F} \Rightarrow \overline{\nabla U} = \overline{F} \Rightarrow \left[\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right] \Rightarrow \text{div} \overline{F} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$$

$$\overline{F} \cdot \overline{n} = \overline{graU} \cdot \overline{n} \Rightarrow \iiint_V \Delta U \cdot dV = \iint_S \overline{graU} \cdot \overline{n} \cdot ds$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.4.- RELACIONES FUNDAMENTALES

1.4.2.- EXPRESIÓN ANALÍTICA SIMPLIFICADA

FORMULAS DE GAUSS

C.- TEOREMA DE GAUSS

El flujo de las fuerzas Newtonianas engendradas por una masa “m” a través de una superficie (S), cerrada y orientada resulta:

$$\Phi = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot \sum m_i$$

G = Constante de gravitación universal.
m = Masa interior de la superficie.

Se puede expresar para cada caso particular:

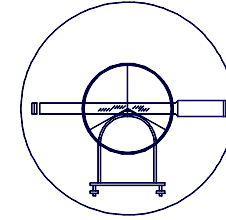
$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iint \frac{G \cdot dm}{L^2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot L^2 = \iint G \cdot 4 \cdot \pi \cdot dm = 4 \cdot \pi \cdot G \sum M_i$$

Las masas son las fuentes del campo gravitatorio, que movilizan flujos, potencial y fuerzas.



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.5.- CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS

1.5.1.- DIVERGENCIA Y LAPLACIANA DEL GRAVÍFICO

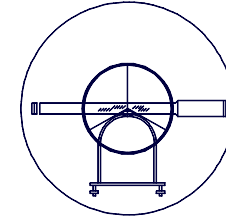
LAPLACIANA DEL POTENCIAL GRAVÍFICO

Se ha comprobado que: $\bar{\gamma} = -gradW = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}\right)$

Analizando el comportamiento, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x} &= -G^* \iiint_v \rho \cdot \frac{X - X_0}{L^3} dv + \omega^2 x = \\ &= -G^* \frac{\rho \cdot (X - X_0)}{L^3} + \omega^2 x = -G^* \frac{\rho}{L^2} \cos \gamma_1 + \omega^2 x\end{aligned}$$

De igual forma se puede proceder con: $\frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}$



1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.5.- CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS

1.5.1.- DIVERGENCIA Y LAPLACIANA DEL GRAVÍFICO
LAPLACIANA DEL POTENCIAL GRAVÍFICO

También se puede determinar el valor de la Laplaciana del Potencial:

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = W_{xx} + W_{yy} + W_{zz}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 3G^* \iiint \frac{\rho \cdot (x - x_0)^2}{L^5} dV - G^* \iiint \frac{\rho}{L^3} dV + \omega^2$$

De forma análoga se obtiene:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 3G^* \iiint \frac{\rho \cdot (y - y_0)^2}{L^5} dV - G^* \iiint \frac{\rho}{L^3} dV + \omega^2 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 3G^* \iiint \frac{\rho \cdot (z - z_0)^2}{L^5} dV - G^* \iiint \frac{\rho}{L^3} dV$$

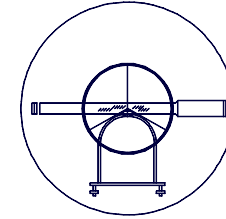
Sumando se obtiene:

$$\Delta W = 3G^* \iiint \rho \frac{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]}{L^5} dV - 3G^* \iiint \frac{\rho}{L^3} dV + 2\omega^2 \Rightarrow \Delta W = 2\omega^2 \Rightarrow \Delta V = 0$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA 1.5.- CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS

1.5.1.- DIVERGENCIA Y LAPLACIANA DEL GRAVÍFICO PROTAGONISMO DE LA DIVERGENCIA

Por otra parte se puede establecer: $\iint \bar{F} \cdot \bar{dS} = 4 \cdot \pi \cdot G^* \iiint_V \rho \cdot dV$

Aplicando el Teorema de Gauss: $\iint_s \bar{F} \cdot \bar{dS} = \iiint_V \text{div} \bar{F} \cdot dV$

Comparando términos resulta: $\text{div} \bar{F} = 4 \cdot \pi \cdot G^* \cdot \rho$

Donde no hay masa

$$\rho = 0 \rightarrow \text{div} \bar{F} = 0$$

Donde hay distribución de masa

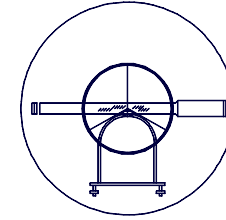
$$\text{div} \bar{F} = 4 \cdot \pi \cdot G^* \cdot \rho$$

La intensidad de las fuentes del campo, $\text{div} \bar{F}$ es proporcional
a la distribución de la densidad de las masas.



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.5.- CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS

1.5.2.- FORMULAS DE POISSON Y LAPLACE

FORMULAS DE POISSON

Como se verifica:

$$\bar{F} = -\overline{\text{grad}V}$$

$$\text{div}\bar{F} = -\text{div}(\overline{\text{grad}V}) = -\Delta V$$

Resulta la fórmula de Poisson:

Donde hay masa: $-4 \cdot \pi \cdot G^* \cdot \rho = \Delta V$

Donde no existe masa: $\Delta V = 0$

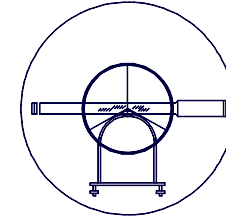
Por lo tanto resulta:





UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.5.- CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS

1.5.2.- FORMULAS DE POISSON Y LAPLACE

FORMULAS DE LAPLACE

Exterior de la superficie terrestre:

$$\Delta V = 0 \rightarrow \Delta W = 2\omega^2$$

Configurando la Ecuación de Laplace generalizada.

Interior de la superficie terrestre:

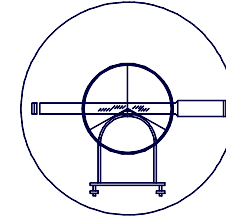
$$\Delta V \neq 0 \rightarrow \Delta W = -4 \cdot \pi \cdot G^* \cdot \rho + 2\omega^2$$

Configurando la Ecuación de Poisson generalizada.



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.5.- CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS

1.5.3.- CURVATURA DE SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

JUSTIFICACIÓN

Es conocido que la curvatura de una función $y = f(x)$ es:

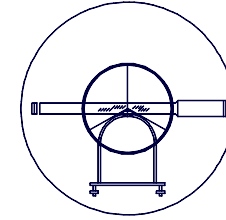
$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Si en el punto elegido la tangente a la curva es paralela al eje X, se verifica $y' = 0$, resultando:

$$K = y'' = \frac{d^2Y}{dx^2}$$

En el caso considerado, la intersección de $W(x,y,z) = \text{Cte.}$ con el plano XZ, es decir $y = 0$ es una función del tipo $Z = f(x)$, y por lo tanto:

$$K = \frac{d^2Z}{dx^2}$$



1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.5.- CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS

1.5.3.- CURVATURA DE SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

JUSTIFICACIÓN

Diferenciando respecto a X , y teniendo en cuenta que $y = 0$
y $z = f(x)$:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = W_x + W_z \frac{dZ}{dx} = 0$$

Derivando de nuevo:

$$W_{xx} + 2W_{xz} \frac{dZ}{dx} + W_{zx} \frac{dZ}{dx} + W_{zz} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + W_z \frac{d^2 Z}{dx^2} = 0$$

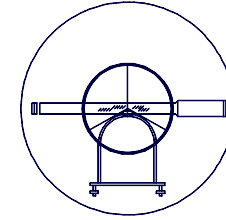
Como:

$$\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow W_{xx} + W_z \frac{d^2 Z}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 Z}{dx^2} = -\frac{W_{xx}}{W_z}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.5.- CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS

1.5.3.- CURVATURA DE SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

JUSTIFICACIÓN

Como el eje Z es vertical, se cumplirá: $W_z = \frac{\partial W}{\partial z} = -\gamma$

Obteniendo: $\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{W_{xx}}{\gamma}$

Y por lo tanto: $K_x = \frac{W_{xx}}{\gamma}$

De manera análoga se obtiene: $K_y = \frac{W_{yy}}{\gamma}$

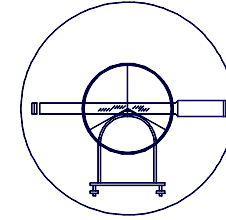
Se define la curvatura media de una superficie en un punto de la forma:

$$K_M = -\frac{K_x + K_y}{2} = -\frac{W_{xx} + W_{yy}}{2 \cdot \gamma}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.5.- CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS

1.5.4.- CURVATURA DE UNA LÍNEA DE FUERZA

JUSTIFICACIÓN

Para profundizar en la Geodesia Física y ver la correlación entre magnitudes físicas y las geométricas conviene establecer la relación que encontró BRUNS estableciendo relación entre las curvaturas de las líneas de campo y los potenciales anteriormente establecidos:

$$\Delta W = W_{XX} + W_{YY} + W_{ZZ} = -4 \cdot \pi \cdot G^* \cdot \rho + 2\omega^2$$

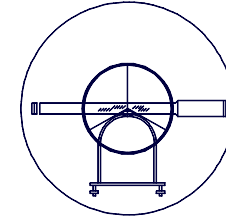
Pero: $W_{XX} + W_{YY} = -2 \cdot \gamma \cdot K_M$

Y por tanto: $-2 \cdot \gamma \cdot K_M + W_{ZZ} = -4 \cdot \pi \cdot G^* \cdot \rho + 2\omega^2$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.5.- CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS

1.5.4.- CURVATURA DE UNA LÍNEA DE FUERZA

JUSTIFICACIÓN

Y como se verifica:
$$W_Z = \frac{\partial W}{\partial z} = -\gamma \Rightarrow W_{ZZ} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -\frac{\partial \gamma}{\partial z}$$

Y por lo tanto:
$$-2 \cdot \gamma \cdot K_M - \frac{\partial \gamma}{\partial z} = -4 \cdot \pi \cdot G^* \cdot \rho + 2\omega^2 \Rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 4 \cdot \pi \cdot G^* \cdot \rho - 2\omega^2 - 2 \cdot \gamma \cdot K_M$$

La línea de fuerza se define como una línea cuyo vector elemental de arco $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$ tiene la dirección del vector gravedad:

$$\bar{\gamma} = (W_X, W_Y, W_Z)$$

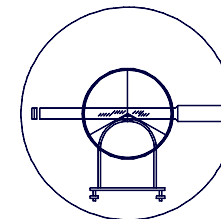
Ambos vectores sólo difieren en módulo, pero son proporcionales:

$$\frac{dx}{W_x} = \frac{dy}{W_y} = \frac{dz}{W_z}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

1.5.- CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS

1.5.4.- CURVATURA DE UNA LÍNEA DE FUERZA

JUSTIFICACIÓN

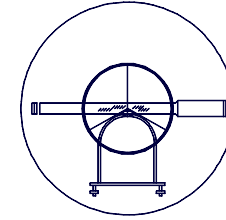
Como la línea de fuerza no está contenida en ningún plano fundamental, se calculan las curvaturas de las proyecciones de la curva (Línea de fuerza) en ambos planos fundamentales (X_Z, Y_Z). Al tener las curvas proyección en los planos fundamentales será:

$$K_x = \frac{d^2 X}{dz^2} : \frac{dX}{dz} = \frac{W_x}{W_z}$$

$$\frac{d^2 X}{dz^2} = \frac{1}{W_z^2} \left[W_z \left(W_{xx} \frac{dX}{dz} + W_{xz} \right) - W_x \left(W_{zz} + W_{xz} \frac{dX}{dz} \right) \right]$$

En el punto considerado:

$$\frac{dX}{dz} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 X}{dz^2} = \frac{W_z \cdot W_{xz} - W_{zz} \cdot W_x}{W_z^2}$$



1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA
1.5.- CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS

1.5.4.- CURVATURA DE UNA LÍNEA DE FUERZA

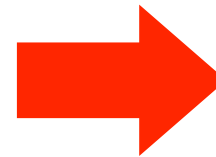
JUSTIFICACIÓN

Como la GRAVEDAD sigue la dirección del eje Z será:

$$W_X = W_Y = 0$$

$$\frac{d^2 X}{dz^2} = \frac{W_{XZ} \cdot W_Z}{W_Z^2} = \frac{W_{XZ}}{W_Z} = \frac{W_{XZ}}{\gamma}$$

$$W_{XZ} = W_{ZX} \frac{\partial}{\partial x} W_Z = \gamma_X$$



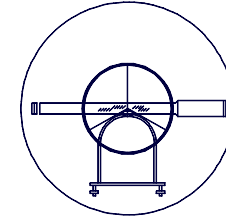
$$K_X = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\gamma_X}{\gamma}$$

$$K_Y = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\gamma_Y}{\gamma}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA 1.5.- CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS

1.5.4.- CURVATURA DE UNA LÍNEA DE FUERZA

JUSTIFICACIÓN

La curvatura total de la línea será:

$$K = \sqrt{K_X^2 + K_Y^2} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma_X^2 + \gamma_Y^2}$$

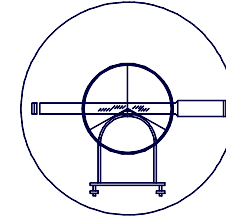
La generalización de la curvatura con la línea de fuerza puede hacerse igual que en la curvatura de las superficies y así:

$$K = -\frac{W_{XZ}}{\gamma \cdot \text{Cos}A} = -\frac{W_{YZ}}{\gamma \cdot \text{Sen}A}$$

$$A = \text{Arctg} \frac{W_{YZ}}{W_{XZ}}$$

Siendo A el acimut de la Normal Principal:

$$A = 0^\circ \Rightarrow K_X = -\frac{W_{XZ}}{\gamma} \quad \text{///} \quad A = 90^\circ \Rightarrow K_Y = -\frac{W_{YZ}}{\gamma}$$



1.- APROXIMACIÓN A LA FIGURA REAL DE LA TIERRA

