

Máster y Doctorado en Tecnologías de la Información y
Comunicaciones en Redes Móviles

Introducción sistemas MIMO

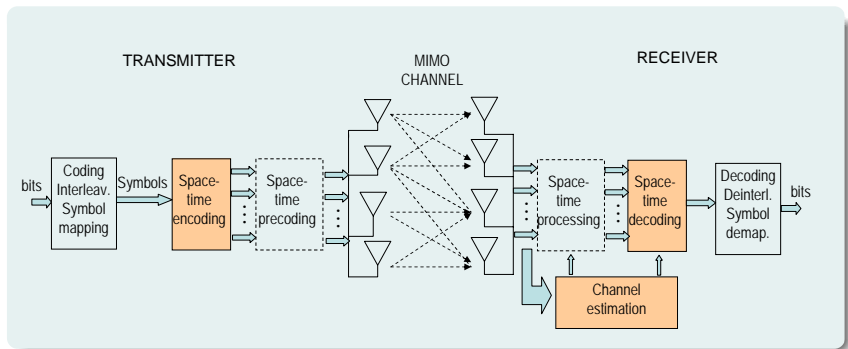
I. Santamaría



Indice

- 1 **Introducción**
- 2 Capacidad en sistemas MIMO
- 3 *Multiplexing-diversity tradeoff*
- 4 Diseño de códigos espacio-temporales
- 5 Conclusiones

Sistema MIMO (*multiple-input multiple-output*)

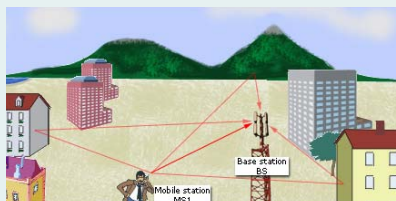


- Ventajas de un sistema MIMO
 - 1 Ganancia por diversidad espacial
 - 2 Ganancia por multiplexado espacial
 - 3 Ganancia de array/Ganancia de codificación
 - 4 Reducción de interferencias

- Las técnicas MIMO forman parte ya de todos los estándares actuales:
 - 1 Redes locales WLAN: 802.11n
 - 2 Redes celulares: HSDPA+, 3GPP-LTE (*Long-Term Evolution*)
 - 3 Redes de acceso banda ancha inalámbrico: WiMAX (802.16e)

Canal MIMO

Característica esencial: *fading*



- *Path loss*
- Reflexión
- Difracción
- LOS/NLOS
- *Scattering*

Modelo estándar: i.i.d. Rayleigh, flat fading

$$\mathbf{H}_w = [\mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_{n_T}] = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,n_T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n_R,1} & \cdots & h_{n_R,n_T} \end{bmatrix}$$

$h_{i,j} \sim CN(0, 1)$ canal entre la i -th antena receptora y la j -th transmisora $\implies E[\|\mathbf{H}\|_F^2] = n_T \times n_R$.

Tx/Rx correlación

Modelo Kronecker

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_{rx}^{1/2} \mathbf{H}_w \mathbf{R}_{tx}^{1/2}$$

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{R}_{rx}^T \otimes \mathbf{R}_{tx}$$

Donde \otimes denota el producto de Kronecker, es decir si \mathbf{A} es una matriz $n \times p$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

y \mathbf{B} es una matriz $m \times q$, entonces $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ es una matriz $nm \times pq$ construida de la forma

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1p}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{B} & \cdots & a_{np}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

La matriz de correlación del canal \mathbf{R}_h , además de como el producto de Kronecker entre las matrices de correlación en recepción y en transmisión, también se puede escribir como

$$\mathbf{R}_h = E[\text{vec}(\mathbf{H})\text{vec}(\mathbf{H})^H],$$

donde la vectorización de una matriz significa construir un vector apilando sus columnas; es decir, si

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \dots \ \mathbf{h}_{n_T}]$$

es $n_R \times n_T$, entonces

$$\text{vec}(\mathbf{H}) = [\mathbf{h}_1^T \ \mathbf{h}_2^T \ \dots \ \mathbf{h}_{n_T}^T]^T$$

es un vector $n_R n_T \times 1$.

Ricean (LOS) channels

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_w$$

$$K = \frac{\|\mathbf{H}_m\|_F^2}{\text{Tr}(\mathbf{R}_h)}$$

Modelo general

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{R}_{rx}^{1/2} \mathbf{H}_w \mathbf{R}_{tx}^{1/2}$$

- Generamos los coeficientes del canal de acuerdo a

$$\text{vec}(\mathbf{H}) \sim CN(\text{vec}(\mathbf{H}_m), \mathbf{R}_{rx}^T \otimes \mathbf{R}_{tx})$$

Selectividad temporal

Tiempo de coherencia (*Doppler spread*):

$$|t_1 - t_2| > T_c \implies E[\text{vec}(\mathbf{H}(t_1))\text{vec}^H(\mathbf{H}(t_2))] = 0$$

Selectividad frecuencial

Ancho de banda de coherencia (*Delay spread*):

$$|f_1 - f_2| > B_c \implies E[\text{vec}(\mathbf{H}(f_1))\text{vec}^H(\mathbf{H}(f_2))] = 0$$

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{l=0}^L \mathbf{H}_l z^{-l}$$

Índice

- 1 Introducción
- 2 Capacidad en sistemas MIMO**
- 3 *Multiplexing-diversity tradeoff*
- 4 Diseño de códigos espacio-temporales
- 5 Conclusiones

Capacidad MIMO

- A la hora de estudiar la capacidad de un canal MIMO hay que distinguir varias situaciones en función de cómo varíe el canal durante la transmisión:

- 1 Canal constante: no hay *fading* → **Capacidad instantánea**

$$C(\mathbf{H})$$

- 2 Canal ergódico: hay *fading* pero podemos codificar a lo largo de un número suficiente de realizaciones del canal → **Capacidad ergódica**

$$C_e = E[C(\mathbf{H})]$$

- 3 Canal no ergódico o canal con *block-fading*: hay *fading* y sólo podemos codificar en una única realización del canal → **Capacidad outage**

$$C_{out,p} = r \Rightarrow Pr(r > C(\mathbf{H})) = p$$

- Y del conocimiento que dispongamos del canal en el Tx y/o en el Rx:

- 1 Conocimiento perfecto del canal *Perfect Channel State Information* en el Tx-Rx: CSIT-CSIR.
- 2 Conocimiento estadístico del canal *Channel Distribution Information* en el Tx-Rx: CDIT-CDIR.
 - Modelo ZMSW (*zero-mean spatially white*)

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_w$$

- Modelo CMI (*channel mean information*)

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_w$$

- Modelo CCI (*channel covariance information*)

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_{rx}^{1/2} \mathbf{H}_w \mathbf{R}_{tx}^{1/2}$$

- Modelo CMCI (*channel mean and covariance information*)

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{R}_{rx}^{1/2} \mathbf{H}_w \mathbf{R}_{tx}^{1/2}$$

- Un modelo habitual es CDIT(ZMSW)+CSIR.

Canal constante, CSIT + CSIR

En este caso la capacidad en bps/Hz de un canal MIMO \mathbf{H} de dimensiones $n_R \times n_T$ viene dada por

$$C(\mathbf{H}) = \max_{\mathbf{Q}: \text{Tr}(\mathbf{Q})=P} \log_2 \det (\mathbf{I}_{n_R} + \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^H),$$

donde $\mathbf{Q} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]$ es la matriz de covarianza de las señal transmitida, cuya potencia total de transmisión es P .

Este problema de optimización se resuelve fácilmente considerando la descomposición del canal MIMO en $r = \min(n_R, n_T)$ canales SISO ortogonales mediante la SVD

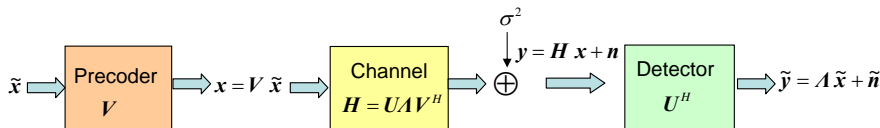
$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H.$$

Podemos realizar una transmisión independiente en cada uno de los canales si:

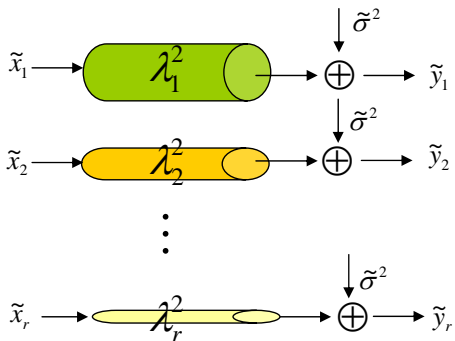
- 1 Precodificamos en el Tx con la matriz de autovectores por la derecha \mathbf{V} (al ser unitaria preserva la potencia transmitida)

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}}$$
- 2 Detectamos en el receptor con la matriz de autovectores por la izquierda \mathbf{U}^H (al ser unitaria el ruido sigue siendo blanco y gaussiano)

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{U}^H(\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}) = \mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H\mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{U}^H\mathbf{n} = \mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}}$$



- El sistema es equivalente a r (el rango de la matriz MIMO) canales SISO ortogonales



- Cada uno de los canales tiene una energía λ_i^2

$$\tilde{y}_i = \lambda_i \tilde{x}_i + \tilde{n}_i, \quad i = 1, \dots, r$$

- Son los denominados modos del canal MIMO o *eigenmodes*.
- Para maximizar la capacidad el transmisor debe transmitir una potencia distinta por cada uno de ellos (*waterfilling*)

$$P_i = \left(\mu - \frac{1}{\lambda_i^2} \right)^+$$

donde $x^+ = \max(x, 0)$ y μ es el *waterfill level* para cumplir la restricción $\sum_{i=1}^r P_i = P$.

- **Resultado final:** la capacidad del canal MIMO con CSIT y CSIR se alcanza transmitiendo *codewords* gaussianas con covarianza $\mathbf{Q} = \mathbf{V} \text{diag}(P_1, \dots, P_r, 0, \dots, 0) \mathbf{V}^H$

$$C(\mathbf{H}) = \sum_{i=1}^r (\log(\mu \lambda_i^2))^+$$

Canal constante, CSIR+CDIT(ZMSW)

En este caso la capacidad se maximiza cuando se transmiten *codewords* gaussianas con matriz de covarianza $\mathbf{Q} = \frac{P}{n_T} \mathbf{I}$. Es decir, la transmisión ha de ser isótropa: por igual en todas las direcciones del espacio.

La capacidad instantánea viene dada por

$$C(\mathbf{H}) = \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{n_R} + \frac{P}{n_T} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right).$$

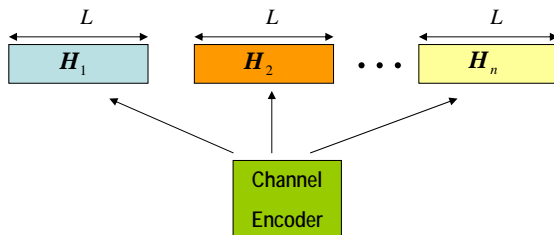
Descomponiendo el canal MIMO en $r = \min(n_T, n_R)$ canales SISO ortogonales, la capacidad instantánea puede escribirse de manera alternativa como

$$C(\mathbf{H}) = \sum_{i=1}^r \log \left(1 + \frac{P}{n_T} \lambda_i^2 \right)$$

que muestra el incremento lineal de capacidad con r (ganancia de multiplexado).

Canal ergódico

Podemos codificar a lo largo de varias realizaciones del canal (independientes entre sí \rightarrow canal sin memoria)



Tiene sentido entonces definir la capacidad ergódica como la esperanza matemática de la capacidad instantánea:

$$C_e = E[C(\mathbf{H})] = \max_{\mathbf{Q}: \text{Tr}(\mathbf{Q})=P} E \left[\log_2 \det (\mathbf{I}_{n_R} + \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^H) \right]$$

Como en el caso del canal constante podemos distinguir varias situaciones en función del conocimiento que se tenga del canal en el Tx y/o Rx

- CSIT+CSIR: para alcanzar la capacidad debemos transmitir *codewords* gaussianas y hacer *waterfilling* en potencia sobre los modos del canal (para cada realización), como en el caso del canal constante

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{H}} = \mathbf{V}_{\mathbf{H}} \text{diag}(P_1, \dots, P_r, 0, \dots, 0) \mathbf{V}_{\mathbf{H}}^H.$$

Este resultado es válido independientemente de la distribución del canal. La capacidad ergódica es

$$C_e(\mathbf{H}) = E_{\mathbf{H}} \left[\sum_{i=1}^r (\log(\mu \lambda_i^2))^+ \right].$$

- CDIT+CSIR: en función del modelo de canal tenemos los siguientes casos:

- Caso 1: modelo ZMSW $\mathbf{H} = \mathbf{H}_w \Rightarrow$ para alcanzar la capacidad debemos transmitir *codewords* gaussianas de manera isótropa $\mathbf{Q} = \frac{P}{n_T} \mathbf{I}$

$$C_e(\mathbf{H}) = E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \det \left(\mathbf{I}_{n_R} + \frac{P}{n_T} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right].$$

Existen expresiones cerradas y/o aproximaciones muy buenas para distintas distribuciones del canal (Rayleigh, Nakagami,...).

- Caso 2: modelo CMI $\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_w \Rightarrow$ para alcanzar la capacidad debemos transmitir *codewords* gaussianas y hacer *waterfilling* sobre los modos del canal medio (autovectores de $\mathbf{H}_m^H \mathbf{H}_m$).

- Caso 3: modelo CCI (con correlación sólo en el Tx)
 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_w \mathbf{R}_{tx}^{1/2} \Rightarrow$ para alcanzar la capacidad debemos transmitir *codewords* gaussianas y hacer *waterfilling* sobre los modos de \mathbf{R}_{tx}

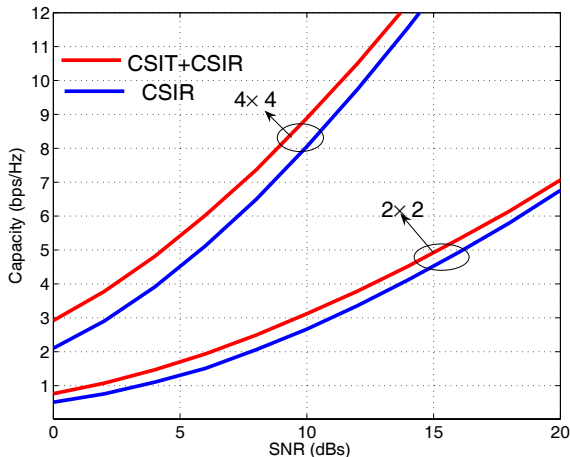
$$\mathbf{Q} = \mathbf{V}_R \text{diag}(P_1, \dots, P_r, 0, \dots, 0) \mathbf{V}_R^H,$$

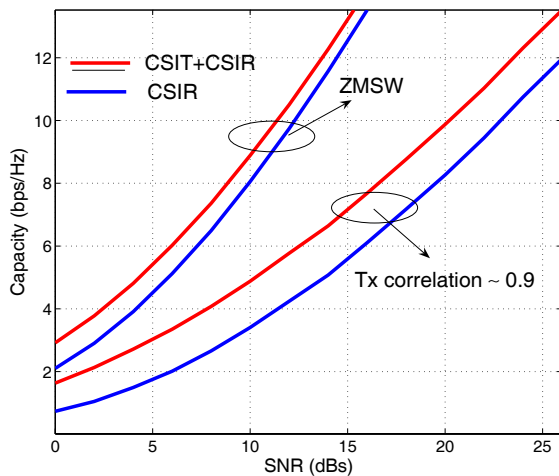
con $\mathbf{R}_{tx} = \mathbf{V}_R \Sigma \mathbf{V}_R^H$.

- Caso 4: CMCI (con correlación sólo en el Tx)
 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_w \mathbf{R}_{tx}^{1/2} \Rightarrow$ las direcciones óptimas de transmisión son funciones complicadas de \mathbf{R}_{tx} y \mathbf{H}_m ; no existe una solución cerrada (conocida).

El valor de la CSIT

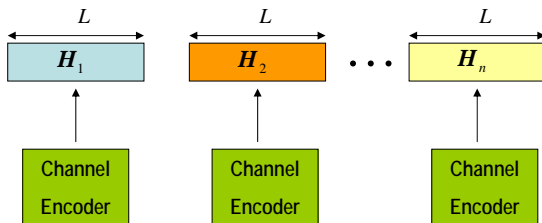
Canal Rayleigh i.i.d. (ZMSW).



Efecto de la correlación en transmisión en un canal 4×4 .

Canal *block-fading*

El canal permanece constante durante L usos, pero no podemos codificar a lo largo de varios bloques (por ejemplo en transmisiones limitadas por retardo)



Para este modelo la capacidad de Shannon es estrictamente cero. Existe siempre una probabilidad no nula de que el canal esté en situación de fuera servicio (*outage*)

$$C_{out,p} = r \Rightarrow Pr(r > C(\mathbf{H})) = p$$

Indice

- 1 Introducción
- 2 Capacidad en sistemas MIMO
- 3 *Multiplexing-diversity tradeoff*
- 4 Diseño de códigos espacio-temporales
- 5 Conclusiones

Multiplexing-diversity tradeoff

Para canales MIMO existe un compromiso fundamental entre robustez y tasa que se conoce como *multiplexing-diversity tradeoff* [Zheng and Tse, IEEE Trans. IT, 2003].

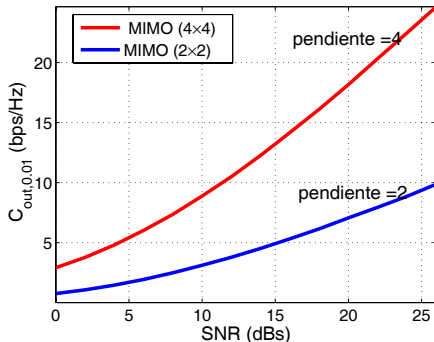
Consideramos un canal *block-fading* aunque la misma idea es aplicable a canales ergódicos.

- La ganancia de multiplexado (*multiplexing gain*) se define como

$$r_{max} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{C_{out,p}}{\log_2(\rho)}$$

siendo ρ la SNR en unidades naturales.

Nota: la FER (*frame error rate*) del sistema (esto es, su robustez) es fija e igual a $p \Rightarrow$ si usamos códigos suficientemente buenos, la P_e está dominada por aquellas realizaciones en que el canal está en un *fading* profundo y no podemos transmitir.



- Para un canal MIMO i.i.d. con detección óptima $r_{max} = \min(n_T, n_R)$.
- Por cada 3dB de incremento en SNR, para una P_e (robustez) fija podemos aumentar la tasa en $\min(n_T, n_R)$ bps/Hz.
- ¡Es un resultado asintótico!

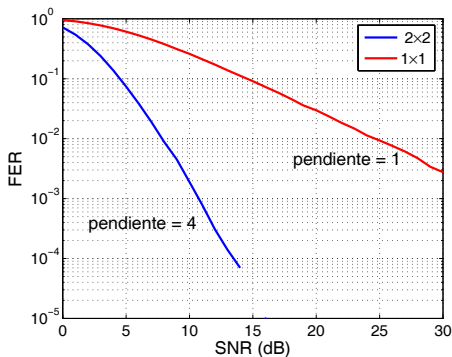
- La ganancia de diversidad *diversity gain* se define como

$$d_{max} = - \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\log_2(P_e(\rho, r))}{\log_2(\rho)}$$

siendo nuevamente ρ la SNR en unidades naturales.

- En este caso hemos fijado la tasa: porcentaje de tramas en las que transmitimos por debajo de la capacidad instantánea y, por lo tanto, pueden ser decodificadas con P_e arbitrariamente baja.
- Estamos identificando P_e con FER .

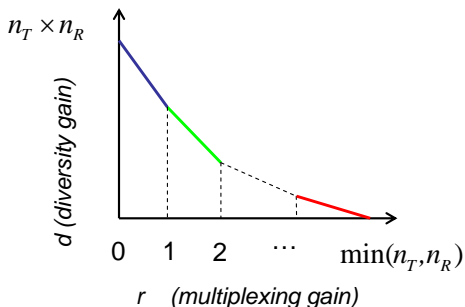
Curvas de FER (P_e) para una tasa fija de $r = 2$ bps/Hz.



- La máxima diversidad es $d_{max} = n_T n_R$.
- Por cada 3dB de incremento en SNR, para un tasa de transmisión fija podemos reducir la P_e por un factor $2^{n_T n_R}$.
- Al igual que antes, es un resultado asintótico.

La curva de compromiso entre ganancia de multiplexado y ganancia de diversidad es lineal a tramos $(r, d(r))$ de la forma:

$$d(r) = (n_R - r)(n_T - r)$$



Conclusión: Si “gastamos” la SNR en aumentar la robustez del sistema, reduciendo la FER todo lo posible $d = n_T n_R$, entonces hemos de mantener la tasa constante $r = 0$; y viceversa.

Indice

- 1 Introducción
- 2 Capacidad en sistemas MIMO
- 3 *Multiplexing-diversity tradeoff*
- 4 **Diseño de códigos espacio-temporales**
- 5 Conclusiones

Diseño de códigos espacio-temporales

- Supongamos: a) Un sistema MIMO con n_T antenas en Tx y n_R en recepción y b) El canal MIMO es Rayleigh i.i.d. y se mantiene constante durante la transmisión de todo un bloque de duración L slots ($L \geq n_T$).
- Queremos diseñar un conjunto de palabras código espacio-temporales para la transmisión

$$\mathbf{S}^i \in \mathcal{C}^{n_T \times L}, \quad i = 1, \dots, N.$$

- A esta categoría pertenecen los denominados código espacio-temporales por bloques (*space-time block codes* o STBCs), que son unos de los códigos más ampliamente utilizados en transmisiones MIMO y el objeto de nuestro estudio posterior.
- Las expresiones obtenidas nos permitirán introducir los conceptos de ganancia de diversidad (nuevamente) y de ganancia de codificación.

- La señal recibida es

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{S}^i + \mathbf{N}$$

siendo $\mathbf{N} \sim CN(0, \sigma^2 \mathbf{I}_{n_R \times L})$.

- Las palabras código están normalizadas para que la energía media por símbolo complejo transmitido sea 1. La SNR por antena Tx es $\rho/n_T = 1/\sigma^2$.
- El modelo anterior incluye la codificación sólo espacial, $\mathbf{S}^i \in \mathcal{C}^{n_T \times 1}$ (a veces denominada *vector coding*); o sólo temporal $\mathbf{S}^i \in \mathcal{C}^{1 \times L}$.
- ¿Cómo diseñamos las palabras código \mathbf{S}^i ? ¿Qué criterios deben cumplir para extraer las ventajas del sistema MIMO?

Minimización de la P_e por parejas

Como criterio de diseño empleamos la P_e por parejas (*pairwise*), es decir, la probabilidad de transmitir la palabra \mathbf{S}^i y decidir erróneamente la palabra \mathbf{S}^j , condicionada a la realización del canal \mathbf{H}

$$P(\mathbf{S}^i \rightarrow \mathbf{S}^j | \mathbf{H}).$$

La probabilidad anterior es la probabilidad del evento

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{H}\mathbf{S}^i\|^2 \geq \|\mathbf{X} - \mathbf{H}\mathbf{S}^j\|^2,$$

que se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{N}\|^2 &\geq \|\mathbf{N} - \mathbf{H}(\mathbf{S}^j - \mathbf{S}^i)\|^2 = \\ &= \|\mathbf{N}\|^2 + \|\mathbf{H}(\mathbf{S}^j - \mathbf{S}^i)\|^2 - 2\Re \{Tr [\mathbf{N}^H \mathbf{H}(\mathbf{S}^j - \mathbf{S}^i)]\}. \end{aligned}$$

Si ahora llamamos $d_H^2(\mathbf{S}^i, \mathbf{S}^j) = \|\mathbf{H}(\mathbf{S}^j - \mathbf{S}^i)\|^2$ y $g = 2\Re \{Tr [\mathbf{N}^H \mathbf{H}(\mathbf{S}^j - \mathbf{S}^i)]\}$, podemos escribir de manera más compacta

$$P(\mathbf{S}^i \rightarrow \mathbf{S}^j | \mathbf{H}) = P(g \geq d_H^2(\mathbf{S}^i, \mathbf{S}^j)).$$

Pero g es una combinación lineal de gaussianas, y se puede comprobar fácilmente que $g \sim N(0, 2\sigma^2 d_H^2(\mathbf{S}^i, \mathbf{S}^j))$, por lo tanto

$$P(\mathbf{S}^i \rightarrow \mathbf{S}^j | \mathbf{H}) = Q\left(\sqrt{\frac{d_H^2(\mathbf{S}^i, \mathbf{S}^j)}{2\sigma^2}}\right).$$

Aplicando ahora la desigualdad $Q(x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$, podemos acotar la P_e pairwise como

$$P(\mathbf{S}^i \rightarrow \mathbf{S}^j | \mathbf{H}) \leq e^{-d_H^2(\mathbf{S}^i, \mathbf{S}^j)/4\sigma^2}.$$

La distancia $d_H^2(\mathbf{S}^i, \mathbf{S}^j)$ puede reescribirse como una forma cuadrática de la siguiente manera

$$\begin{aligned} d_H^2(\mathbf{S}^i, \mathbf{S}^j) &= \text{Tr}(\mathbf{E}_{i,j}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{E}_{i,j}) = \text{Tr}(\mathbf{H} \mathbf{E}_{i,j} \mathbf{E}_{i,j}^H \mathbf{H}^H) = \\ &= \text{vec}(\mathbf{H}^H)^H (\mathbf{I}_{n_R \times n_R} \otimes \mathbf{E}_{i,j} \mathbf{E}_{i,j}^H) \text{vec}(\mathbf{H}^H) = \\ &= \text{vec}(\mathbf{H}^H)^H (\mathbf{I}_{n_R \times n_R} \otimes \mathbf{G}_{i,j}) \text{vec}(\mathbf{H}^H) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{E}_{i,j} = \mathbf{S}^j - \mathbf{S}^i$ es una matriz $n_T \times L$ formada como la diferencia entre las dos matrices de código y $\mathbf{G}_{i,j} = \mathbf{E}_{i,j} \mathbf{E}_{i,j}^H$ (que es Hermítica y, por lo tanto, con autovalores mayores o iguales a cero).

En resumen, hasta ahora hemos visto que la Pe pairwise para una determinada realización del canal puede acotarse como

$$P(\mathbf{S}^i \rightarrow \mathbf{S}^j | \mathbf{H}) \leq e^{-\text{vec}(\mathbf{H}^H)^H (\mathbf{I}_{n_R \times n_R} \otimes \mathbf{G}_{i,j}) \text{vec}(\mathbf{H}^H) / 4\sigma^2},$$

y promediando en todas las realizaciones tenemos que

$$\bar{P}(\mathbf{S}^i \rightarrow \mathbf{S}^j) \leq E \left[e^{-\text{vec}(\mathbf{H}^H)^H (\mathbf{I}_{n_R \times n_R} \otimes \mathbf{G}_{i,j}) \text{vec}(\mathbf{H}^H) / 4\sigma^2} \right],$$

Una expresión útil

Si $\mathbf{z} \sim CN(\mu, \Sigma)$, entonces

$$E_{\mathbf{z}} \left[e^{-\mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z}} \right] = \frac{e^{-\mu^H \mathbf{A} (\mathbf{I} + \Sigma \mathbf{A})^{-1} \mu}}{|\mathbf{I} + \Sigma \mathbf{A}|}$$

De la expresión anterior se deduce que si el canal MIMO tiene media, $E[\text{vec}(\mathbf{H}^H)] = \mu \neq 0$, entonces la P_e decae exponencialmente (parecido a un canal AWGN).

Por otra parte, si el canal es i.i.d Rayleigh ($\mathbf{H} = \mathbf{H}_w$), entonces $\mu = 0$ y $\Sigma = \mathbf{I}$, por lo que la expresión de la \bar{P}_e queda

$$\begin{aligned} \bar{P}(\mathbf{S}^i \rightarrow \mathbf{S}^j) &\leq \frac{1}{\left| \mathbf{I}_{n_R n_T} + \frac{1}{4\sigma^2} (\mathbf{I}_{n_R} \otimes \mathbf{G}_{i,j}) \right|} = \frac{1}{\left| \mathbf{I}_{n_T} + \frac{1}{4\sigma^2} \mathbf{G}_{i,j} \right|^{n_R}} \\ &= \prod_{m=1}^r \left(1 + \frac{\rho}{4n_T} \lambda_m \right)^{-n_R}, \end{aligned}$$

siendo $r = \text{rank}(\mathbf{G}_{i,j})$ y λ_m los autovalores de la matriz $\mathbf{G}_{i,j}$.

Finalmente, para SNRs altas $\rho \gg 1$ se obtiene la siguiente cota

$$P(\mathbf{S}^i \rightarrow \mathbf{S}^j) \leq \left(\frac{\rho}{4n_T} \right)^{-rn_R} \left(\prod_{m=1}^r \lambda_m(\mathbf{G}_{i,j}) \right)^{-n_R}.$$

Definiendo ahora:

- 1 Ganacia de codificación:

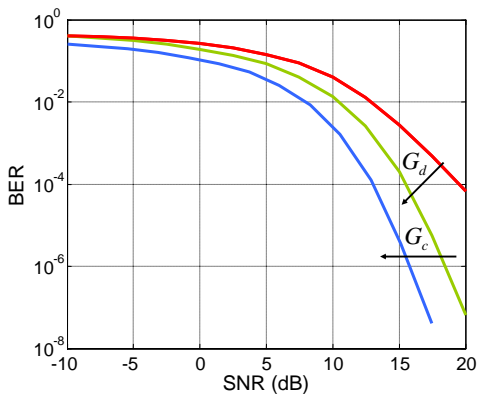
$$G_c = \min_{\mathbf{S}^i \neq \mathbf{S}^j} \left(\prod_{m=1}^r \lambda_m(\mathbf{G}_{i,j}) \right)^{1/r} = \min_{\mathbf{S}^i \neq \mathbf{S}^j} |\mathbf{G}_{i,j}|^{1/r}.$$

- 2 Ganacia de diversidad:

$$G_d = n_R \min_{\mathbf{S}^i \neq \mathbf{S}^j} \text{rank}(\mathbf{G}_{i,j}).$$

Criterios del rango y del determinante

$$P_e \leq G_c^{-G_d} \left(\frac{\rho}{4n_T} \right)^{-G_d}$$



Un buen código [Tarokh, Seshadri, Calderbank, IEEE IT, 1998]

- Debe cumplir el criterio del rango para aprovechar toda la diversidad del canal MIMO: el rango de la matriz diferencia entre dos *codewords* cualesquiera deber ser $\min(n_R, n_T)$. Por ejemplo, con *vector coding* sólo podemos conseguir diversidad 1 \rightarrow es necesario hacer codificación espacio-temporal para extraer toda la diversidad del canal MIMO.
- Debe maximizar el mínimo determinante de la matriz diferencia entre dos *codewords* distintas (criterio del determinante). De esta manera conseguimos ganancia de codificación.

Indice

- 1 Introducción
- 2 Capacidad en sistemas MIMO
- 3 *Multiplexing-diversity tradeoff*
- 4 Diseño de códigos espacio-temporales
- 5 Conclusiones

Conclusiones

- Un canal MIMO ofrece numerosas ventajas que pueden ser aprovechadas en los nuevos sistemas de comunicaciones:
 - 1 Diversidad: esencial en canales con *fading*, pendiente de la curva de BER con la SNR (para SNRs altas), la diversidad máxima es $n_T \times n_R$.
 - 2 Capacidad (*multiplexing gain*): incremento lineal de la capacidad con $r = \min(n_T, n_R)$, mediante la SVD el canal MIMO se descompone en r canales SISO, importancia del CSIT y del modelo asumido de canal.
 - 3 Ganancia de codificación (si diseñamos bien las matrices código)/ Ganancia de array (procesando coherentemente en Tx y/o Rx).
- Pero existen compromisos entre ellas: ganancia de multiplexado-diversidad.

Conclusiones

- Para extraer toda la diversidad del sistema MIMO es necesario emplear códigos espacio-temporales.
- Para diseñar códigos ST que minimicen una cota superior de la P_e por parejas hemos obtenidos los criterios del rango (ganancia de diversidad) y del determinante (ganancia de codificación).
- Entre ellos, los códigos espacio-temporales por bloque (*space-time block codes* o STBCs) son los más ampliamente empleados y los estudiaremos detenidamente en las siguientes sesiones.