

# **METODOLOGÍAS TOPOGRÁFICAS CLÁSICAS**



## ÍNDICE

<b>1- INTRODUCCIÓN GENERAL.....</b>	<b>5</b>
<b>1.1.- NECESIDAD DEL ESTABLECIMIENTO METODOLÓGICO.....</b>	<b>5</b>
<b>1.2.- PLANTEAMIENTO GENERAL.....</b>	<b>6</b>
<b>1.3.- TECNICAS ELEMENTALES DE CAMPO Y GABINETE. ....</b>	<b>8</b>
<b>1.3.1.- Observables en campo. ....</b>	<b>8</b>
<b>1.3.2.- Observación sin desorientación ....</b>	<b>9</b>
<b>1.3.3.- Observación con desorientación. ....</b>	<b>11</b>
<b>1.4.- PRINCIPALES METODOLOGÍAS TOPOGRÁFICAS.....</b>	<b>12</b>
<b>1.4.1.- Introducción.....</b>	<b>12</b>
<b>1.4.2.- Aspectos generales de las metodologías.....</b>	<b>13</b>
<b>1.4.3.- Concepto de elipse de error. ....</b>	<b>15</b>
<b>2- MÉTODO DE RADIACIÓN.....</b>	<b>17</b>
<b>2.1.- CONCEPTO Y RESOLUCIÓN.....</b>	<b>17</b>
<b>2.2.- TOLERANCIAS.....</b>	<b>17</b>
<b>3- MÉTODO DE INTERARIO O POLIGONAL.....</b>	<b>20</b>
<b>3.1.- CONCEPTO Y TERMINOLOGÍA.....</b>	<b>20</b>
<b>3.2.- TOLERANCIAS.....</b>	<b>24</b>
<b>3.3.- COMPENSACIÓN DE UN ITINERARIO.....</b>	<b>27</b>
<b>4- NIVELACION TRIGONOMETRICA SIMPLE. ....</b>	<b>29</b>
<b>4.1.- CONCEPTO Y RESOLUCIÓN.....</b>	<b>29</b>
<b>4.2.- TOLERANCIA.....</b>	<b>30</b>
<b>5- NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA COMPUESTA.....</b>	<b>31</b>
<b>5.1.- CONCEPTO Y RESOLUCIÓN.....</b>	<b>31</b>
<b>5.2.- TOLERANCIA Y COMPENSACIÓN.....</b>	<b>31</b>
<b>6- INTERSECCIÓN DIRECTA. ....</b>	<b>33</b>
<b>6.1.- CONCEPTOS PREVIOS.....</b>	<b>33</b>
<b>6.2.- RESOLUCIÓN. ....</b>	<b>33</b>
<b>6.3.- TOLERANCIAS.....</b>	<b>35</b>
<b>7- INTERSECCIÓN INVERSA.....</b>	<b>38</b>
<b>7.1.- INTRODUCCIÓN Y CONCEPTO. ....</b>	<b>38</b>
<b>7.2.- RESOLUCIÓN. ....</b>	<b>38</b>





# 1- INTRODUCCIÓN GENERAL.

## 1.1.- NECESIDAD DEL ESTABLECIMIENTO METODOLÓGICO.

La finalidad de todo trabajo topográfico es la observación en campo de una red de puntos que permita en gabinete, posteriormente, obtener un modelo planimétrico y altimétrico representable gráficamente a una escala definida. El trabajo es realizado por un equipo humano que emplea un instrumental y que sigue una metodología preestablecida.

Normalmente, la ejecución de un determinado trabajo topográfico tiene los siguientes condicionantes:

- Se utiliza un equipo humano que dispone de un abanico de aparatos topográficos concreto, con características determinadas.
- Se desea obtener una determinada precisión, exigida tanto en planimetría como en altimetría.

Por tanto, se precisa conocer la tolerancia del mencionado trabajo, que será función del instrumental disponible y de la metodología utilizada.

Partiendo de los condicionantes anteriores, se deberá plantear e trabajo empleando unos aparatos topográficos y una metodología que garantice que la incertidumbre que siempre existe en toda labor de medir quede por debajo de la precisión exigida, es decir: tolerancia < precisión exigida.

Por lo tanto, se entenderá como tolerancia el error máximo esperable, lo cual será objeto de estudio. La precisión exigida vendrá dada por los condicionantes establecidos en el trabajo topográfico, definidos a partir del error máximo que se permite en él. Su valor dependerá de múltiples factores en función del objeto de la medición. No obstante, muchas veces, tal como se ha mencionado, el objeto del trabajo topográfico es la medida de una serie de puntos para general un modelo planimétrico y altimétrico. En este caso la precisión exigida vendrá dada, de forma general, por la escala y la equidistancia del modelo a generar:

- La precisión planimétrica vendrá definida a partir de la escala de la representación, a partir del concepto de límite de percepción visual.
- La precisión altimétrica exigida es frecuente que se defina a partir de la equidistancia de las curvas de nivel del modelo altimétrico, quedando establecida en  $\frac{1}{4}$  de ésta.

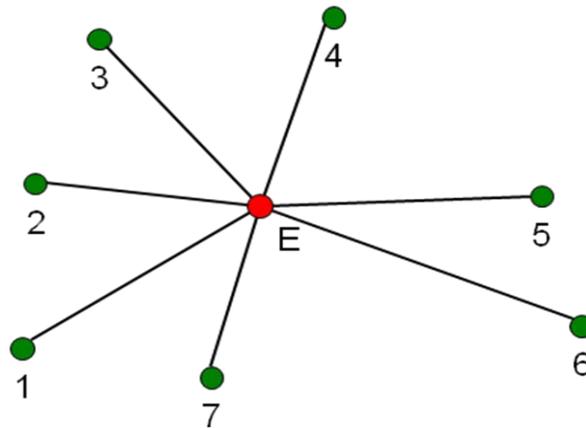
El en caso en que la tolerancia sea mayor que la precisión exigida habrá que replantearse el trabajo topográfico, bien sea modificando el equipo humano, instrumental o el método seguido para la observación, hasta cumplir la condición establecida.

Una vez cumplida la condición tolerancia < precisión exigida, se procede a realizar el conjunto de observaciones topográficas. Es habitual encuadrar el trabajo en redes topográficas y geodésicas de mayor orden o precisión, acabando la observación en un punto de coordenadas conocidas. La diferencia entre estas coordenadas y las calculadas da lugar al error de cierre, que debe ser menor que la precisión exigida. Además, este error de cierre puede ser "repartido" entre las medidas realizadas en un proceso denominado compensación a partir del cual se estima, idealmente, que el error queda reducido a la mitad, debiendo, en todo caso, ser menor que la precisión.

## 1.2.- PLANTEAMIENTO GENERAL

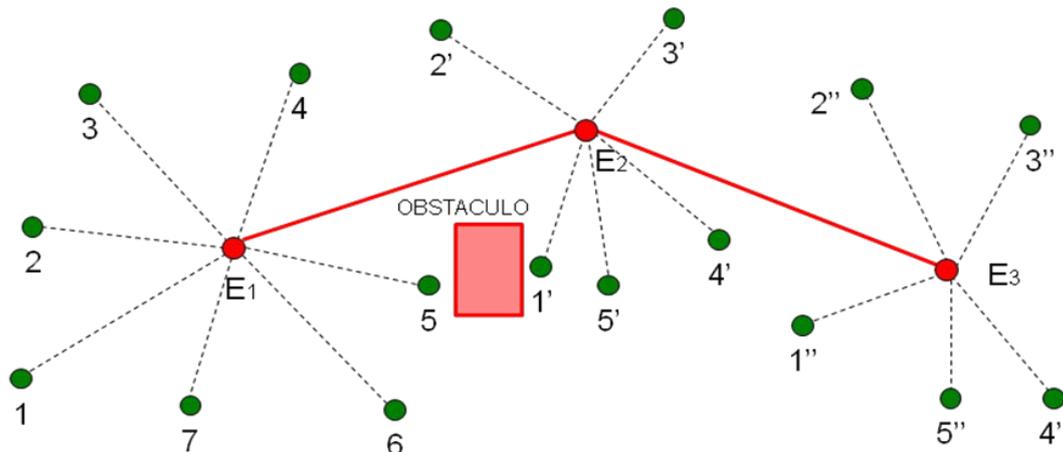
Habitualmente, el objetivo de un levantamiento topográfico es la obtención de coordenadas planimétricas ( $X, Y$ ) y altimétricas ( $Z$ ) de forma conjunta. A continuación se enumeran las combinaciones de métodos topográficos planimétricos y altimétricos más frecuentes, así como el instrumental empleado en cada uno.

El caso más sencillo consiste en definir la posición de un punto desde una estación de coordenadas conocidas. En planimetría se emplea el método de radiación y en altimetría, el de nivelación trigonométrica. En la actualidad, las radiaciones se efectúan empleando estaciones totales y un prisma como elemento reflector.



**Figura 1.- Caracterización de la radiación.**

Cuando no es posible radiar todo el área de trabajo desde una única estación, se deben establecer varias estaciones intervisibles entre sí, de manera que desde el conjunto de las mismas sea posible observar toda la superficie del levantamiento. Así, se denominará base topográfica al conjunto de dos puntos o vértices topográficos, de coordenadas conocidas respecto de un sistema referencial dado e intervisibles entre sí.



**Figura 2.- Caracterización de la poligonal.**

En este caso, planimétricamente se utiliza el método de itinerario, o poligonal, y altimétricamente la nivelación trigonométrica. Es importante destacar que la precisión que se puede conseguir con este método está directamente relacionada con la precisión que se obtenga en el “encadenamiento” de las sucesivas estaciones. Como se verá posteriormente, al estudiar los diferentes métodos topográficos, a veces la nivelación trigonométrica no garantiza en un itinerario la precisión requerida, siendo preciso acudir a un método que proporcione mejores precisiones altimétricas que, como se ha estudiado, es la nivelación geométrica, es decir, la nivelación ejecutada con nivel. De forma

genérica, a este método de trabajo se le llama taquimetría compuesta o, como se denomina frecuentemente, itinerario o poligonal.

Cuando la distancimetría electrónica no estaba desarrollada para establecer las coordenadas planimétricas de un punto se utilizaban metodologías exclusivamente angulares o intersecciones. Hoy día, si bien han perdido gran parte de su vigencia, se estudiarán ya que, en ciertas ocasiones son de utilidad, tal como se expone más adelante.

### 1.3.- TECNICAS ELEMENTALES DE CAMPO Y GABINETE.

#### 1.3.1.- Observables en campo.

En este apartado se va a exponer, de forma completa, la metodología a seguir para realizar las observaciones de campo, que serán comunes para cualquier método de trabajo que se quiera utilizar. La nomenclatura que se emplea queda reflejada en la figura y aunque se grafía para el caso más habitual (estación total topográfica) es fácilmente identificable para cualquier otro aparato topográfico de los denominados completo o casi completos (evalúan los dos ángulos y las distancias o simplemente los dos ángulos).

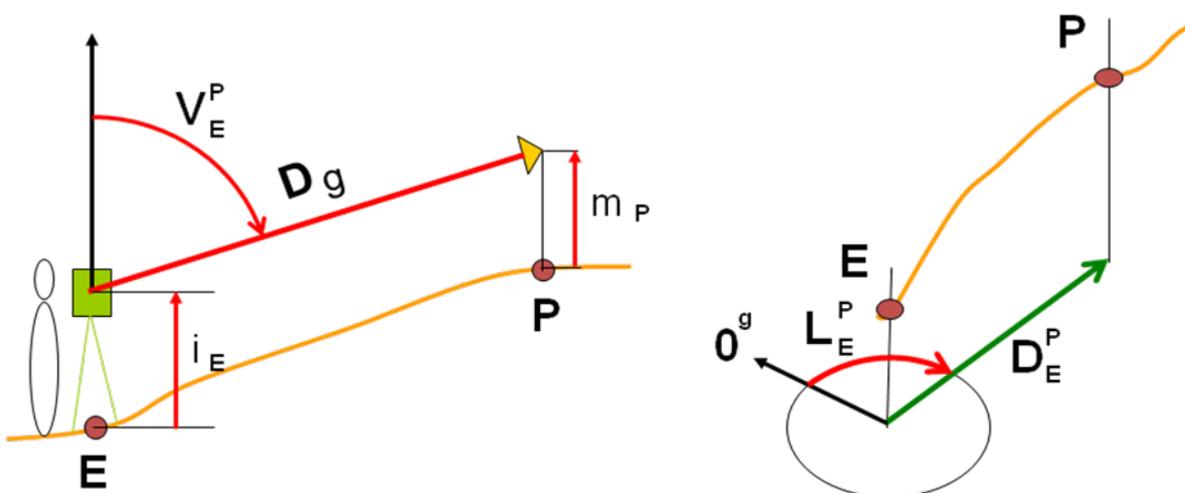


Figura 30- La observación en campo

Los elementos intervinientes son los siguientes:

- Ángulo cenital:  $V_E^P$ . Es el ángulo vertical con el que se observa desde la estación A el punto P. Se supone, como es habitual con los instrumentos actuales, que el aparato es cenital, es decir, que el origen de ángulos verticales en el cenit.

- Lectura horizontal:  $L_E^P$ . Es el ángulo horizontal con el que se observa desde la estación E al punto P a partir de una orientación establecida. Es el valor que se lee en el aparato para una posición dada del origen angular.
- Distancia geométrica:  $Dg_E^P$ . Desde el centro geométrico del instrumento hasta el punto observado.
- Distancia reducida:  $D_E^P$ . Distancia desde la estación E hasta el punto P, proyectada sobre el plano horizontal.

En primer lugar, se estaciona el aparato en el primer punto que se ha elegido como estación, denominada E. Se nivelará y se anota la altura del aparato ( $i_E$ ). En caso de emplear estación, se medirán la temperatura y la presión atmosféricas para efectuar, si procede, correcciones meteorológicas.

A continuación se orienta el aparato planimétricamente. Es importante recordar que el limbo horizontal, a diferencia del vertical, no tiene un origen fijo, constante en cualquier trabajo, sino que debe ser establecido explícitamente en todo levantamiento.

Tanto en el tratamiento de ángulos horizontales como de ángulos verticales, se pueden realizar observaciones en círculo directo (CD) exclusivamente o en círculo directo y círculo inverso (CD y CI), dependiendo de la instrumentación, metodología o finalidad del trabajo. En este último supuesto, es necesario evaluar el ángulo promedio.

También se anotará la altura a la que se encuentra el prisma ( $m_p$ ), necesario para las determinaciones altimétricas.

### 1.3.2.- Observación sin desorientación

Consiste en situar el origen de ángulos horizontales ( $0^\circ$ ) según una alineación de referencia asociada al tipo de representación planimétrica que se desea establecer, es decir, se hace coincidir el eje de ordenadas con el origen de ángulos horizontales. Para mantener esta coincidencia normalmente se eligen puntos lejanos, que resultan fácilmente identificables para posteriores orientaciones desde la estación E, dándoles una correcta lectura.

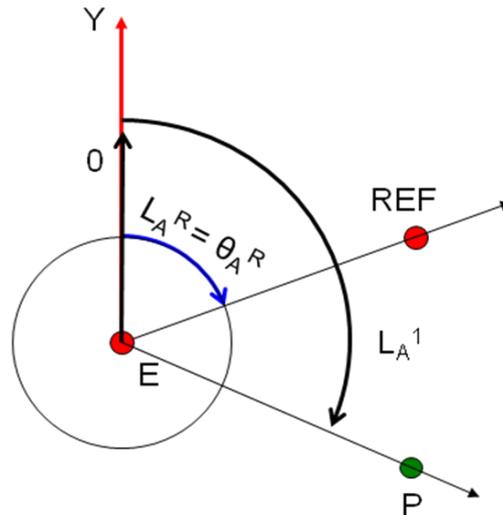


Figura 4.- Observación angular horizontal orientada.

De esta forma, sabiendo las coordenadas de E y R, se conoce con exactitud la situación del eje de ordenadas y, por tanto, el inicio de lectura de los ángulos horizontales. Es suficiente otorgar a la referencia R una lectura  $L_E^R$  igual al acimut definido por las coordenadas de E y R, es decir,  $L_E^R = \theta_E^R$  para que todas las restantes lecturas desde E sean verdaderos acimutes.

La relación entre los parámetros topográficos en planta (acimut y distancia reducida) y las coordenadas de los puntos es directa.

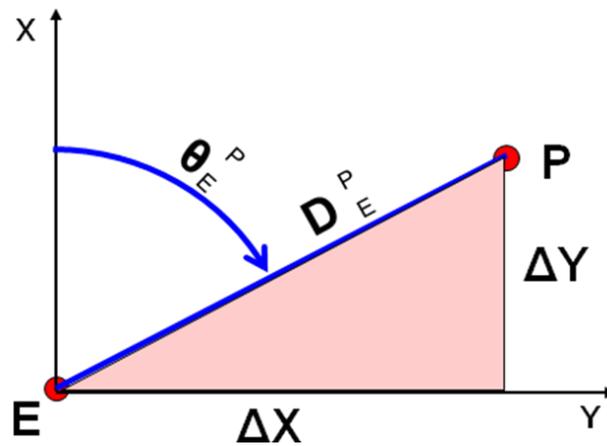


Figura 5.- Relaciones fundamentales.

$$\Delta X_E^P = D_E^P \operatorname{sen} \theta_E^P$$

$$\Delta Y_E^P = D_E^P \operatorname{cos} \theta_E^P$$

$$\operatorname{tg} \theta_E^P = \frac{X_P - X_E}{Y_P - Y_E} = \frac{\Delta X_E^P}{\Delta Y_E^P}$$



$$D_E^P = \sqrt{(X_P - X_E)^2 + (Y_P - Y_E)^2}$$

### 1.3.3.- Observación con desorientación.

En la toma de información planimétrica puede suceder que, por diversos motivos, no se pueda hacer coincidir en campo, en el momento de la observación, el eje de ordenadas de la referenciación utilizada con el eje inicializador de ángulos. Es caso muy frecuente disponer de una base, es decir, dos vértices topográficos (puntos bien materializados en campo), intervisibles entre sí, y comenzar la captura de puntos a partir de ellos, aun sin conocer sus coordenadas. Se coloca el eje de inicialización angular horizontal con respecto a uno de ellos, estando el instrumento estacionado en el otro y se completa una campaña de datos. Con posterioridad se transforman las lecturas en acimutes.

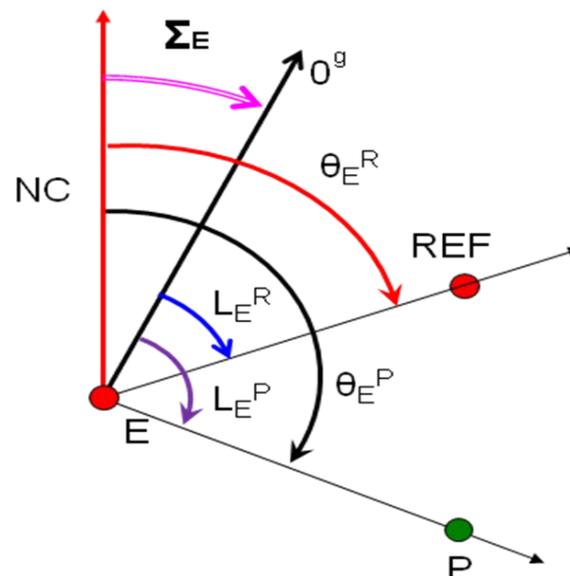


Figura 6.- Caracterización de la desorientación.

El proceso seguido se puede resumir en los siguientes pasos:

- En primer lugar se observa una referencia, es decir, un punto que forme base topográfica con el punto estación. Se suele observar en círculo directo e inverso, obteniéndose la lectura  $L_E^R$ .
- Posteriormente, se observan los puntos de los cuales se desea obtener sus coordenadas, obteniéndose, entre otros, la lectura:  $L_E^P$

- Cuando se vaya a realizar el cálculo de las coordenadas de los puntos observados, a partir de las coordenadas del punto estación y la referencia, se calcula el acimut correspondiente:

$$\operatorname{tg} \theta_E^P = \frac{\Delta X_E^P}{\Delta Y_E^P}$$

- Se calcula la desorientación, que será una constante del estacionamiento:

$$\theta_E^R = L_E^R + \Sigma_E \Rightarrow \Sigma_E = \theta_E^R - L_E^R$$

- Esta desorientación se aplicará a todos y cada uno de los puntos observados a fin de conocer el acimut a cada uno de ellos, necesario para el cálculo de las coordenadas planimétricas:

$$\theta_E^P = L_E^P + \Sigma_E$$

Es importante volver a destacar que la determinación correcta de la desorientación afecta a todos y cada uno de los acimutes calculados y, por lo tanto, a las coordenadas que se obtienen. De esta forma, es habitual, para minimizar errores, observar a la referencia de círculo directo y círculo inverso.

## 1.4.- PRINCIPALES METODOLOGÍAS TOPOGRÁFICAS.

### 1.4.1.- Introducción.

Es habitual tratar las diversas metodologías topográficas bajo el criterio de la participación por objetivos planimétricos y altimétricos. De esta forma es común entender esta clasificación:

- Métodos planimétricos:

Radiación

Itinerario

Intersección

- Métodos altimétricos:

Nivelación geométrica

Nivelación trigonométrica

En este apartado se establecen las directrices básicas de los diversos métodos, tratándose en cada bloque particular la aplicación concreta y caracterizada.

### 1.4.2.- Aspectos generales de las metodologías.

En este apartado tan solo se establecen las bases de los tratamientos individualizados y los bloques de aplicación concreta en los restantes capítulos.

#### A) Determinaciones planimétricas.

##### a)- Radiación e itinerario o poligonal.

Un punto queda caracterizado en planta tras la definición del acimut (o lectura) conociendo la desorientación y la distancia reducida.

En el caso de un itinerario o poligonal, ésta se puede considerar como una sucesión encadenada de radiaciones, que permite determinar las coordenadas de las diferentes estaciones de que consta la poligonal.

##### b)- Intersecciones.

Las intersecciones son metodologías topográficas planimétricas que mediante la observación angular permiten determinar las coordenadas de un cierto punto. Se pueden distinguir dos tipos de intersecciones:

En primer lugar la intersección directa pretende el posicionamiento de un determinado punto a partir de las observaciones angulares realizadas desde una base topográfica:

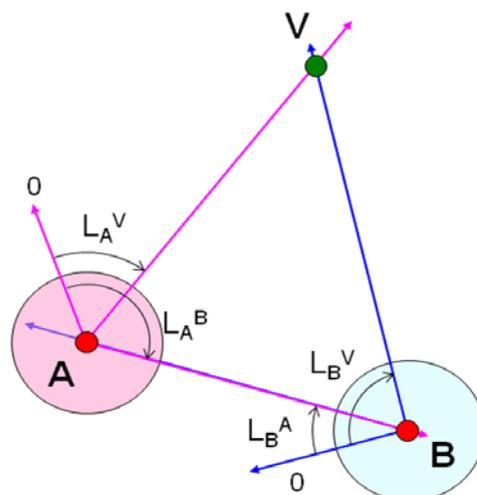
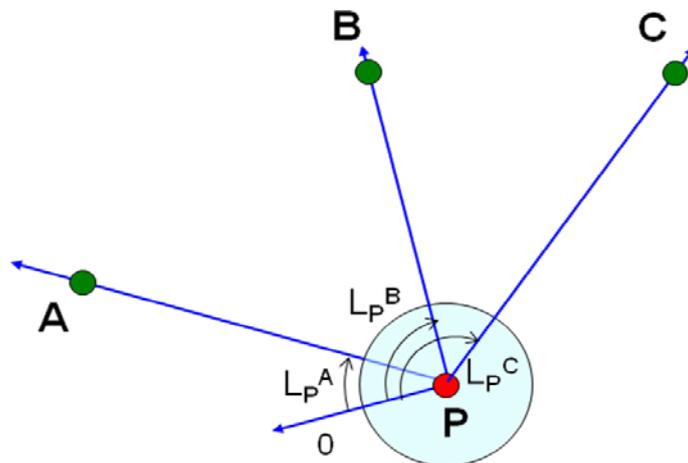


Figura 7.- Determinación de una intersección directa.

A partir de las lecturas realizadas y obteniendo la distancia reducida entre los puntos de la base topográfica, A-B, a partir de sus coordenadas, se pueden obtener los ángulos internos del triángulo así definido. Resolviendo este triángulo se obtienen las demás distancias, que junto con los acimutes caracterizarán las coordenadas del punto visado, V.

En segundo lugar, la intersección inversa pretende el posicionamiento de un punto estacionando el teodolito en él y realizando observaciones angulares a tres puntos de coordenadas conocidas. Es posible la resolución de la figura así creada mediante el denominado método de Pothenot.



**Figura 8.- Determinación de una intersección inversa.**

Existe otra variante, denominada método de Hansen, que no se describe al considerarse que ha perdido toda vigencia.

## **B) Determinaciones altimétricas**

### a) Nivelación trigonométrica.

Para calcular el desnivel del punto B respecto al punto A se estaciona en A y se obtienen los siguientes datos:

- Angulo cenital:  $V_A^B$
- Altura de jalón o mira:  $m_B$
- Distancia reducida:  $D_A^B$
- Altura del aparato:  $i_A$

$$\Delta Z_A^B = i_A - m_B + D_A^B \cdot \cot g V_A^B + 0.42 \frac{D_A^B{}^2}{R}$$

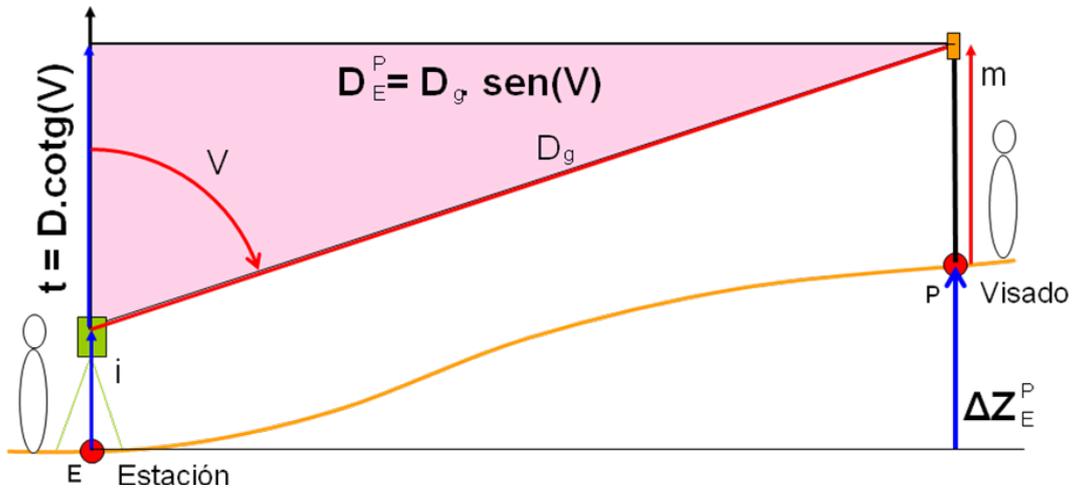


Figura 9.- Nivelación trigonométrica.

b) Nivelación geométrica

Para calcular el desnivel existente entre el punto B respecto al punto A se estaciona el nivel y se realizan dos lecturas a las estadias verticales. La determinación es inmediata.

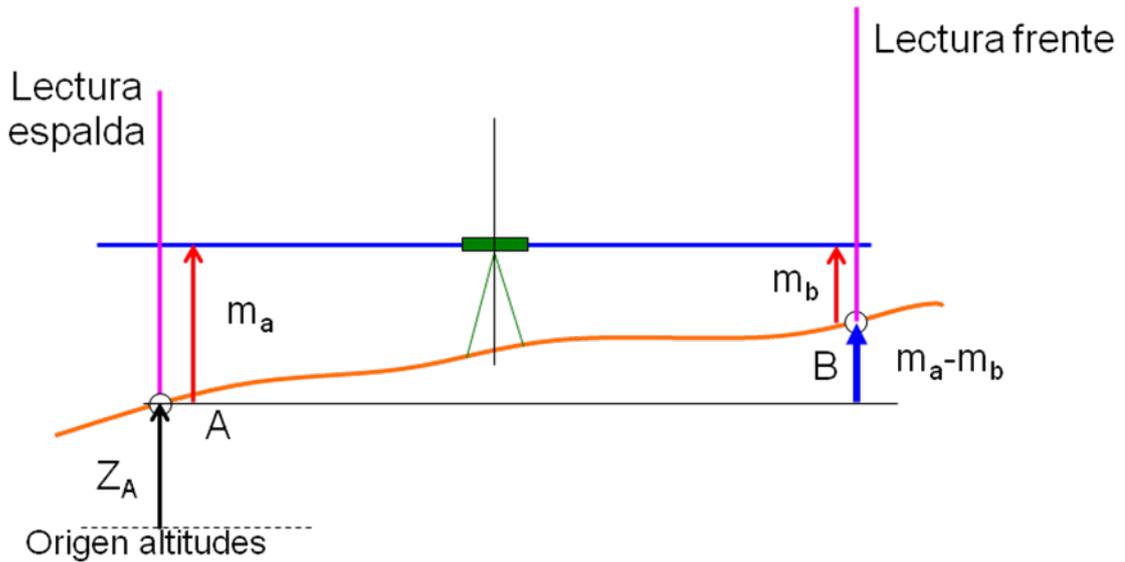


Figura 10.- Nivelación geométrica.

$$\Delta Z_A^B = m_a - m_b$$

1.4.3.- Concepto de elipse de error.

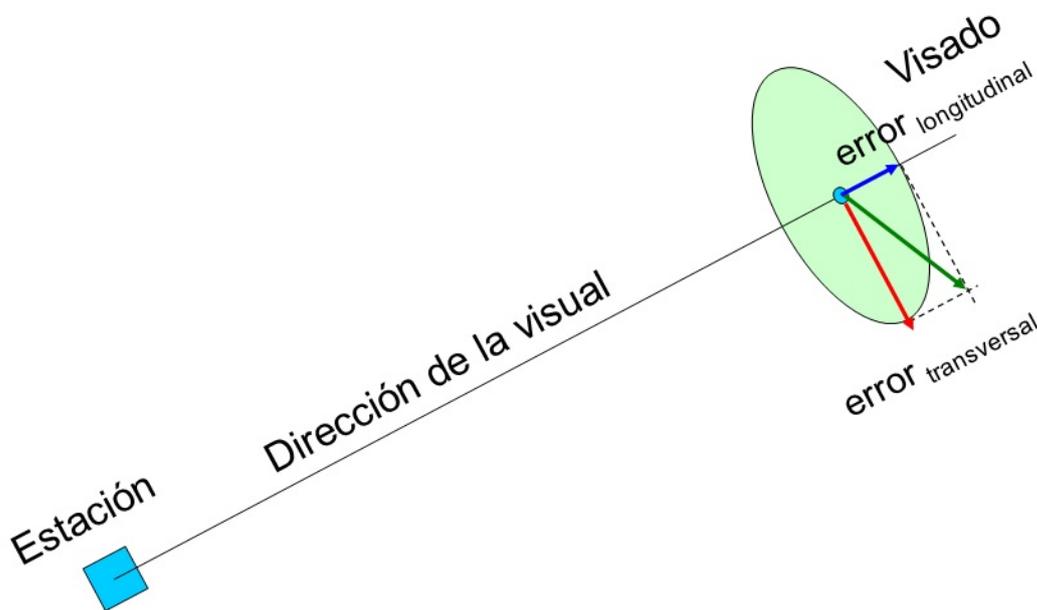
Cuando en una determinada operación de medida existen varias causas independientes del error accidental, el error máximo resultante es la componente

cuadrática de los citados errores accidentales máximos. Pero cuando las causas de error independientes actúan en direcciones perpendiculares entre sí, el error máximo que puede presentarse como consecuencia de tales errores individuales no es la componente cuadrática correspondiente, sino igual al mayor de aquellos errores independientes, dada la poquísima probabilidad que existe de que sean simultáneos los dos valores máximos.

$$e = \sqrt{e_A^2 + e_B^2}$$

Para que pueda producirse el valor  $e$  se tienen que dar los máximos valores  $e_A$  y  $e_B$ , suceso poco probable.

Se adopta como criterio considerar el mayor radio-vector determinado por la intersección de las direcciones establecidas y por los valores ( $e_A$  y  $e_B$ ), que definen los valores de los dos semidiámetros. Lógicamente, se determina el valor del máximo radio-vector por su coincidencia con el mayor de los dos semidiámetros  $e_A$  y  $e_B$ .



**Figura 11- Composición de errores máximos.**

En el caso de la radiación y la poligonal existirá un error en la dirección de la visual, y por lo tanto relacionado con la medida de la distancia (error longitudinal); y un error perpendicular a ella, error transversal, relacionado con el error angular.

## 2- MÉTODO DE RADIACIÓN.

### 2.1.- CONCEPTO Y RESOLUCIÓN.

La radiación es un método topográfico que permite determinar la posición de un punto respecto a otro a través de mediciones angulares y de distancia.

Definida así la radiación, el planteamiento o situación más frecuente será la siguiente:

Se conocen las coordenadas de un punto  $A(X_A, Y_A, Z_A)$  y el ángulo que forma la dirección del eje de ordenadas en A y la dirección A-R, siendo R una referencia materializada en el terreno y visible desde A (bien directamente o bien situando en ella algún elemento auxiliar de puntería –jalón, mira, etc.).

Se trata de conocer las coordenadas  $X_B, Y_B, Z_B$  de un punto B, visibles desde A, a través de medidas angulares  $L_A^R, L_A^B$  y  $V_A^B$  y medida de distancias, ya sea la distancia geométrica o la distancia reducida en cada caso.

En la bibliografía existente, los diversos autores siempre han convenido considerar la radiación como método exclusivamente planimétrico, obviándose siempre el tratamiento altimétrico que se abordaba independientemente. En la presente publicación se tratará conjuntamente, pero en distinto apartado, exclusivamente por consideraciones pedagógicas.

También suele considerarse la radiación como el método planimétrico de menor precisión, dando mucha más importancia a la poligonación, intersecciones y triangulaciones. Esto estaba perfectamente justificado, puesto que la medida de distancias con precisión conllevaba una serie de dificultades que hacían que primasen las medidas angulares, más fáciles de llevar a cabo, con precisiones mucho mayores. Pero con el uso de las estaciones totales se ha logrado una equivalencia casi absoluta tanto en precisión como en rendimientos con esta metodología convenientemente utilizada.

### 2.2.- TOLERANCIAS.

Al radiar un punto, los dos focos de error surgen por la incertidumbre instrumental y de posicionamiento, al determinar el ángulo y la distancia:

- Error angular horizontal del teodolito:  $\varepsilon_H^T$
- Error al evaluar la distancia:  $\Delta D$

Estos dos factores determinan el error transversal y el error longitudinal.

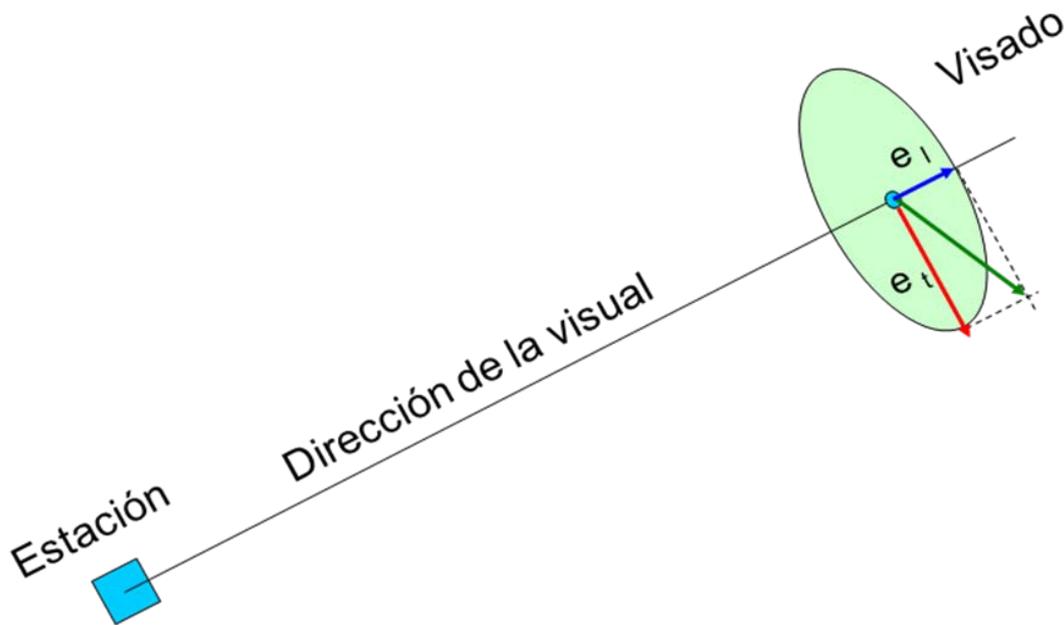


Figura 12.- Elipse de tolerancia.

#### a) Error transversal.

Conocida la distancia reducida  $D_E^P$ , el error transversal viene definido por la expresión:

$$e_t = D_E^P \cdot \varepsilon_H^T$$

Siendo  $\varepsilon_H^T$  el error acimutal total del teodolito que tiene como parámetros fundamentales:

- Sensibilidad: S
- Aumentos: A
- Apreciación: a

Dado que habitualmente el error acimutal se expresa en segundos, la expresión del error transversal quedará de la siguiente manera:

$$e_t = \frac{\varepsilon_H^T''}{206265} \cdot D_E^P; \text{ en notación sexagesimal.}$$

$$e_t = \frac{\varepsilon_H^{Tcc}}{636620} \cdot D_E^P; \text{ en notación centesimal.}$$

El error acimutal total viene definido por la expresión:

$$\varepsilon_H^T = \sqrt{(\varepsilon_v)^2 + (\varepsilon_d)^2 + (\varepsilon_p)^2 + (\varepsilon_l)^2}$$

Donde los valores de los errores participantes se obtienen de las expresiones ya vistas y que se reproducen en las tablas que siguen:

Error de verticalidad	Error de dirección	Error de puntería	Error de lectura
$\varepsilon_v \leq \frac{1}{12} S$	$\varepsilon_d = \frac{e_e + e_p}{D} \cdot \beta$ $e_e + e_p = 0 - 5cm$ $\beta = 636620^{cc} / 206265''$	$\varepsilon_p = \frac{\beta}{A} \left[ 1 + \frac{4A}{100} \right]$ Con $\beta = 30^{cc}; \beta = 10''$	$\varepsilon_l = \frac{2}{3} a$
$\varepsilon_H^T = \sqrt{\varepsilon_v^2 + \varepsilon_d^2 + \varepsilon_p^2 + \varepsilon_l^2}$			

También se podrán utilizar otras expresiones prácticamente equivalentes:

Error de verticalidad	Error de dirección	Error de puntería	Error de lectura
$\varepsilon_v \leq \frac{1}{3} S$	$\varepsilon_d = \frac{e_e + e_p}{D} \cdot \beta$ $e_e + e_p = 0 - 5cm$ $\beta = 636620^{cc} / 206265''$	$\varepsilon_p = \frac{C_A}{A} \cdot K \cdot$ Con $C_A = 10'' / 30^{cc}$ y $K = 2,2...2,5$ , habitualmente $K = 2,5$	$\varepsilon_l = \frac{a}{\sqrt{3}}$
$\varepsilon_H^T = \sqrt{\varepsilon_v^2 + \varepsilon_d^2 + \varepsilon_p^2 + \varepsilon_l^2}$			

Todas las expresiones están caracterizadas por los datos del instrumento excepto el error de dirección, que es independiente del mismo y tan solo depende de la ejecución.

Estas notas que siguen son una primera aproximación a la resolución de la problemática que plantea la toma de información con distancimetría electrónica, cimentadas en la experiencia profesional.

Es necesario caracterizar el error de dirección:

$$\varepsilon_d = \frac{e_e + e_p}{D} 636620^{cc}$$



$$\varepsilon_d = \frac{e_e + e_p}{D} 206265''$$

Siendo D la distancia de radiación (distancia reducida) y  $e_e + e_p$  un valor que tiene en consideración la desviación conjunta en la estación y en la puntería. Es razonable utilizar valores próximos a 2 cm:

$$e_e + e_p = 2cm .$$

### b) Error longitudinal.

El error longitudinal es un error asociado a la incertidumbre en la medida de la distancia. En ella influye tanto el error propio del distanciómetro como el error de dirección. En cuanto al primero parece razonable considerar un distanciómetro medio actual caracterizándose por una precisión de:

$$5mm + 5ppm$$

En una radiación de 500m., el error propio de la medición es de 0.75cm., siendo de mayor magnitud la incertidumbre propia al defectuoso estacionamiento del doblete: estación, jalón.

Por tanto, y actuando de forma globalizada para estar por completo al lado de la seguridad, se puede establecer como cota superior del error longitudinal para la radiación:

$$E_{dist} = 0.75cm ; \varepsilon_d = e_e + e_p = 2cm$$

$$e_l = \sqrt{E_{dist}^2 + \varepsilon_d^2} = \sqrt{0.75^2 + 2^2} = 2.1cm \approx 2cm$$

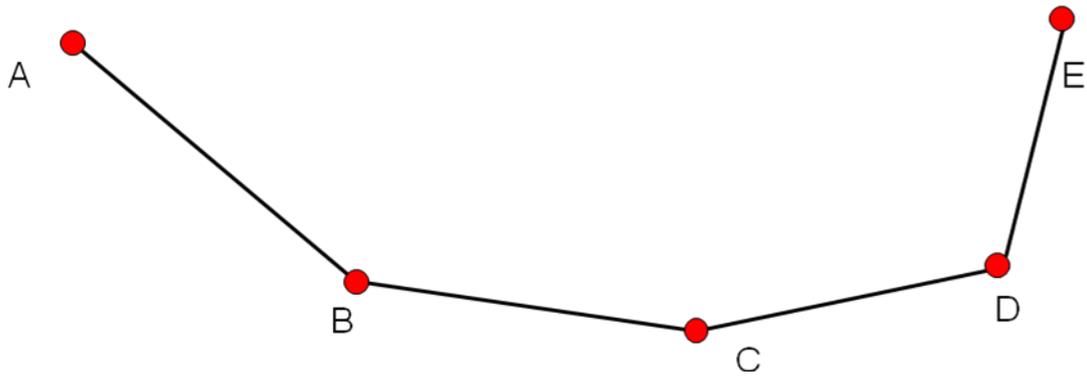
El error planimétrico total será el mayor del error transversal y error longitudinal:

$$E_{rad} = mayor(e_t, e_l)$$

## 3- MÉTODO DE INTERARIO O POLIGONAL.

### 3.1.- CONCEPTO Y TERMINOLOGÍA.

Un itinerario o poligonal no es más que una sucesión encadenada de radiaciones que tienen como uso de los objetivos más importantes establecer las estaciones necesarias para la determinación de los puntos radiados.



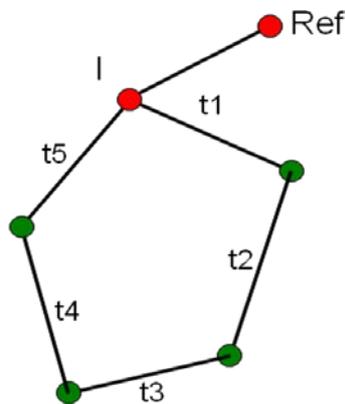
**Figura 13.- Poligonal.**

Siendo:

- Estaciones: A, B, C, ..., E, F
- Tramos o ejes: AB, BC, ..., EF

Atendiendo a la naturaleza de los puntos inicial y final de un itinerario se clasifican:

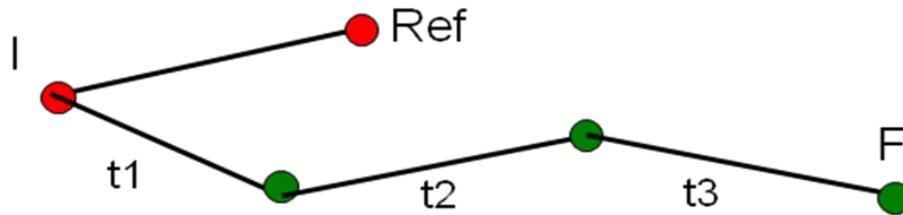
- **Cerrados:** La primera y última estación del itinerario coinciden en un vértice de coordenadas conocidas o no.



**Figura 14.- Poligonal cerrada.**

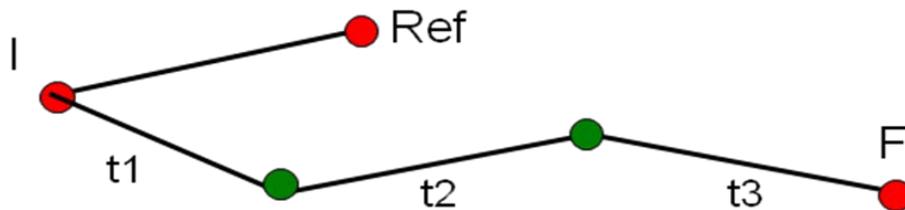
- **Abiertos:** Son aquellos itinerarios o poligonales en que el punto inicial no coincide con el punto final, pudiendo ser de dos tipos en función de que las coordenadas del punto final sean desconocidas o no.

Los itinerarios abiertos - **colgados** son aquellos en que se desconocen las coordenadas del punto final. En general son las poligonales menos fiables, no recomendándose que superen un tramo.



**Figura 15.- Poligonal colgada.**

Los itinerarios abiertos - **encuadrados** son aquellos en que se conocen las coordenadas del punto final.



**Figura 16.- Poligonal encuadrada.**

Las poligonales o itinerarios colgados son considerados los menos adecuados ya que tanto los itinerarios cerrados y encuadrados, al conocerse las coordenadas del punto final, permiten determinar el error de cierre, y por lo tanto proceder a la compensación de las observaciones, tal como se verá.

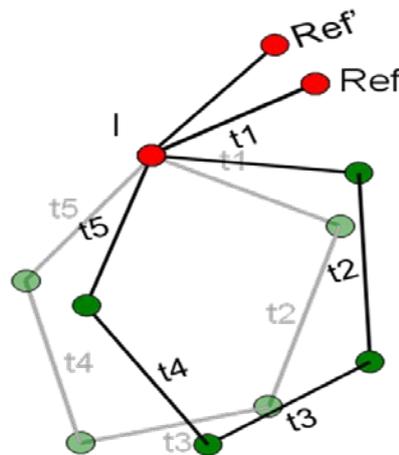
En este sentido, el tratamiento y compensación de los itinerarios cerrados es análogo, salvo algunas consideraciones que se harán, a los itinerarios encuadrados. Puede entenderse un itinerario cerrado como un itinerario encuadrado en el que la última estación coincide con la primera, es decir,  $I \equiv F$ .

En numerosos textos, así como muchos profesionales, consideran que el itinerario cerrado es de mayor fiabilidad que el itinerario encuadrado. Esta afirmación no puede hacerse de manera general y hay que analizar qué ventajas e inconvenientes tiene un itinerario respecto del otro.

El itinerario encuadrado tiene como condición aceptar como hipótesis que las coordenadas del vértice inicial y las del final son buenas y que la posición relativa de un vértice respecto a otro que se deduce a través de las coordenadas es exacta.

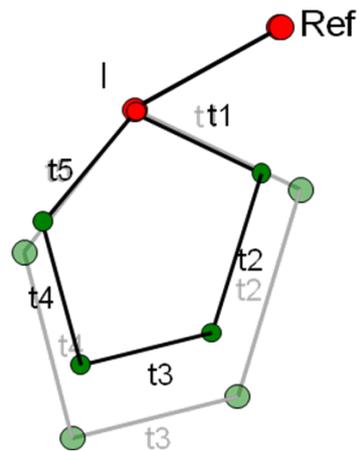
El itinerario cerrado no necesita esa hipótesis previa, pero necesita otras que son:

- La **orientación** elegida de partida es buena y está exenta de posibles errores. Si se cometiera un error en la orientación de la poligonal, ésta quedará girada y no se tendrá información de ello dado que el error de cierre no reflejará este hecho. Los posibles errores pueden ser visar a una referencia equivocada, con lo cual el acimut de partida sería erróneo, o bien un error propio de la observación. Ambos casos, en un itinerario encuadrado, quedarían de manifiesto en el cierre de la poligonal, mientras que en este caso, no.



**Figura 17.- Precaución de orientación en una poligonal cerrada.**

- La instrumentación utilizada en la observación de la poligonal está exenta de **errores sistemáticos**. En caso contrario se asume que existe un error sistemático en la medida de **distancias**, por tener introducidas ppm erróneas, por constante de instrumentos, etc., la poligonal obtenida por observación será semejante a la real y no se tendrá información de ello al no reflejarlo el error de cierre. En un itinerario encuadrado quedaría de manifiesto en el cierre de la poligonal; en este caso, no.



**Figura 18.- Precaución de errores sistemáticos en una poligonal cerrada.**

Así mismo, se puede establecer otra clasificación de los itinerarios, independiente de la anterior, atendiendo al sistema de observación que se utiliza, pudiendo ser:

- Itinerarios orientados.
- Itinerarios no orientados.

En los del primer tipo, las estaciones se van enlazando con la condición de ser constante las desorientaciones en cada una de ellas o, en su defecto, siempre orientación nula. En este supuesto se cumple la condición de mantenimiento del eje de inicio a lo largo de las diversas estaciones de la poligonal.

En caso contrario, se van evaluando las diferentes lecturas en los tramos hasta encontrar los datos que son necesarios para definición de las diversas coordenadas.

### 3.2.- TOLERANCIAS.

Es de aplicación todo lo descrito para el caso de la radiación referente a la elipse de tolerancia. Siguen siendo vigentes los conceptos de error transversal y error longitudinal.

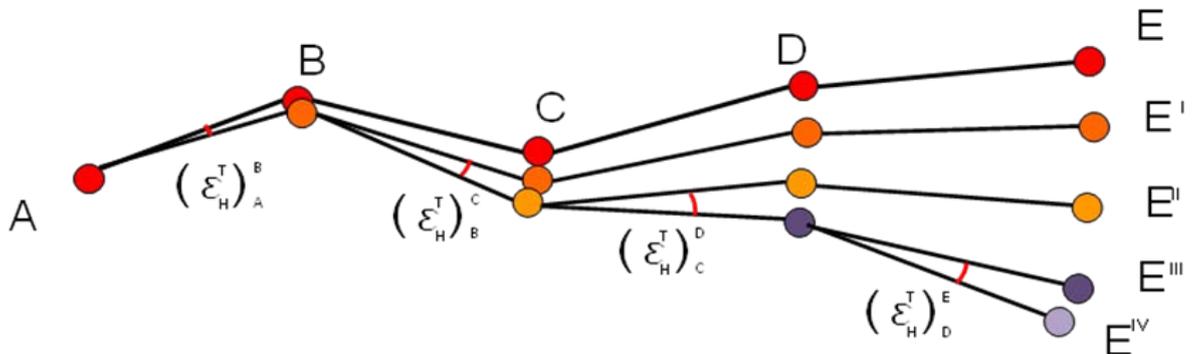
#### **Error transversal**

Para determinar la relación que define el error transversal se establece una simplificación previa:

- Se consideran tramos de igual longitud:  $d$  .

- Se considera una poligonal casi rectilínea.

Se analizan los diversos tramos por separado y se cuantifica el valor final.



**Figura 19.- Error transversal en una poligonal**

Datos básicos:

- Número de tramos:  $n$ .
- Longitud total:  $d \cdot n$
- Desplazamiento  $EE'$ :

$$EE' = (\varepsilon_H^T)_A \cdot d \cdot n$$

- Desplazamiento  $E'E''$ :

$$E'E'' = (\varepsilon_H^T)_B \cdot d \cdot (n - 1)$$

- Desplazamiento  $E'E'''$ :

$$E'E''' = (\varepsilon_H^T)_C \cdot d \cdot (n - 2)$$

- Desplazamiento último:

$$E^{n-1}E^n = (\varepsilon_H^T)_D \cdot d$$

Los errores son independientes, siendo el efecto acumulado, para  $n$  tramos:

$$E_T \leq \sqrt{d^2 \cdot n^2 (\varepsilon_H^T)_A^2 + d^2 \cdot (n-1)^2 (\varepsilon_H^T)_B^2 + \dots + d^2 (\varepsilon_H^T)_N^2}$$

Los valores de  $(\varepsilon_H^T)_A, (\varepsilon_H^T)_B, \dots, (\varepsilon_H^T)_M$  son desconocidos, pero pueden sustituirse por el valor del error angular mayor multiplicado por  $\sqrt{2}$ , dado que se realiza doble medida angular (para orientar y para posicionar).



$$E_T \leq d \cdot \varepsilon_H^T \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1^2}$$

Sumando la serie del radical:

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 = \left( \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

Por tanto, se obtiene:

$$E_T \leq d \cdot \varepsilon_H^T \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Siendo, en la realidad:

- $d$  : longitud del tramo mayor
- $\varepsilon_H^T$  : error angular acimutal máximo en radianes. Corresponderá al que otorgue mayor error de dirección y, por tanto, el tramo más corto
- $n$  : número de tramos de la poligonal

De esta forma se logra la obtención de una cota máxima de error no alcanzable. Igual que en el caso anterior, estas notas basadas en la experiencia son una primera aproximación a la resolución de encontrar las relaciones que evalúan la precisión en un itinerario. Nuevamente es necesario caracterizar al error de dirección:

$$\varepsilon_d = \frac{e_e + e_p}{D} 636620^{cc}$$

$$\varepsilon_d = \frac{e_e + e_p}{D} 206265''$$

Siendo  $D$  la distancia de itinerario (distancia reducida) y  $e_e + e_p$  un valor que tiene en consideración la desviación conjunta en la estación y en la puntería. Es razonable utilizar valores próximos a 1 cm. dado el cuidado en ambos estacionamientos y el uso generalizado de trípode para el jalón, que conseguirá un continuado posicionamiento del mismo en el punto considerado.

En los itinerarios es usual realizar lecturas en círculo directo y en círculo inverso.

### Error longitudinal.

El error longitudinal es un error asociado a la incertidumbre en la medida de la distancia. En ella influye tanto el error propio del distanciómetro como el error de dirección. En cuanto al primero parece razonable considerar un distanciómetro medio actual caracterizándose por una precisión de:

$$5mm + 5ppm$$

En una radiación de 100m., el error propio de la medición es de 1cm., al que habrá que añadir el error propio del estacionamiento del doblete estación, jalón. Es importante destacar que la distancia de un determinado tramo se determina dos veces, en particular cuando se lee, para un determinado tramo A-B, en sentido A hacia B y cuando se estaciona en B y se orienta hacia A. De esta forma se toma la distancia promedio y su error queda afectado por el factor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Por tanto, y actuando de forma globalizada para estar por completo al lado de la seguridad, se puede establecer como cota superior del error longitudinal para un tramo del itinerario:

$$E_{dist} = 1cm; \quad \varepsilon_d = e_e + e_p = 1cm$$

$$E_{it} = \sqrt{E_{dist}^2 + \varepsilon_d^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2}}{\sqrt{2}} = 1cm$$

El error para el caso habitual de  $n$  tramos será:

$$e_l = E_{it} \cdot \sqrt{n} = 1cm \cdot \sqrt{n}$$

El error planimétrico total será el mayor del error transversal y error longitudinal:

### 3.3.- COMPENSACIÓN DE UN ITINERARIO.

Los datos de partida son las coordenadas planimétricas de los vértices topográficos inicial y final:  $V_I(X_I, Y_I)$ ,  $V_F(X_F, Y_F)$ . También se conoce el acimut desde el vértice inicial a una referencia dotada de coordenadas con el mismo sistema  $REF(X_R, Y_R)$ . Esta referencia puede ser el vértice final  $REF = V_F$  caso de ser visible  $V_F$ .

La observación de la poligonal proporciona el valor de la desorientación del instrumento en cada estación, las lecturas angulares y las distancias.

En el trabajo de gabinete se promedian las lecturas angulares y se corrigen las desorientaciones, obteniendo los acimutes de cada tramo, así como las distancias reducidas promediadas. Así se obtienen en cada tramo los incrementos genéricos  $\Delta X$  e  $\Delta Y$ , que permiten, partiendo de la primera estación  $V_I$ , llegar a la última estación del itinerario  $V_F$ .

$$X_2 = X_I + D_I^2 \cdot \text{sen } \theta_I^2$$

$$Y_2 = Y_I + D_I^2 \cdot \text{cos } \theta_I^2$$

Siendo:

- $X_2, Y_2$  las coordenadas de la estación 2.
- $D_I^2$ : distancia reducida de la estación I a la estación 2
- $\theta_I^2$ : acimut del tramo I-2

Generalizando las expresiones anteriores:

$$X_n = X_{n-1} + D_{n-1}^n \cdot \text{sen } \theta_{n-1}^n$$

$$Y_n = Y_{n-1} + D_{n-1}^n \cdot \text{cos } \theta_{n-1}^n$$

Obteniéndose unas coordenadas de la estación final  $(X_F, Y_F)_{CALC}$  distintas de las verdaderas  $(X_F, Y_F)_{DATO}$ , siendo el error de cierre:

$$\begin{cases} E_X = X_{dato} - X_{calc} \\ E_Y = Y_{dato} - Y_{calc} \end{cases}$$

Estos errores, siempre que estén dentro de la tolerancia exigida (función del instrumental utilizando metodología, longitud de la poligonal, número de tramos, configuración de los mismos), son los que deben ser compensados. Por tanto, hay que corregir aquello que no se ha hecho bien, debido a los errores propios de la instrumentación y metodología.

La compensación se tiene que basar en una rectificación directamente involucrada en errores propios en la observación.

Las poligonales se observan evaluando ángulos y distancias, caracterizados por el error transversal (para longitudes establecidas, función del error angular) y por el error longitudinal, dependiente del error característico en la determinación de la distancia.

En función de la instrumentación empleada pueden presentarse tres casos significativos:

- Mayor precisión en las medidas angulares: Caso típico en el empleo del taquímetro o una estación de excelentes prestaciones angulares.
- Mayor precisión en las medidas de distancias que en los ángulos. Caso usual de utilizar estación total de prestaciones medias.
- Idéntica precisión en las medidas de distancias que en las angulares.

Los itinerarios cerrados se tratarán como un caso particular de los itinerarios encuadrados, pues tienen ciertas limitaciones en un tratamiento generalizado.

Los itinerarios abiertos no pueden compensarse ya que no es posible conocer los errores cometidos. Se comentará en este apartado algún tipo de itinerarios en los que, siendo las coordenadas de la estación final desconocidas, se puede cerrar angularmente haciendo observación acimutal a un vértice de coordenadas conocidas.

## 4- NIVELACION TRIGONOMETRICA SIMPLE.

### 4.1.- CONCEPTO Y RESOLUCIÓN.

La nivelación trigonométrica simple está unida a la radiación, pues, como ya se indicó, se realiza de forma conjunta.

En la taquimetría tradicional o en la actualidad, con las estaciones totales, la expresión del desnivel (nivelación trigonométrica) existente entre dos puntos viene dada por la relación:

$$\Delta Z_E^P = i_E - m_P + t_E^P + 0.42 \frac{D_E^{P^2}}{R}$$

Siendo el término  $t_E^P$

$$t_E^P = D_E^P \cdot \cot g V_E^P$$

### 4.2.- TOLERANCIA.

Las fuentes del error están incluidas, de forma significativa, en los tres primeros términos de la expresión anterior, habiéndose sido estudiadas con anterioridad.

#### Aportación al error altimétrico de $t_E^P$

Las incertidumbres vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$e_t^I \leq [(D_E^P + \Delta D_E^P) \cdot \cot g V_E^P - D_E^P \cdot \cot g V_E^P] = \Delta D_E^P \cdot \cot g V_E^P \approx 0$$

$$e_t^{II} \leq [D_E^P \cdot \cot g (V_E^P \pm \varepsilon_V^T) - D_E^P \cdot \cot g V_E^P] = D_E^P \cdot [\cot g (V_E^P \pm \varepsilon_V^T) - \cot g V_E^P]$$

#### Aportación al error altimétrico de $i_E$

La medición se realiza con una cinta métrica metálica, pudiendo estimar una cota superior del error en la medida:  $e_i \leq 1 \text{ cm}$ .

#### Aportación del error altimétrico de $m_p$

Tal como se justificó, este valor depende fundamentalmente de la distancia a la que se haga puntería y de las características ópticas del aparato, sin menosprecio de las condiciones ambientales, etc. En este sentido, se proporciona un orden de magnitud en función de la distancia para una estación total de características medias:

Rango	$e_m$ (cm)
0 – 100	1
100 – 200	2
200 – 500	3
500 – 1000	4
1000 – 2000	5

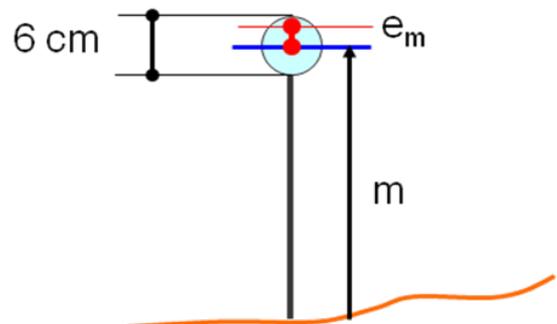


Figura 20.- Error en la medida de la altura del prisma ( $e_m$ ).

La falta de verticalidad del jalón también influye en el error  $e_m$ , pero normalmente su valor es mucho menor que la influencia de la puntería antes expuesta, quedando enmascarada por ella.

### Error altimétrico total

Siguiendo la teoría de errores, el error altimétrico total será la composición de todas las fuentes de error descritas, al considerarse éstas independientes:

$$e_z = \sqrt{(e_t^I)^2 + (e_t^{II})^2 + e_i^2 + e_m^2}$$

Dado que el término  $e_t^I$  es despreciable en el caso de utilizar una estación total la expresión quedará como sigue:

$$e_z = \sqrt{(e_t^{II})^2 + e_i^2 + e_m^2}$$

## 5- NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA COMPUESTA.

### 5.1.- CONCEPTO Y RESOLUCIÓN.

La nivelación trigonométrica compuesta acompaña a las observaciones que dan lugar a los itinerarios o poligonales y están condicionadas la toma de éstas.

Así, con los datos de la observación se calcularán los desniveles parciales entre cada dos estaciones. Estos desniveles se calculan dos veces por cada tramo.

$$\Delta Z_i^{i+1} = i_i - m_{i+1} + D_i^{i+1} \cdot \cot V_i^{i+1} + 0.42 \frac{D_i^{i+1}{}^2}{R}$$

$$\Delta Z_{i+1}^i = i_{i+1} - m_i + D_{i+1}^i \cdot \cot V_{i+1}^i + 0.42 \frac{D_{i+1}^i{}^2}{R}$$

Siendo:

$$\Delta Z_i^{*i+1} = \frac{\Delta Z_i^{i+1} - \Delta Z_{i+1}^i}{2}$$

### 5.2.- TOLERANCIA Y COMPENSACIÓN.

La nivelación trigonométrica compuesta, como buena nivelación trigonométrica, estará afectada por las fuentes de error propias de este tipo de

observaciones y, por lo tanto, será de aplicación lo dispuesto para la nivelación trigonométrica simple.

No obstante, en este caso el error de la nivelación quedará afectado por el término  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , pudiendo existir, así mismo,  $n$  tramos, procediéndose a calcular el error de la siguiente manera:

$$e_{Z1t} = \sqrt{(e_t'')^2 + e_i^2 + e_m^2}$$

$$e_{Ztot} = \frac{e_{Z1t} \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{2}}$$

Al igual que en la compensación planimétrica, la compensación altimétrica se lleva a cabo siempre que el error de cierre sea tolerable.

Las fuentes de error debido a la medida de la altura del instrumento y la altura de la puntería (altura de jalón o prisma) son comunes a todas las estaciones y se supone se hacen con igual precisión; por tanto, parece lógico compensar en función de las distancias cenitales y de las distancias.

Cuando en la poligonal, las distancias se medían con estadía vertical era lógico compensar el error de cierre en función de la distancia de cada tramo, es decir, hacer la corrección proporcional a la distancia.

En la actualidad, con la nueva instrumentación, los errores angulares y de distancia tiene, prácticamente, la misma influencia en todos los tramos de la poligonal. Esto arroja errores análogos en los tramos de una poligonal de longitud de ejes parecida. Es por ello por lo que bien se podría repetir el error de cierre entre el número de tramos y así corregir cada uno de ellos en la misma cantidad.

Desde la práctica o experiencia quizá poligonales de lados grandes  $D > 500$  m., aparte del error por refracción, que siempre es un problema, el mayor error que se introduce sea la nitidez con que se hace la puntería al centro del prisma. Esto puede hacer que la altura del prisma (m) que se utiliza en el cálculo de desnivel no sea correcta, como ya se ha puesto de manifiesto.

Por todo lo dicho, para compensar los desniveles hay que hacerlo proporcionalmente a la distancia de los tramos.

$$Z_i^* = Z_{calc} + \frac{E_{cierre}}{\sum D_i} \cdot \sum_1^i D_i$$

## 6- INTERSECCIÓN DIRECTA.

### 6.1.- CONCEPTOS PREVIOS.

La intersección directa. es un método planimétrico que sólo precisa de medidas angulares para determinar la posición de puntos.

Las observaciones se realizan estacionando el teodolito en dos puntos de coordenadas planimétricas conocidas, visándose entre sí y al punto que se pretende ubicar. La intersección se denomina múltiple si se tienen más estacionamientos de los necesarios, lo que permite ejercer una comprobación de los resultados obtenidos.

Esta metodología, como aquellas basadas en el empleo exclusivo del teodolito, ha perdido gran parte de su vigencia. Con anterioridad al desarrollo de la distancimetría electrónica era habitualmente utilizada para realizar triangulaciones que permitían determinar las coordenadas planimétricas de puntos sin necesidad de realizar observaciones de distancia.

Hoy en día, su utilidad radica en que mediante esta metodología puede dotarse de coordenadas a puntos sin necesidad de acceder a ellos, pudiéndose utilizar como referencia en las metodologías de poligonal o de radiación.

### 6.2.- RESOLUCIÓN.

Sea V un vértice topográfico cuya posición se desea conocer, y sean A y B dos vértices de coordenadas planimétricas conocidas.

Las coordenadas del punto V pueden obtenerse a partir de A o a partir de las del B, calculando la distancia y la orientación correspondiente, pero en realidad se obtienen por duplicado a partir de los dos puntos para poder tener comprobación de resultados. Es fundamental observar que de este modo sólo se comprueban los cálculos pero no las observaciones de campo, pues unas observaciones de ángulos mal tomadas darán un punto V distinto al real pero perfectamente obtenible a través del proceso de cálculo.

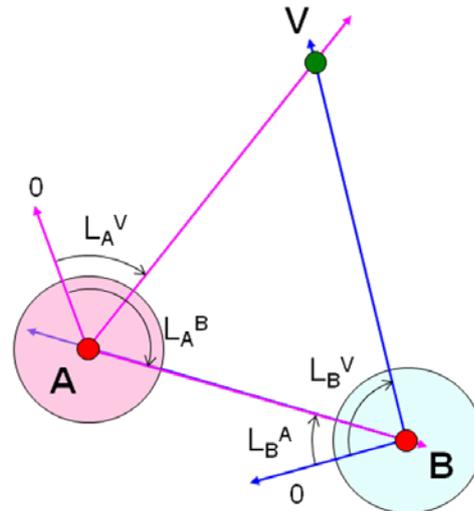


Figura 21.- Observables en una intersección directa.

Para observar una intersección directa se parte de una base topográfica, A-B, pudiéndose obtener la distancia reducida a partir de sus coordenadas:

$$D_A^B = \sqrt{\Delta X_A^{B^2} + \Delta Y_A^{B^2}}$$

Se estaciona en cada uno de los vértices A y B, midiendo las lecturas al otro punto de la base topográfica y al vértice V. Normalmente estas lecturas se realizan en círculo directo e inverso dada la posterior utilización del punto V como referencia.

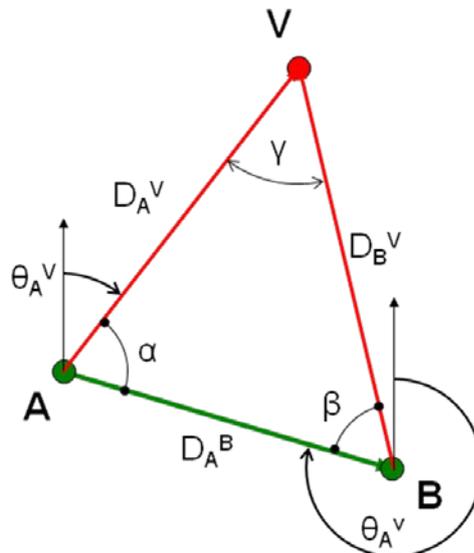


Figura 22.- Resolución de una intersección directa.

A partir de las lecturas obtenidas, mediante diferencia de lecturas, o diferencia de acimutes, es posible determinar los valores de los ángulos internos  $\alpha$  y  $\beta$ . El cálculo de las coordenadas planimétricas de vértice V se realizará a



partir del acimut y la distancia reducida obtenida de la resolución del triángulo formado:

A partir de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  se obtendrá el ángulo en el vértice V:

$$\gamma = 200^g - \alpha - \beta$$

Las distancias reducidas  $D_A^V$  y  $D_B^V$  se obtendrán a partir de la distancia  $D_A^B$  aplicando el teorema del seno al triángulo formado por los vértices A, B y V.

$$\frac{D_A^B}{\text{sen}\gamma} = \frac{D_A^V}{\text{sen}\beta} = \frac{D_B^V}{\text{sen}\alpha}$$

Una vez calculados los acimutes y las distancias reducidas el cálculo de las coordenadas del vértice V es inmediato, a partir de las expresiones habituales para el cálculo de coordenadas planimétricas.

### 6.3.- TOLERANCIAS.

Puesto que las únicas medidas que se efectúan para fijar un punto por intersección directa son las de los ángulos en A y B (ambos como diferencia entre los ángulos acimutales de dos visuales o como diferencia de lecturas), el error que afecta a la posición de V será consecuencia de los errores en la determinación de dichos ángulos. Si son  $\varepsilon_A$  y  $\varepsilon_B$  es los errores en la determinación de estos ángulos se obtiene un cuadrilátero KLMN, en cuyo interior ha de estar el punto V.

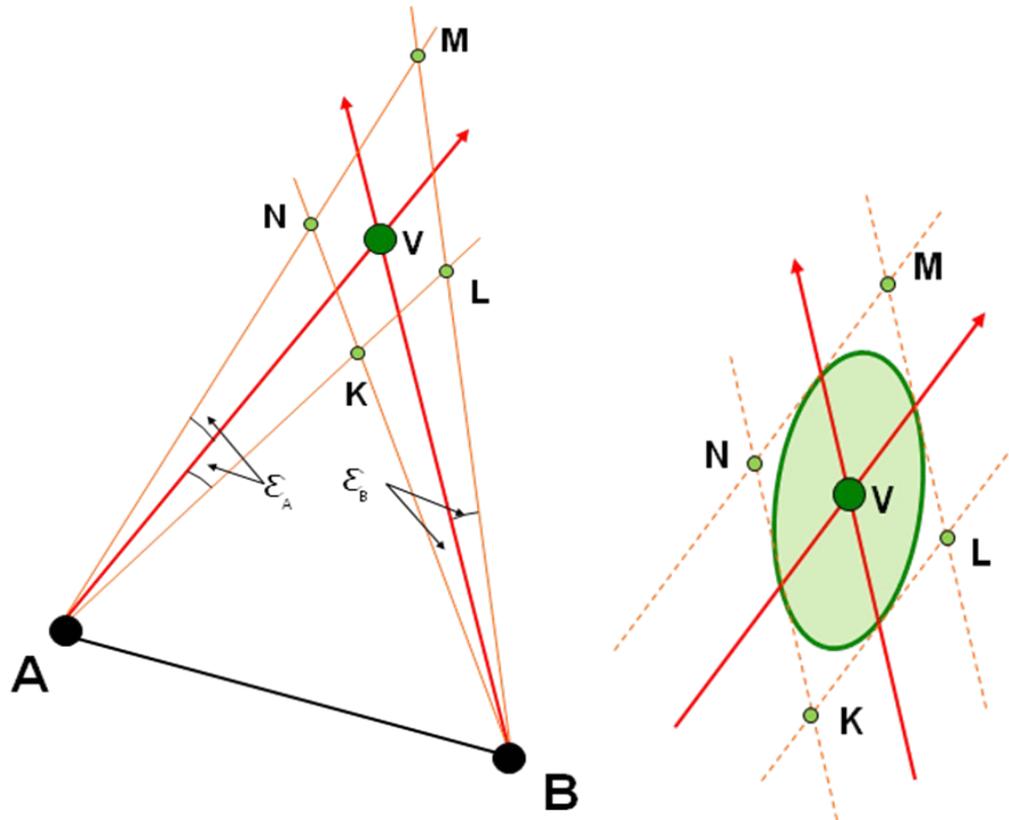


Figura 23.- Error en la intersección directa.

Puesto que las distancias  $\overline{AV}$  y  $\overline{BV}$  son muy grandes en comparación con los lados del cuadrilátero y los ángulos  $\varepsilon_A$  y  $\varepsilon_B$  son pequeños se admite que  $\overline{MN}$  y  $\overline{KL}$  son paralelas a  $\overline{AV}$  y  $\overline{BV}$ , equidistantes de ella, así como lo mismo de  $\overline{ML}$  y  $\overline{NK}$  respecto de  $\overline{BV}$ . Entonces  $KLMN$  pasa a ser un paralelogramo. La zona comprendida entre las rectas  $\overline{MN}$  y  $\overline{KL}$  se llama banda de indeterminación de la visual AV y su anchura vendrá dada por:  $2 \cdot \overline{AV} \cdot \varepsilon_A$ .

Los valores  $\varepsilon_A$  y  $\varepsilon_B$  son los errores medios cuadráticos de los ángulos horizontales evaluados desde A y B, respectivamente.

Análogamente, la zona entre NK y ML. es la banda de indeterminación de la visual BV y su anchura vendrá dada por:  $2 \cdot \overline{BV} \cdot \varepsilon_B$ .

Puesto que los errores máximos se producen en los extremos del rectángulo se puede tomar como zona más probable para el punto la elipse máxima inscrita en él.

Según se estudia en Teoría de Errores, cuando se tienen unos ejes respecto a los cuales al fijar la posición de un punto se obtiene una elipse en la cual debe estar, ésta depende de las direcciones de esos ejes y se puede pasar a otra independiente de los ejes, llamada elipse de error, con sólo girar los ejes hasta obtenerla, estando definida porque sus semiejes mayor y menor son las direcciones de máxima y mínima varianza.

En la notación angular habitual resulta:

$$a = \frac{L \cdot \varepsilon_H^{cc}}{636620 \cdot \operatorname{sen} \frac{\hat{V}}{2}}$$

$$a = \frac{L \cdot \varepsilon_H''}{206265 \cdot \operatorname{sen} \frac{\hat{V}}{2}}$$

Por tanto, una intersección directa será tanto más precisa cuanto más cortas sean las visuales al punto incógnita y cuanto mayor sea la precisión del instrumento empleado, aunque hay que tener en cuenta que las visuales cortas incrementan el error de dirección. En cuanto al ángulo  $\hat{V}$ , se observa que el error máximo aumenta cuanto menor es el ángulo y, por tanto, su seno. Como para calcular el área del rectángulo se ha empleado que  $\hat{V}$  es agudo (si hubiera sido obtuso habría que utilizar su complementario), el valor máximo que puede alcanzar son  $100^\circ$ , por lo que la intersección directa más precisa, fijo el instrumento y la longitud de las visuales, será aquella en la que el ángulo de intersección es recto y se verifica:

$$a = \frac{L \cdot \varepsilon_H}{\operatorname{sen} 50^\circ} = 1.4 \cdot L \cdot \varepsilon_H$$

Es usual establecer como valores extremos en los trabajos topográficos los siguientes:

- Mínimo ángulo de intersección:  $\hat{V} = 25^\circ$ .
- Máximo ángulo de intersección:  $\hat{V} = 175^\circ$ .

## 7- INTERSECCIÓN INVERSA.

### 7.1.- INTRODUCCIÓN Y CONCEPTO.

La metodología de la intersección inversa ha caído prácticamente en desuso y por ello sólo se expone su concepto y resolución.

El problema de la intersección inversa es un problema planteado desde hace mucho tiempo, teniendo varias soluciones gráficas y numéricas. En este problema, para determinar las coordenadas de un punto P se realizan desde él observaciones con un teodolito a tres vértices topográficos A, B y C (como mínimo), tomando los ángulos formados entre sí por las visuales a dichos puntos.

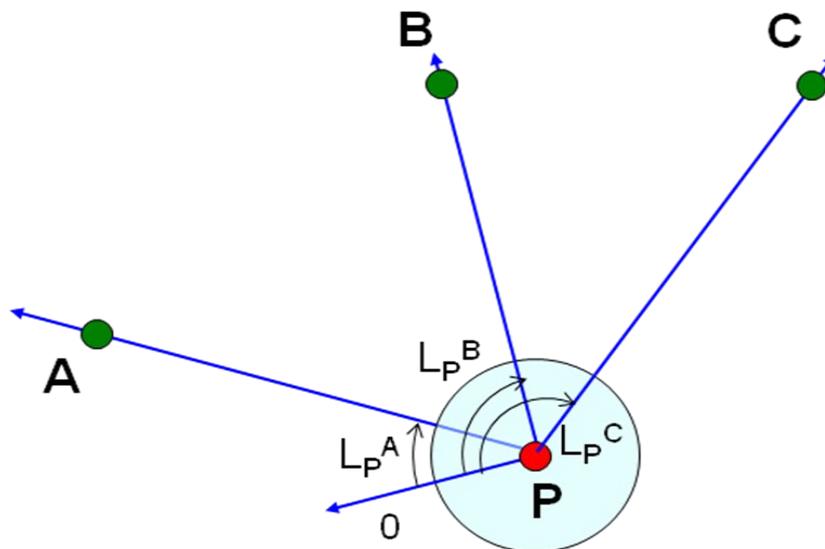


Figura 24.- Intersección inversa.

El método tiene ventajas desde el punto de vista de la accesibilidad, pues permite posicionar un punto P realizando una observación, al menos a tres puntos de coordenadas conocidas, sin necesidad de tomarlos como estación, sino simplemente como punteñas.

### 7.2.- RESOLUCIÓN.

La intersección inversa consiste en la observación desde un vértice, cuyas coordenadas planimétricas se pretenden obtener, de otros tres cuyas coordenadas planimétricas son dato  $A(X_A, Y_A)$ ,  $B(X_B, Y_B)$  y  $C(X_C, Y_C)$ .

Las tres visuales PA, PE y PC proporcionan los datos necesarios para resolver matemáticamente el problema. El método de resolución es conocido por el método de Pothenot.

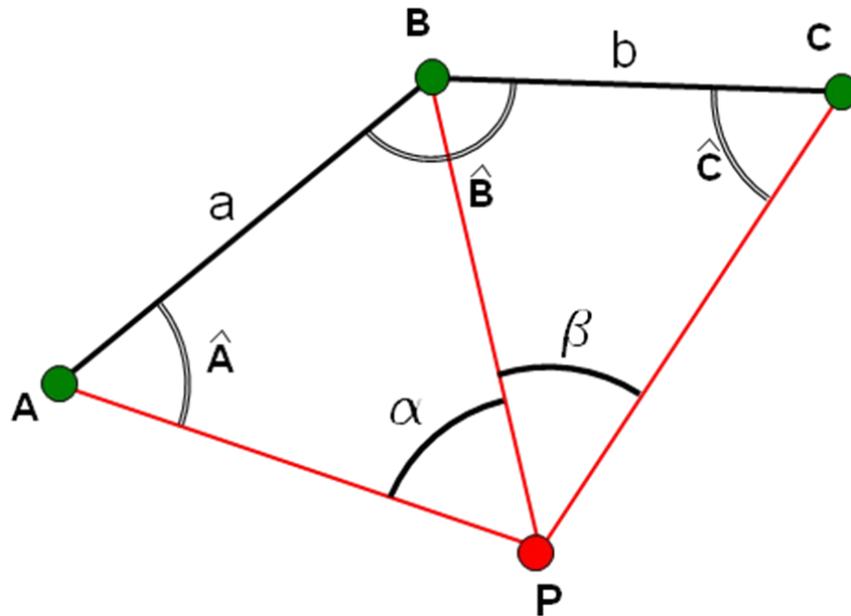


Figura 25.- Esquema conceptual de la intersección inversa.

Con los datos de partida se obtienen las distancias reducidas:

$$\text{Distancia de A a B: } D_A^B = \sqrt{\Delta X_A^2 + \Delta Y_A^2}$$

$$\text{Distancia de B a C: } D_B^C = \sqrt{\Delta X_B^2 + \Delta Y_B^2}$$

Hay que evaluar las coordenadas de! punto  $P(X_p, Y_p)$ ; para ello se estaciona el teodolito en P y se evalúan los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .

Con las coordenadas de los tres vértices A, B y C, y los ángulos evaluados en campo  $\alpha$  y  $\beta$ , se obtienen las coordenadas del vértice P.

Se establece el valor de la diagonal común PB en ambos triángulos y se iguala:

$$\frac{D_P^B}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{D_A^B}{\text{sen}\alpha} \Rightarrow D_P^B = a \cdot \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\alpha}$$

$$\frac{D_P^B}{\text{sen}\hat{C}} = \frac{D_B^C}{\text{sen}\beta} \Rightarrow D_P^B = b \cdot \frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\beta}$$

Igualando ambas expresiones se obtiene:

$$a \cdot \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\alpha} = b \cdot \frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\beta} \Rightarrow \frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha}$$

$$\frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\hat{C}} = \frac{b \cdot \text{sen}\alpha}{a \cdot \text{sen}\beta} = M$$

En el cuadrilátero  $PABC$  se verifica:

$$\hat{A} + \hat{C} = 400^g - (\alpha + \beta + \hat{B}) = N$$

En ambas igualdades  $M$  y  $N$  son valores numéricos conocidos, fácilmente evaluables, presentándose un sistema de ecuaciones con dos incógnitas y dos ecuaciones:

$$\hat{C} = N - \hat{A}$$

Sustituyendo:

$$\frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}(N - \hat{A})} = M \Rightarrow \text{sen}\hat{A} = M \cdot \text{sen}(N - \hat{A})$$

$$\text{sen}\hat{A} = M \cdot [\text{sen}N \cdot \cos\hat{A} - \cos N \cdot \text{sen}\hat{A}] = M \cdot \text{sen}N \cdot \cos\hat{A} - M \cdot \cos N \cdot \text{sen}\hat{A}$$

Llamando:

$$1 + M \cdot \cos N = I$$

$$M \cdot \text{sen}N = J$$

La ecuación queda:

$$I \cdot \text{sen}\hat{A} = J \cdot \cos\hat{A}$$

Luego:

$$\tan\hat{A} = \frac{J}{I} \Rightarrow \hat{A} = \arctan\frac{J}{I}$$

A partir de este valor se puede conocer el valor del ángulo en  $C$  de forma inmediata, y a partir de ellos los acimutes, que junto con las distancias reducidas, permiten calcular las coordenadas planimétricas de  $P$ .

$$\theta_A^P = \theta_A^B + \hat{A};$$

$$\theta_C^P = \theta_C^B - \hat{C}$$

$$D_A^P = a \cdot \frac{\text{sen}(\hat{A} + \alpha)}{\text{sen}\alpha} ; \quad D_C^P = b \cdot \frac{\text{sen}(\hat{C} + \beta)}{\text{sen}\beta}$$

De esta forma se puede comprobar la bondad de los cálculos, aunque no las observaciones de campo, pues se ha evaluado con el mínimo número de datos para la obtención de la solución.

