

# Topografía Minera

## Tema 2. El elipsoide, figura de aproximación



**Julio Manuel de Luis Ruiz**  
**Raúl Pereda García**

Departamento de Ingeniería Geográfica y  
Técnicas de Explotación de Minas

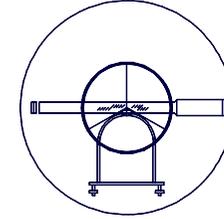
Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

---

## **2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

**2.1.- Expresión Analítica de una Curva.**

**2.2.- Expresión Analítica de una Superficie.**

**2.3.- Plano Tangente y Recta Normal.**

**2.4.- Geometría Intrínseca de una Superficie.**

**2.5.- Curvatura de las Superficies.**

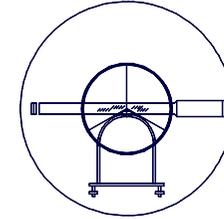
**2.6.- El Campo de Gravedad Normal.**

**2.7.- Ejercicios Resueltos y propuestos.**



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.1.- EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA CURVA

#### 2.1.1.- INTRODUCCIÓN

Una curva se puede expresar mediante coordenadas Cartesianas o Paramétricas. El método más sencillo y convencional es trabajar en Paramétricas:

$$\left. \begin{array}{l} X = x(u) \\ Y = y(u) \\ Z = z(u) \end{array} \right\} u = \text{parámetro}$$

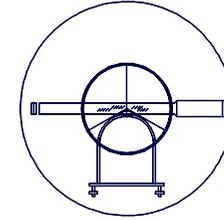
#### EJEMPLO

$$\left. \begin{array}{l} X = u^2 + 1 \\ Y = u + 2 \\ Z = u \end{array} \right\} u = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = 2 \\ Z = 0 \end{cases} \quad u = 1 \Rightarrow (2, 3, 1)$$
$$\bar{X} = [u^2 + 1, u + 2, u]$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.1.- EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA CURVA

#### 2.1.2.- VECTOR TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA

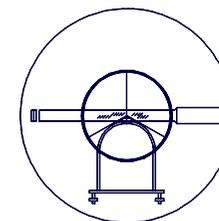
##### VECTOR TANGENTE

En cada punto de una curva hay un vector que se caracteriza por ser tangente a la curva, y este vector informa sobre la pendiente de la curva en dicho punto:

$$\bar{X} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

##### EJEMPLO

$$\left. \begin{array}{l} X = u^2 + 1 \\ Y = u + 2 \\ Z = u \end{array} \right\} \left( \frac{\partial x}{\partial u} = 2u ; \frac{\partial y}{\partial u} = 1 ; \frac{\partial z}{\partial u} = 1 \right) \Rightarrow \bar{X} = [2u , 1 , 1]$$



## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.1.- EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA CURVA

#### 2.1.2.- VECTOR TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA

##### RECTA NORMAL A UNA CURVA

La ecuación de la Recta Normal a una curva viene definida por la expresión:

$$\frac{X - X_1}{X_u} = \frac{Y - Y_1}{Y_u} = \frac{Z - Z_1}{Z_u}$$

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u}; Y_u = \frac{\partial Y}{\partial u}; Z_u = \frac{\partial Z}{\partial u}$$

##### EJEMPLO

$$\left. \begin{aligned} X &= u^2 + 1 \\ Y &= u^2 \\ Z &= u + 4 \end{aligned} \right\}$$

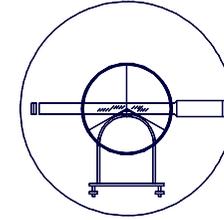
$$\frac{X - (u^2 + 1)}{2u} = \frac{Y - (u^2)}{2u} = \frac{Z - (u + 4)}{1}$$

$$u = 1 \Rightarrow \frac{X - 2}{2} = \frac{Y - 1}{2} = \frac{Z - 5}{1}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.1.- EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA CURVA

#### 2.1.3.- PARÁMETRO INTRÍNSECO DE UNA SUPERFICIE

##### PARÁMETRO INTRÍNSECO

Se utiliza para reducir el módulo del vector a la unidad, aunque se puede obtener de forma más sencilla dividiendo el vector entre su módulo, en las curvas no tiene demasiado sentido pero si que lo tiene para las superficies:

$$S = \int \sqrt{\bar{X} \cdot \bar{X}} du$$

Siendo el Vector Tangente:  $\bar{X} = (a, b, c)$

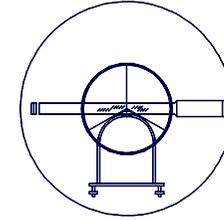
Producto Escalar:  $(\bar{X} \cdot \bar{X}) = a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c = a^2 + b^2 + c^2$

Módulo del Vector:  $\bar{X}(a, b, c) \Rightarrow |X| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

## **2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

### **2.2.- EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA SUPERFICIE**

#### **2.2.1.- INTRODUCCIÓN**

Superficie es el lugar geométrico de los valores que adoptan tres funciones dependientes de dos parámetros, cuando éstos toman todos los valores comprendidos en un intervalo de variación prefijado que expresan una superficie en forma paramétrica:

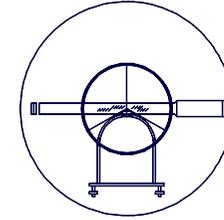
$$\left. \begin{array}{l} X = x(u, v) \\ Y = y(u, v) \\ Z = z(u, v) \end{array} \right\} \begin{array}{l} u_1 \leq u \leq u_2 \\ v_1 \leq v \leq v_2 \end{array}$$

Se suponen uniformes, continuas y por lo tanto derivables.



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.2.- EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA SUPERFICIE

#### 2.2.1.- INTRODUCCIÓN

##### A.- ECUACIÓN VECTORIAL

La superficie está definida por la variación del extremo de un vector cuyo origen es un punto fijo. Su expresión habitual es:

$$\bar{X} = x(u, v)$$
$$\bar{X} = x(u, v)\bar{e}_1 + y(u, v)\bar{e}_2 + z(u, v)\bar{e}_3$$

##### B.- ECUACIÓN EXPLÍCITA

La superficie está expresada de la forma:

$$Z = f(x, y)$$

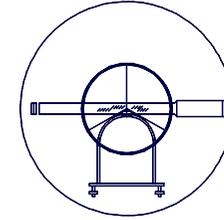
PASO A PARAMÉTRICAS

$$\left. \begin{array}{l} x = u \\ y = v \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = u \\ y = v \\ z = f(uv) \end{array}$$



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

**2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**  
**2.2.- EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA SUPERFICIE**

**2.2.1.- INTRODUCCIÓN**

**C.- ECUACIÓN IMPLÍCITA**

La superficie está definida por la expresión:

$$F(x, y, z) = 0$$

El paso de paramétricas a cartesianas se realiza despejando “u” y “v” en dos de las ecuaciones y sustituyendo las expresiones halladas en la tercera:

$$F(x, y, z) = 0$$

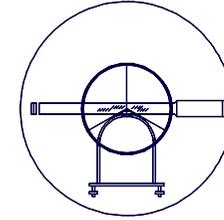
**PASO A PARAMÉTRICAS**

$$\left. \begin{aligned} X &= x(u, v) \\ Y &= y(u, v) \\ Z &= z(u, v) \end{aligned} \right\}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.2.- EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA SUPERFICIE

#### 2.2.1.- INTRODUCCIÓN

Existen diversos tipos de superficies geométricas muy utilizados en Ingeniería Cartográfica y Geodesia como pueden ser las coordenadas esféricas y cilíndricas:

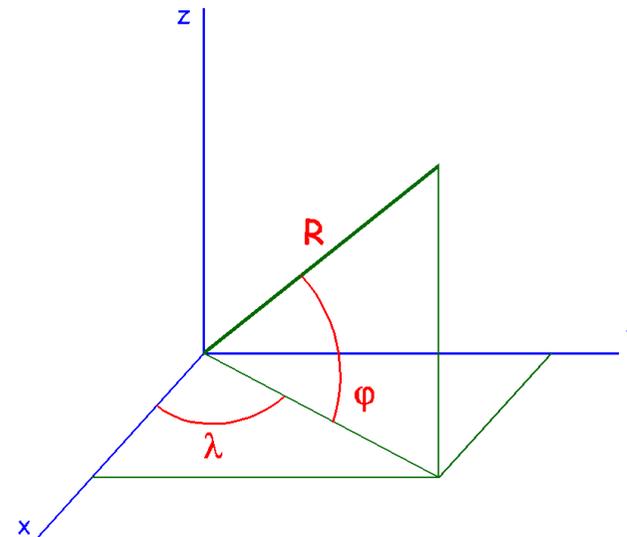
#### COORDENADAS ESFÉRICAS

Sin duda el modelo más sencillo de aproximación de la Tierra y que posteriormente da lugar al modelo elipsoidal:

$$X = R \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda$$

$$Y = R \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda$$

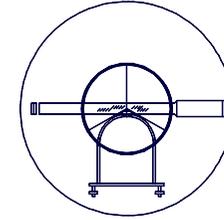
$$Z = R \cdot \sin\varphi$$





UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.2.- EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA SUPERFICIE

#### 2.2.1.- INTRODUCCIÓN

#### COORDENADAS CILÍNDRICAS

Modelo muy empleado en algunas proyecciones cartográficas con desarrollos cilíndricos:

$$X = r \cdot \text{Cos} \lambda$$

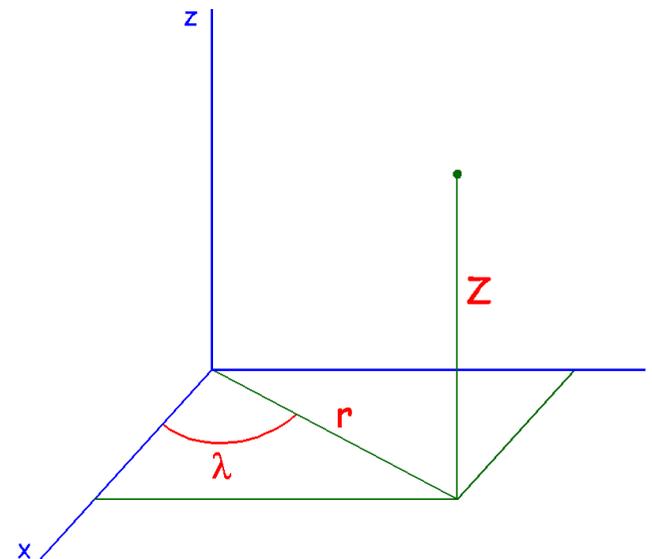
$$Y = r \cdot \text{Sen} \lambda$$

$$Z = Z$$

$$f(r, \lambda) = 0 \Rightarrow \text{Sup. Cilíndrica}$$

$$f(\lambda, z) = 0 \Rightarrow \text{Sup. Cónica}$$

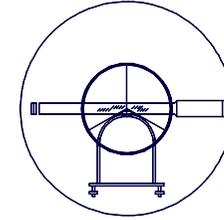
$$f(r, z) = 0 \Rightarrow \text{Sup. Revolución}$$





**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

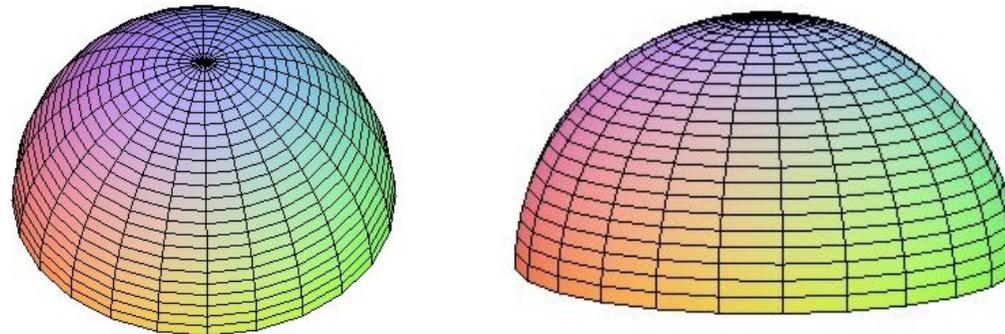
## **2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

### **2.2.- EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA SUPERFICIE**

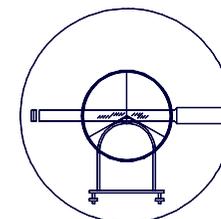
#### **2.2.2.- CURVAS PARAMÉTRICAS Y VECTORES TANGENTES**

##### **CURVAS PARAMÉTRICAS**

Se denomina Curva Paramétrica aquella que aparece al dejar en una determinada superficie una de las variables ( $u$  ó  $v$ ) constantes y la otra variable.



Por lo tanto en cada punto de cualquier superficie pasan dos curvas paramétricas, una en la que  $u = \text{cte}$  y otra en la que  $v = \text{cte}$ .

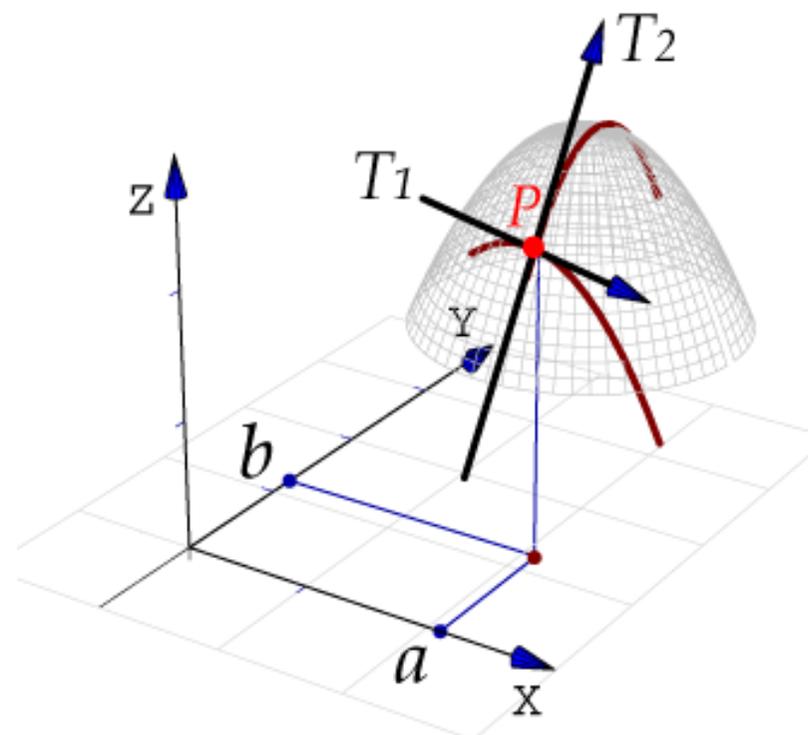


**2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**  
**2.2.- EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA SUPERFICIE**

**2.2.2.- CURVAS PARAMÉTRICAS Y VECTORES TANGENTES**

**VECTORES TANGENTES**

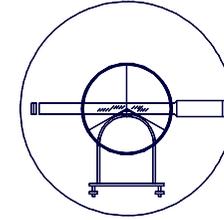
Como en cada punto existen dos curvas paramétricas, también existen dos vectores que son tangentes a cada una de esas curvas llamados vectores tangentes:





**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

## **2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

### **2.2.- EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA SUPERFICIE**

#### **2.2.2.- CURVAS PARAMÉTRICAS Y VECTORES TANGENTES**

##### **VECTORES TANGENTES**

**Estableciendo la ecuación vectorial de una superficie:**

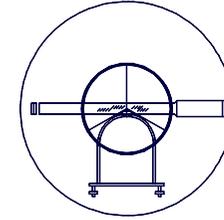
$$\bar{X} = [X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)]$$

**Se determinan los vectores tangentes de la siguiente forma:**

$$\bar{X}_u = \left[ \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Z}{\partial u} \right] = [X_u(u, v), Y_u(u, v), Z_u(u, v)]$$

$$\bar{X}_v = \left[ \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial Y}{\partial v}, \frac{\partial Z}{\partial v} \right] = [X_v(u, v), Y_v(u, v), Z_v(u, v)]$$

$$\bar{X}_u \wedge \bar{X}_v = 0$$

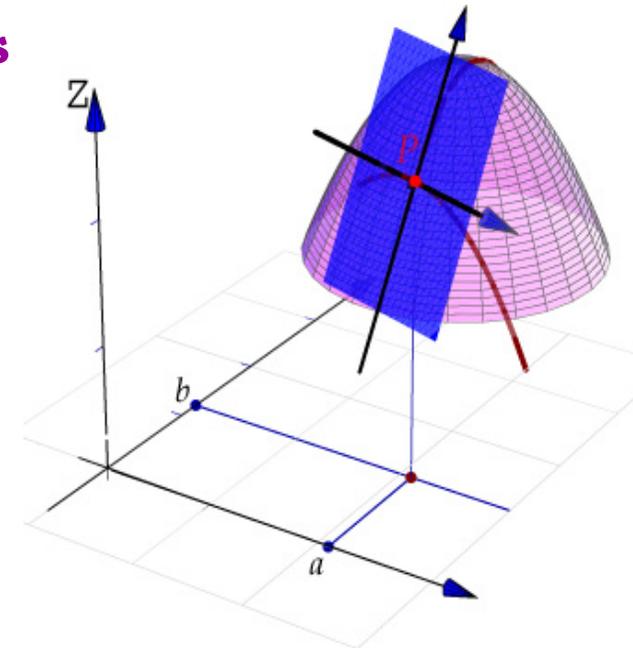


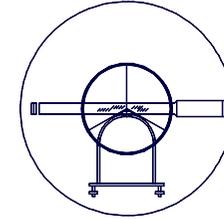
2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN  
2.3.- PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL

2.3.1.- PLANO TANGENTE  
INTRODUCCIÓN

Dada una superficie cualquiera se denomina Plano Tangente al lugar geométrico de todas las rectas tangentes a todas las curvas que pasan por un punto y están contenidas en la superficie:

$$\begin{vmatrix} X - X_1 & Y - Y_1 & Z - Z_1 \\ \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)_{u=u_1} & \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)_{u=u_1} & \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)_{u=u_1} \\ \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)_{v=v_1} & \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)_{v=v_1} & \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)_{v=v_1} \end{vmatrix} = 0$$





## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.3.- PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL

#### 2.3.2.- RECTA NORMAL

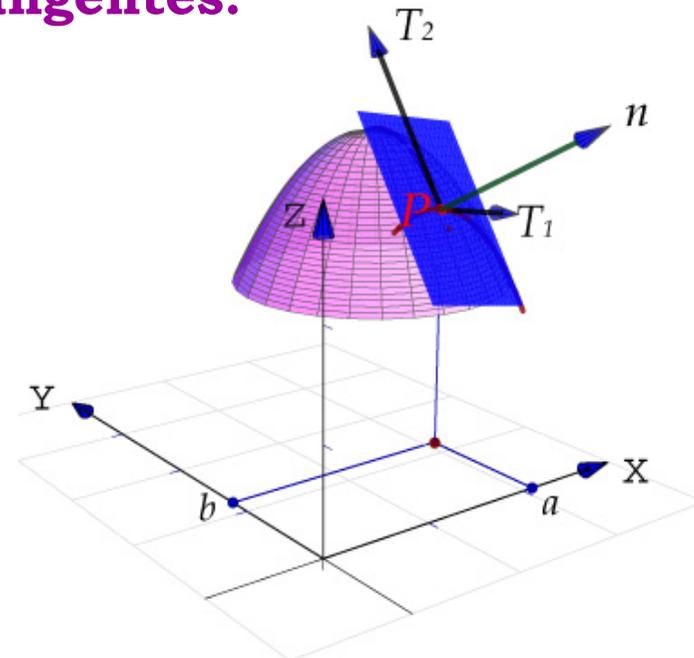
##### INTRODUCCIÓN

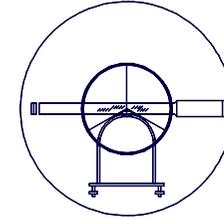
La dirección de la recta normal está definida por la dirección normal a los dos vectores tangentes:

$$\overline{N} = \overline{Nu} \wedge \overline{Nv}$$

La ecuación de la Recta Normal al Plano Tangente se obtiene, por medio de la ecuación:

$$\overline{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ Xu & Yu & Zu \\ Xv & Yv & Zv \end{vmatrix}$$





2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN  
2.3.- PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL

2.3.3.- VERSOR NORMAL  
INTRODUCCIÓN

Vector normal con modulo unidad:

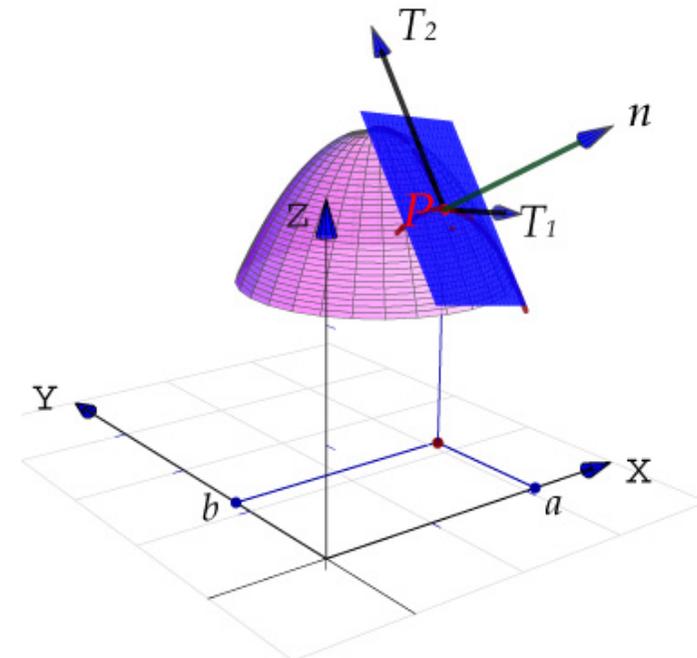
$$\overline{VN} = \frac{(\overline{Xu} \wedge \overline{Xv})}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Parámetros de Gauss:

$$\overline{Xu} \cdot \overline{Xu} = E$$

$$\overline{Xu} \cdot \overline{Xv} = F$$

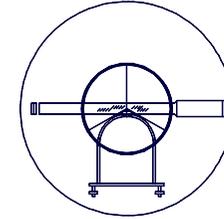
$$\overline{Xv} \cdot \overline{Xv} = G$$





**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

**2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

**2.4.- GEOMETRÍA INTRÍNSECA DE UNA SUPERFICIE**

**2.4.1.- PRIMERA FÓRMULA FUNDAMENTAL**

**DEFINICIÓN Y APLICACIÓN PRINCIPAL**

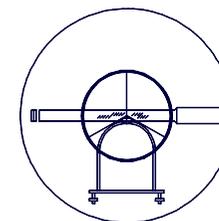
Se denomina Primera Formula Fundamental de la superficie (S) al valor de la longitud diferencial de arco de curva, contenida en ella:

$$dS^2 = [I] = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Expresa por lo tanto una longitud elemental entre dos puntos a lo largo de la superficie. Para las curvas coordenadas, resulta:

$$u = cte \Rightarrow dS^2 = Gdv^2$$

$$v = cte \Rightarrow dS^2 = Edu^2$$

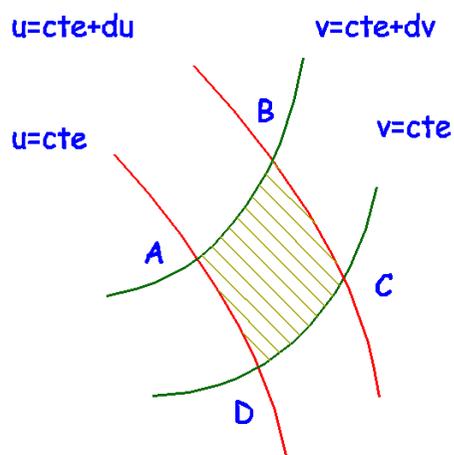


2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

2.4.- GEOMETRÍA INTRÍNSECA DE UNA SUPERFICIE

2.4.2.- APLICACIONES DE LA FÓRMULA FUNDAMENTAL  
CÁLCULO DE ÁREAS EN UNA SUPERFICIE

Dada la superficie (S) por dos puntos infinitamente próximos de la superficie, las curvas coordenadas determinan un recinto elemental:



$$u = cte \Rightarrow du = 0 \Rightarrow AB = \overline{Xv} \cdot dv$$

$$v = cte \Rightarrow dv = 0 \Rightarrow AC = \overline{Xu} \cdot du$$

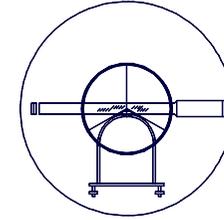
*Elemento Superficial*

$$dA = AB \cdot AC = \left| \overline{Xu} \wedge \overline{Xv} \right| dudv = \sqrt{EG - F^2}$$



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

---

**2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

**2.4.- GEOMETRÍA INTRÍNSECA DE UNA SUPERFICIE**

**2.4.2.- APLICACIONES DE LA FÓRMULA FUNDAMENTAL**

**CÁLCULO DEL ÁNGULO ENTRE CURVAS PARAMÉTRICAS**

Dadas dos curvas situadas en una superficie que se cortan en un punto P, se determina el ángulo que forman, determinando el ángulo que forman los dos vectores tangentes. Si en lugar de dos curvas genéricas, se toman las curvas coordenadas, los cálculos se simplifican:

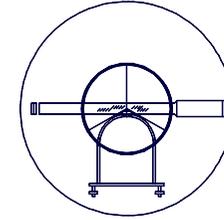
$$\text{Cos}\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Para que dos curvas coordenadas sean ortogonales, tiene que verificarse que  $F = 0$ .



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.4.- GEOMETRÍA INTRÍNSECA DE UNA SUPERFICIE

#### 2.4.3.- SEGUNDA FÓRMULA FUNDAMENTAL

##### DEFINICIÓN

Dada una curva (c) sobre una superficie (S), se denomina Segunda Fórmula Fundamental a la expresión:

$$|II| = e \cdot du^2 + 2 \cdot f \cdot du \cdot dv + g \cdot dv^2$$

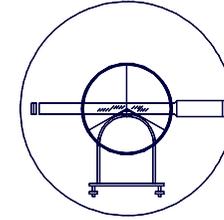
Siendo e, f y g, los segundos parámetros de Gauss, cuya obtención se realiza mediante las expresiones:

$$e = \frac{\begin{vmatrix} X_{uu} \\ X_u \\ X_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} ; f = \frac{\begin{vmatrix} X_{uv} \\ X_u \\ X_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} ; g = \frac{\begin{vmatrix} X_{vv} \\ X_u \\ X_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}$$



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

---

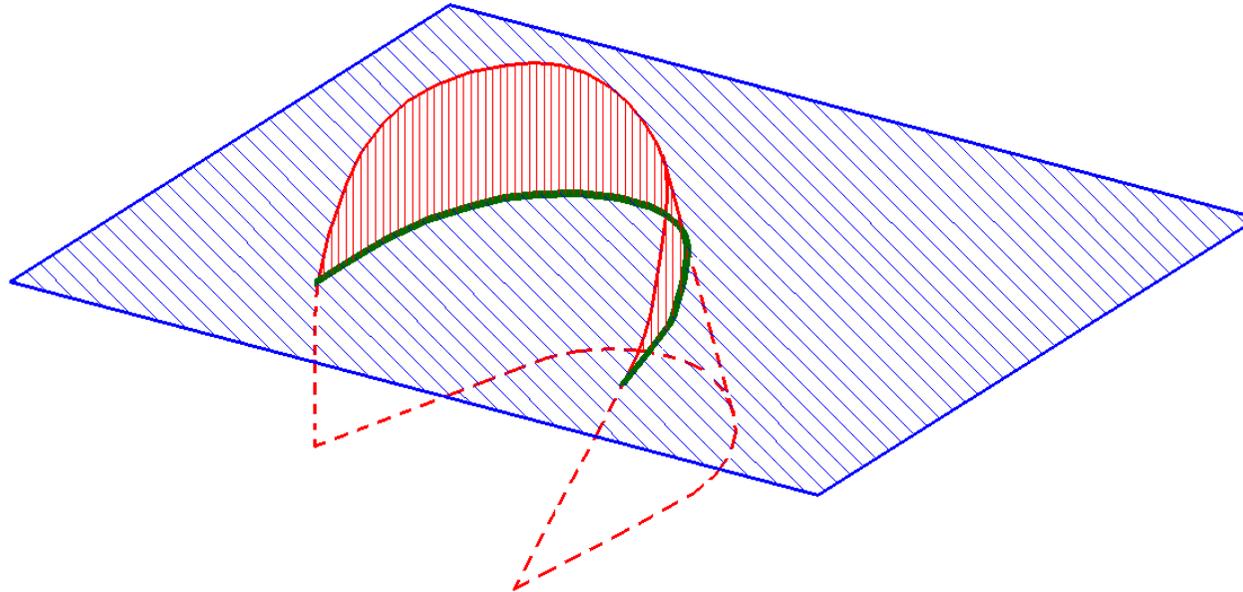
## **2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

### **2.5.- CURVATURA DE SUPERFICIES**

#### **2.5.1.- PLANTEAMIENTO GENERAL**

##### **DEFINICIÓN**

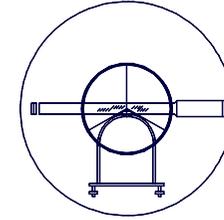
**Dada una superficie cualquiera, si a ésta se la corta por un plano, aparece una curva.**





**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.5.- CURVATURA DE SUPERFICIES

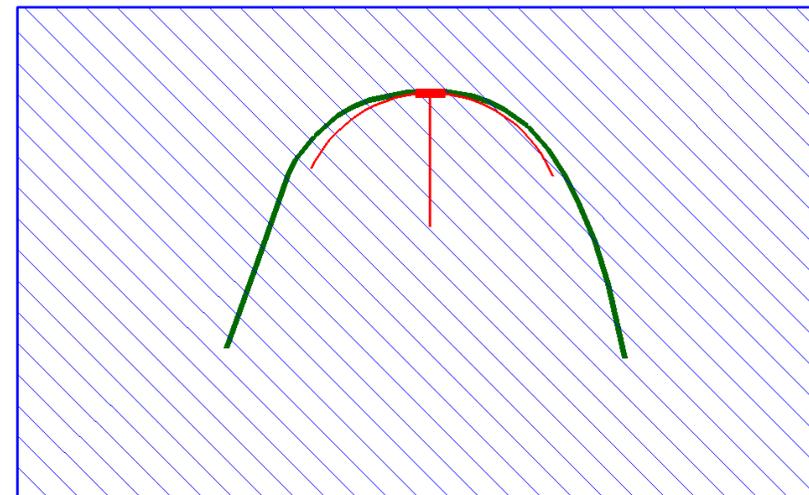
#### 2.5.1.- PLANTEAMIENTO GENERAL

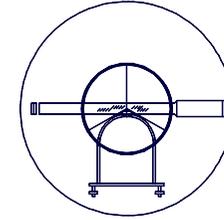
##### DEFINICIÓN

Si se estudia esa curva en un punto, sucederá que existe un radio para el cual en torno a ese punto objeto de estudio se puede trazar un elemento diferencial como una circunferencia:

$$K = \frac{1}{R} = \textit{Curvatura}$$

**R = radio de la Circunferencia que mejor se aproxima a la curva real en un elemento diferencial de longitud.**





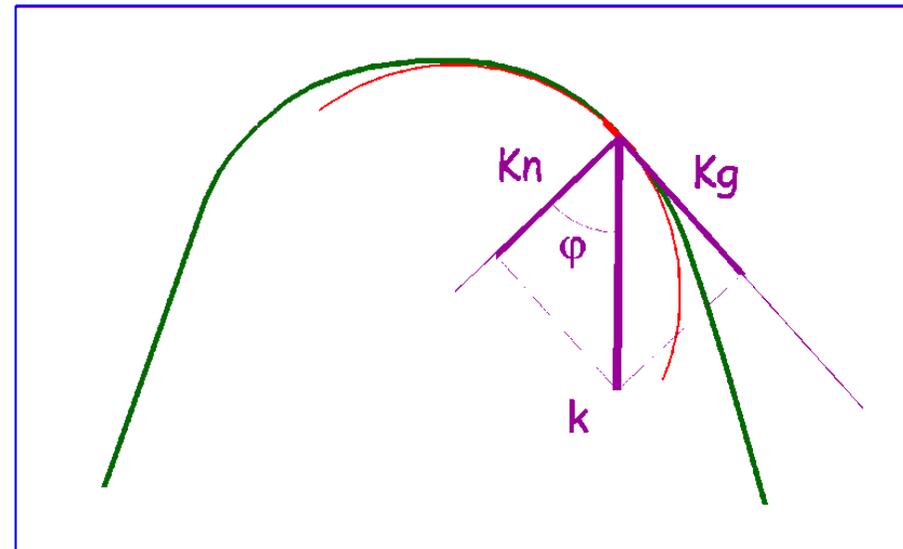
## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.5.- CURVATURA DE SUPERFICIES

#### 2.5.2.- CURVATURA NORMAL Y GEODÉSICA

##### DEFINICIÓN

En el punto objeto de estudio, la curvatura se puede proyectar sobre un plano tangente o normal. Si se proyecta sobre el plano normal se obtiene la curvatura normal “ $K_n$ ” y si se proyecta sobre el tangente se obtiene la curvatura geodésica “ $K_g$ ”.

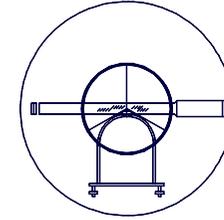


$$K_n = K \cdot \cos \varphi$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.5.- CURVATURA DE SUPERFICIES

#### 2.5.2.- CURVATURA NORMAL Y GEODÉSICA

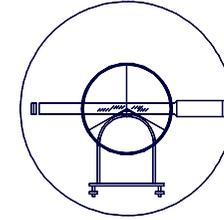
#### CÁLCULO DE LA CURVATURA NORMAL

Está demostrado que “Kn” se obtiene como:

$$Kn = \frac{II}{I} = \frac{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

Aunque habitualmente se reduce:

$$Kn = \frac{II}{I} = \frac{e + 2f\left(\frac{dv}{du}\right) + g\left(\frac{dv}{du}\right)^2}{E + 2F\left(\frac{dv}{du}\right) + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2} \Rightarrow \beta = \left(\frac{dv}{du}\right) \Rightarrow Kn = \frac{e + 2f\beta + g\beta^2}{E + 2F\beta + G\beta^2}$$



## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.5.- CURVATURA DE SUPERFICIES

#### 2.5.2.- CURVATURA NORMAL Y GEODÉSICA

##### CÁLCULO DE LA CURVATURA NORMAL

De esta expresión se deduce el valor de la curvatura principal:

$$\begin{vmatrix} (EKn - e) & (FKn - f) \\ (FKn - f) & (GKn - g) \end{vmatrix} = 0$$

$$(EG - F^2) \cdot Kn^2 - (Eg - 2Ff + Ge) \cdot Kn + (eg - f^2) = 0$$

Como la ecuación es cuadrada tiene dos soluciones llamadas curvaturas principales  $Kn_1$  y  $Kn_2$ . Así se obtiene:

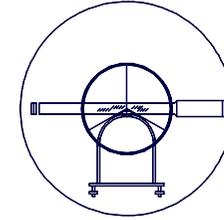
$$\text{Curvatura Total} = K_T = Kn_1 \cdot Kn_2$$

$$\text{Curvatura Media} = K_M = \frac{Kn_1 + Kn_2}{2}$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN  
2.5.- CURVATURA DE SUPERFICIES

2.5.2.- CURVATURA NORMAL Y GEODÉSICA  
APUNTES

IDEM ELIPSOIDE:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} x = N \cdot \text{Cos}\varphi \cdot \text{Cos}\lambda \\ y = N \cdot \text{Cos}\varphi \cdot \text{Sen}\lambda \\ z = N \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \text{Sen}\varphi \end{array} \right\} N = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \cdot \text{Sen}^2\varphi)}}$$

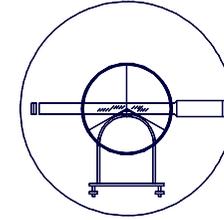
IDEM CONO CIRCULAR:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cdot \text{Cos}\theta \cdot \text{Sen}\alpha \\ y = r \cdot \text{Sen}\theta \cdot \text{Sen}\alpha \\ z = r \cdot \text{Cos}\alpha \end{array} \right\}$$



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

---

## **2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

### **2.5.- CURVATURA DE SUPERFICIES**

#### **2.5.3.- APLICACIÓN AL ELIPSOIDE**

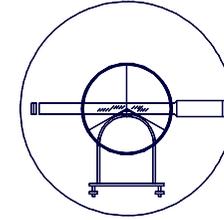
##### **FUNDAMENTO**

De todo el estudio llevado a cabo de las curvaturas del elipsoide, se llega a la conclusión que debido a la dificultad que acarrea trabajar con él, hay veces que se puede trabajar con una aproximación esférica.

Para definir la esfera de aproximación se define un radio que se caracteriza por que determina la esfera que más se aproxima al elipsoide, en la zona de trabajo.

Así se define el Radio de la Esfera Local:

$$R = \sqrt{N \cdot \rho}$$



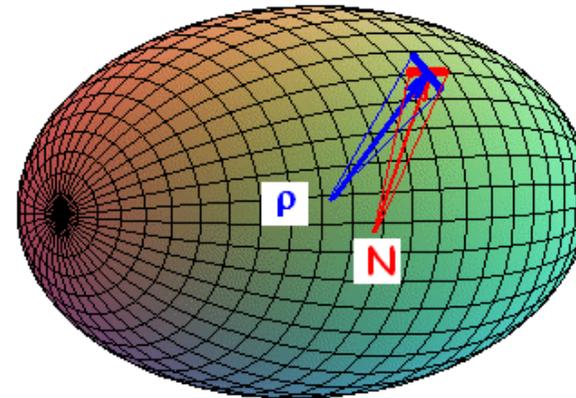
2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN  
2.5.- CURVATURA DE SUPERFICIES

2.5.3.- APLICACIÓN AL ELIPSOIDE

RADIO DE LA ESFERA LOCAL

Se define el Radio de la Esfera Local como:

$$R = \sqrt{N \cdot \rho} \Rightarrow \begin{cases} N = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \text{Sen}^2 \varphi)^{1/2}} \\ \rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \text{Sen}^2 \varphi)^{3/2}} \end{cases}$$

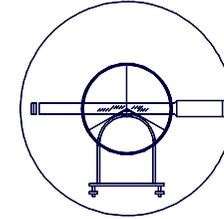


N y  $\rho$  Representan las curvaturas en la superficie del elipsoide en las dos direcciones principales.



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

## **2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

### **2.6.- EL CAMPO DE LA GRAVEDAD NORMAL**

#### **2.6.1.- ECUACIÓN DEL POTENCIAL NORMAL**

#### **GRAVEDAD EN EL ELIPSOIDE**

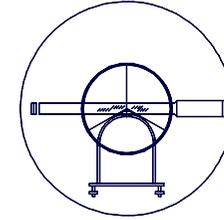
**Tratado el sólido, desde un contexto mecánico, se definen los momentos de inercia:**

$$A = \iiint_S (y^2 + z^2) \cdot dm$$

$$B = \iiint_S (x^2 + z^2) \cdot dm$$

$$C = \iiint_S (x^2 + y^2) \cdot dm$$

$$R = \frac{C - A}{M} \rightarrow M = \text{Masa Elipsoide}$$



## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.6.- EL CAMPO DE LA GRAVEDAD NORMAL

#### 2.6.1.- ECUACIÓN DEL POTENCIAL NORMAL

#### GRAVEDAD EN EL ELIPSOIDE

Obteniéndose el POTENCIAL del ELIPSOIDE mediante la expresión:

$$V = \frac{G^* M}{r} \left[ 1 + \frac{R}{2r^2} (1 - 3 \cdot \text{Sen}^2 \varphi) + \frac{\omega^2 r^3 \text{Cos}^2 \varphi}{2G^* M} \right]$$

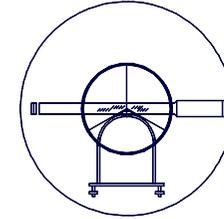
$$V_{Ecuador} = \frac{G^* M}{a} \left[ 1 + \frac{R}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2G^* M} \right] \Leftrightarrow r = a \Leftrightarrow \varphi = 0^\circ$$

$$V_{Polo} = \frac{G^* M}{a} \left[ 1 + \alpha + \frac{R}{a^2} \right] \Leftrightarrow r = b \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ$$



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.6.- EL CAMPO DE LA GRAVEDAD NORMAL

#### 2.6.1.- ECUACIÓN DEL POTENCIAL NORMAL

#### GRAVEDAD EN EL ELIPSOIDE

Obteniéndose la GRAVEDAD en el ELIPSOIDE mediante la expresión:

$$\gamma = \frac{G^* M}{r^2} \left[ 1 + \frac{R}{2r^2} (1 - 3 \cdot \cos^2 \theta) + \frac{\omega^2 r^3 \text{Sen}^2 \theta}{2G^* M} \right] + \frac{G^* M}{r} \left[ -\frac{R}{r^3} (1 - 3 \cdot \cos^2 \theta) + \frac{3\omega^3 r^3 \text{Sen}^2 \theta}{2G^* M} \right]$$

$$\gamma_{Ecuador} = \frac{G^* M}{a^2} \left[ 1 + \frac{3R}{2a^2} - \frac{\omega^2 a^3}{G^* M} \right] \Leftrightarrow r = a \Leftrightarrow \theta = 90^\circ$$

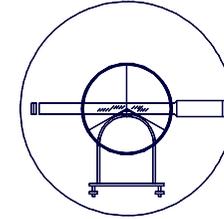
$$\gamma_{Polo} = \frac{G^* M}{a^2} \left[ 1 + 2\alpha - \frac{3R}{a^2} \right] \Leftrightarrow r = b \Leftrightarrow \theta = 0^\circ$$

$$\alpha = \frac{3R}{2a^2} + \frac{\omega^2 \cdot a^3}{2G^* M}$$



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

## **2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

### **2.6.- EL CAMPO DE LA GRAVEDAD NORMAL**

#### **2.6.1.- ECUACIÓN DEL POTENCIAL NORMAL**

##### **GRAVEDAD EN EL ELIPSOIDE**

En la literatura técnica, se suele obtener la gravedad de otra forma parecida, consistente en trabajar con las Constantes Fundamentales de Geodesia:

$$\gamma_N = \gamma_{Ecuador} \cdot (1 + \beta \cdot \cos^2 \theta)$$

$$\beta = \frac{\gamma_{Polo} - \gamma_{Ecuador}}{\gamma_{Ecuador}}$$

Se denomina  $\beta$  al APLANAMIENTO GAVIMÉTRICO establecido por CLAIRAUT mediante las Constantes Fundamentales de Geodesia:

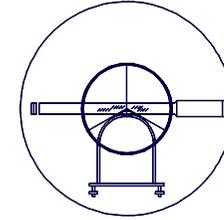
$$\beta = -\frac{3}{2}J + 2Q \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2}J + \frac{1}{2}Q$$

$$Q = \frac{\omega^2 a^3}{G^* M} \Leftrightarrow J = \frac{R}{a^2}$$



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

---

## **2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

### **2.6.- EL CAMPO DE LA GRAVEDAD NORMAL**

#### **2.6.2.- EL ELIPSOIDE COMO SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL** **EL ELIPSOIDE EQUIPOTENCIAL**

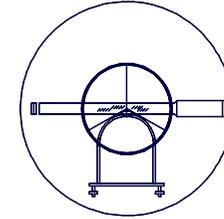
*El TEOREMA DE STOKES dice: «Si son conocidas la superficie exterior de nivel del potencial de la fuerza de la gravedad, la masa del cuerpo  $M$ , y la velocidad de rotación alrededor de un eje cualquiera  $W$ , entonces el potencial  $U$  así como sus derivadas se determinan unívocamente tanto en la superficie como en el espacio exterior, independientemente de la distribución de las masas y densidades en el interior».*

*Por tanto la función del Potencial Teórico viene determinada por las dimensiones del Elipsoide, la masa contenida en el Elipsoide y la velocidad de Rotación.*



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.6.- EL CAMPO DE LA GRAVEDAD NORMAL

#### 2.6.2.- EL ELIPSOIDE COMO SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL

##### ELIPSOIDES MÁS HABITUALES

Entre los Elipsoides Equipotenciales más habituales se encuentran:

1.- Madrid 1924.- HAYFORD.

Casini :

2.- Estocolmo 1930.-

$$\gamma_{Ecuador} = 9.78049 \cdot (1 + 0.0052884 \cdot \text{Sen}^2 \varphi)$$

3.- Lucerna 1967.-

$$a = 6.378.160m \Leftrightarrow G^* M = 398603 \cdot 10^9 \frac{m^3}{s^2}$$

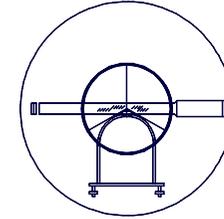
$$\alpha = \frac{1}{298,247} \Leftrightarrow \omega = 7,2921151467 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{s}$$

$$\gamma_{Ecuador} = 9,7803185 \cdot (1 + 0,0053024 \cdot \text{Sen}^2 \varphi)$$



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

## **2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

### **2.6.- EL CAMPO DE LA GRAVEDAD NORMAL**

#### **2.6.2.- EL ELIPSOIDE COMO SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL**

##### **ELIPSOIDES MÁS HABITUALES**

**Entre los Elipsoides Equipotenciales más habituales se encuentran:**

#### **4.- Camberra 1979.-**

$$a = 6.378.137m \Leftrightarrow G^* M = 398600,5 \cdot 10^9 \frac{m^3}{s^2}$$

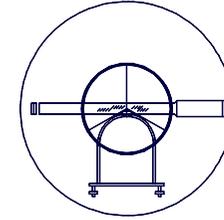
$$\alpha = 0,00335281068118 \Leftrightarrow \omega = 72921151 \cdot 10^{-11} \frac{rad}{s}$$

$$\gamma_{Ecuador} = 9,7803267715 \cdot (1 + 0,0053024 Sen^2 \varphi)$$



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

## **2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

### **2.6.- EL CAMPO DE LA GRAVEDAD NORMAL**

#### **2.6.3.- LA GRAVEDAD NORMAL EN EL MODELO ESFÉRICO**

##### **GRAVEDAD EN LA ESFERA**

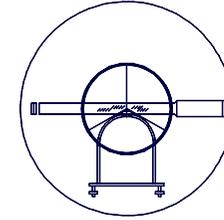
Si se considera la tierra como una esfera de radio R, y rotando a una velocidad  $w$ , constante, las fuerzas que actúan sobre una masa unidad, en su superficie, son:

**A.- Por la atracción gravitacional:**

$$\left(f_R^1, f_\theta^1, f_\lambda^1\right) = \left(-\frac{G^* M}{R^2}, 0, 0\right)$$

**B.- Por la fuerza centrífuga:**

$$\left(f_R^2, f_\theta^2, f_\lambda^2\right) = \left(\omega^2 \cdot R \cdot \text{Sen}^2\theta, \omega^2 \cdot R \cdot \text{Sen}\theta \cdot \text{Cos}\theta, 0\right)$$



## 2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN

### 2.6.- EL CAMPO DE LA GRAVEDAD NORMAL

#### 2.6.3.- LA GRAVEDAD NORMAL EN EL MODELO ESFÉRICO

##### GRAVEDAD EN LA ESFERA

Cada una de las dos fuerzas permite obtener un potencial gravitatorio y otro centrífugo:

$$U = \frac{G^* \cdot M}{R} - \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \text{Cos}^2 \varphi \quad \rightarrow \quad q = \frac{\omega^2 R^3}{G^* M}$$

Sustituyendo:  $U = \frac{G^* M}{R} \left( 1 + \frac{q}{2} \text{Cos}^2 \varphi \right)$

Con lo que la gravedad en esféricas:  $\rightarrow$

$$\gamma_R = -\frac{G^* M}{R} (1 - q \cdot \text{Cos}^2 \varphi)$$

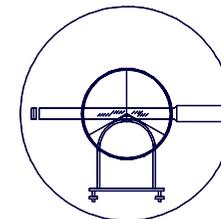
$$\gamma_\theta = \frac{G^* M}{R} q \cdot \text{Cos} \varphi \cdot \text{Sen} \varphi$$

$$\gamma_\lambda = 0$$



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

---

## **2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

### **2.7.- SISTEMAS DE REFERENCIA ACTUALES**

#### **2.7.1.- EUROPEAN DATUM 1950 (ED50)**

**ELIPSOIDE:** HAYFORD //  $a = 6.378.388$  //  $a = 1/297$ .  
**DATUM:** Torre Helmert, Postdam, ALEMANIA.  
**MERIDIANO:** Greenwich, Londres, REINO UNIDO.  
**ALTIMETRIA:** España (Nivel Medio Mar en Alicante).  
**ESPAÑA:** 11.000 Vértices //  $s_H = 15$  cm //  $s_V = 30$  cm.

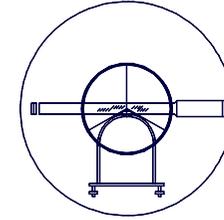
#### **2.7.2.- EUROPEAN DATUM 1987 (ED87)**

**ELIPSOIDE:** HAYFORD //  $a = 6.378.388$  //  $a = 1/297$ .  
**DATUM:** Munich, ALEMANIA.  
**MERIDIANO:** Greenwich, Londres, REINO UNIDO.



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

---

## **2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

### **2.7.- SISTEMAS DE REFERENCIA ACTUALES**

#### **2.7.3.- WORLD GEODETIC SYSTEM (WGS-72)**

**ELIPSOIDE:** WGS72 //  $a = 6.378.135$  //  $a = 1/298,26$ .  
**DATUM:** No tiene (Sistema Global).  
**MERIDIANO:** Greenwich, Londres, REINO UNIDO.

#### **2.7.4.- WORLD GEODETIC SYSTEM (WGS-84)**

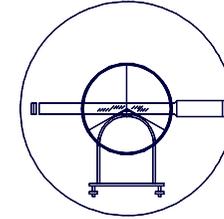
**ELIPSOIDE:** WGS84 //  $a = 6.378.137$  //  $a = 1/298,2572$ .  
**DATUM:** No tiene (Sistema Global).  
**MERIDIANO:** Greenwich, Londres, REINO UNIDO.  
**EUREF:** IBERIA-95: 27 Vértices España y 12 Portugal.  
**REGENTE:** 11.000 Vértices (España).

$$\sigma_H = 2 \text{ cm} // \sigma_V = 3 \text{ cm}.$$



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

---

## **2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**

### **2.7.- SISTEMAS DE REFERENCIA ACTUALES**

#### **2.7.5.- EUROPEAN TERRESTRIAL REFERENCE SYSTEM (ETRS89)**

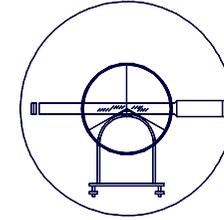
Es un sistema de referencia geodésico ligado a la parte estable de la placa continental europea. Este Datum geodésico espacial es consistente con los modernos sistemas de navegación por satélite GPS, GLONAS y el europeo GALILEO.

Mediante RD1071/2007, de 27 de julio, por el que se regula el Sistema Geodésico de Referencia oficial en España, se adopta el sistema ETRS89 como nuevo sistema de referencia geodésico y se propone un nuevo conjunto de coordenadas para las esquinas de hojas del MTN50 y sus divisiones. Se propone también un periodo transitorio hasta el 2015 en el que podrán convivir los dos sistemas vigentes en la actualidad ETRS89 y ED50.



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA.



**ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA**

---

**2.- EL ELIPSOIDE, FIGURA DE APROXIMACIÓN**  
**2.7.- SISTEMAS DE REFERENCIA ACTUALES**

**2.7.5.- EUROPEAN TERRESTRIAL REFERENCE SYSTEM**  
**(ETRS89)**

**ETRS89 emplea el elipsoide GRS80 (prácticamente idéntico a WGS84) caracterizado por los siguientes parámetros:**

***COSTANTES GEOMÉTRICAS***

**$a = 6.378.137,00000 \text{ m.}$**

**$b = 6.356.752,31414 \text{ m.}$**

**$a = 1/298,257222101.$**

***COSTANTES FÍSICAS***

**$GM = 3986005 \text{ E}10^8 \text{ m}^3/\text{s}^2.$**

**$J_2 = 108263 \text{ E}10^{-8}.$**

**$\omega = 7292115 \text{ E}10^{-11} \text{ s}^{-1}.$**