UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,
GEODÉSICA Y FOTOGRAMETRÍA
ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

APUNTES

"TOPOGRAFÍA Y GEODESIA"

UNIDAD DIDÁCTICA III

MÉTODOS TOPOGRÁFICOS

Profesor Responsable:
Julio Manuel de Luis Ruiz.

UNIDAD DIDÁCTICA III
MÉTODOS TOPOGRÁFICOS

1. INTRODUCCIÓN GENERAL

1.1.- NECESIDAD DEL ESTABLECIMIENTO METODOLÓGICO

1.1.1.- ELEMENTOS PARTICIPANTES

La finalidad de todo trabajo topográfico es la observación en campo de una red de puntos que permita en gabinete, posteriormente, obtener un modelo planimétrico y altimétrico representable gráficamente a una escala definida. El trabajo es realizado por un equipo humano que emplea un instrumental y que sigue una metodología preestablecida.

Normalmente, la ejecución de un determinado trabajo topográfico tiene los siguientes condicionantes:

- Se utiliza un equipo humano que dispone de un abanico de instrumentos topográficos concreto, con características determinadas.
- Se desea obtener una determinada precisión, exigida tanto en planimetría como en altimetría.

Por tanto, se precisa conocer la tolerancia del mencionado trabajo, que será función del instrumental disponible y de la metodología utilizada.

Partiendo de los condicionantes anteriores, se deberá plantear el trabajo empleando instrumental y metodologías topográficas que garanticen que la incertidumbre que siempre existe en toda labor de medir quede por debajo de la precisión exigida, es decir: tolerancia < precisión exigida.

Lo relativo al instrumental topográfico ha sido analizado en la Unidad Didáctica II. Por tanto, en la presente unidad se aborda el tratamiento de las diversas metodologías con enfoque directo hacia el instrumental descrito.

1.1.2.- PLANTEAMIENTO GENERAL

Habitualmente, el objetivo de un levantamiento topográfico es la obtención de coordenadas planimétricas (x,y) y altimétricas (z) de forma conjunta. Antes de tomar la decisión sobre el método topográfico a emplear conviene analizar en primera instancia los recursos disponibles:

- Número de equipos topográficos.
- Instrumentos topográficos.
- Métodos topográficos.

Y en segunda instancia conviene analizar las necesidades que hay que cubrir:

- Precisión exigida.
- Plazo de ejecución.
- Rendimiento y coste económico.

Para poder elegir adecuadamente el método a emplear conviene sopesar adecuadamente todos los recursos disponibles y por supuesto las necesidades que se han de cubrir, solamente teniendo en cuenta todos estos criterios se puede elegir adecuadamente la metodología topográfica a emplear, todos estos aspectos se recogen en la siguiente figura.

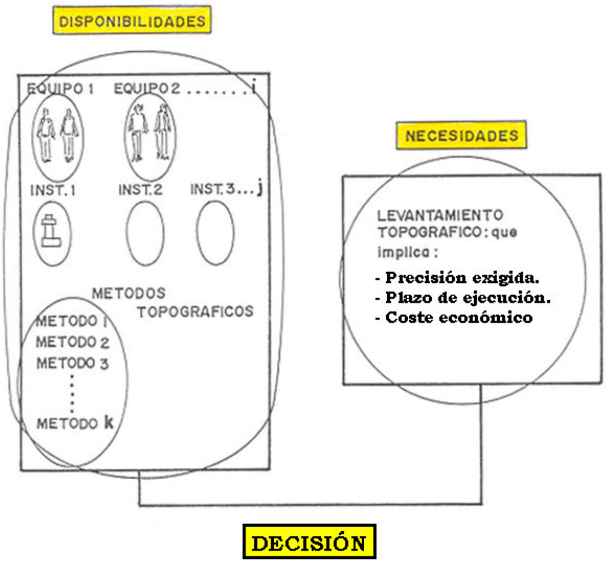


Figura Número 1.- Planteamiento de un trabajo topográfico

A continuación se enumeran y describen de forma general las combinaciones de métodos topográficos planimétricos y altimétricos más frecuentes, así como el instrumental empleado en cada uno.

El caso más sencillo consiste en definir la posición de un punto desde una estación de coordenadas conocidas. En planimetría se emplea el método de radiación y en altimetría, el de nivelación trigonométrica simple. En la actualidad, las radiaciones se efectúan empleando estaciones topográficas y un prisma como elemento reflector. Tradicionalmente se había venido empleando taquímetro y estadía vertical (mira). A este primer supuesto de trabajo se le denomina taquimetría simple o, únicamente, radiación.

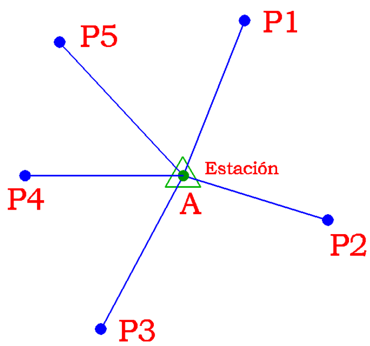


Figura Número 2.- Representación planimétrica de la radiación

Cuando no es posible radiar todo el área de trabajo desde una única estación, se deben establecer varias estaciones intervisibles entre sí, de manera que desde el conjunto de las mismas sea posible observar toda la superficie del levantamiento.

En este caso, planimétricamente se utiliza el método de itinerario, y altimétricamente la nivelación trigonométrica compuesta. Es importante destacar que la precisión que se puede conseguir con este método está directamente relacionada con la precisión que se obtenga en el "encadenamiento" de las sucesivas estaciones. Como se verá posteriormente, al estudiar los diferentes métodos topográficos, a veces la nivelación trigonométrica no garantiza en un itinerario la precisión requerida, siendo preciso acudir a un método que proporcione mejores precisiones altimétricas que, como se estudiará posteriormente, es la nivelación geométrica, es decir, la nivelación ejecutada con nivel. De forma genérica, a este método de trabajo se le llama taquimetría compuesta o, como se denomina frecuentemente, itinerario o poligonal.

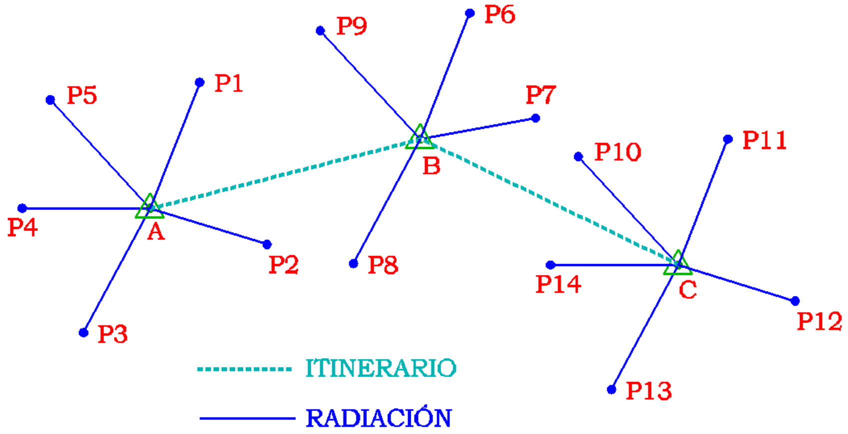


Figura Número 3.- Representación planimétrica de un itinerario

En algunos trabajos es preciso establecer con gran exactitud las coordenadas planimétricas. La falta de precisión en la medida de distancias por métodos estadimétricos hizo que las medidas angulares fuesen siempre de mayor calidad, lo que supuso emplear para estos casos métodos angulares o intersecciones, siendo frecuente establecer las cotas altimétricas mediante nivelación geométrica. Para la obtención de la planimetría se empleará un teodolito y para la obtención de los desniveles, un nivel.

Generalmente, este método se denomina intersección.

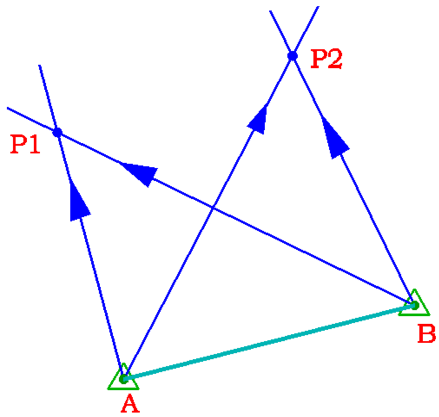


Figura Número 4.- Representación planimétrica de la intersección

1.2.- TÉCNICAS ELEMENTALES DE CAMPO Y GABINETE

1.2.1.- OBSERVACIONES EN CAMPO

En este apartado se va a exponer, de forma completa, la metodología a seguir para realizar las observaciones de campo, que serán comunes para cualquier método de trabajo que se quiera utilizar. La nomenclatura que se emplea queda reflejada en la figura y aunque se grafía para el caso más habitual (estación topográfica) es fácilmente identificable para cualquier otro aparato topográfico de los denominados completo o casi completos (evalúan los dos ángulos y las distancias o simplemente los dos ángulos).

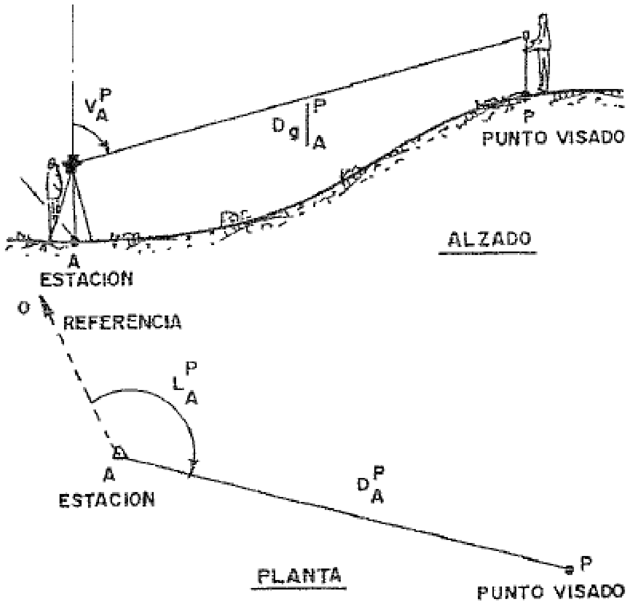


Figura Número 5.- La observación en campo

Los elementos intervinientes son los siguientes:

- Angulo cenital: V_P^A . Es el ángulo vertical con el que se observa desde la estación A el punto P. Se supone, como es habitual con los instrumentos actuales, que el aparato es cenital, es decir, que el origen de ángulos verticales en el cenit.

- Lectura horizontal: L_A^P . Es el ángulo horizontal con el que se observa desde la estación A el punto P a partir de una orientación establecida. Es el valor que se lee en el aparato para una posición dada del origen angular.

- Distancia geométrica: $Dg|_P^A$. Desde el centro geométrico del instrumento hasta el punto observado.

- Distancia reducida: D_A^P . Distancia desde la estación A hasta el punto P, proyectada sobre el plano horizontal.

En primer lugar, se estaciona el aparato en el primer punto que se ha elegido como estación, denominada A. Se nivelará y se anota la altura del aparato (i_A). En caso de emplear estación, se medirán la temperatura y la presión atmosféricas para efectuar, si procede, correcciones meteorológicas.

A continuación se orienta el aparato planimétricamente. Es importante recordar que el limbo horizontal, a diferencia del vertical, no tiene un origen fijo, constante en cualquier trabajo, sino que debe ser establecido explícitamente en todo levantamiento.

Tanto en el tratamiento de ángulos horizontales como de ángulos verticales, se pueden realizar observaciones en círculo directo (CD) exclusivamente o en círculo directo y círculo inverso (CD y CI), dependiendo de la instrumentación, metodología o finalidad del trabajo. En este último supuesto, es necesario evaluar el ángulo promedio.

- Promedio de distancias: $Dg = \dfrac{Dg_{CD} + Dg_{CI}}{2}$
- Promedio de ángulos horizontales: $L = \dfrac{L_{CD} + L_{CI} \pm 200}{2}$
- Promedio de ángulos verticales: $V = V_{CD} + \left(\dfrac{400 - V_{CD} - V_{CI}}{2} \right)$

1.2.2.- OBSERVACIÓN SIN DESORIENTACIÓN

Consiste en situar el origen de ángulos horizontales (0^g) según una alineación de referencia asociada al tipo de representación planimétrica que se desea establecer, es decir, se hace coincidir el eje de ordenadas con el origen de ángulos horizontales. Para mantener esta coincidencia normalmente se eligen puntos lejanos, que resultan fácilmente identificables para posteriores orientaciones desde la estación A, dándoles una correcta lectura.

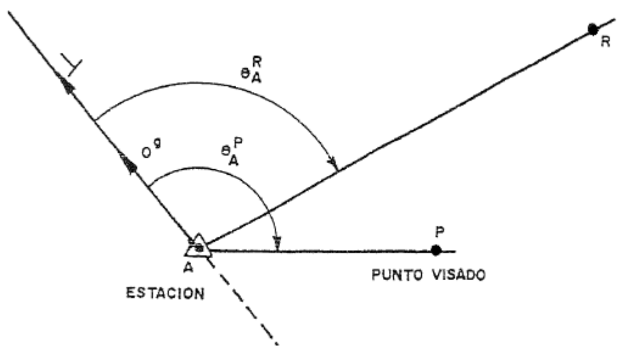
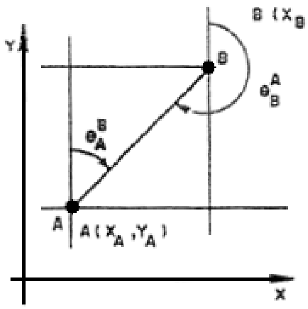


Figura Número 6.- Observación angular horizontal orientada

De esta forma, sabiendo las coordenadas de A y R, se conoce con exactitud la situación del eje de ordenadas y, por tanto, el inicio de lectura de los ángulos horizontales. Es suficiente otorgar a la referencia R una lectura L_A^R igual al acimut definido por las coordenadas de A y R, es decir, $L_A^R = \theta_A^R$ para que todas las restantes lecturas desde A sean verdaderos acimutes.

La relación entre los parámetros topográficos en planta (acimut y distancia reducida) y las coordenadas de los puntos es directa.



$$\operatorname{tg} \theta_A^B = \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} = \frac{\Delta X}{\Delta Y}$$

$$D_A^B = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

Figura Número 7.- Relaciones fundamentales

1.2.3.- OBSERVACIÓN CON DESORIENTACIÓN

En la toma de información planimétrica puede suceder que, por diversos motivos, no se pueda hacer coincidir en campo, en el momento de la observación, el eje de ordenadas de la referenciación utilizada con el eje inicializador de ángulos. Es caso muy frecuente disponer de una base, es decir, dos vértices topográficos (puntos bien materializados en campo), intervisibles entre sí, y comenzar la captura de puntos a partir de ellos, aun sin conocer sus coordenadas. Se coloca el eje de inicialización angular horizontal con respecto a uno de ellos, estando el instrumento estacionado en el otro y se completa una campaña de datos. Con posterioridad se transforman las lecturas en acimutes.

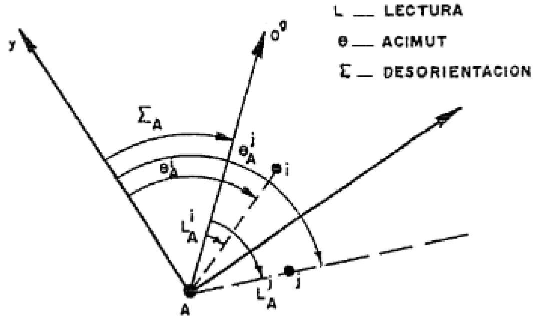


Figura Número 8.- Caracterización de la desorientación

- Lectura de un punto genérico: L_A^i , L_A^j.
- Desorientación en A: ε_A.
- Acimut de un punto genérico: θ_A^i , θ_A^j.

Para todo punto captado desde A se verifica:

$$\theta_A^i = L_A^i + \varepsilon_A$$

1.3.- PRINCIPALES METODOLOGÍAS TOPOGRÁFICAS

1.3.1.- INTRODUCCIÓN

Es habitual tratar las diversas metodologías topográficas bajo el criterio de la participación por objetivos planimétricos y altimétricos. De esta forma es común entender esta clasificación:

- Métodos planimétricos:
  - . Radiación.
  - . Itinerario.
  - . Intersección.
- Métodos altimétricos:
  - . Nivelación geométrica.
  - . Nivelación trigonométrica.

La clasificación estaba totalmente justificada por la instrumentación existente. En la actualidad, aunque la clasificación es válida, puede establecerse otra forma de plantear las diversas metodologías basadas en la instrumentación, tal y como se estableció en el análisis de los aparatos topográficos (Unidad Didáctica II).

En este apartado se establecen las directrices básicas de los diversos métodos, tratándose en cada bloque particular la aplicación concreta y caracterizada.

1.3.2.- ASPECTOS GENERALES DE LOS MÉTODOS

En este apartado tan solo se establecen las bases de los tratamientos individualizados y los bloques de aplicación concreta en los restantes capítulos.

1.3.2.1.- Determinaciones planimétricas

a) Radiación

Un punto queda caracterizado en planta tras la definición del acimut (o lectura) conociendo la desorientación y la distancia reducida.

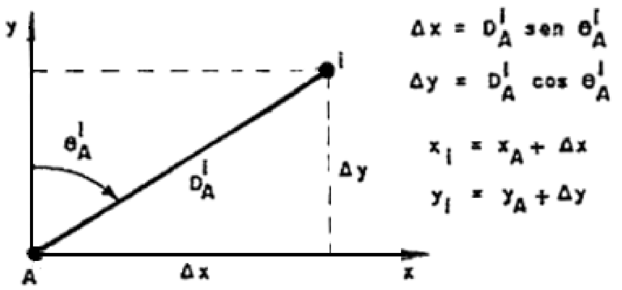


Figura Número 9.- Caracterización de una radiación

Se suele realizar con una estación topográfica o semiestación. También con un taquímetro. Como caso poco usual, con un teodolito y una cinta métrica.

b) Itinerario o poligonal

Es una sucesión encadenada de radiaciones, que permite determinar las coordenadas de las diferentes estaciones de que consta la poligonal.

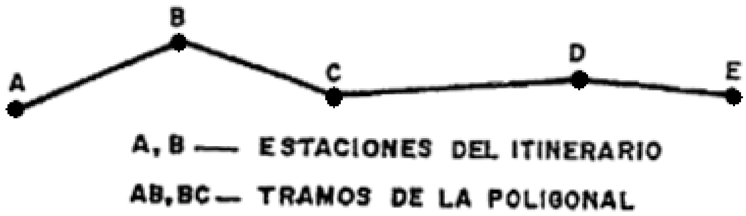


Figura Número 10.- Caracterización de un itinerario

Se suele realizar con una estación topográfica o semiestación. También con un taquímetro.

c) Intersección

Procedimiento de posicionamiento a partir de observaciones angulares. A partir de una base se pueden calcular las coordenadas de V.

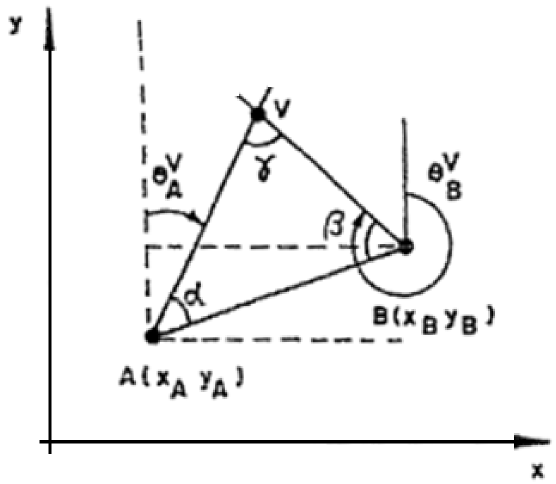


Figura Número 11.- Determinación de una intersección

De los datos de la base se obtiene la distancia reducida, AB, y tras la obtención de los ángulos α y β con un teodolito se calculan las distancias reducidas D_A^V y D_B^V.

$$D_A^B = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\frac{sen\,\alpha}{D_B^V} = \frac{sen\,\beta}{D_A^V} = \frac{sen\,\gamma}{D_A^B}$$

$$D_B^V = \frac{sen\,\alpha}{sen\gamma} D_A^B$$

Conociendo las distancias y los acimutes ya se pueden determinar las coordenadas planimétricas del punto V.

1.3.2.2.- Determinaciones altimétricas

a) Nivelación trigonométrica

Para calcular el desnivel del punto B respecto al punto A se estaciona en A y se obtienen los siguientes datos:

- Angulo cenital: V_A^B
- Altura de jalón o mira: m_B
- Altura reducida: D_A^B
- Altura del aparato: i_A

$$\Delta Z_A^B = t_P^A + i_A - m_B + 0{,}42\frac{D^2}{R}$$

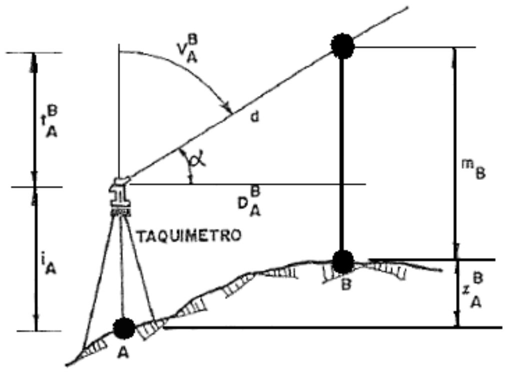


Figura Número 12.- Nivelación trigonométrica

La nivelación trigonométrica se realiza usualmente con estación topográfica, aunque también se puede ejecutar con taquímetro.

b) Nivelación geométrica

Para calcular el desnivel existente entre el punto B respecto al punto A se estaciona el nivel y se realizan dos lecturas a las estadías verticales. La determinación es inmediata, obteniéndose el incremento de cota mediante la expresión:

$$\Delta Z_A^B = m_A - m_B$$

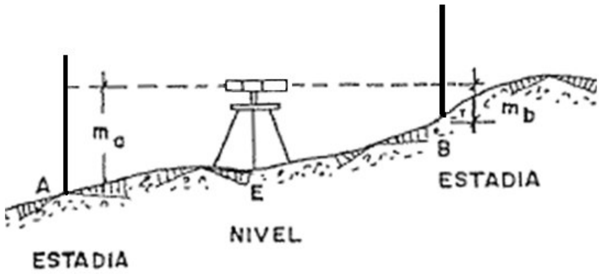


Figura Número 13.- Nivelación geométrica

2. MÉTODOS BASADOS EN EL EMPLEO DE ESTACIONES TOPOGRÁFICAS

2.1. CONCEPTOS PREVIOS Y OBJETIVOS

El equipo topográfico formado por teodolito óptico y distanciómetro (semiestación) y por teodolito electrónico y distanciómetro (estación topográfica) configura la instrumentación más habitual utilizada en los trabajos topográficos usuales.

En el marco de la medición electrónica de ángulos y distancias se denomina medición total a la acción de, realizada una determinada puntería, obtener directamente los tres valores que caracterizan el posicionamiento relativo de un punto en el espacio: ángulo horizontal, ángulo vertical y distancia geométrica. Conociendo los tres datos es inmediata la evaluación de la distancia reducida y del desnivel (datos que también proporciona el equipo) entre el centro óptico del instrumento y el punto colimado.

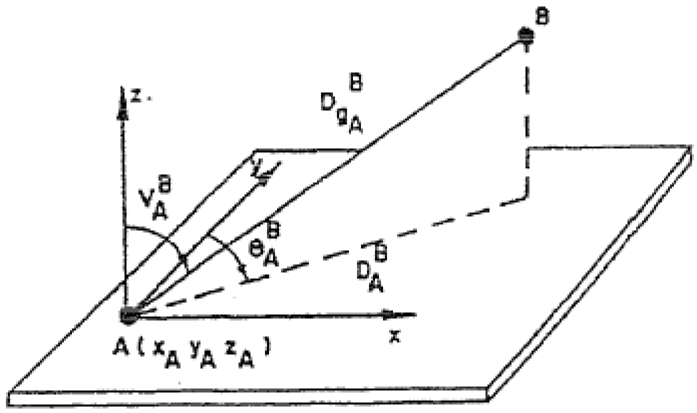


Figura Número 14.- Fundamento del posicionamiento relativo

siendo:

- Coordenadas del punto A conocidas $(x_A\ y_A\ z_A)$.
- Angulo horizontal (acimut) evaluado en campo θ_A^B.
- Angulo cenital obtenido en campo V_A^B.
- Distancia geométrica o reducida medida $D_g\big|_A^B$ ó D_A^B.

En la actualidad impera el uso de la estación topográfica. Se trata de un equipo compacto que tiene los elementos precisos para evaluar con una puntería única los ángulos horizontal y vertical y la distancia. La estación total tiene el teodolito electrónico, y los ángulos horizontal y vertical son evaluados por medios electromagnéticos, de igual forma que la distancia.

La captación directa del ángulo horizontal permite establecer el posicionamiento en planta, una vez conocida la distancia reducida, obtenida directamente o bien por concurso, de la distancia geométrica y el ángulo cenital.

El posicionamiento en alzado queda patentizado en la siguiente figura.

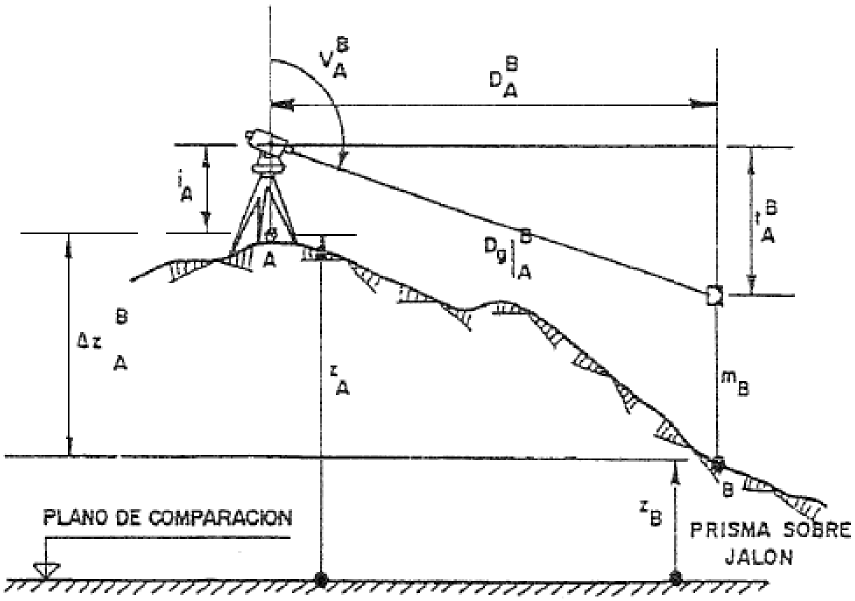


Figura Número 15.- Trabajo en una estación total en alzado

En los siguientes apartados se establecerán las bases conceptuales y prácticas sobre las diferentes metodologías que utiliza esta moderna estación de trabajo que permite almacenar los datos captados en campo y con ayuda de programas existentes, volver al ordenador y calcular los datos, incluso permitir salidas gráficas de las diferentes opciones posibles.

2.2. DETERMINACIONES PLANIMÉTRICAS

2.2.1. MÉTODO DE RADIACIÓN

2.2.1.1. Concepto y resolución

La radiación es un método topográfico que permite determinar la posición de un punto respecto a otro a través de mediciones angulares y de distancia. Definida así la radiación, el planteamiento o situación más frecuente será la siguiente:

Se conocen las coordenadas de un punto A(x_A, y_A, z_A) y el ángulo que forma la dirección del eje de ordenadas en A y la dirección AR, siendo R una referencia materializada en el terreno y visible desde A (bien directamente o bien situando en ella algún elemento auxiliar de puntería –jalón, mira, etc.).

Se trata de conocer las coordenadas x_B y_B z_B de un punto B, visibles desde A, a través de medidas angulares L_A^R, L_A^B y V_A^B y medida de distancias, ya sea la distancia geométrica o la distancia reducida en cada caso.

En la bibliografía existente, los diversos autores siempre han convenido considerar la radiación como método exclusivamente planimétrico, obviándose siempre el tratamiento altimétrico que se abordaba independientemente. En la presente publicación se tratará conjuntamente, pero en distinto apartado (2.3) exclusivamente por consideraciones pedagógicas.

También suele considerarse la radiación como el método planimétrico de menor precisión, dando mucha más importancia a la poligonación, intersecciones y triangulaciones. Esto estaba perfectamente justificado, puesto que la medida de distancias con precisión conllevaba una serie de dificultades que hacían que primasen las medidas angulares, más fáciles de llevar a cabo, con precisiones mucho mayores. Pero con el uso de las estaciones topográficas se ha logrado una equivalencia casi absoluta tanto en precisión como en rendimientos con esta metodología convenientemente utilizada.

2.2.1.2. Tolerancias

A) DEFINICIONES PREVIAS

Cuando en una determinada operación de medida existen varias causas independientes del error accidental, el error máximo resultante es la componente cuadrática de los citados errores accidentales máximos. Pero cuando las causas de error independientes actúan en direcciones perpendiculares entre sí, el error máximo que puede presentarse como consecuencia de tales errores individuales no es la componente cuadrática correspondiente, sino igual al mayor de aquellos errores independientes, dada la poquísima probabilidad que existe de que sean simultáneos los dos valores máximos.

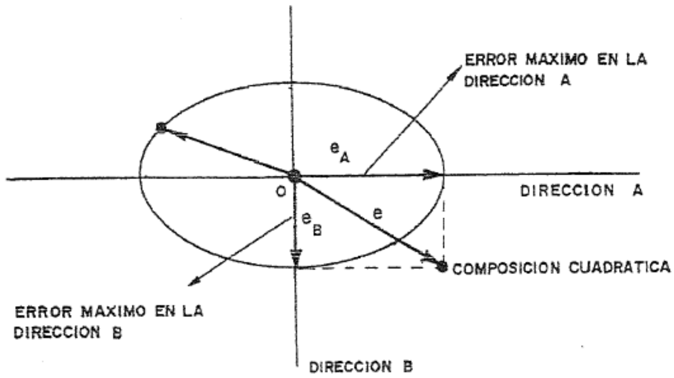


Figura Número 16.- Composición de errores máximos

$$e = \sqrt{e_A^2 + e_B^2}$$

Para que pueda producirse el valor e se tienen que dar los máximos valores e_A y e_B, suceso poco probable.

Se adopta como criterio considerar el mayor radio-vector determinado por la intersección de las direcciones establecidas y por los valores (e_A y e_B), que definen los valores de los dos semidiámetros. Lógicamente, se determina el valor del máximo radio-vector por su coincidencia con el mayor de los dos semidiámetros e_A y e_B.

B) APLICACIÓN A LA RADIACIÓN

Al radiar un punto, los dos focos de error surgen por la incertidumbre instrumental y de posicionamiento, al determinar el ángulo y la distancia:

- Error angular horizontal del teodolito: ε_T^H
- Error al evaluar la distancia: ΔD

Estos dos factores determinan el error transversal y el error longitudinal.

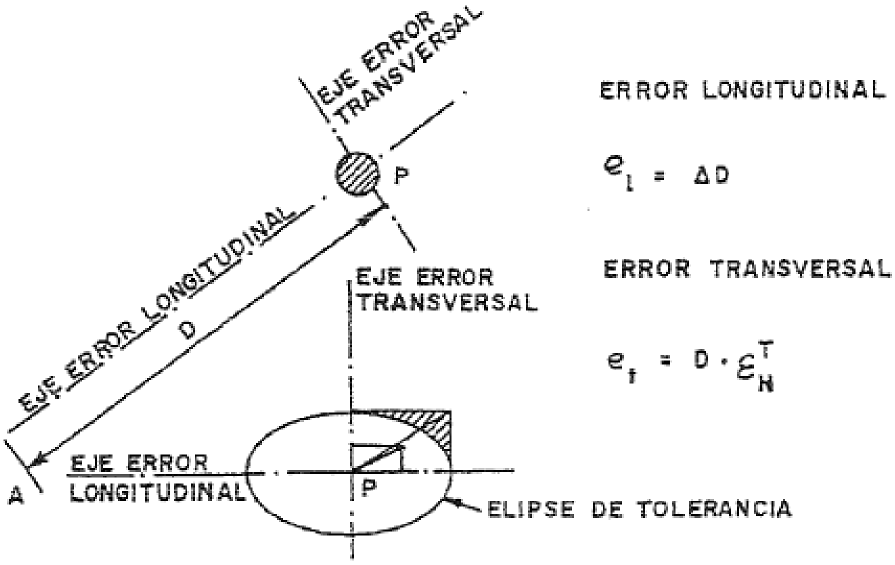


Figura Número 17.- Elipse de tolerancia

B.1.- Error transversal

Conocida la distancia reducida D_A^P, el error transversal viene definido por la expresión:

$$e_t = \frac{D\,\varepsilon_T^H}{206265 \text{ ó } 636620}$$

siendo ε_T^H el error acimutal total del teodolito que tiene como parámetros fundamentales:

- Sensibilidad: S
- Aumentos: A
- Apreciación: a

El error acimutal total viene definido por la expresión:

$$\varepsilon_T^H = \sqrt{(\varepsilon_v)^2 + (\varepsilon_d)^2 + (\varepsilon_p)^2 + (\varepsilon_l)^2}$$

siendo, para la graduación centesimal:

- Error de verticalidad:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{12} S$$

- Error de dirección:

$$\varepsilon_d = \frac{e_e + e_p}{D} 636620$$

- Error de puntería:

$$\varepsilon_p = \frac{30}{A}\left[1 + \frac{4 \cdot A}{100}\right]$$

- Error de lectura:

$$\varepsilon_l = \frac{2}{3} a$$

Todas las expresiones están caracterizadas por los datos del instrumento excepto el error de dirección, que es independiente del mismo y tan solo depende de la ejecución.

Estas notas que siguen son una primera aproximación a la resolución de la problemática que plantea la toma de información con distanciometría electrónica, cimentadas en la experiencia profesional.

Es necesario caracterizar el error de dirección:

$$\varepsilon_d = \frac{a^*}{D} 636620$$

$$\varepsilon_d = \frac{a^*}{D} 206265$$

siendo D la distancia de radiación (distancia reducida) y a^* un valor que tiene en consideración la desviación conjunta en la estación y en la puntería. Es razonable utilizar valores próximos a 2 cm.

B.2.- Error longitudinal

Tal y como quedó patentizado en la Unidad Didáctica II parece acertado aceptar que el distanciómetro tiene una incertidumbre en la medición de la distancia definida por la expresión:

1 cm. + 5 mm./km.

en el caso del instrumento que más error proporciona entre aquellos que son utilizados de forma más habitual.

En una radiación de 1.000 m., el error propio de la medición es de 1,5 cm., siendo de mayor magnitud la incertidumbre propia al defectuoso estacionamiento del doblete: estación, jalón. Por tanto, y actuando de forma globalizada para estar por completo al lado de la seguridad, se puede establecer como cota superior del error longitudinal para la radiación:

$$[3 + 0{,}5 \cdot N]\, cm.$$

siendo N el valor de la distancia de radiación en kilómetros.

Una cota superior del error, suponiendo radiaciones de valor D≤ 1.000 m., será 3,5 cm., suponiendo el caso más general.

2.2.2. MÉTODO DE ITINERARIO

2.2.2.1. Concepto y resolución

Un itinerario o poligonal no es más que una sucesión encadenada de radiaciones que tienen como uso de los objetivos más importantes establecer las estaciones necesarias para la determinación de los puntos radiados.

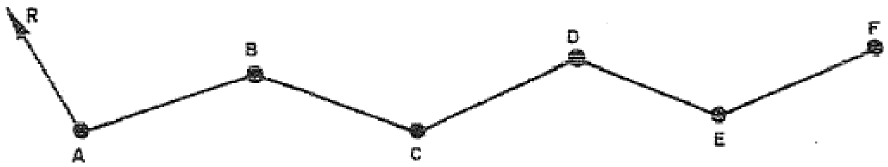


Figura Número 18.- Poligonal

siendo:

- Estaciones: A, B, C, …, E, F
- Tramos o ejes: AB, BC, …, EF

Atendiendo a la naturaleza de los puntos inicial y final de un itinerario se clasifican:

- Cerrados: La primera y última estación del itinerario coinciden en un vértice cuyas coordenadas pueden ser conocidas o no.
- Abiertos: La primera y última estación del itinerario no coinciden en un mismo punto y, por tanto, no coinciden las coordenadas de la última estación con las coordenadas de la primera.
  . Encuadrados: Posición del punto inicial y final, siendo diferente se conoce a priori (se conocen las coordenadas).
  . Colgados: El punto final no tiene posición conocida a priori (tan solo se conocen las coordenadas del punto inicial).

Atendiendo al sistema de observación que se utiliza pueden ser:

- Itinerarios orientados.
- Itinerarios no orientados.

En los del primer tipo, las estaciones se van enlazando con la condición de ser constante las desorientaciones en cada una de ellas o, en su defecto, siempre orientación nula. En este supuesto se cumple la condición de mantenimiento del eje de inicio a lo largo de las diversas estaciones de la poligonal.

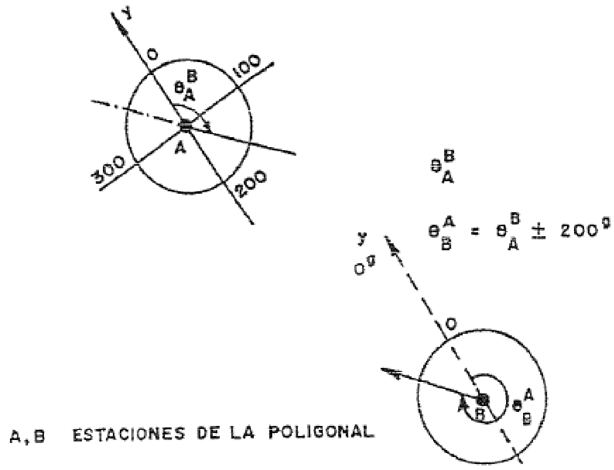


Figura Número 19.- Propiedad caracterizada

En caso contrario, se van evaluando las diferentes lecturas en los tramos hasta encontrar los datos que son necesarios para definición de las diversas coordenadas.

2.2.2.2. Tolerancias

A) DEFINICIONES PREVIAS

Es de aplicación todo lo descrito para el caso de la radiación referente a la elipse de tolerancia. Siguen siendo vigentes los conceptos de error transversal y error longitudinal.

B) DETERMINACIÓN DE LOS ERRORES TRANSVERSALES Y LONGITUDINALES

B.1.- Error transversal

Para determinar la relación que define el error transversal se establece una simplificación previa:

- Se consideran tramos de igual longitud: d.
- Se considera una poligonal casi rectilínea.

Se analizan los diversos tramos por separado y se cuantifica el valor final.

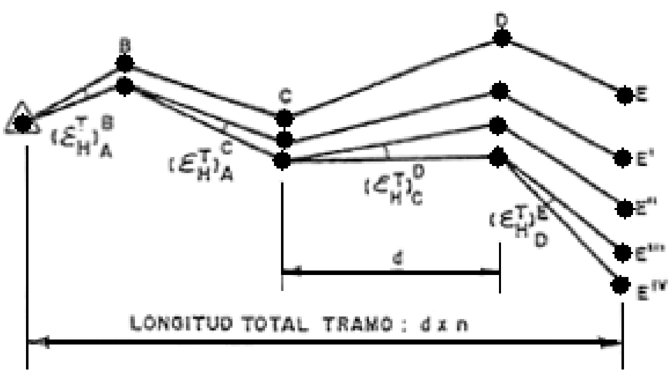


Figura Número 20.- Error transversal en una poligonal

Datos básicos:

- Longitud total: $d \cdot n$
- Número de tramos: n.
- Desplazamiento EE':

$$EE' = \left(\varepsilon_T^H\right)_A^B \cdot d \cdot n$$

- Desplazamiento E'E":

$$E'E'' = \left(\varepsilon_T^H\right)_B^C \cdot d\left(n-1\right)$$

- Desplazamiento E'E"':

$$E'E''' = \left(\varepsilon_T^H\right)_C^D \cdot d\left(n-2\right)$$

- Desplazamiento último:

$$E^{n-1}E^n = \left(\varepsilon_T^H\right)_H^N d$$

Los errores son independientes, siendo el efecto acumulado:

$$E_T \le \sqrt{d^2 \cdot n^2 \left(\varepsilon_T^H\right)_A^{2B} + d^2\left(n-1\right)^2 \left(\varepsilon_T^H\right)_B^{2C} + \ldots + d^2 \left(\varepsilon_T^H\right)_N^{2M}}$$

Los valores de $\left(\varepsilon_T^H\right)_A^B$, $\left(\varepsilon_T^H\right)_B^C$, …, $\left(\varepsilon_T^H\right)_M^N$ son desconocidos, pero pueden sustituirse por el valor del error angular mayor multiplicado por $\sqrt{2}$, dado que se realiza doble medida angular (para orientar y para posicionar).

$$E_T \le d\varepsilon_T^H \sqrt{2}\sqrt{n^2 + \left(n-1\right)^2 + \left(n-2\right)^2 + \ldots + 1^2}$$

Sumando la serie del radical:

$$n^2 + \left(n-1\right)^2 + \left(n-2\right)^2 + \ldots + 3^2 + 2^2 + 1^2 = \left(\frac{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}\right)$$

Por tanto, se obtiene:

$$E_T \le d\varepsilon_T^A \sqrt{2}\sqrt{\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}} \rightarrow \frac{d\ \varepsilon_T^H\ \sqrt{2}}{206265\ \acute{o}\ 636620}\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

siendo, en la realidad:

d: longitud del tramo mayor

ε_T^H: error angular acimutal máximo en radianes. Corresponderá al que otorgue mayor error de dirección y, por tanto, el tramo más corto

n: número de tramos de la poligonal

De esta forma se logra la obtención de una cota máxima de error no alcanzable. Igual que en el caso anterior, estas notas basadas en la experiencia son una primera aproximación a la resolución de encontrar las relaciones que evalúan la precisión en un itinerario. Nuevamente es necesario caracterizar al error de dirección:

$$\varepsilon_d = \frac{a^*}{D} 636620$$

$$\varepsilon_d = \frac{a^*}{D} 206265$$

siendo D la distancia de itinerario (distancia reducida) y a^* un valor que tiene en consideración la desviación conjunta en la estación y en la puntería. Es razonable utilizar valores próximos a 1 cm. dado el cuidado en ambos estacionamientos y el uso generalizado de trípode para el jalón, que conseguirá un continuado posicionamiento del mismo en el punto considerado. En los itinerarios es usual realizar lecturas en círculo directo y en círculo inverso.

B.2.- Error longitudinal

Tal y como quedó patentizado en la Unidad Didáctica II parece acertado aceptar que el distanciómetro tiene una incertidumbre en la medición de la distancia definida por la expresión:

1 cm. + 5 mm/km.

en el caso del instrumento que más error proporciona entre aquellos que son utilizados de una forma más habitual.

En una poligonal de 2.000 m. el error propio de la medición es de 2 cm., siendo del mismo orden de magnitud que la incertidumbre propia al defectuoso posicionamiento del doblete: estación, jalón. Por tanto, y actuando de forma globalizada para estar por completo al lado de la seguridad, se puede establecer como cota superior del error longitudinal para un tramo de poligonal:

[2+0,5 M] cm.

siendo M el valor de la distancia del tramo caracterizado en kilómetros.

Como en un itinerario la distancia se evalúa dos veces, el error longitudinal resulta:

$$\frac{[2 + 0{,}5M]\,cm.}{\sqrt{2}}$$

ya que se toma como distancia definitiva la media aritmética de las dos mediciones.

Para el caso usual de tramos de 2 km. se tiene:

$$\frac{(2+1)\,cm.}{\sqrt{2}} = 2\,cm.$$

Finalmente, se debe tener en cuenta el número de tramos de la poligonal o itinerario, obteniéndose la expresión final del error longitudinal como:

$$e_l = 0{,}02\sqrt{n}$$

2.3. DETERMINACIONES ALTIMÉTRICAS

2.3.1. NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA SIMPLE

2.3.1.1. Concepto y resolución

La nivelación trigonométrica simple está unida a la radiación, pues, como ya se indicó, se realiza de forma conjunta.

En la taquimetría tradicional o en la actualidad, con las estaciones topográficas, la expresión del desnivel (nivelación trigonométrica) existente entre dos puntos viene dada por la relación:

$$\Delta Z_A^B = t_A^B + i_A - m_B + 0{,}42\frac{\left(D_A^B\right)^2}{R}$$

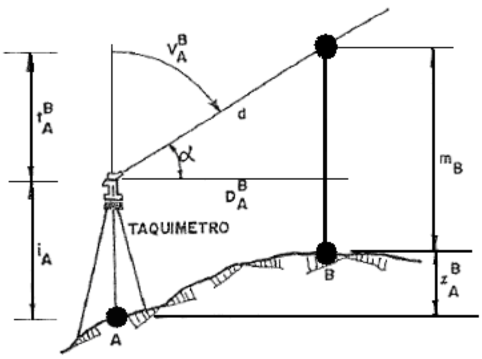


Figura Número 21.- Relación fundamental taquimétrica

2.3.1.2. Tolerancias

Las fuentes del error están incluidas, de forma significativa, en los tres primeros términos de la expresión anterior.

$\Delta z_A^B = t_A^B + i_A - m_B + 0{,}42\frac{D^2}{R}$ $t_A^B = D_A^B \cot g\, V_A^B$	Distancia reducida de A a B
	Ángulo cenital
	Altura del instrumento
	Altura del prisma

Definidas las características del instrumento topográfico, se obtienen los siguientes valores:

- Error o incertidumbre al evaluar la distancia ΔD.
- Error o incertidumbre al evaluar el ángulo cenital: ε_T^C.

- Error o incertidumbre al evaluar la altura del aparato e_i.
- Error o incertidumbre al evaluar del prisma e_m.

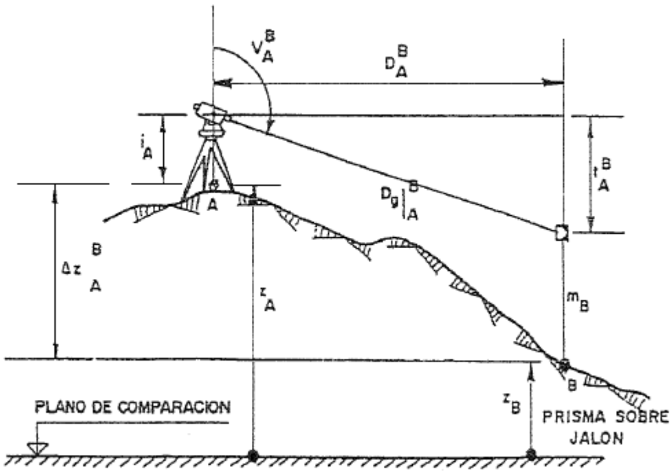


Figura Número 22.- Fuentes de error en la nivelación trigonométrica

A) Aportación al error altimétrico de t_A^B

Las incertidumbres altimétricas vienen definidas por las expresiones:

$$e_t^I = \Delta D_A^B \cdot \cot g\, V_A^B \quad \text{(para } \varepsilon_v\text{=0)}$$

$$e_t^{II} = D_A^B \cdot \cot g\left(V_A^B \pm \varepsilon_T^C\right) - D_A^B \cdot \cot g\, V_A^B \quad \text{(para } \Delta D\text{=0)}$$

siendo ΔD_A^B una cota del error lineal considerado para cada uno de los casos que se puedan presentar analizada en el punto anterior.

B) Aportación al error altimétrico de i_A

La medición se realiza con una cinta métrica metálica, pudiendo estimar una cota superior del error en la medida: $e_i \leq 1$ cm.

C) Aportación del error altimétrico de m_B

El valor que resulte difiere según el sistema que se utilice para la determinación de la nivelación trigonométrica. Para nivelaciones trigonométricas simples usuales, entorno a valores máximos de 1.000 m., puede establecerse un techo del orden ya definido en la segunda unidad didáctica:

D < 100 m. $\Rightarrow$ e_m = 1 cm.

100 < D < 200 m. $\Rightarrow$ e_m = 2 cm.

200 < D < 500 m. $\Rightarrow$ e_m = 3 cm.

500 < D < 1000 m. $\Rightarrow$ e_m = 4 cm.

1000 < D < 2000 m. $\Rightarrow$ e_m = 5 cm.

D < 2000 $\Rightarrow$ e_m = 10 cm.

El error altimétrico total para una visual aislada será:

$$e_L = \sqrt{\left(\Delta D_A^B \cdot \ \cot g\, V_A^B\right)^2 + \left\{D_A^B \cdot \left[\cot g\left(V_A^B \pm \varepsilon_T^V\right) - \cot g\, V_A^B\right]\right\}^2 + e_i^2 + e_m^2}$$

siendo:

ΔD_A^B: Error longitudinal

D_A^B: Distancia entre estación y puntería (reducida)

V_A^B: Angulo cenital

ε_T^C: Error angular cenital

e_i, e_m: Error altimétrico en la estación y en la puntería

2.3.2. NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA COMPUESTA

2.3.2.1. Concepto y resolución

La nivelación trigonométrica compuesta está unida al itinerario o poligonal, que se realiza de forma conjunta.

Al ser una poligonal la metodología soporte, se realiza la nivelación calculando $\Delta Z\Big|_A^B$, $\Delta Z\Big|_B^A$, $\Delta Z\Big|_B^C$, $\Delta Z\Big|_C^B$, ...

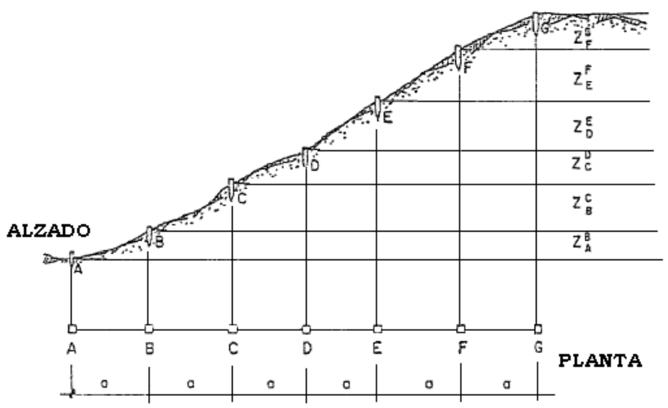


Figura Número 23.- Nivelación trigonométrica compuesta

Para la determinación de las diferentes altitudes se dispone de dos determinaciones entre estaciones, resultando como definitiva la media aritmética de las dos, siempre que la diferencia entre el valor absoluto de ambas sea tolerable.

2.3.2.2. Tolerancias

La determinación de la tolerancia se realiza de la misma forma que en el caso anterior.

- Error o incertidumbre al evaluar la distancia ΔD.
- Error o incertidumbre al evaluar el ángulo cenital: ε_T^C.

- Error o incertidumbre al evaluar la altura del aparato i.
- Error o incertidumbre al evaluar del prisma m.

A) Aportación al error altimétrico de t_A^B.

Las incertidumbres altimétricas vienen definidas por las expresiones:

$$e_t^I = \Delta D_A^B \cdot \cot g V_A^B \quad \text{(para } \varepsilon_V\text{=0)}$$

$$e_t^H = D_A^B \cdot \left[\cot g \left(V_A^B + \varepsilon_T^C\right) - D_A^B \cdot \cot g V_A^B\right] \quad \text{(para } \Delta D\text{=0)}$$

B) Aportación al error altimétrico de i_A.

La medición se realiza con una cinta métrica metálica, pudiendo estimar una cota superior del error altimétrico: $e_i \leq 1$ cm.

C) Aportación del error altimétrico de m_B.

El valor que resulta difiere según el sistema que se utilice para la determinación de la nivelación trigonométrica. Para nivelaciones trigonométricas compuestas usuales, entorno a valores máximos de 2.000 m., puede establecerse un techo del orden de la tabla empleada para nivelaciones trigonométricas simples, pero con el rango de distancias que corresponde, motivados casi en su totalidad por la falta de definición al realizar la puntería altimétrica al prisma. Para mayores distancias, la repercusión es mayor.

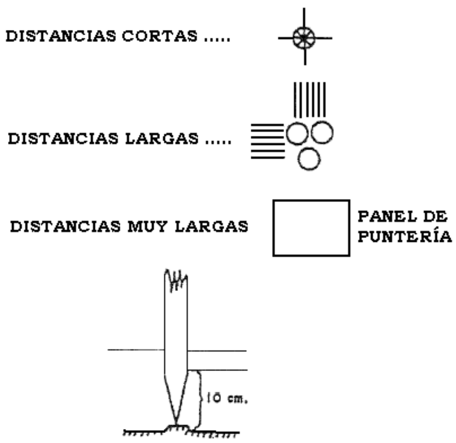


Figura Número 24.- Aspectos particulares en la determinación altimétrica

El error altimétrico total para una visual aislada será:

$$e_t = \sqrt{\left(\Delta D_A^B \cdot \cot g V_A^B\right)^2 + \left\{D_A^B \cdot \left[\cot g \left(V_A^B \pm \varepsilon_T^C\right) - \cot g V_A^B\right]\right\}^2 + e_i^2 + e_m^2}$$

siendo:

ΔD_A^B: Error longitudinal

D_A^B: Distancia entre estación y puntería (reducida)

V_A^B : Angulo cenital

ε_T^H : Error angular cenital

e_i, e_m: Error altimétrico en la estación y en la puntería

Para el conjunto de n tramos realizados se tendrá:

$$E_z = \frac{e_z}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$$

2.4. CÁLCULO Y AJUSTE DE POLIGONALES

2.4.1. CONCEPTO DE COMPENSACIÓN

La compensación es el ajuste matemático de los resultados obtenidos de unos datos de campo con el suficiente rigor topográfico, cuyo objetivo terminal es que el resultado final obtenido sea el deseado de antemano.

El ajuste matemático se hace a través de pequeñas variaciones en los incrementos de coordenadas de las bases de la poligonal.

2.4.2. TIPOS DE POLIGONALES A COMPENSAR

2.4.2.1. Poligonales colgadas

De antemano se conocen las coordenadas del punto inicial pero no las del punto final, por lo que nunca se conoce el error cometido y, por lo tanto, no hay nada que compensar.

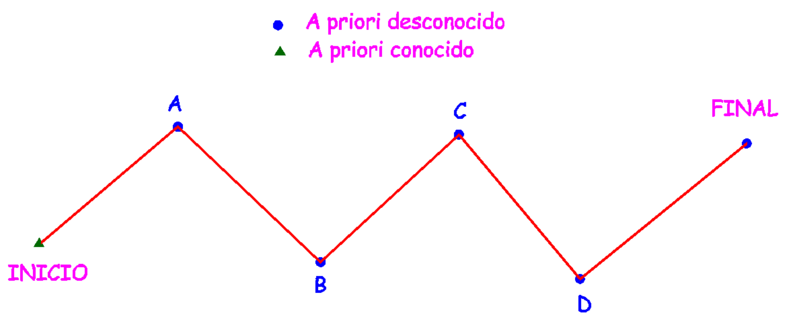


Figura Número 25.- Geometría de una poligonal colgada

Como del punto final no se tiene comprobación formal hay que suponer que está bien. Nunca se deben dejar poligonales colgadas.

2.4.2.2. Poligonales cerradas

De antemano se conocen las coordenadas del punto inicial y final ya que es el mismo y, por lo tanto, se puede obtener el error y compensarlo. Aún así, existen otros dos tipos de error no detectables, por lo que hay que evitar este tipo de poligonales:

- Errores angulares.
- Errores distanciométricos.

A) Errores en ángulos

Errores angulares bien en la orientación inicial o el propio error del instrumento provocan errores no detectables en el cálculo inicial.

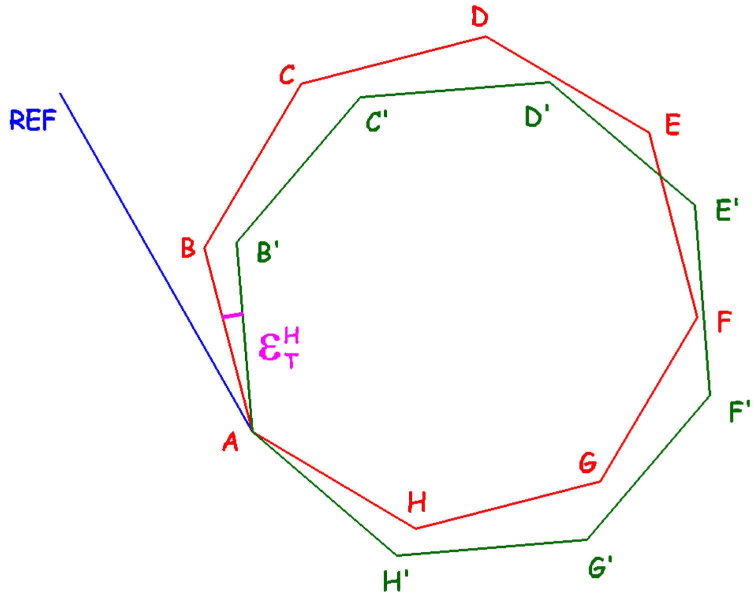


Figura Número 26.- Geometría del posible error angular en una poligonal cerrada

B) Errores en distancias

Una poligonal con las distancias mal tomadas por el motivo que sea, produce una poligonal de error final cero, pero totalmente diferente a la buscada.

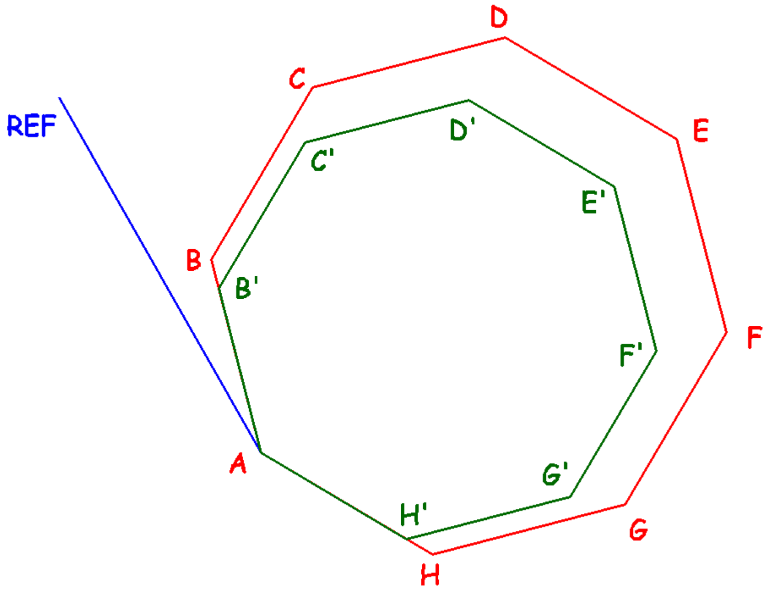


Figura Número 27.- Geometría del posible error distanciométrico en una poligonal cerrada

2.4.2.3. Poligonales encuadradas

De antemano se conocen las coordenadas del punto inicial y final y, por lo tanto, se puede obtener el error final y compensarlo.

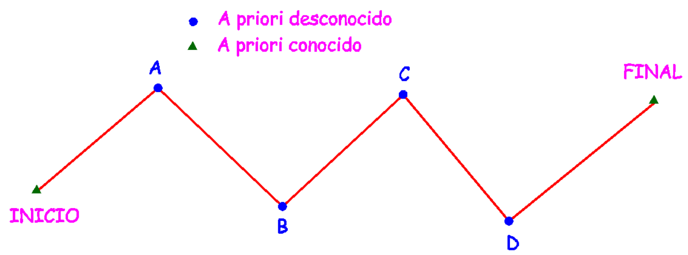


Figura Número 28.- Geometría de una poligonal encuadrada

Este tipo de poligonales es el ideal para compensar ya que todos sus errores se pueden detectar.

2.4.3. CONDICIÓN DE COMPENSACIÓN

Para que una poligonal se pueda compensar debe cumplir que:

Precisión > Tolerancia > Cierre

2.4.3.1. Precisión

Es el valor máximo del error que se permite en la ejecución del trabajo, generalmente demandado por el responsable del trabajo, el cliente. En su defecto se suele tomar el límite de percepción visual a la escala correspondiente.

2.4.3.2. Tolerancia

Es el valor del error esperado al realizar una poligonal con un determinado instrumento topográfico.

La tolerancia puede ser planimétrica:

$$e_t = D\frac{\varepsilon_T^H \sqrt{2}}{636620}\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad \text{ó} \quad e_l = 0{,}02\sqrt{n} = \frac{D\cdot\varepsilon^*}{100}\sqrt{n}$$

o altimétrica:

$$e_{ALT} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(e_t^I\right)^2 + \left(e_t^{II}\right)^2 + (e_i)^2 + (e_m)^2}$$

2.4.3.3. Cierre

Es el valor del error real que se obtiene entre las coordenadas calculadas con los datos de campo y las que se tienen a priori.

El cierre puede ser planimétrico:

$$\varepsilon_x = X_{OBTENIDA} - X_{DATO} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_Y = Y_{OBTENIDA} - Y_{DATO}$$

$$Cierre = \sqrt{(\varepsilon_X)^2 + (\varepsilon_Y)^2}$$

El cierre puede ser altimétrico:

$$\varepsilon_Z = Cierre = Z_{OBTENIDA} - Z_{DATO}$$

2.4.4. TIPOS Y FUNDAMENTOS DE COMPENSACIÓN

2.4.4.1. Compensación planimétrica

En la actualidad existen varios métodos de compensación, como por ejemplo el ajuste por mínimos cuadrados, métodos de segundo orden, métodos lineales, etc.

Debido a la dificultad existente a la hora de realizar los cálculos de forma manual, sólo se deducen métodos lineales que además de ser los más usuales, matemáticamente son fácilmente resolubles de forma manual.

A) Mayor precisión en distancias que en ángulos

Caso de poligonales ejecutadas con estaciones o semiestaciones totales con teodolito y distanciómetro convencional.

$$e_{ÁNGULOS} >> e_{DISTANCIAS} \quad => \quad e_t >> e_l$$

Analizando lo que sucede en un único tramo de la poligonal, en el que se desprecia el error en distancias, dado que se ha supuesto que es mucho más pequeño, sucede lo siguiente:

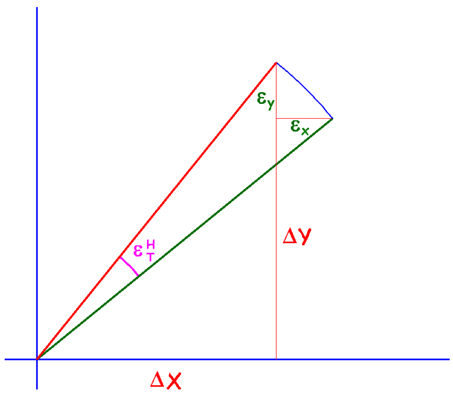


Figura Número 29.- Análisis de un tramo de poligonal con error exclusivamente angular

Despreciando el error en distancia y suponiendo todo el error angular se deduce:

$$\frac{\varepsilon_X}{\Delta_Y} = \frac{\varepsilon_Y}{\Delta_X}$$

Con lo que el cálculo de variaciones en los incrementos y los correspondientes incrementos compensados es el siguiente:

$$V\Delta X_i^{i+1} = \frac{\varepsilon_x}{\sum_1^n |\Delta Y|} \Delta Y_i^{i+1} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x^* = \Delta x \pm V\Delta X \qquad \Rightarrow \qquad X^* = X_E + \Delta x^*$$

$$V\Delta Y_i^{i+1} = \frac{\varepsilon_y}{\sum_1^n |\Delta X|} \Delta X_i^{i+1} \qquad \qquad \Delta y^* = \Delta \pm V\Delta Y \qquad \qquad Y^* = Y_E + \Delta y^*$$

B) Mayor precisión en ángulos que en distancias

Caso de poligonales ejecutadas con taquímetros:

$$e_{DISTANCIAS} >> e_{ÁNGULOS} \Rightarrow e_l >> e_t$$

Analizando lo que sucede en un único tramo de la poligonal, en el que se desprecia el error en ángulos, dado que se ha supuesto que es mucho más pequeño, sucede lo siguiente:

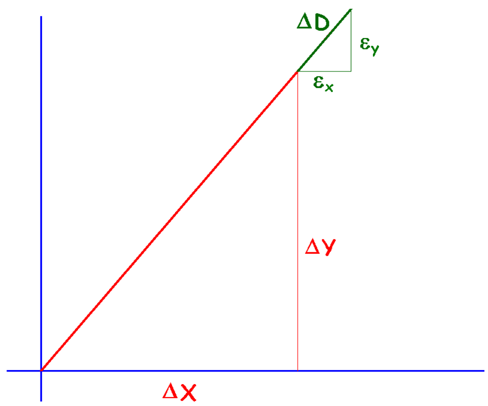


Figura Número 30.- Análisis de un tramo de poligonal con error exclusivamente distanciométrico

Despreciando el error en ángulos y suponiendo todo el error en la observación de distancias, se deduce:

$$\frac{\varepsilon_X}{\Delta_X} = \frac{\varepsilon_Y}{\Delta_Y}$$

Con lo que el cálculo de variaciones en los incrementos y los correspondientes incrementos compensados es el siguiente:

$$\begin{matrix} V\Delta X_i^{i+1} = \dfrac{\varepsilon_x}{\sum_1^n |\Delta x|} \Delta x_i^{i+1} \\ V\Delta y_i^{i+1} = \dfrac{\varepsilon_y}{\sum_1^n |\Delta y|} \Delta y_i^{i+1} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta x^* = \Delta x \pm V\Delta x \\ \Delta y^* = \Delta \pm V\Delta y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} X^* = X_E + \Delta x^* \\ Y^* = Y_E + \Delta y^* \end{matrix}$$

C) Precisiones en ángulos y distancias parecidas

Caso general de medir poligonales con estación topográfica de altas prestaciones, teodolito de 0,1 segundos de apreciación:

$$e_{DISTANCIAS} \cong e_{ÁNGULOS} \Rightarrow e_l \cong e_t$$

Analizando lo que sucede en un único tramo de la poligonal, en el que no se puede despreciar ninguno de los errores, sucede lo siguiente:

En este caso no se puede despreciar ninguno de los dos errores por lo que ahora los triángulos no son semejantes. Aún así, se ve perfectamente que el cierre es mayor a mayor distancia, por lo que se deduce:

$$\frac{\varepsilon_x}{D} = \frac{\varepsilon_Y}{D}$$

Con lo que el cálculo de variaciones en los incrementos y los correspondientes incrementos es el siguiente:

$$\begin{array}{lll} V\Delta x_i^{i+1} = \dfrac{\varepsilon_x}{\sum_1^n D} D_i^{i+1} & & \\ & \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \Delta x^* = \Delta x \pm V\Delta x \\ \Delta y^* = \Delta y \pm V\Delta y \end{array} & \Rightarrow \quad \begin{array}{l} X^* = X_E + \Delta x^* \\ Y^* = Y_E + \Delta y^* \end{array} \\ V\Delta y_i^{i+1} = \dfrac{\varepsilon_y}{\sum_1^n D} D_i^{i+1} & & \end{array}$$

2.4.4.2. Compensación altimétrica

La variación de los incrementos de cota se hacen proporcionales a las distancias ya que es el parámetro que más peso tiene dentro del error total altimétrico.

$$\begin{array}{l} e_t^I = \Delta D \cdot \cot g\, V \\ e_t^{II} = D\left[\cot g\,(V \pm \varepsilon_T^C) - \cot g\, V\right] \\ e_i = 1\ cm. \\ e_m = f(D) \end{array} \quad \Rightarrow \quad V\Delta Z_i^{i+1} = \frac{\varepsilon_Z}{\sum_l^n D} D_i^{i+1}$$

Con lo que el cálculo de variaciones en los incrementos y los correspondientes incrementos compensados es el siguiente:

$$V\Delta Z_i^{i+1} = \frac{\varepsilon_Z}{\sum_1^n D} D_i^{i+1} \quad \Rightarrow \quad \Delta Z^* = \Delta Z \pm V\Delta Z \quad \Rightarrow \quad Z^* = Z_E \pm \Delta Z^*$$

SUPUESTO PRÁCTICO

Dada la libreta de campo encuadrada, que para mayor comodidad tiene los datos promediados, debido a que la poligonal se observó en campo con lecturas en círculo directo e inverso, obtened las coordenadas compensadas de la poligonal, si los errores obtenidos lo permiten, sabiendo que ésta se observó con una estación topográfica con las siguientes especificaciones técnicas:

- Sensibilidad: 60^{cc}
- Aumentos: 30
- Apreciación: 9^{cc}
- Distanciómetro: 10 mm. + 5 ppm.

Las coordenadas de los vértices topográficos son las siguientes:

V1 [423.642,18 / 4.811.314,27 / 152,15]

V2[424.021,19 / 4.812.732,18 / 159,38]

V6[428.696,62 / 4.812.080,01 / 69,85]

CLAVES	ALTURA APARATO		PUNTOS		DISTANCIA		ANGULO H		ANGULO V		ALTURA PRISMA	
	m	cm	Estación	Visado	metros	mm	Grados	Segundos	Grados	Segundos	m	cm
	1	48	V1	V2			000	0000				
				V3	1915	380	110	3214	100	3211	1	30
	1	51	V3	V1			375	2116				
				V4	1738	240	54	3642	98	3162	1	30
	1	49	V4	V3			203	1614				
				V5	2103	790	142	7721	101	4722	1	30
	1	50	V5	V4			306	1114				
				V6	1972	140	18	4424	102	3143	1	30

RESOLUCIÓN

Cálculo de acimutes:

$$\theta_{V1}^{V2} = \varepsilon_{V1} = arc\,tg\frac{379,01}{1417,91} = 16,6282$$

$$\theta_{V1}^{V3} = \varepsilon_{V1} + L_{V1}^{V3} = 16,6282 + 110,3214 = 126,9496$$

$$\varepsilon_{V3} = \theta_{V3}^{V1} - L_{V3}^{V1} = 326,9496 - 375,2116 = 351,738$$

$$\theta_{V3}^{V4} = \varepsilon_{V3} + L_{V3}^{V4} = 651,7380 + 54,3642 = 6,1022$$

$$\varepsilon_{V4} = \theta_{V4}^{V3} - L_{V4}^{V3} = 206,1022 - 203,1614 = 2,908$$

$$\theta_{V4}^{V5} = \varepsilon_{V4} + L_{V4}^{V5} = 2,9408 + 142,7721 = 145,7129$$

$$\varepsilon_{V5} = \theta_{V5}^{V4} - L_{V5}^{V4} = 345,7129 - 306,1114 = 39,6015$$

$$\theta_{V5}^{V6} = \varepsilon_{V5} + L_{V5}^{V6} = 39,6015 + 18,4424 = 58,0439$$

Cálculo de coordenadas:

- Coordenadas de V3:

$$\theta_{V1}^{V3} = 126,9496 \qquad D_{V1}^{V3} = 1915,35$$

$$X = 425.388,46 \qquad Y = 4.810.527,46 \qquad Z = 142,91$$

- Coordenadas de V4:

$$\theta_{V3}^{V4} = 6,1022 \qquad D_{V3}^{V4} = 1737,63$$

$$X = 425.554,76 \qquad Y = 4.182.257,12 \qquad Z = 189,26$$

- Coordenadas de V5:

$$\theta_{V4}^{V5} = 145{,}7129 \qquad X = 427.138{,}67$$
$$D_{V4}^{V5} = 2103{,}23 \qquad Y = 4.810.873{,}36$$
$$Z = 141{,}10$$

- Coordenadas de V6:

$$\theta_{V5}^{V6} = 58{,}0439 \qquad X = 428.696{,}77$$
$$D_{V5}^{V6} = 1970{,}84 \qquad Y = 4.812.080{,}23$$
$$Z = 69{,}88$$

Cálculo del cierre:

$$\varepsilon_x = 428696{,}62 - 428696{,}77 = -0{,}15m. = 15cm.$$

$$\varepsilon_y = 4812080{,}01 - 4812080{,}23 = -0{,}22m. = 22cm.$$

$$\varepsilon_z = 69{,}85 - 69{,}88 = -0{,}03m. = 3cm.$$

Cálculo del error planimétrico:

$$\varepsilon_V = \frac{S}{12} = \frac{60}{12} = 5^{cc}$$

$$\varepsilon_d = \frac{0{,}01}{1737{,}63} \cdot 636620 = 3{,}6^{cc}$$

$$\varepsilon_p = \frac{30}{30} \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot 30}{100}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1{,}5^{cc}$$

$$\varepsilon_l = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4{,}2^{cc}$$

$$\varepsilon_T^H = \sqrt{5^2 + 3{,}6^2 + 1{,}5^2 + 4{,}2^2} = 7{,}6^{cc}$$

$$e_t = 2103{,}23 \cdot \frac{7{,}6\sqrt{2}}{636620} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6}} = 0{,}20m.$$

$$e_l = 0{,}02 \cdot \sqrt{n} = 0{,}02 \cdot \sqrt{4} = 0{,}04m.$$

Condición para poder compensar una poligonal:

Precisión > Tolerancia > Cierre

20 cm. ≈ 26,6 cm.

En teoría no se debería de compensar, pero como caso límite y por ser un supuesto exclusivamente didáctico, a continuación se desarrolla el procedimiento de compensación.

Compensación planimétrica:

- Incrementos de la coordenada x:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_{V1}^{V3} &= 1746{,}28 \\ \Delta x_{V3}^{V4} &= 166{,}30 \\ \Delta x_{V4}^{V5} &= 1583{,}91 \\ \Delta x_{V5}^{V6} &= 1558{,}10 \end{aligned}\right\} \sum \Delta x_1^n = 5054{,}59$$

- Incrementos de la coordenada y:

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_{V1}^{V3} &= -786{,}81 \\ \Delta y_{V3}^{V4} &= 1729{,}66 \\ \Delta y_{V4}^{V5} &= -1383{,}76 \\ \Delta y_{V5}^{V6} &= 1206{,}87 \end{aligned}\right\} \sum \Delta y_1^n = 5107{,}10$$

Compensación de la Coordenada "X":

Variación en los incrementos:

$$V\Delta x_{V1}^{V3} = \frac{15}{5107{,}10} \cdot 786{,}81 = 2{,}31 \approx 2cm.$$

$$V\Delta x_{V3}^{V4} = \frac{15}{5107{,}10} \cdot 1729{,}66 = 5{,}08 \approx 5cm.$$

$$V\Delta x_{V4}^{V5} = \frac{15}{5107{,}10} \cdot 1383{,}76 = 4{,}06 \approx 4cm$$

$$V\Delta x_{V5}^{V6} = \frac{15}{5107{,}10} \cdot 1206{,}87 = 3{,}54 \approx 4cm$$

Incrementos compensados:

$$\Delta x_{V1}^{V3*} = 1746{,}28 - 0{,}02 = 1746{,}26$$

$$\Delta x_{V3}^{V4^*} = 166{,}30 - 0{,}05 = 166{,}25$$

$$\Delta x_{V4}^{V5*} = 1583{,}91 - 0{,}04 = 1583{,}87$$

$$\Delta x_{V5}^{V6^*} = 1558{,}10 - 0{,}04 = 1558{,}06$$

Coordenada "x" compensada:

$$x^*_{V1} = 423.642,18$$

$$x^*_{V3} = 423.642,18 + 1746,26 = 425.388,44$$

$$x^*_{V4} = 425.388,44 + 166,25 = 425.554,69$$

$$x^*_{V5} = 425.554,69 + 1583,87 = 427.138,56$$

$$x^*_{V6} = 427.138,56 + 1558,06 = 428.696,62$$

Compensación de la Coordenada "Y":

Variación en los incrementos:

$$V\Delta y_{V1}^{V3} = \frac{22}{5054,59} \cdot 1746,28 = 7,60 \approx 7cm.$$

$$V\Delta y_{V3}^{V4} = \frac{22}{5054,59} \cdot 166,30 = 0,72 \approx 1cm.$$

$$V\Delta y_{V4}^{V5} = \frac{22}{5054,59} \cdot 1583,91 = 6,89 \approx 7cm$$

$$V\Delta y_{V5}^{V6} = \frac{22}{5054,59} \cdot 1558,10 = 6,78 \approx 7cm$$

Incrementos compensados:

$$\Delta y_{V1}^{V3*} = -786,81 - 0,07 = -786,88$$
$$\Delta y_{V3}^{V4*} = 1729,66 - 0,01 = 1729,65$$
$$\Delta y_{V4}^{V5*} = -1383,76 - 0,07 = -1383,83$$
$$\Delta y_{V5}^{V6*} = 1206,87 - 0,07 = 1206,80$$

Coordenada "y" compensada:

$$y^*_{V1} = 4.811.314,27$$

$$y^*_{V3} = 4.811.314,27 - 786,88 = 4.810.527,39$$

$$y^*_{V4} = 4.810.527,39 + 1729,65 = 4.812.257,04$$

$$y^*_{V5} = 4.812.257,04 - 1383,83 = 4.810.873,21$$

$$y^*_{V6} = 4.810.873,21 + 1206,80 = 4.812.080,01$$

Cálculo de la tolerancia altimétrica:

$$e_t^I = 0{,}02 \cdot \cot g(102{,}3143) = 0{,}0007m.$$

$$e_t^{II} = 2103{,}23 \cdot \left[\cot g(102{,}3143 - 0{,}0022) - \cot g(102{,}3143)\right] = 0{,}07m.$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_V = \dfrac{60}{3} = 20^{cc} \\ \varepsilon_p = \dfrac{150}{30} \cdot \left(1 + \dfrac{4 \cdot 30}{100}\right) \cdot \sqrt{2} = 7{,}8^{cc} \\ \varepsilon_l = \dfrac{2}{3} \cdot 9 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 4{,}2^{cc} \end{array}\right\} \varepsilon_T^C = 0{,}0022^g$$

Cálculo de la tolerancia altimétrica:

$$\left.\begin{array}{l} e_i = 0{,}01m. \\ e_m = 0{,}10m. \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} e = \sqrt{7^2 + 1^2 + 10^2} = 12{,}2cm. \\ e_z = \dfrac{e \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{2}} = \dfrac{12{,}2 \cdot \sqrt{4}}{\sqrt{2}} = 17{,}3cm. \end{array}\right\}$$

Cálculo del cierre altimétrico:

$$\varepsilon_Z = Z_{DATO} - Z_{CALCULADA} = 69{,}85 - 69{,}88 = -0{,}03m.$$

Condición para poder compensar una poligonal:

Precisión > Tolerancia > Cierre

17 cm. > 3 cm.

Se puede compensar

Compensación de la Coordenada “Z”:

La variación en los incrementos de cota se hace proporcional a las distancias ya que este parámetro es el que más peso tiene dentro del error altimétrico:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta z_1^3 = -9{,}24 & D_1^3 = 1.915{,}35 \\ \Delta z_3^4 = 46{,}35 & D_3^4 = 1.737{,}63 \\ \Delta z_4^5 = -48{,}16 & D_4^5 = 2.103{,}23 \\ \Delta z_5^6 = -71{,}22 & D_5^6 = 1.970{,}84 \end{array}\right\} \sum_1^n D = 7.727{,}05$$

Variación en los incrementos:

$$V\Delta z_1^3 = \frac{3}{7727,05} \cdot 1915,35 = 0,74 \approx 1cm.$$

$$V\Delta z_3^4 = \frac{3}{7727,05} \cdot 1737,63 = 0,67 \approx 0cm.$$

$$V\Delta z_4^5 = \frac{3}{7727,05} \cdot 2103,23 = 0,81 \approx 1cm$$

$$V\Delta z_5^6 = \frac{3}{7727,05} \cdot 1970,84 = 0,76 \approx 1cm$$

Incrementos compensados:

$$\Delta z_1^{3^*} = -9,24 - 0,01 = -9,25$$

$$\Delta z_3^{4^*} = 46,35 - 0 = 46,35$$

$$\Delta z_4^{5^*} = -48,16 - 0,01 = -48,17$$

$$\Delta z_5^{6^*} = -71,22 - 0,01 = -71,23$$

Coordenada “z” compensada:

$$z_{V1}^* = 152,15$$

$$z_{V2}^* = 152,15 - 9,25 = 142,90$$

$$z_{V3}^* = 142,90 + 46,35 = 189,25$$

$$z_{V4}^* = 189,25 - 48,17 = 141,08$$

$$z_{V6}^* = 141,08 - 71,23 = 69,85$$

SUPUESTO PRÁCTICO

Teniendo los datos de campo de una poligonal realizada con una estación topográfica de las siguientes especificaciones técnicas:

- Sensibilidad: 60^{cc}
- Aumentos: 30
- Apreciación: 25^{cc}

sabiendo además que la poligonal tiene como origen un vértice I, finaliza en otro F, que ambos son intervisibles y se utilizan como referencia y cierre, compensad la poligonal tanto planimétricamente como altimétricamente si los errores obtenidos lo permiten.

I[448.277,15 / 4.816.399,66 / 474,56]

F[454.925,93 / 4.816.924,39 / 475,42]

CLAVES	ALTURA APARATO		PUNTOS		DISTANCIA		ANGULO H		ANGULO V		ALTURA PRISMA	
	m	cm	Estación	Visado	metros	mm	Grados	Segundos	Grados	Segundos	m	cm
	1	48	I	F			319	8430				
							119	8460				
				E1	1622	180	330	1050	103	1760	1	17
							130	1060	296	7920		
	1	35	E1	I	1622	240	130	1060	96	8200	1	20
							330	1080	303	1410		
				E2	1598	420	318	3700	99	3450	1	30
							118	3740	300	6240		
	1	30	E2	E1	1598	460	118	3700	100	6440	1	17
							318	3700	299	3270		
				E3	2173	230	323	5920	99	5320	1	17
							123	5960	300	4300		
	1	35	E3	E2	2173	200	123	5920	100	4520	1	30
							323	5970	299	5200		
				F	1350	440	303	0970	97	6540	1	20
							103	1040	302	3170		
	1	48	F	E3	1350	480	103	0970	102	3520	1	17
							303	1060	297	6200		
							119	8520				
							319	8540				

RESOLUCIÓN

Depuración de la libreta de campo:

. Promedio horizontal:

$$H = \frac{CD + (CI \pm 200)}{2}$$

. Promedio vertical:

$$V = CD + \left(\frac{400 - CD - CI}{2} \right)$$

CLAVES	ALTURA APARATO		PUNTOS		DISTANCIA		ANGULO H		ANGULO V		ALTURA PRISMA	
	m	cm	Estación	Visado	metros	mm	Grados	Segundos	Grados	Segundos	m	cm
	1	48	I	F			319	8445				
				1	1622	180	330	1055	103	1920	1	17
	1	35	1	I	1622	240	130	1070	96	8395	1	20
				2	1598	420	318	3720	99	3605	1	30
	1	30	2	1	1598	460	118	3700	100	6585	1	17
				3	2173	230	323	5940	99	5510	1	17
	1	35	3	2	2173	200	123	5940	100	4660	1	30
				F	1350	440	303	1005	97	6685	1	20
	1	48	F	3	1350	480	103	1015	102	3660	1	17
				I			119	8530				

Cálculo de acimutes:

$$\theta_I^F = arctg\frac{|\Delta x|}{|\Delta y|} = arctg\frac{6648,78}{524,73} = 94,9861$$

$$\varepsilon_I = \theta_I^F - L_I^F = 94,9861 - 319,8445 = 175,1416$$

$$\theta_I^{E1} = \varepsilon_I + L_I^{E1} = 175,1416 + 330,1055 = 105,2471$$

$$\varepsilon_{E1} = \theta_{EI}^I - L_{EI}^I = 305,2471 - 130,1070 = 175,1401$$

$$\theta_{E1}^{E2} = \varepsilon_{E1} + L_{E1}^{E2} = 175,1401 + 318,3720 = 93,5121$$

$$\varepsilon_{E2} = \theta_{E2}^{E1} - L_{E2}^{E1} = 293,5121 - 118,3700 = 175,1421$$

$$\theta_{E2}^{E3} = \varepsilon_{E2} + L_{E2}^{E3} = 175,1421 + 328,5940 = 98,7361$$

$$\varepsilon_{E3} = \theta_{E3}^{E2} - L_{E3}^{E2} = 298,7361 - 123,5945 = 175,1416$$

$$\theta_{E3}^F = \varepsilon_{E3} + L_{E3}^F = 175,1416 + 303,1005 = 78,2421$$

$$\varepsilon_F = \theta_F^{E3} - L_F^{E3} = 278,2421 - 103,1015 = 175,1406$$

$$\theta_F^I = \varepsilon_F + L_F^I = 175,1406 + 119,8530 = 294,9936$$

Cierre angular:

$$\varepsilon_\alpha = \theta_{REAL} - \theta_{CALCULADO}$$

$$\varepsilon = 94,9861 - 94,9936 = 0,0075$$

Compensación angular:

$$V\theta = \frac{\varepsilon_a}{N^o\ estaciones} = \frac{75}{5} = 15^{cc}$$

$$\theta_I^1 = \theta_I^1 - 0,0015 = 105,2471 - 0,0015 = 105,2456$$

$$\theta_1^2 = \theta_1^2 - 0,0030 = 93,5121 - 0,0030 = 93,5091$$

$$\theta_2^3 = \theta_2^3 - 0,0045 = 98,7361 - 0,0045 = 98,7316$$

$$\theta_3^F = \theta_3^F - 0,0060 = 78,2421 - 0,0060 = 78,2361$$

$$\theta_F^I = \theta_F^I - 0,0075 = 294,9936 - 0,0075 = 294,9861$$

Cálculo de coordenadas sin compensar:

Distancias reducidas:

$$D = Dg \cdot senV$$

Distancias promediadas:

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2}$$

Incrementos de x:

$$\Delta x = D \cdot sen\,\theta$$

Incrementos de y:

$$\Delta y = D \cdot \cos\theta$$

Cálculo de coordenadas sin compensar:

EST.	VIS.	ACIMUTES	ACIMUTES COMPENSADOS	DISTANCIAS REDUCIDAS	DISTANCIAS PROMEDIOS	INCREM. "X"	INCREM. "Y"
I	**F**	94,9861	94,9861				
	1	105,2471	105,2456	1620,14	1620,19	1614,69	-133,35
1	**1**			1620,24			
	2	93,5121	93,5091	1598,34	1598,36	1590,06	162,68
2	**1**			1598,37			
	3	98,7361	98,7316	2173,18	2173,16	2172,73	43,30
3	**2**			2173,14			
	F	78,2421	78,2361	1349,53	1349,54	1271,44	452,43
F	**3**			1349,55			
	I	296,9936	294,9861				

Cálculo del cierre:

$$\varepsilon_x = \Delta x_I^F - \sum_1^n \Delta x = 6648{,}78 - 6648{,}92 = 0{,}14m.$$

$$\varepsilon_y = \Delta y_I^F - \sum_1^n \Delta y = 524{,}73 - 525{,}06 = 0{,}33m.$$

$$\text{Cierre} = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} \quad \rightarrow \quad \text{Cierre} = \sqrt{14^2 + 33^2} = 36cm.$$

Cálculo de la tolerancia:

$$e_l = 0{,}02 \cdot \sqrt{n} = 0{,}02 \cdot \sqrt{4} = 0{,}04m.$$

$$e_t = D \cdot \frac{\varepsilon_T^H \cdot \sqrt{2}}{636620} \cdot \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = 2173{,}16 \cdot \frac{13{,}7 \cdot \sqrt{2}}{636620} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6}} = 0{,}36m.$$

Tolerancia = 36 cm.

Condición de compensación:

Precisión > Tolerancia > Cierre

36 cm. = 36 cm.

Se puede compensar

$$e_t >> e_l \Rightarrow \frac{\varepsilon_x}{\Delta y} = \frac{\varepsilon_y}{\Delta x}$$

Determinación de las variaciones:

Poligonal obtenida con estación topográfica suponiendo nulo el error longitudinal, obteniéndose por semejanza de triángulos:

$$\left.\begin{array}{l} V\Delta X_i^{i+1} = \dfrac{\varepsilon_x}{\sum_1^n |\Delta Y|} \Delta Y_i^{i+1} \\ V\Delta Y_i^{i+1} = \dfrac{\varepsilon_y}{\sum_1^n |\Delta X|} \Delta X_i^{i+1} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta x^* = \Delta x \pm V\Delta X \\ \Delta y^* = \Delta y \pm V\Delta Y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} X^* = X_E + \Delta x^* \\ Y^* = Y_E + \Delta y^* \end{array}$$

Cálculo de las coordenadas compensadas:

EST.	VIS.	ΔX	ΔY	VΔX	VΔY	ΔX*	ΔY*	X*	Y*
I	F							448277,15	4816399,66
	1	1614,69	-133,35	0,02	0,08	1614,67	-133,43	449891,82	4816266,23
1	1								
	2	1590,06	162,68	0,03	0,08	1590,03	162,60	451481,85	4816428,83
2	1								
	3	2172,73	43,30	0,01	0,11	2172,72	43,19	453654,57	4816472,02
3	2								
	F	1271,44	452,43	0,08	0,06	1271,36	452,37	454925,93	4816924,39
F	3								
	I								

Cotas y cierre altimétrico:

Cálculo de cotas:

$$\Delta z = \frac{D_i^{i+1}}{tgV_i^{i+1}} + i_i - m_1 + 0{,}42 \cdot \frac{D_i^{i+1^2}}{R}$$

$$\Delta z_I^1 = -80{,}82$$
$$\Delta z_1^2 = 16{,}27$$
$$\Delta z_2^3 = 15{,}77$$
$$\Delta z_3^F = 49{,}72$$

Cierre altimétrico:

$$\varepsilon_z = \Delta z_1^F - \sum_1^n \Delta z = 0{,}86 - 0{,}94 = -0{,}08m.$$

$$Cierre = 8cm.$$

Tolerancia altimétrica:

$$e_t^I = 0{,}02 \cdot \cot g\,103{,}192 = 0{,}001m.$$

$$e_t^{II} = 2173{,}16 \cdot (\cot g ...) = 0{,}082m.$$

$$e_i = 0{,}010m.$$

$$e_m = 0{,}100m.$$

$$\text{Tolerancia} = \frac{\sqrt{8{,}2^2 + 1^2 + 10^2} \cdot \sqrt{4}}{\sqrt{2}} = 18{,}3cm.$$

Condición de compensación:

Precisión > Tolerancia > Cierre
18,3 cm. > 8 cm.
Se puede compensar

Compensación altimétrica:

Con lo que el cálculo de variaciones en los incrementos y los correspondientes incrementos compensados es el siguiente:

$$V\Delta Z_i^{i+1} = \frac{\varepsilon_z}{\sum_1^n D} D_i^{i+1} \quad \Rightarrow \quad \Delta Z^* = \Delta Z \pm V\Delta Z \quad \Rightarrow \quad Z^* = Z_E + \Delta Z^*$$

Cálculo de la cota compensada:

EST.	VIS.	ΔZ	VΔZ	ΔZ*	Z*
I	F				474,56
	1	-80,82	0,02	-80,84	393,72
1	1				
	2	16,27	0,02	16,25	409,97
2	1				
	3	15,77	0,02	15,75	425,72
3	2				
	F	49,72	0,02	49,70	475,42
F	3				
	I				

3. MÉTODOS BASADOS EN EL EMPLEO EXCLUSIVO DEL TEODOLITO

3.1. MÉTODO DE INTERSECCIÓN DIRECTA

3.1.1. INTRODUCCIÓN

La intersección directa es un método planimétrico que sólo precisa de medidas angulares para determinar la posición de puntos.

Las observaciones se realizan estacionando el teodolito en dos puntos de coordenadas planimétricas conocidas, visándose entre sí y al punto que se pretende ubicar. La intersección se denomina múltiple si se tienen más estacionamientos de los necesarios, lo que permite ejercer una comprobación de los resultados obtenidos.

3.1.2. FUNDAMENTO Y RESOLUCIÓN

3.1.2.1. Intersección directa simple

Sea V un vértice topográfico cuya posición se desea conocer, y A y B dos vértices de coordenadas planimétricas conocidas.

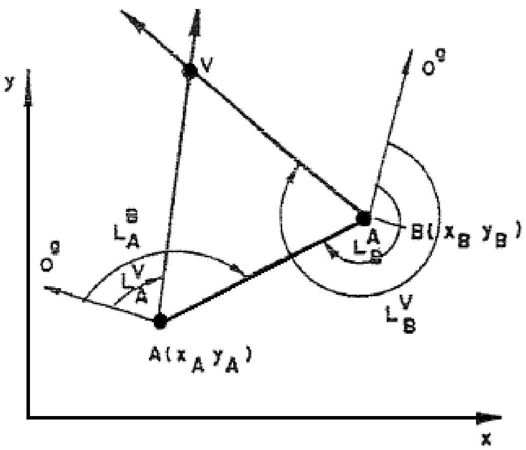


Figura Número 31.- Datos iniciales y de campo en el cálculo de la intersección

Las coordenadas del punto V pueden obtenerse a partir de las del A o a partir de las del B calculando la distancia y la orientación correspondientes, pero en realidad se consiguen por duplicado a partir de los dos puntos para poder tener comprobación de resultados. Es fundamental observar que de este modo sólo se comprueban los cálculos, pero no las observaciones de campo, pues unas observaciones de ángulos mal tomadas darán un punto V distinto al real pero perfectamente obtenible a través del proceso de cálculo.

Datos iniciales:

$$A(x_A, y_A)\ y\ B(x_B, y_B)$$

Observaciones de campo:

Obtención de lecturas: $L_A^V\ \ L_B^V\ \ L_A^B\ \ L_B^A$

Siempre será posible la obtención de los ángulos A y B. En el caso particular de inicializar una de las lecturas, la otra sería el ángulo buscado:

Si $L_A^V = 0 \ldots L_A^B = \hat{A}$

Si $L_B^A = 0 \ldots L_B^V = \hat{B}$

En el caso más general, se verificará si los datos obtenidos son $L_A^V \; L_B^V \; L_A^B \; L_B^A$, los ángulos definidores de la intersección se obtienen de la forma siguiente:

$$\hat{A} = L_A^B - L_A^V$$

$$\hat{B} = L_B^V - L_B^A$$

Con los ángulos así definidos se podrán obtener las coordenadas de V.

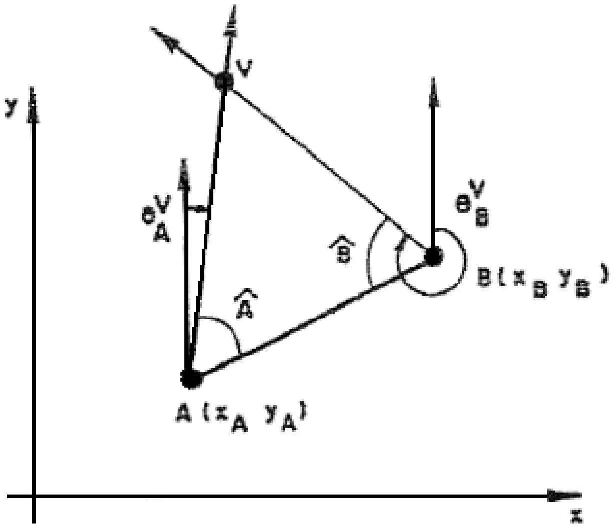


Figura Número 32.- Resolución numérica de la intersección directa

En cualquier caso, es conocida la distancia reducida entre A y B:

$$D_A^B = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Es necesario calcular los incrementos de coordenadas entre A y V y entre B y V:

$$\Delta x_A^V = D_A^V \cdot sen\; \theta_A^V$$

$$\Delta y_A^V = D_A^V \cdot \; \cos \theta_A^V$$

siendo θ_A^V el acimut de la dirección AV.

$$\Delta x_B^V = D_B^V \cdot sen\; \theta_B^V$$

$$\Delta y_B^V = D_B^V \cdot \; \cos \theta_B^V$$

siendo θ_B^V el acimut de la dirección BV.

Evaluación de los ángulos acimutales:

$$\theta_A^V = \theta_A^B \pm \hat{A}$$

$$\theta_B^V = \theta_B^A \pm \hat{B} = \left(\theta_A^B \pm 200\right) \pm \hat{B}$$

siendo:

$$\theta_A^B = arc\ tg \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

$$\theta_B^A = arc\ tg \frac{x_A - x_B}{y_A - y_B}$$

El problema de la intersección directa queda centrado por el cálculo de las distancias reducidas D_A^V y D_B^V.

En el triángulo ABV se cumple:

a) Relación de la distancia reducida AB con AV:

$$\frac{D_A^V}{sen\,\hat{B}} = \frac{D_A^B}{sen\,\hat{V}} \quad \rightarrow \quad D_A^V = \frac{sen\,\hat{B}}{sen\,\hat{V}} \cdot D_A^B$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{V} = 200^g$$

$$\hat{V} = 200 - \left(\hat{A} + \hat{B}\right)$$

b) Relación de la distancia reducida AB con BV:

$$\frac{D_B^V}{sen\,\hat{A}} = \frac{D_A^B}{sen\,\hat{V}} \quad \rightarrow \quad D_B^V = \frac{sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{V}} \cdot D_A^B$$

siendo $\hat{V}$ el valor angular anteriormente evaluado.

De esta forma, las coordenadas de V ya son fácilmente expresables.

a) Partiendo de A:

$$x_V = x_A + D_A^V \cdot sen\,\theta_A^V$$
$$y_V = y_A + D_A^V \cdot \cos\theta_A^V$$

b) Partiendo de B:

$$x_V = x_B + D_B^V \cdot sen\,\theta_B^V$$
$$y_V = y_B + D_B^V \cdot \cos\theta_B^V$$

3.1.2.2. Intersección directa múltiple

Como norma general, en cualquier observación topográfica es necesario tener comprobación de las medidas efectuadas para contrastar su bondad (por lo menos con el grado de precisión con que se trabaje) y para ello han de efectuarse siempre observaciones superabundantes que servirán para comprobar los resultados. En este problema de la intersección directa consiste en estacionar en más de dos puntos de coordenadas conocidas y efectuar observaciones al vértice y desde ellos, denominándose entonces la intersección directa múltiple.

Cuando se dispone de observaciones de n puntos, la solución más exacta sería considerar las distintas combinaciones de estos n puntos, tomados de dos en dos, y efectuar con cada una de ellas la obtención de los valores de las coordenadas planas del punto considerado (x_V,y_v). De este modo puede analizarse la bondad de las observaciones, despreciando las erróneas y tomando los valores x_v,y_v medios de entre los obtenidos con cada combinación. Así, para cuatro visuales se tendría lo siguiente:

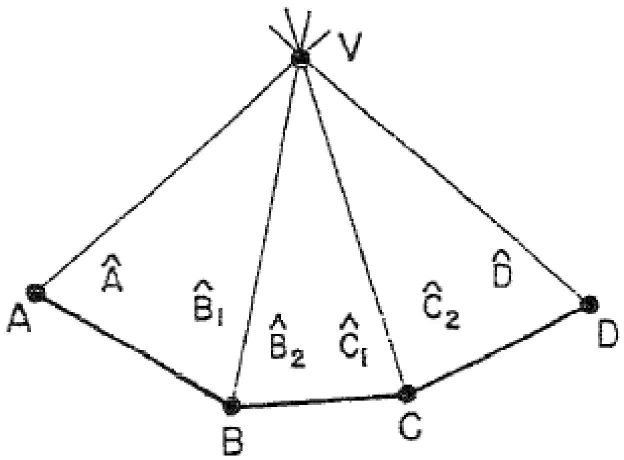


Figura Número 33.- Intersección directa múltiple

En los triángulos configurados se podrían obtener siguiendo idéntica metodología que en el anterior apartado las distancias desconocidas, tomándose los valores promedios de éstas para calcular las coordenadas de V a partir de las de B, quedando entonces esa fase de cálculo sin comprobación. Aunque parece mucho más acertado calcular por separado con los valores obtenidos de todos los posibles triángulos compartidos y, posteriormente, tomar los promedios de las x_V e y_V obtenidas con cada uno (es decir, se soluciona con un par de visuales y se toman luego los valores medios, dando el peso adecuado a cada uno de los valores obtenidos).

3.1.3. CÁLCULO DE LA TOLERANCIA

Considerando que al realizar las dos observaciones angulares necesarias en toda intersección directa se comete un error angular ε_T^H se crea una zona de incertidumbre en la que es previsible que se encuentre realmente la posición del punto objeto de determinación, tal y como se puede apreciar en la siguiente figura.

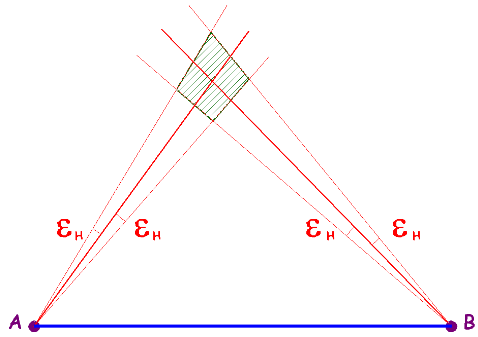


Figura Número 34.- Afección del error angular en las intersecciones directas

Teniendo en cuenta que en el entorno de la intersección de visuales, las desviaciones angulares se pueden considerar paralelas, y como la probabilidad de que se produzcan las máximas desviaciones en ambas visuales es mínima, se encaja en el interior del polígono una elipse cuyo semieje mayor se considera la tolerancia en las intersecciones directas angulares.

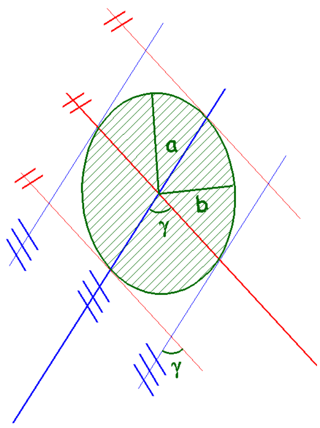


Figura Número 35.- Elipse de error en las intersecciones directas angulares

Para el establecimiento del semieje mayor de la elipse de error es necesario apoyarse en la teoría de los diámetros conjugados de una elipse formulada por Apolonio:

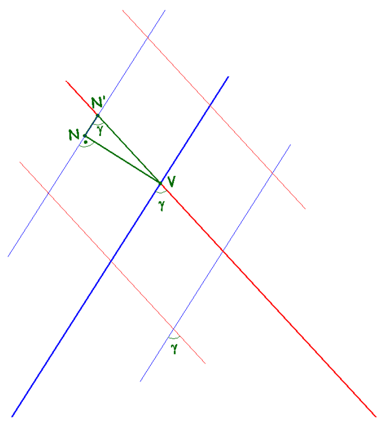


Figura Número 36.- Valor del diámetro conjugado de la elipse

En la figura anterior se puede apreciar que en el triángulo VNN', VN' es el diámetro conjugado, cuyo valor es de fácil obtención partiendo de que al valor VN se le puede aproximar al arco, resultando las siguientes expresiones:

$$VN = L \cdot \varepsilon_T^H \cdot \sqrt{2}$$

$$sen\ \gamma = \frac{VN}{VN'} \Rightarrow VN' = \frac{VN}{sen\ \gamma}$$

$$VN' = \frac{L \cdot \varepsilon_T^H \cdot \sqrt{2}}{sen\ \gamma}$$

Aplicando la teoría de los diámetros conjugados se conoce el semieje mayor de la elipse de error mediante las siguientes expresiones:

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot VN'^2$$

$$2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot VN'^2 \cdot sen\ \gamma$$

Sumando las dos expresiones anteriores, se obtiene:

$$a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot VN'^2 \cdot (1 + sen\,\gamma)$$

$$(a + b)^2 = 2 \cdot VN'^2 \cdot (1 + sen\gamma)$$

$$(a + b) = \sqrt{2} \cdot VN' \cdot \sqrt{1 + sen\,\gamma}$$

Restando esas mismas expresiones, resulta:

$$a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot VN'^2 \cdot (1 - sen\,\gamma)$$

$$(a - b)^2 = 2 \cdot VN'^2 \cdot (1 - sen\gamma)$$

$$(a - b) = \sqrt{2} \cdot VN' \cdot \sqrt{1 - sen\,\gamma}$$

Sumando ahora las dos expresiones deducidas anteriormente, se obtiene:

$$2 \cdot a = \sqrt{2} \cdot VN' \left[\sqrt{1 + sen\,\gamma} + \sqrt{1 - sen\,\gamma}\right]$$

$$a = \frac{\sqrt{2} \cdot VN'}{2} \left[\sqrt{1 + sen\,\gamma} + \sqrt{1 - sen\,\gamma}\right]$$

Dada la siguiente igualdad trigonométrica:

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{1 + sen\,\gamma} + \sqrt{1 - sen\,\gamma}\right] = \cos\frac{\gamma}{2}$$

se puede sustituir, obteniendo una expresión mucho mas reducida del semieje mayor de la elipse:

$$a = \sqrt{2} \cdot VN' \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

Sustituyendo el valor de VN' ya determinando y la igualdad trigonométrica se obtiene:

$$VN' = \frac{L \cdot \varepsilon_T^H \cdot \sqrt{2}}{sen\,\gamma} \qquad ; \qquad sen\,\gamma = 2 \cdot sen\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{2} \cdot L \cdot \varepsilon_T^H \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{2 \cdot sen\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$$

Conformando definitivamente dicho semieje de la elipse de error la tolerancia o error esperado al realizar una intersección directa angular.

$$a = \frac{L \cdot \varepsilon_T^H}{sen\,\frac{\gamma}{2}}$$

siendo:

L.- distancia media entre los dos pilares y la diana.

ε_T^H .- error angular acimutal del teodolito.

γ.- ángulo intersección.

3.2. MÉTODO DE INTERSECCIÓN INVERSA

3.2.1. INTRODUCCIÓN

El problema de la intersección inversa es un problema planteado desde hace mucho tiempo, teniendo varias soluciones gráficas y numéricas. En este problema, para determinar las coordenadas de un punto P se realizan desde él observaciones con un teodolito a tres vértices topográficos A, B y C (como mínimo), tomando los ángulos formados entre sí por las visuales a dichos puntos.

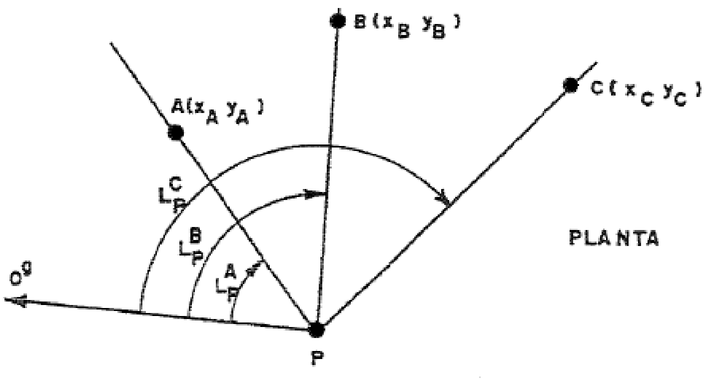


Figura Número 37.- Observación en campo, simple

El método tiene ventajas desde el punto de vista de la accesibilidad, pues permite posicionar un punto P realizando una observación, al menos a tres puntos de coordenadas conocidas, sin necesidad de tomarlos como estación, sino simplemente como punterías.

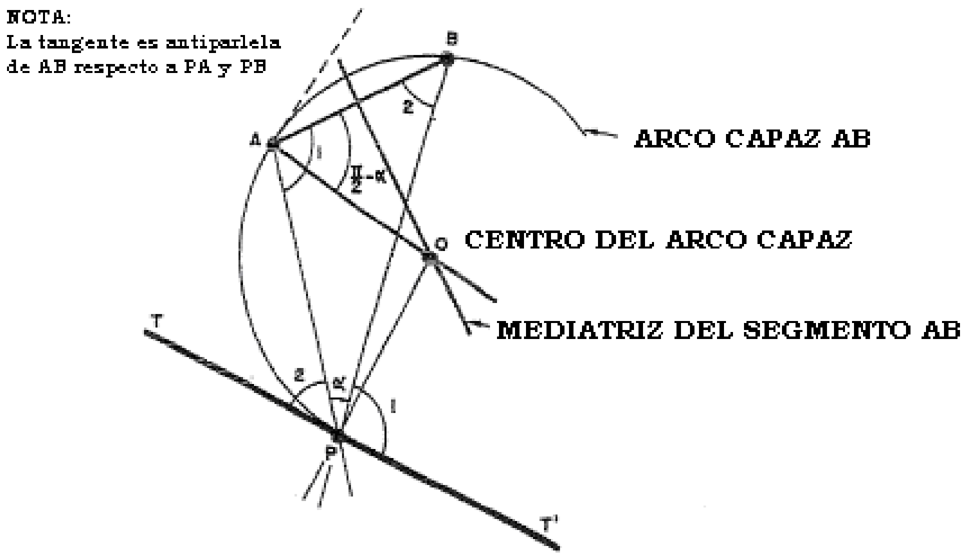


Figura Número 38.- El arco capaz y su tangente

Dado un lado $\overline{AB}$ y un ángulo α, el arco capaz de ángulo α levantado sobre AB se obtiene trazando desde los dos extremos hacia el interior las rectas de ángulo $\left(\pi/2 - \alpha\right)$ con AB, siendo el punto de corte de ambas en centro del área capaz.

Al considerar la tangente T, T', en un punto P del arco capaz se verifica que APT=ABP=2 y que BPT'=BAP=1, ya que ambos son la mitad del arco de circunferencia correspondiente.

En la intersección inversa P es la solución que determina la intersección de los dos arcos capaces AB de ángulo α y BC de ángulo β, obtenidos a partir de ambo segmentos. Si ambos arcos capaces coinciden, no existe solución, denominándose al arco circunferencia peligrosa.

3.2.2. FUNDAMENTO Y RESOLUCIÓN

3.2.2.1. Intersección inversa simple

La intersección inversa consiste en la observación desde un vértice, cuyas coordenadas planimétricas se pretenden obtener de otros tres cuyas coordenadas planimétricas son dato ($X_A Y_A$), (X_B,Y_B) y ($X_C Y_C$).

Las tres visuales PA, PB y PC proporcionan los datos necesarios para resolver matemáticamente el problema. El método de resolución es conocido por el método de Pothenot.

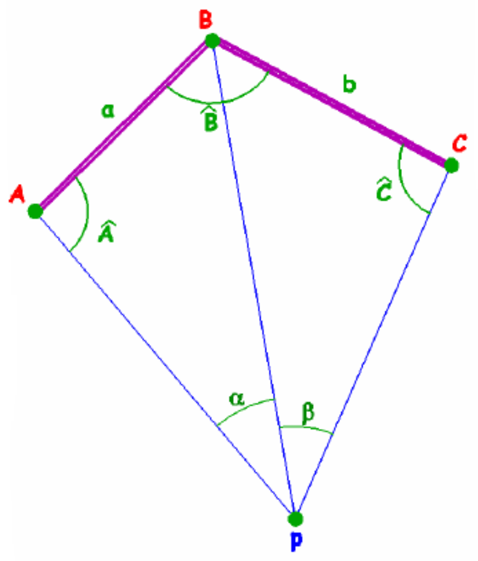


Figura Número 39.- Esquema conceptual de la intersección inversa simple

Con los datos de partida se obtienen las distancias reducidas:

A($X_A Y_A$) B($X_B Y_B$) $$D_A^B = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

B($X_B Y_B$) C($X_C Y_C$) $$D_B^C = \sqrt{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2}$$

Hay que evaluar las coordenadas del punto P(XY); para ello se estaciona el teodolito en P y se evalúan los ángulos α y β.

Con las coordenadas de los tres vértices A, B y C, y los ángulos evaluados en campo α y β, se obtienen las coordenadas del vértice P.

Se establece el valor de la diagonal común PB en ambos triángulos y se iguala:

$$\frac{D_P^B}{sen\,\hat{A}} = \frac{D_A^B}{sen\,\alpha} \rightarrow D_P^B = a \cdot \frac{sen\,\hat{A}}{sen\,\alpha}$$

$$\frac{D_P^B}{sen\,\hat{C}} = \frac{D_B^C}{sen\,\beta} \rightarrow D_P^B = b \cdot \frac{sen\,\hat{C}}{sen\,\beta}$$

$$a \cdot \frac{sen\,\hat{A}}{sen\,\alpha} = b \cdot \frac{sen\,\hat{C}}{sen\,\beta} \rightarrow \frac{sen\,\hat{C}}{sen\,\hat{A}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{sen\,\beta}{sen\,\alpha}$$

$$\frac{sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{C}} = \frac{b \cdot sen\,\alpha}{a \cdot sen\,\beta} = M$$

En el cuadrilátero PABC se verifica:

$$\hat{A} + \hat{C} = 400^g - \left(\alpha + \beta + \hat{B} \right) = N$$

En ambas igualdades M y N son valores numéricos conocidos, fácilmente evaluables:

$$\hat{C} = N - \hat{A}$$

$$\frac{sen\,\hat{A}}{sen\left(N - \hat{A} \right)} = M \quad \rightarrow \quad sen\,\hat{A} = M \cdot sen\left(N - \hat{A} \right)$$

$$sen\,\hat{A} = M \left[sen\,N \cdot \cos\hat{A} - \cos N \cdot sen\,\hat{A} \right] =$$

$$= M \cdot sen\,N \cdot \cos\hat{A} - M \cdot \cos N \cdot sen\,\hat{A}$$

$$sen\,\hat{A}\,[1 + M \cdot \cos N] = [M \cdot sen\,N] \cdot \cos\hat{A}$$

Denominando:

$$1 + M \cdot \cos N = I$$

$$M \cdot sen\,N = J$$

Resulta:

$$I \cdot sen\,\hat{A} = J \cdot \cos\hat{A}$$

De donde se deduce:

$$tg\,\hat{A} = \frac{J}{I} \quad \rightarrow \quad \hat{A} = arc\ tg\,\frac{J}{I}$$

Obteniendo el valor de $\hat{A}$, el de C es inmediato:

$$\hat{C} = N - \hat{A}$$

Conociendo los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$ pueden calcularse las coordenadas de P desde los enfoques diferentes:

$$\theta_A^P = \theta_A^B + \hat{A} \qquad\qquad \theta_C^P = \theta_C^P - \hat{C}$$

$$D_A^P = a \cdot \frac{sen\left(\hat{A} - \alpha \right)}{sen\,\alpha} \qquad\qquad C_C^P = b \cdot \frac{sen\left(\hat{C} + \hat{B} \right)}{sen\,\beta}$$

$$\Delta x_A^P = D_A^P \cdot sen\,\theta_A^P \qquad \Delta x_C^P = D_C^P \cdot sen\,\theta_C^P$$

$$\Delta y_A^P = D_A^P \cdot \cos\theta_A^P \qquad \Delta y_C^P = D_C^P \cdot \cos\theta_C^P$$

$$x_p = x_A + \Delta x_A^P \qquad x_p = x_C + \Delta x_C^P$$

$$y_p = y_A + \Delta y_A^P \qquad y_p = y_C + \Delta y_C^P$$

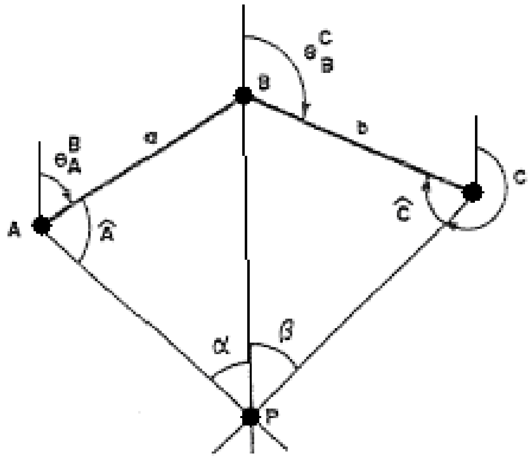


Figura Número 40.- Evaluación de los acimuts

De esta forma se puede comprobar la bondad de los cálculos, aunque no las observaciones de campo, pues se ha evaluado con el mínimo número de datos para la obtención de la solución.

3.2.2.2. Intersección inversa múltiple

Cuando se quieren situar varios puntos a partir del conocimiento de tres vértices topográficos con coordenadas conocidas, la metodología es idéntica.

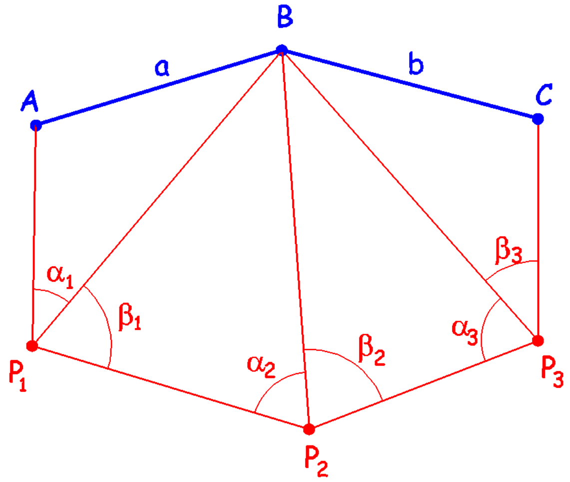


Figura Número 41.- Pothenot múltiple

Los datos iniciales son A($x_A y_A$), B($x_B y_B$) y C($x_C y_C$), y los datos cogidos en campo, los seis ángulos: α_1 β_1 α_2 β_2 α_3 β_3.

En todos los triángulos se verifican las siguientes igualdades:

$$\frac{a}{sen\,\alpha_1}=\frac{D_{P1}^{B}}{sen\,\hat{A}}\;;\qquad \frac{D_{P1}^{B}}{sen\,\alpha_2}=\frac{D_{P2}^{B}}{sen\,\alpha_1}\;;\qquad \frac{D_{P2}^{B}}{sen\,\alpha_3}=\frac{D_{P3}^{B}}{sen\,\beta_2}\;;\qquad \frac{D_{P3}^{C}}{sen\,\hat{C}}=\frac{b}{sen\,\beta_3}$$

Multiplicando miembro a miembro:

$$\frac{a}{sen\,\alpha_1\cdot sen\,\alpha_2\cdot sen\,\alpha_3\cdot sen\,\hat{C}}=\frac{b}{sen\,\beta_1\cdot sen\,\beta_2\cdot sen\,\beta_3\cdot sen\,\hat{A}}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{sen\,\alpha_1\cdot sen\,\alpha_2\cdot sen\,\alpha_3\cdot sen\,\hat{C}}{sen\,\beta_1\cdot sen\,\beta_2\cdot sen\,\beta_3\cdot sen\,\hat{A}}$$

$$\frac{sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{C}}=\frac{b\cdot sen\,\alpha_1\cdot sen\,\alpha_2\cdot sen\,\alpha_3}{a\cdot sen\,\beta_1\cdot sen\,\beta_2\cdot sen\,\beta_3}=M$$

En el polígono ABC$P_3P_2P_1$ se verifica (n=número de vértices, para el caso n=6):

$$\hat{A}+\hat{C}=200\;(6-2)-(B+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_1+\beta_2+\beta_3)=$$

$$\hat{A}+\hat{C}=800^g-(B+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_1+\beta_2+\beta_3)=N$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{C}}=M\\[2ex] \hat{A}+\hat{C}=N\end{array}\right\}\;\hat{C}=N-\hat{A}$$

$$\frac{sen\,\hat{A}}{sen(N-\hat{A})}=M\;\rightarrow\;sen\,\hat{A}=M\;sen\left(N-\hat{A}\right)$$

$$sen\,\hat{A}=M\left[sen\,N\cdot\cos\,\hat{A}-\cos N\cdot sen\,\hat{A}\right]=$$

$$=M\cdot sen\,N\cdot\cos\hat{A}-M\cdot\cos N\cdot sen\,\hat{A}$$

$$sen\,\hat{A}+M\cdot\cos N\cdot sen\,\hat{A}=M\cdot sen\,N\cdot\cos\hat{A}$$

$$sen\,\hat{A}\,[1+M\cdot\cos N]=M\cdot sen\,N\cdot\cos\hat{A}$$

Denominando:

$$1 + M \cos N = I$$

$$M \; sen\, N = J$$

Resulta:

$$I \cdot sen \; A = J \cdot \cos A$$

De donde se deduce:

$$\frac{sen\, A}{\cos A} = tg\, A = \frac{J}{I} \quad \rightarrow \quad A = arc\; tg\; \frac{J}{I}$$

obteniendo el valor de $\hat{A}$, el de $\hat{C}$ es inmediato.

3.2.2.3. Procedimiento de Hamsen

Cuando se quieren situar dos puntos a través del conocimiento de dos vértices topográficos de coordenadas conocidas, el procedimiento es muy parecido.

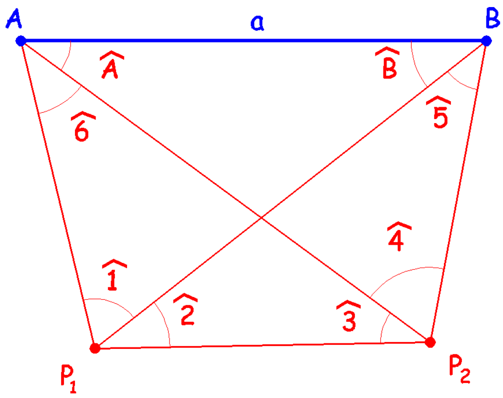


Figura Número 42.- Procedimiento de Hamsen

Los datos iniciales son A[x_A,y_A] y los datos cogidos en campo los ángulos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$ y $\hat{4}$, verificándose las siguientes igualdades:

$$(1) \Rightarrow \frac{P_1 A}{sen\, \hat{B}} = \frac{a}{sen\, \hat{1}} \qquad (3) \Rightarrow \frac{BP_2}{sen\, \hat{2}} = \frac{P_1 P_2}{sen\, \hat{5}}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{P_1 P_2}{sen\, \hat{6}} = \frac{P_1 A}{sen\, \hat{3}} \qquad (4) \Rightarrow \frac{a}{sen\, \hat{4}} = \frac{BP_2}{sen\, \hat{A}}$$

$$(1{=}2) \Rightarrow \frac{a \cdot sen\,\hat{B}}{sen\,\hat{1}} = \frac{P_1P_2 \cdot sen\,\hat{3}}{sen\,\hat{6}} \rightarrow P_1P_2 = \frac{a \cdot sen\,\hat{B} \cdot sen\,\hat{6}}{sen\,\hat{1} \cdot sen\,\hat{3}}$$

$$(3{=}4) \Rightarrow \frac{P_1P_2 \cdot sen\,\hat{2}}{sen\,\hat{5}} = \frac{a \cdot sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{4}} \rightarrow P_1P_2 = \frac{a \cdot sen\,\hat{A} \cdot sen\,\hat{5}}{sen\,\hat{2} \cdot sen\,\hat{4}}$$

$$P_1P_2 = \frac{a \cdot sen\,\hat{B}\, sen\,\hat{6}}{sen\,\hat{1} \cdot sen\,\hat{3}} = \frac{a \cdot sen\,\hat{A} \cdot sen\,\hat{5}}{sen\,\hat{2} \cdot sen\,\hat{4}}$$

$$M = \frac{sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{B}} = \frac{sen\,\hat{2} \cdot sen\,\hat{4} \cdot sen\,\hat{6}}{sen\,\hat{1} \cdot sen\,\hat{3} \cdot sen\,\hat{5}}$$

$$400 = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{A} + \hat{B}$$

$$N = \hat{A} + \hat{B} = 400 - \hat{1} - \hat{2} - \hat{3} - \hat{4} - \hat{5} - \hat{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} M = \dfrac{sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{B}} \\ N = \hat{A} + \hat{B} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} sen\,\hat{A} = M \cdot sen(N - \hat{A}) \\ sen\,\hat{A} = M\left[sen\,N \cdot \cos\hat{A} - \cos N \cdot sen\,\hat{A}\right] \\ sen\,\hat{A} \cdot [1 + M \cdot \cos N] = [M \cdot senN] \cdot \cos\hat{A} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} I = 1 + M \cdot \cos N \\ J = M \cdot sen\,N \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} I\, sen\,\hat{A} = J \cdot \cos\hat{A} \\ \tan g\,\hat{A} = \dfrac{J}{I} \quad \rightarrow \quad \hat{A} = arctg\dfrac{J}{I} \\ \hat{B} = N - \hat{A} \end{array}\right\}$$

$$\theta_A^{P_1} = \theta_A^B \pm \left(\hat{6} + \hat{A}\right)$$

$$D_A^{P_1} = \frac{a \cdot sen\,\hat{B}}{sen\,\hat{1}}$$

$$X_{P_1} = X_A + D_A^{P_1} \cdot sen\,\theta_A^{P_1}$$

$$Y_{P_1} = Y_A + D_A^{P_1} \cdot \cos\theta_A^{P_1}$$

SUPUESTO PRÁCTICO

Con el objetivo de implantar a lo largo de una explotación minera a cielo abierto una red de vértices topográficos, desde los cuales realizar las diferentes actividades topográficas a desarrollar dentro de cualquier explotación minera, se llevan a cabo las siguientes actividades topográficas:

PUNTOS		DISTANCIA REDUCIDA		ANGULO HORIZONTAL	
Estación	**Visado**	**metros**	**mm**	**Grados**	**Segundos**
P1	A			62	3518
				262	3524
	B			148	1795
				348	1803
	P2			222	9730
				22	9738
	P3	2570	326	396	7978
		2570	330	196	7986
P2	P1			173	1245
				373	1245
	A			191	1191
				391	1199
	B			244	8615
				44	8621
P4	P3			211	4585
				11	4589
	P1			271	1611
				71	1615
	P5			344	7275
				144	7283
P5	P4			23	2278
				223	2280
	P1			104	2120
				304	2126
	P2			151	7738
				351	7730

Sabiendo que las coordenadas de A y B son:

A[410.256,256 / 4.802.325,444]

B[407.491,296 / 4.801.555,318]

obtener las coordenadas de los vértices P1, P2, P3, P4, y P5.

RESOLUCIÓN

Cálculo de promedios:

PUNTOS		DISTANCIA REDUCIDA		ANGULO HORIZONTAL	
Estación	Visado	metros	mm	Grados	Segundos
P1	A			62	3521
	B			148	1799
	P2			222	9734
	P3	2570	328	396	7982
P2	P1			173	1245
	A			191	1195
	B			244	8618
P4	P3			211	4587
	P1			271	1613
	P5			344	7279
P5	P4			23	2279
	P1			104	2123
	P2			151	7734

Identificación de las observaciones:

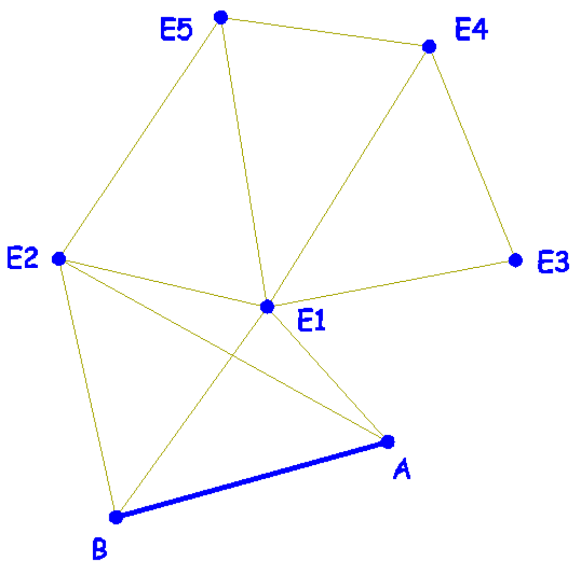


Figura Número 43.- Esquema de las observaciones realizadas en campo

Resolución de Hamsen:

$$D_A^B = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} = 2.870{,}208m.$$

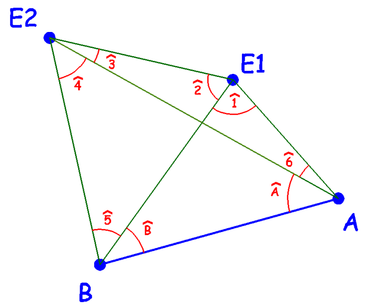


Figura Número 44.- Determinación de los ángulos del Hamsen

$$\hat{1} = 85{,}8278 \qquad \hat{2} = 74{,}7935$$

$$\hat{3} = 17{,}9950 \qquad \hat{4} = 53{,}7423$$

$$\hat{5} = 53{,}4692 \qquad \hat{6} = 21{,}3836$$

$$\left.\begin{array}{l} M = \dfrac{sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{sen\,\hat{2}\cdot sen\,\hat{4}\cdot sen\,\hat{6}}{sen\,\hat{1}\cdot sen\,\hat{3}\cdot sen\,\hat{5}} \\ N = \hat{A} + \hat{B} = 400 - \hat{1} - \hat{2} - \hat{3} - \hat{4} - \hat{5} - \hat{6} \end{array}\right\} \begin{array}{l} I = 1 + M\cdot\cos N \\ J = M\cdot sen\,N \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} \hat{A} = arctg\,\dfrac{J}{I} \\ \hat{C} = N - \hat{A} \end{array}$$

$$\hat{A} = 49{,}6641 \qquad \hat{B} = 43{,}1244$$

Resultado de las Coordenadas del Hamsen:

$$P_1 = [409.031{,}156 / 4.803.704{,}280]$$

$$P_2 = [406.906{,}765 / 4.804.192{,}316]$$

$$P_3 = [411.557{,}460 / 4.804.177{,}962]$$

Resolución de la Intersección Inversa Múltiple:

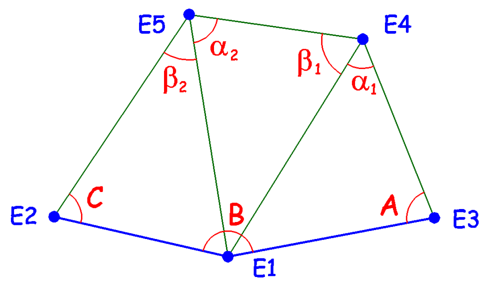


Figura Número 45.- Determinación de los ángulos de la Intersección Inversa Múltiple

$$\alpha_1 = 59{,}7026 \qquad \alpha_2 = 80{,}9144$$

$$\beta_1 = 73{,}5666 \qquad \beta_2 = 47{,}6311$$

$$\hat{B} = 173{,}8248$$

$$\left. M = \frac{sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{C}} = \frac{b \cdot sen\alpha_1 \cdot sen\alpha_2 \cdot sen\alpha_3}{a \cdot sen\,\beta_1 \cdot sen\beta_2 \cdot sen\beta_3} \right\}$$

$$I = 1 + M \cdot \cos N$$

$$J = M \cdot sen\,N$$

$$I \cdot sen\,\hat{A} = J\,\cos\hat{A}$$

$$tag\,\hat{A} = \frac{J}{I} \rightarrow \hat{A} = arctg\frac{J}{I}$$

$$\hat{C} = N - \hat{A}$$

$$\begin{matrix} P_4 = [410.681{,}866 / 4.806.359{,}769] \\ P_5 = [408.557{,}474 / 4.806.661{,}203] \end{matrix} \quad \Leftarrow \quad \begin{matrix} \hat{A} = 87{,}5036 \\ \hat{C} = 76{,}8569 \end{matrix}$$

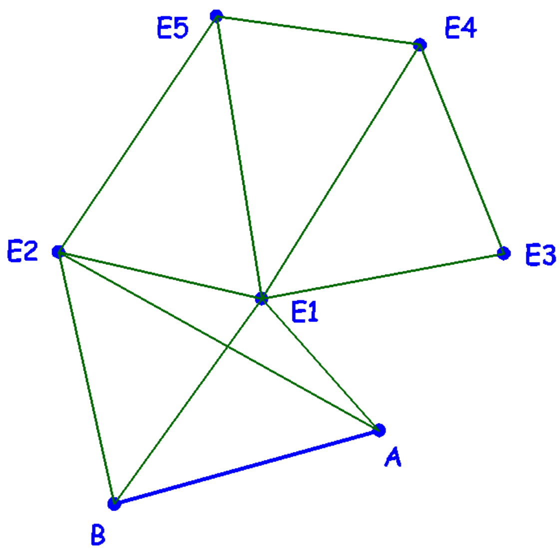


Figura Número 46.- Esquema final de las observaciones

3.2.3. EL ERROR EN LA INTERSECCIÓN INVERSA

Analizando el comportamiento del acimut frente a pequeñas variaciones angulares, en definitiva los errores angulares, se llega al análisis del error en las intersecciones inversas.

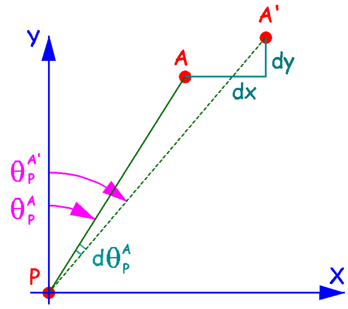


Figura Número 47.- Comportamiento del acimut frente a pequeñas desviaciones angulares

Analizando el problema matemáticamente, se deduce:

$$tg\theta_P^A = \frac{X_A - X_P}{Y_A - Y_P}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta_P^A} d\theta_P^A = \frac{Y_A - Y_P}{(Y_A - Y_P)^2} \cdot dx - \frac{X_A - X_P}{(Y_A - Y_P)^2} \cdot dy$$

$$\cos\theta_P^A = \frac{Y_A - Y_P}{D_P^A}$$

$$d\theta_P^A = \frac{Y_A - Y_P}{\left(D_P^A\right)^2} \cdot dx - \frac{X_A - X_P}{\left(D_P^A\right)^2} \cdot dy$$

Si las variaciones de acimut establecidas como errores angulares se aplican a cada una de las observaciones realizadas, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} d\theta_P^A = \dfrac{Y_A - Y_P}{\left(D_P^A\right)^2} \cdot dx - \dfrac{X_A - X_P}{\left(D_P^A\right)^2} \cdot dy \\ \cos\theta_P^A = \dfrac{Y_A - Y_P}{D_P^A} ;\ sen\,\theta_P^A = \dfrac{X_A - X_P}{D_P^A} \\ d\theta_P^A = \dfrac{\cos\theta_P^A}{D_P^A} \cdot dx - \dfrac{sen\,\theta_P^A}{D_P^A} \cdot dy \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} d\theta_P^A = \dfrac{sen\,\theta_P^A}{D_P^A} \cdot dy - \dfrac{\cos\theta_P^A}{D_P^A} \cdot dx \\ d\theta_P^B = \dfrac{sen\,\theta_P^B}{D_P^B} \cdot dy - \dfrac{\cos\theta_P^B}{D_P^B} \cdot dx \\ d\theta_P^C = \dfrac{sen\,\theta_P^C}{D_P^C} \cdot dy - \dfrac{\cos\theta_P^C}{D_P^C} \cdot dx \end{array}\right\}$$

Y si se tiene en cuenta que los ángulos de una intersección se obtienen por diferencia de lecturas o acimutes, ya se puede establecer el error angular cometido al determinar α y β:

$$\alpha = \theta_P^A - \theta_P^B \quad \Rightarrow \quad d\alpha = d\theta_P^A - d\theta_P^B$$

$$\beta = \theta_P^C - \theta_P^B \quad \Rightarrow \quad d\beta = d\theta_P^C - d\theta_P^B$$

$$d\alpha = \left[\frac{sen\theta_P^B}{D_P^B} - \frac{sen\theta_P^A}{D_P^A}\right]\cdot dy - \left[\frac{\cos\theta_P^B}{D_P^B} - \frac{\cos\theta_P^A}{D_P^A}\right]\cdot dx$$

$$d\beta = \left[\frac{sen\theta_P^C}{D_P^C} - \frac{sen\theta_P^B}{D_P^B}\right]\cdot dy - \left[\frac{\cos\theta_P^C}{D_P^C} - \frac{\cos\theta_P^B}{D_P^B}\right]\cdot dx$$

$$\frac{1}{D_P^A} = r_A \quad ; \quad \frac{1}{D_P^B} = r_B \quad ; \quad \frac{1}{D_P^C} = r_C$$

Además, la ecuación vincula otros parámetros ya conocidos y el error objeto de análisis, que en definitiva no dejan de ser más que los semidiámetros de la elipse de error:

$$d\alpha = \left[r_B \cdot sen\theta_P^B - r_A \cdot sen\theta_P^A\right]\cdot dy - \left[r_B \cdot \cos\theta_P^B - r_A \cdot \cos\theta_P^A\right]\cdot dx$$

$$d\beta = \left[r_C \cdot sen\theta_P^C - r_B \cdot sen\theta_P^B\right]\cdot dy - \left[r_C \cdot \cos\theta_P^C - r_B \cdot \cos\theta_P^B\right]\cdot dx$$

$$\left.\begin{array}{l} d\alpha \cong d\beta \cong \varepsilon_T^H \\ r_A ; r_B ; r_C = \dfrac{1}{D} \\ \theta_P^A ; \theta_P^B ; \theta_P^C \end{array}\right\} \quad dx ; dy$$

Denominando “r” a la inversa de las distancias, surge la figura geométrica que permite evaluar el error de una intersección inversa, tal y como se puede apreciar en la siguiente figura:

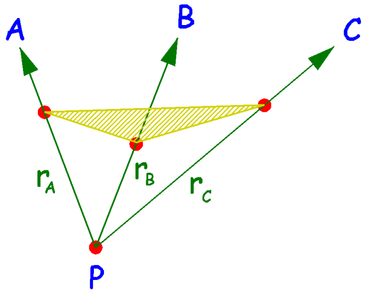


Figura Número 48.- Geometría fundamental del error en la intersección inversa

que, en definitiva, permiten obtener el error en la intersección inversa.

$$error = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{\varepsilon_T^H \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot S} \cdot \sqrt{L_{mayor}^2 + L_{medio}^2}$$

Siendo:

$$\varepsilon_T^H = \sqrt{\varepsilon_v^2 + \varepsilon_d^2 + \varepsilon_p^2 + \varepsilon_l^2}$$

L_{mayor} = lado mayor triángulo
L_{menor} = lado medio triángulo
S = superficie triángulo

4. MÉTODOS BASADOS EN EL EMPLEO EXCLUSIVO DEL DISTANCIÓMETRO

4.1. LA DISTANCIOMETRÍA

Siguiendo un desarrollo paralelo a los métodos angulares, las posibles operaciones o procedimientos sustitutivos de las intersecciones directas, intersecciones inversas y triangulación serían la intersección directa de distancias, intersección inversa de distancias y trilateración, aunque en el caso anterior sería muy sencillo pasar, en cálculos, de distancia a ángulo y seguir la metodología habitual de la forma siguiente.

El conocimiento de (x_I,y_I) y (x_{II},y_{II}) permite conocer:

$$D_I^{II} = \sqrt{(x_{II} - x_I)^2 + (y_{II} - y_I)^2}$$

Medidas D_I^V y D_{II}^V, se calcula α ó β según:

$$\left(D_{II}^V\right)^2 = \left(D_I^{II}\right)^2 + \left(D_i^V\right)^2 - 2 \cdot D_I^{II} \cdot D_I^V \cdot \cos\alpha$$

$$\alpha = Arc\cos\left(\frac{\left(D_{II}^V\right)^2 - \left(D_I^{II}\right) - \left(D_I^V\right)^2}{2 \cdot D_I^{II} \cdot D_I^V}\right)$$

4.2. INTERSECCIÓN DE DISTANCIAS

En el establecimiento de la posición de puntos por medio de la medición de distancias, para el caso de dos pilares $P_I(x_I,y_I)$ y $P_{II}(x_{II},y_{II})$, establecidas las distancias, las coordenadas del punto V se obtienen en el sistema referencial definido por los pilares mediante las expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} (x_V - x_I)^2 + (y_V - y_I)^2 = \left(D_I^V\right)^2 \\ (x_V - x_{II})^2 + (y_V - y_{II})^2 = \left(D_{II}^V\right)^2 \end{array}\right\}$$

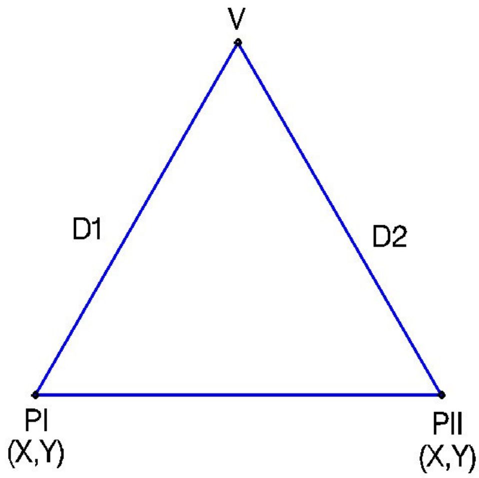


Figura Número 49.- Esquema genérico de la trilateración

El sistema se caracteriza porque tiene dos ecuaciones con dos incógnitas, por lo que se puede resolver de forma sencilla y estricta. Este procedimiento de resolución otorga a la distancia dos propiedades características que la diferencian del observable angular, la primera es la total independencia del observador, y la segunda, y no por ello menos importante, la pérdida de protagonismo de la posición del instrumento topográfico en los vértices de coordenadas conocidas, quedando el concepto de intersección directa e inversa restringido a la determinación de la ubicación del instrumento dentro de los vértices del triángulo.

Al igual que en las observaciones angulares es necesario continuar con los sistemas en los que se observa la distancia de forma múltiple, obteniendo un sistema más complejo, pero con redundancia de datos, que permite obtener comprobaciones y errores, generando así las llamadas intersecciones múltiples de distancia.

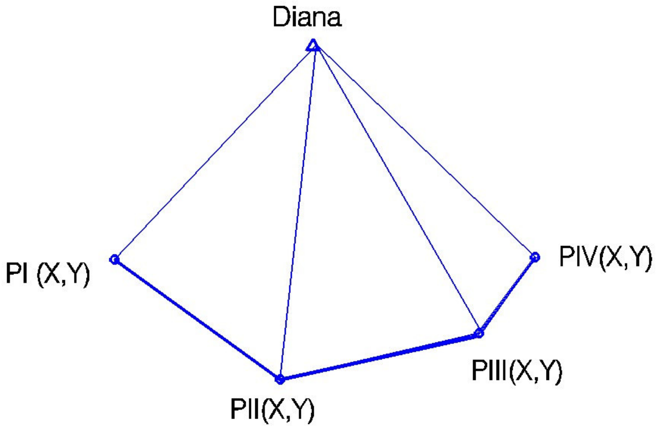


Figura Número 50.- La distancia en la intersección inversa múltiple

$$(x_{PI} - x_D)^2 + (y_{PI} - y_D)^2 = (D_{PI}^D)^2$$
$$(x_{PII} - x_D)^2 + (y_{PII} - y_D)^2 = (D_{PII}^D)^2$$
$$(x_{PIII} - x_D)^2 + (y_{PIII} - y_D)^2 = (D_{PIII}^D)^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x_P - x_D)^2 + (y_P - y_D)^2 = (D_P^D)^2$$

El tradicional sistema indeterminado, pero con más ecuaciones que incógnitas, requiere de un procedimiento que lo sustituya, lo mecanice y consiga tener un tratamiento estadístico adosado. En este caso, en el que existen más ecuaciones que incógnitas, existe redundancia de datos y partiendo de la matriz de residuos, se puede obtener interesante información que refleje la bondad del resultado obtenido.

4.3. CÁLCULO DE LA TOLERANCIA

Considerando que al realizar las dos observaciones distanciométricas necesarias en toda intersección directa se comete un error en la medida de la distancia ε_D, se genera una zona de incertidumbre en la que es previsible que se encuentre realmente la posición del punto objeto de determinación, tal y como se puede apreciar en la siguiente figura:

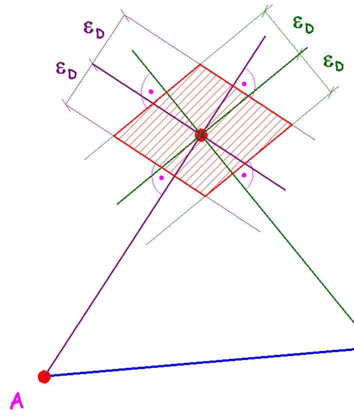


Figura Número 51.- Afección del error distanciométrico en las intersecciones directas

Considerando que en el entorno de la intersección de visuales, las desviaciones distanciométricas se pueden considerar perpendiculares, y que la probabilidad de que se produzcan las máximas desviaciones en ambas visuales es mínima, se encaja en el interior del polígono una elipse cuyo semieje mayor se considera la tolerancia de las intersecciones directas distanciométricas.

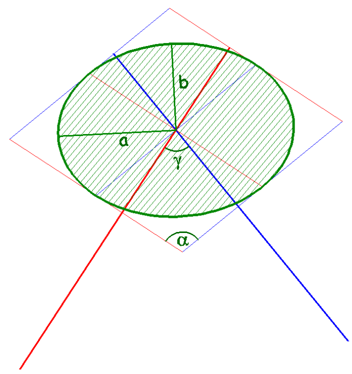


Figura Número 52.- Elipse de error en las intersecciones directas distanciométricas

Para el establecimiento del semieje mayor de la elipse de error es necesario apoyarse en la teoría de los diámetros conjugados de una elipse formulada por Apolonio:

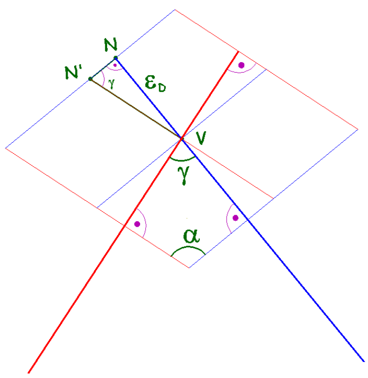


Figura Número 53.- Valor del diámetro conjugado de la elipse

En la figura anterior se puede apreciar que en el triángulo VNN', VN' es el diámetro conjugado, cuyo valor es de fácil obtención partiendo de que al valor VN coincide con el valor del error absoluto en la medición de las distancias, resultando las siguientes expresiones:

$$VN = \varepsilon_D$$

$$sen\ \gamma = \frac{VN}{VN'} \Rightarrow VN' = \frac{VN}{sen\gamma}$$

$$VN' = \frac{\varepsilon_D}{sen\ \gamma}$$

Aplicando la teoría de los diámetros conjugados se puede obtener el semieje mayor de la elipse de error mediante las siguientes expresiones:

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot VN'^2$$

$$2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot VN'^2 \cdot sen\ \gamma$$

Sumando las dos expresiones anteriores, resulta:

$$a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot VN'^2 \cdot (1 + sen\ \gamma)$$

$$(a+b)^2 = 2 \cdot VN'^2 \cdot (1 + sen\gamma)$$

$$(a+b) = \sqrt{2} \cdot VN' \cdot \sqrt{1 + sen\ \gamma}$$

Restando esas mismas expresiones:

$$a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot VN'^2 \cdot (1 - sen\ \gamma)$$

$$(a-b)^2 = 2 \cdot VN'^2 \cdot (1 - sen\gamma)$$

$$(a-b) = \sqrt{2} \cdot VN' \cdot \sqrt{1 - sen\ \gamma}$$

Sumando ahora las dos expresiones deducidas anteriormente, se obtiene:

$$2 \cdot a = \sqrt{2} \cdot VN' \left[\sqrt{1 + sen\ \gamma} + \sqrt{1 - sen\ \gamma}\right]$$

$$a = \frac{\sqrt{2} \cdot VN'}{2} \left[\sqrt{1 + sen\ \gamma} + \sqrt{1 - sen\ \gamma}\right]$$

Dada la siguiente igualdad trigonométrica:

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{1 + sen\ \gamma} + \sqrt{1 - sen\ \gamma}\right] = \cos\frac{\gamma}{2}$$

Se puede sustituir, obteniendo una expresión mucho más reducida del semieje mayor de la elipse:

$$a = \sqrt{2} \cdot VN' \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

Sustituyendo el valor de VN' ya determinando y la igualdad trigonométrica:

$$VN' = \frac{\varepsilon_D}{sen\ \gamma} \qquad ; \qquad sen\,\gamma = 2 \cdot sen\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{2} \cdot \ \varepsilon_D \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{2 \cdot sen\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$$

Conformando definitivamente dicho semieje de la elipse de error la tolerancia o error esperado al realizar una intersección directa angular.

$$a = \frac{\varepsilon_D}{\sqrt{2} \cdot sen\ \frac{\gamma}{2}}$$

siendo:

L.- distancia media entre los dos pilares y la diana.

ε.- error absoluto en la medida de la distancias.

γ.- ángulo intersección.

SUPUESTO PRÁCTICO

Definida una base topográfica en el terreno:

A[423.147,915 / 4.800.399,456]

B[424.007,864 / 4.800.298,735]

obtened las coordenadas de un punto P sabiendo que para la determinación de éstas se ha llevado a cabo una intersección de distancias, resultando los siguientes valores:

$$D_P^A = 615{,}743m. \qquad ; \qquad D_P^B = 938{,}425m.$$

Sabiendo que el distanciómetro con el que se ha realizado la medición tiene un error absoluto de 6 mm. + 4 ppm., obtened la tolerancia esperada de la medición.

Nota: Con el objetivo de homogenizar los resultados considerad que estacionado el distanciómetro en el punto P, el punto A se encuentra a la izquierda del punto B.

RESOLUCIÓN

Coordenadas del punto "P":

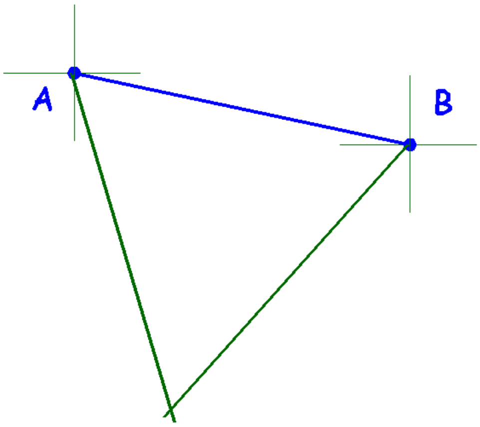


Figura Número 54.- Geometría de la observación distanciométrica

Base topográfica:

$$\Delta x = 859{,}949 \qquad \Delta y = 100{,}721$$

$$\theta_A^B = 100 + arctg\frac{100{,}721}{859{,}949} = 107{,}4225^g$$

$$D_A^B \sqrt{100{,}721^2 + 859{,}949^2} = 865{,}827m.$$

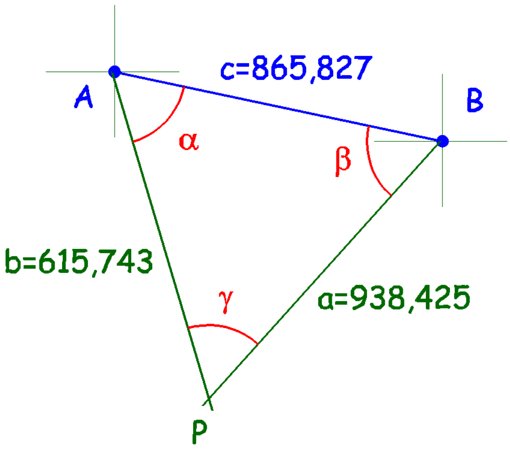


Figura Número 55.- Datos disponibles de la intersección distanciométrica

Ángulos de la intersección:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$\gamma = ar\cos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\cdot a \cdot b}\right)$$

$$\gamma = ar\cos\left(\frac{615{,}743^2 + 938{,}425^2 - 865{,}827^2}{2\cdot 938{,}425 \cdot 615{,}743}\right) = 70{,}8953^g$$

$$\frac{865{,}827}{sen\,70{,}8935} = \frac{938{,}425}{sen\,\alpha} \quad => \quad \alpha = 85{,}0465^g$$

$$\frac{865{,}827}{sen\,70{,}8935} = \frac{615{,}743}{sen\,\beta} \quad => \quad \beta = 44{,}0582^g$$

Coordenadas del punto P:

$$\theta_A^P = \theta_A^B + \alpha = 107{,}4225 + 85{,}0465$$

$$D_A^P = 615{,}743$$

$$X = 423.220{,}585$$

$$Y = 4.799.788{,}016$$

Error planimétrico del punto P:

$$Error = \frac{D \cdot \varepsilon}{\sqrt{2} \cdot sen\frac{\gamma}{2}} = \frac{D \cdot \frac{E_{ABS}}{D}}{\sqrt{2} \cdot sen\frac{\gamma}{2}} = \frac{E_{ABS}}{\sqrt{2} \cdot sen\frac{\gamma}{2}}$$

$$E_{ABS} = \frac{(e_e + e_p) + (Amm + Bppm)}{\sqrt{n}} = \frac{20 + 6 + 4}{\sqrt{2}} \approx 21mm.$$

$$Error = \frac{21}{\sqrt{2} \cdot sen\frac{70{,}8953}{2}} = 28mm. \cong 3cm.$$

Error = 4 cm.