ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

MASTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA DE MINAS

Capítulo 4: Funciones de fiabilidad

Carlos Sierra Fernández, PhD

Ingeniero de minas

Profesor Ayudante Doctor

Departamento de Transportes y Tecnología de Proyectos y Procesos

Emilio Andrea Calvo

Ingeniero industrial

Profesor Asociado

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

CONTENIDO

CAPÍTULO 4: FUNCIONES DE FIABILIDAD

Emilio Andrea Calvo

Carlos Sierra Fernández

4 INTRODUCCIÓN

Para formalizar el concepto de modelo, se reproduce de modo resumido la explicación de Sixto Ríos en "Métodos Estadísticos" (1973):

"*Un modelo matemático es una representación abstracta simplificada de un cierto tipo de fenómenos reales. Ciertas operaciones que traducen situaciones reales se definen entre los elementos del modelo.*

En la formalización de un modelo se definen axiomas y hay un proceso de conceptualización. Se parte de una idea intuitiva (por ejemplo, recta = hilo tirante, dibujo en un papel de una línea con regla, etc.) y se introduce el concepto, inspirado en dicha idea, por algunas de sus propiedades, prescindiendo después del punto de partida intuitivo.

La construcción axiomática requiere o se caracteriza por:

a) No se dan definiciones directas

b) Las propiedades de los teoremas se deducen mediante razonamientos lógicos

c) Los axiomas deben ser compatibles (no contradictorios), esto es debe ser no vacío el conjunto de entes que se define.

Un teorema deducido correctamente de los axiomas, en cuanto expresa una propiedad de los entes abstractos definidos por los axiomas, es cierto sobre estos entes abstractos, pero no demuestra nada respecto de los objetos sensibles o reales que sirvieron para construir dichos entes abstractos. Así por ejemplo, dos segmentos de cuerda tensa de 4 y 5 cm suman 9 cm, cierto absoluto en matemáticas; pero falso absoluto con probabilidad del 99,99% ya que dos cuerdas reales de 4 y 5 cm no sumarán nunca 9 cm exactos.

En qué medida se adapta un modelo a la realidad es una cuestión de carácter intuitivo y para la que no se puede dar reglas. Es más fácil decir cuando un modelo no se adapta a la realidad, que dar una norma rígida para aceptarlo."

Es importante además para el ingeniero de mantenimiento conocer la diferencia entre modelos deterministas y estocásticos. Un modelo determinista es aquel que a partir de los mismos inputs genera siempre los mismos outputs a través de relaciones en las cuales no hay lugar para el azar. Un ejemplo de modelación determinista en mantenimiento sería la programación lineal. Por el contrario, modelo estocástico o probabilístico es aquel que presenta un comportamiento no determinista, en la medida que en los estados posteriores del sistema vienen dados tanto por las acciones predecibles como por aspectos aleatorios. Un ejemplo en teoría del mantenimiento es el análisis de colas.

En el servicio de mantenimiento se utilizan generalmente técnicas estadísticas, en tanto que se trabaja con probabilidades de ocurrencia y en general se modelan los tiempos de funcionamiento, producción y averías. Como se ha dicho, estos modelos no son deterministas, es decir, no dan para una entrada una salida; sino que para una entrada, ofrecen como respuesta una salida con una determinada probabilidad de ocurrencia. Un ejemplo de salida de estos modelos sería: 4, t, 95%, indicando que se pueden producir 4 averías en un intervalo de tiempo t, con una certeza del 95%.

La ingeniería de la fiabilidad es una disciplina que necesita de la probabilidad y de la estadística. Tanto es así, que el objetivo fundamental de la misma no es otro que la obtención de un modelo matemático capaz de estimar y predecir la fiabilidad del sistema. Este modelo se obtiene por medio de funciones estadísticas que se ajustan a los datos disponibles, normalmente datos históricos o ensayos realizados. Del elevado número de funciones estadísticas existentes en la literatura, apenas cinco de ellas, cuya selección dependerá de la naturaleza de los datos, parecen suficientes para modelar la mayor parte de los fenómenos de este tipo.

Es importante para el ingeniero de mantenimiento ser consciente del hecho de que un dispositivo sea muy fiable, no invalida que pueda ocurrir el suceso contrario aunque éste sea de muy baja probabilidad. Por ejemplo, la probabilidad de que toque la lotería es muy baja, del orden de 10^{-5} (1 entre 100.000), y sin embargo a alguien le toca en cada sorteo. Por este motivo se debe estar preparado para actuar en cualquier momento con la respuesta adecuada.

Un suceso de probabilidad de ocurrencia 50% es, por ejemplo, el dimensionamiento de una determinada pieza para encajar en otra. Así, está el que puede encajar o no con idéntica probabilidad, luego de media una de cada dos no encajará. Que no encajen una de cada dos veces como tasa media, no invalida que 5 veces seguidas las piezas encajen o que no lo hagan ninguna. Es decir, mediante los modelos de probabilidad no se suele modelar con memoria, o dicho de otro modo, lo que ha pasado en un instante anterior no suele condicionar lo que pasará en el siguiente.

Como ya indicó Galileo (1564-1642): “*Hay que medir todo lo que es medible y hacer medible lo que no lo es”*. Por tanto, la mera descripción de los fenómenos naturales no basta, hay que expresarlos mediante modelos matemáticos que permitan realizar cálculos y predicciones fiables. Lo cuantitativo (cantidad) supone un avance sobre lo cualitativo (cualidad), pues si no podemos interpretar la calidad (bueno, malo, regular, etc.) en forma de intervalos medibles y comparables las estimaciones y predicciones se hacen más difíciles. Lo anterior es la esencia misma de este capítulo.

Finalizar indicando que para elaborar el mismo se ha consultado fundamentalmente las publicaciones de Sixto Ríos, Métodos Estadísticos (1967) y Matemáticas Especiales (1972), cuya lectura se recomienda a quien precise ahondar en estos conceptos. Nótese también, que al tratarse de un texto de carácter práctico, se han omitido definiciones formales prestando mayor atención, al igual que en el caso de los capítulos anteriores, a la componente práctica de los conceptos introducidos.

4.1 DESCRIPTORES ESTADÍSTICOS: MEDIA, MEDIANA, VARIANZA Y DESVIACIÓN TÍPICA

En esta sección se efectúa un breve repaso de conceptos básicos de estadística. Con esto se pretende, no solo revisar los principales descriptores estadísticos, sino también presentar de manera muy resumida los parámetros detrás de las principales funciones del mantenimiento: frecuencia, densidad, fiabilidad y tasa de fallos. Toda esta revisión es efectuada por medio del ejemplo 4.1 en el que se analizan los fallos correspondientes al ensayo de funcionamiento continuo de 200 lámparas.

Ejemplo 4.1 Se ensayan los fallos de 200 lámparas dándose los valores de fallo de acuerdo a la tabla siguiente.

Tiempo hasta fallo (h)	**Frecuencia Nº de lámparas que fallan entre A_{i+1} y A_i**
0	0
100	0
200	0
300	4
400	18
500	42
600	80
700	38
800	16
900	2
1000	0
Total	200

Calcular:

a) Tabla de frecuencias relativas y de densidad de frecuencias relativas.

b) Histograma de densidad de frecuencias relativas.

c) Media, mediana y varianza.

d) Ajustar de modo aproximado una función probabilística a los datos del ensayo.

Solución:

a) **Tabla de frecuencias y de densidad de frecuencias relativas**

Tiempo hasta fallo, A (horas)	**Frecuencia absoluta, B**	**Frecuencia relativa, f_i**	**Densidad de frecuencia relativa (por hora)**
Intervalo $\Delta A=A_{i+1}-A_i=100$	**Nº de lámparas que fallan entre A_{i+1} y A_i**	**Fracción del total $f_i=B_i/\Sigma B_i$**	**Fracción por hora $f_i/(A_{i+1}-A_i)$**
0	**0**	0,00	0
100	**0**	0,00	0
200	**0**	0,00	0
300	**4**	0,02	0,0002
400	**18**	0,09	0,0009
500	**42**	0,21	0,0021
600	**80**	0,40	0,004
700	**38**	0,19	0,0019
800	**16**	0,08	0,0008
900	**2**	0,01	0,0001
1000	**0**	0,00	0
Total	**200**	1,00	0,01

Utilizando los datos de la cuarta columna correspondiente a la densidad de frecuencia relativa por unidad de tiempo, se puede construir un histograma de densidad de frecuencia relativa tal como se muestra en la figura adjunta. El área sobre cada intervalo representa la frecuencia relativa de fallo de ese intervalo (incluso si se utilizan diferentes rangos para el intervalo, lo cual a veces interesa).

El control se hace por intervalos, una lámpara que falla entre 300 y 400 horas se anota en 300 h. Para mayor precisión se pueden subdividir los intervalos o anotar directamente el valor de horas exacto del fallo y calcular las funciones mediante valores ponderados del tipo:

$$\mu = \Sigma f_i \cdot h_i$$

Del diagrama se obtiene información interesante como la frecuencia (probabilidad cuando de la muestra se pasa a la población o universo) de que una lámpara pueda durar más de un determinado tiempo t. Así para calcular la probabilidad de que una lámpara dure más de 600 horas se suman todos los valores mayores o iguales que 600 horas y en este caso:

$$P(X>=600) = 0{,}40 + 0{,}19 + 0{,}08 + 0{,}01 = 0{,}68 \rightarrow 68\%$$

Y su opuesta, la probabilidad de que una determinada lámpara no llegue a las 600 horas será:

$$P(X<600) = 1- P(X>=600) = 1-0{,}68=0{,}32.$$

Este valor debe coincidir con el obtenido de manera directa, dado que son sucesos excluyentes, y cuya suma es la probabilidad unidad (universo completo de casos posibles):

$$P(X<600) = 0{,}02+0{,}09+0{,}21= 0{,}32 \rightarrow 32\%$$

Interesa poder trabajar con valores que representan el ensayo, como la media, desviaciones, valores probabilísticos de oscilación o entorno de confianza, etc. Un caso muy interesante es la determinación de estos datos a partir de las funciones continuas que los representan. Otro común, es el caso de la inferencia que tiene lugar cuando de un ensayo se desea pasar a los datos de una población de tamaño mayor (nº muy grande o infinito en matemáticas) porque bien no es económico o no se pueden ensayar todas las unidades (especialmente cuando los ensayos son a destrucción).

Dentro de los parámetros que caracterizan la distribución de tiempo-fallo, los más interesantes para caracterizar las funciones de uso en mantenimiento son los siguientes.

b) Histograma de densidad de frecuencias

Eje de abscisas, variable normalmente identificada por el tiempo (t o T), en este caso representa los tiempos comprendidos entre dos valores (300, 400) asignando al valor inferior (300) el dato de fallo obtenido en el intervalo. Otro criterio puede ser asignar al valor intermedio (350) el valor de fallo obtenido en el intervalo. Los resultados no son independientes de este valor, siendo más precisos a medida que el intervalo es menor.

Cuando se pasa a distribuciones continuas de probabilidad no existe el problema de amplitud del intervalo.

Eje de ordenadas, variable del número de fallos; cuando se trata de probabilidades acumuladas, función de probabilidad, corresponde a la variable probabilidad de ocurrencia. Cuando se utilicen otras denominaciones se explicitará en el apartado correspondiente.

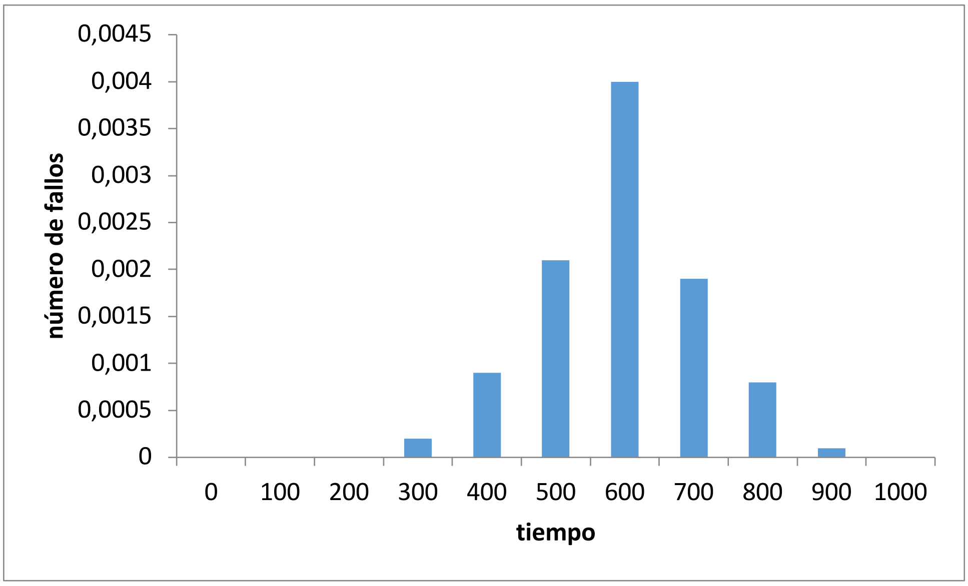


Figura. Gráfico de la tabla de frecuencias relativas

c) Descriptores estadísticos fundamentales

Media aritmética (μ), que representa la tendencia central de la anterior curva tiempo-fallo y se obtiene por la operación:

$$\mu = \Sigma f_i \cdot t_i$$

Para el supuesto anterior será (0,02·300+0,09·400+...+ 0,01·900)= 593; si se define el intervalo por el valor central, se tiene una media de (593+50)=643.

Para distribuciones simétricas este valor corresponde al punto central de la función de distribución, pero si no son simétricas, caso de la distribución de Poisson o de Weibull no se corresponde con el valor central.

Mediana, corresponde al valor central, aquel valor del periodo de funcionamiento de tiempo tal que ocurren tantos fallos antes como después. Para funciones continuas tiene una forma exacta de cálculo, pero para tablas de frecuencia en intervalos, puede no existir un valor, sino un intervalo de tiempo en el que esto ocurre, así en el ejemplo de las lámparas se tiene, que el cruce de valores acumulados por encima y por debajo se cruza en el intervalo 500 – 600, pero no se puede identificar el punto sin añadir otras consideraciones. Conviene indicar que los valores son bastante centrados en el ejemplo, pero en otras distribuciones este valor puede estar muy desfasado hacia un lado del intervalo total en estudio.

Tiene interés esta valor ya que en contratos de mantenimiento donde se puede fijar aquel valor que de la condición de la mediana, que haya tantos defectos antes como después del valor fijado que es una condición que da el 50% de la carga de las reparaciones a cada parte, contabilizando en número de reparaciones.

Tiempo hasta fallo, horas	**Mediana**	
	Acumulada directa	**Acumulada inversa**
0	0	200
100	0	200
200	0	200
300	4	200
400	22	196
500	**64**	**178**
600	**144**	**136**
700	182	56
800	198	18
900	200	2
1000	200	0

***Varia*nza,** es un parámetro que mide la dispersión de los valores con respecto a la media, su expresión es:

Varianza S^2 para la muestra (σ^2 para la población) = $\Sigma f_i \cdot (t_i - m)^2$ ó $\Sigma f_i \cdot (t_i - \mu)^2$. El paso del valor de la muestra al valor de la población está, normalmente, relacionado con el tamaño de la muestra[1] en el sentido que para el ejercicio el valor corresponde a la varianza de una muestra, denominado con S^2.

$$S^2 = 0{,}02\cdot(300-643)^2 + 0{,}09\cdot(400-643)^2 \ldots \text{etc.} = 13.451\ h^2$$

El uso de este parámetro, que da las horas al cuadrado es algo dificultoso o irreal, pero obedece a una propiedad muy interesante de la variable "varianza" y es que cuando un determinado suceso depende del efecto combinado de varias causas independientes, entonces la varianza es la suma de las varianzas obtenidas por separado, esta propiedad, que no se da en otros parámetros de dispersión es la causa base de su uso generalizado.

Para obviar la dificultad del uso interpretativo correspondiente al cuadrado (h^2), se obtiene la raíz cuadrada. Este valor viene denotado en horas en el ejemplo o en la variable de estudio del caso, por ejemplo fallos.

Desviación típica, es la variable resultante de obtener la raíz cuadrada positiva de la varianza. Tiene amplia utilización en la determinación de los intervalos de confianza para una determinada variable y su unidad es aquella en la que estamos determinando el eje de las X (eje 0-X):

$$S\ (\sigma \text{ en funciones de probabilidad}) = \sqrt{S^2} \quad \text{o} \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Para el ejercicio toma el valor:

$$S = \sqrt{13.451\ \mathrm{h}^2} = 116{,}0\ \mathrm{h}$$

d) Ajuste de una función continúa.

Un procedimiento para obtener las funciones de densidad de probabilidad y todas las características que de ellas se derivan es determinar los parámetros fundamentales de la distribución que mejor se ajusta a la información de la muestra y determinar los parámetros básicos de la función por los métodos estadísticos correspondientes.

[1] La relación que se debe obtener depende del tamaño de la muestra. La expresión "raíz(n/(n-1))" se emplea cuando se determina, a partir de una muestra de tamaño n, con parámetros de media "m" y varianza "S^2", la función normal N (μ, σ).

Los fallos de envejecimiento, correspondientes al ejemplo, se ajustan con bastante exactitud a la función normal. Para determinar esta función se necesitan dos valores, la media y la desviación típica. Se determinan la media y la desviación típica de la normal sobre la base de los valores de la muestra y se tiene:

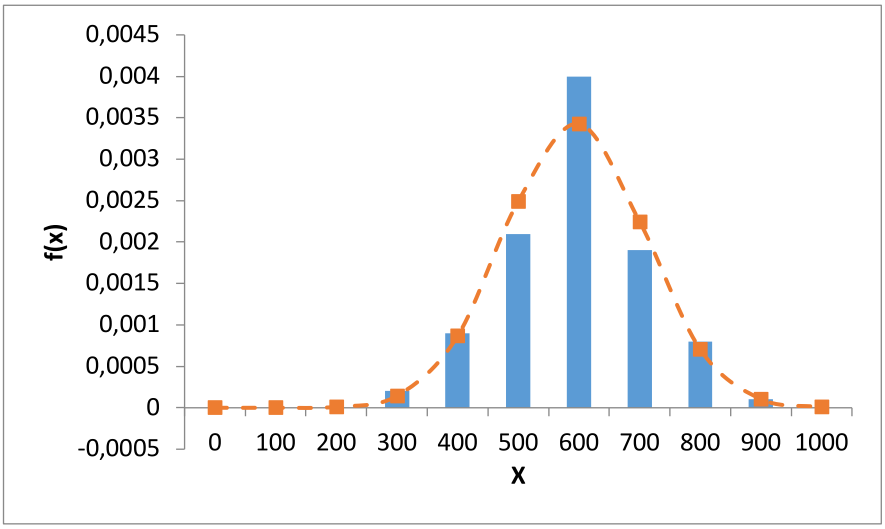
Media de la distribución, μ = 593; media de la muestra (m); m=μ

Desviación típica de la función de densidad: $\sigma = \sqrt{\frac{n}{(n-1)}} \cdot S = 116{,}27$; (S=116 y n=200)

Función de densidad f(x)= $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Con el paso a la forma continua se puede determinar la mediana con más precisión, la cual toma el valor[2] 593, cuando antes estaba definida por un intervalo entre 500 y 600. Para otras funciones (modelos) como la exponencial que depende de un solo parámetro, "λ" denominado "*tasa de fallos*", la determinación se da en ejercicios posteriores.

x	f(x)
0	7,7083E-09
100	4,2794E-07
200	1,1338E-05
300	0,00014337
400	0,0008652
500	0,00249182
600	0,00342497
700	0,00224668
800	0,00070334
900	0,00010508
1000	7,4929E-06



[2] Para una distribución de tipo normal N (μ,σ) (distribución simétrica respecto a la media), la media y la mediana coinciden en el valor. Esto no es así en otro tipo de distribuciones como la Weibull de amplio uso en ingeniería de mantenimiento y en sistemas de calidad.

La estimación de los parámetros de una distribución recibe el nombre de análisis paramétrico. Este estudio a su vez puede realizarse bien por medio de análisis de regresión o por el método de la máxima verosimilitud. El primero de ellos consiste en una línealización de las funciones (exponencial, normal, lognormal, Weibull) a partir de la cual se extraen los parámetros buscados. El segundo define antes una función de verisimilitud, la cual ha de ser maximizada al objeto de obtener los parámetros.

4.2 FUNCIONES DE APLICACIÓN EN ESTADÍSTICA DEL MANTENIMIENTO

Las funciones de uso corriente en estadística son la **función de densidad de probabilidad de fallo f (t), la función de probabilidad de fallo acumulada F (t), la función de fiabilidad o tasa de supervivencia R (t)**, y la función **tasa de fallos, o tasa de fallo local h(t).** Todas estas funciones han sido definidas en el capítulo anterior. En esta sección se particularizan sus expresiones matemáticas para cada una de los modelos de ajuste más habituales: modelo normal, exponencial, Poisson y Weibull (tabla 4.1 siguiente).

A lo largo del capítulo debe tenerse presente que la función fundamental es f (t), es por ello que las demostraciones matemáticas corresponden a la misma, y que las demás funciones se pueden obtener, se deducen, a partir de ésta, así, por ejemplo a partir de la función de probabilidad acumulada, F(t) se obtienen las siguientes:

$$R(t)= 1-F(t), \quad y \quad h(t)= F(t)/R(t)$$

La propia función F(t) es la integral de f(t) entre los límites correspondientes.

Tabla 4.1 Resumen de las principales funciones y parámetros de mantenimiento para diversos modelos de distribución. Modelo normal y exponencial.

Función		**Modelo**	
		Normal	**Exponencial**
Densidad de fallos	**f(t)**	$\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda t}$
Fiabilidad	**R(t)**	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{(t-\mu)}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}{2}}\,dx$	$e^{-\lambda t}$
Tasa de fallos	**h(t) o Z(t)**	$\frac{t \cdot \mu}{\sigma}$	λ
MTBF		μ	$1/\lambda$
Rangos		Variable tiempo: $\infty \leq t \leq \infty$	Variable tiempo $t \geq 0$ Parámetro $\lambda > 0$

Tabla 4.1.Continuación. Resumen de principales funciones y parámetros de mantenimiento para diversos modelos de distribución. Modelo Poisson y Weibull.

Función		**Modelo**	
		Poisson, distribución de tipo discreta	**Weibull**
Densidad de fallos	**f(t)**	$\frac{e^{\lambda}\lambda^{k}}{k!}$	$\left(\frac{\beta}{\eta}\right)\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$
Fiabilidad	**R(t)**	R(t)=1-F(t) = $1-\frac{\boldsymbol{\Gamma}\{(k+1),\lambda\}}{k!}$	$e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$
Tasa de fallos	**h(t) o Z(t)**	h(t)=F(t)/R(t)	$\left(\frac{\beta}{\eta}\right)\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$
MTBF		Media: λ	$\eta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$
Rangos		Dominio k ∈{0,1,2,…n} Variable discreta, k≥ 0	Variable tiempo (t): t ≥0 y parámetros (β,η); β>0; η>0

Nota: Γ(x,y) es la función gamma incompleta, el factorial de la variable disminuido en una unidad.

4.2.1 DISTRIBUCIÓN NORMAL

Esta distribución se ajusta normalmente a datos de dos tipos en mantenimiento. En primer lugar a los fallos de elementos que estén sometidos a desgaste, como pueden ser los fallos mecánicos, y en el otro, en el estudio del cumplimiento de las especificaciones por parte de los ítems fabricados. Esta distribución es de sobra conocida y no requiere de explicaciones exhaustivas en la medida en que el lector estará, sin duda, ya suficiente familiarizado con la misma. En cualquier caso si desea repasar estos conocimientos puede emplear cualquier texto de estadística. En nuestro caso recomendamos, hemos utilizado, Sixto Ríos, Métodos Estadísticos (1973).

La función normal viene determinada por dos parámetros, media (μ) y desviación típica (σ) y se representa, normalmente, por N (μ,σ). La gráfica corresponde a la imagen de la figura 4.1 siguiente.

Desde un punto de vista operativo, y práctico, indicar que cuando se hace el cambio de variable en la función N (μ,σ) siguiente, $z=(x-\mu)/\sigma$, se transforma en la N(0,1), cuya media vale "0"; es decir, está centrada en el origen, y la desviación típica vale 1. Se usa, entre otras muchas aplicaciones, y para el concepto que nos interesa de mantenimiento, para modelar la distribución de los errores de medida, para la determinación (modelar) de determinados supuestos de averías entre otras múltiples aplicaciones.

La distribución es simétrica y de media μ, y con el cambio de variable, al restarle la media, queda en el origen de coordenadas (0,0), simétrica y centrada en el origen. La figura 4.1 siguiente recoge la forma de las funciones de densidad de probabilidad, y tasa de fallos de un modelo de fallos que se adapta a este tipo de distribución.

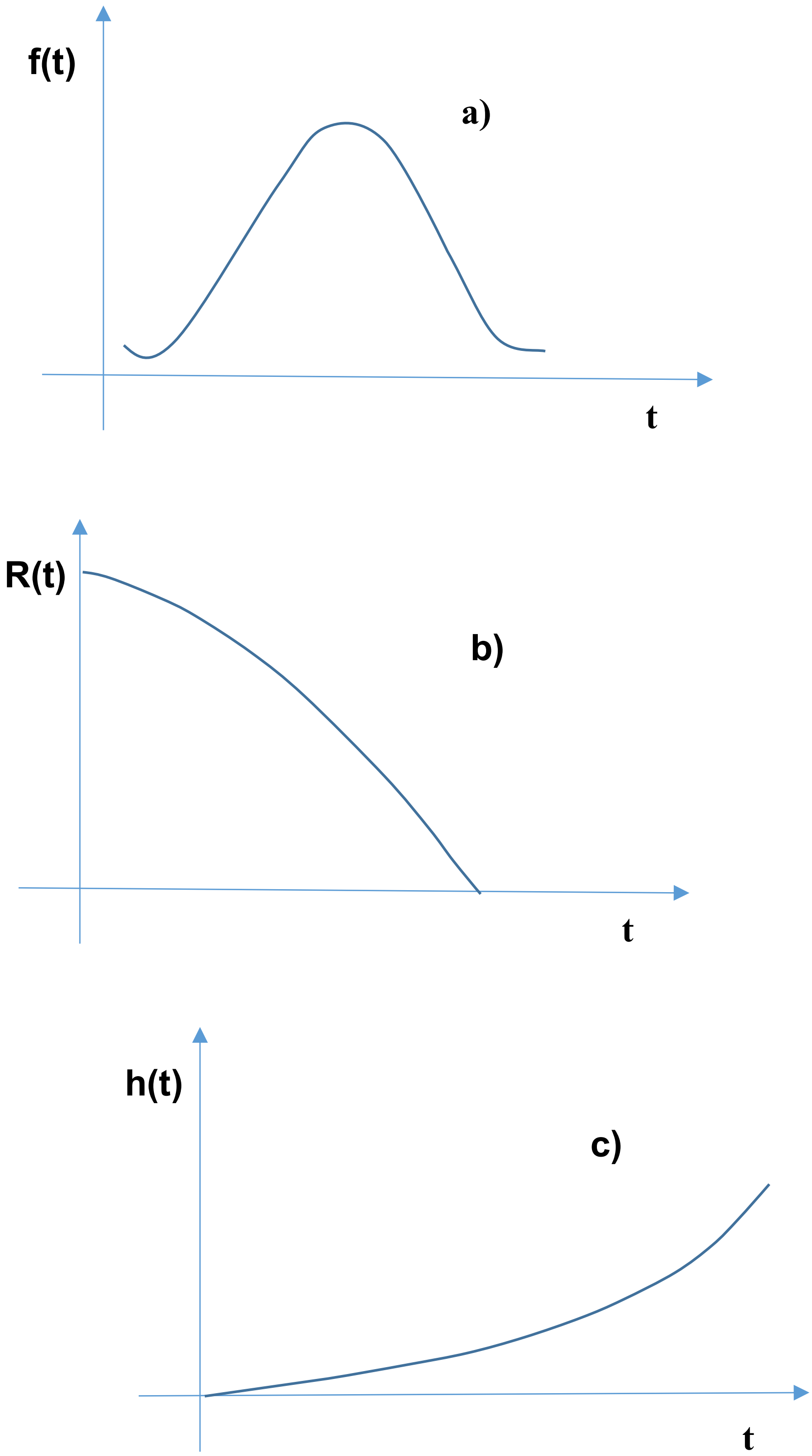


Figura 4.1 Funciones de: a) densidad de probabilidad f(t), b) fiabilidad R(t) y c) tasa de fallos h(t) de la distribución normal.

Se indican en la tabla 4.2 siguiente los principales valores usados en el cálculo para obtener los intervalos de confianza en la determinación de medidas o parámetros en los modelos que siguen una normal N (0,1). El parámetro t_s es el valor por el que se debe multiplicar la desviación típica para obtener los intervalos de confianza, no está aquí relacionado con la variable tiempo “t”.

Tabla 4.2 Valores del parámetro t_s para obtener los intervalos de confianza en la distribución normal.

Probabilidad	**Normal N(0,1) n> 30**
%	t_s
50	0,67
75	1,15
80	1,28
90	1,64
95	**1,96**
97	2,17
98	2,32
99	2,57

Ejemplo 4.2 Se tiene una variable aleatoria de distribución de fallos según una normal de media μ=4 y desviación típica σ=2. Se pide calcular la probabilidad de que el número de fallos sea como máximo de 5 unidades.

La función es una normal N(4,2) sin tipificar y se desea determinar P(k≤5). Desde un punto de vista formal, hay que resolver la integral[3] siguiente:

$$F(5)=P[k\leq 5]=\int_{-\infty}^{5}\frac{e^{\frac{(k-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}}{2\sqrt{2\pi}}dk$$

[3] Esto equivale, cuando la distribución es de tipo discreta, a la suma de todos los casos posibles dentro del intervalo (-∞,5).

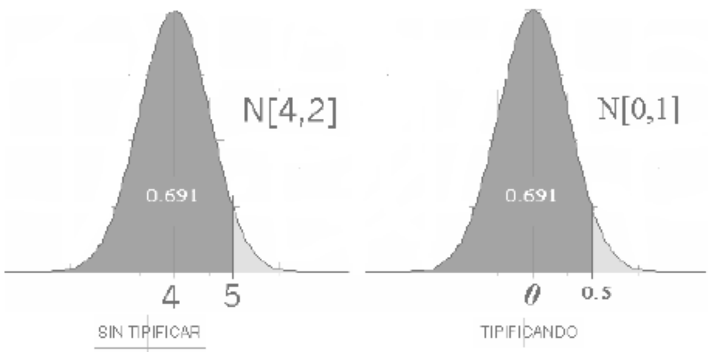
Para no resolver la integral anterior se normaliza la función a la tipificada N (0,1) mediante el cambio de variable z = (k-μ)/σ, que en este caso toma el valor:

Z= (5-4)/2 = 0,5

P(K≤5) = P(t≤t1) → p[t≤ (5-μ)/σ] = P(t≤ (5-4)/2) = P(t≤0,5); siendo el coeficiente t el correspondiente a una N(0,1) que está tabulado, luego se tiene:

P[t≤0,5 | N(0,1)] = 0,691, luego la probabilidad de que el número de equipos averiados sea menor de 5 en una distribución general N(4,2) = 0,691

P[k≤5 | N(4,2)] = P [t≤0,5 | N(0,1)] = 0,691 → 69,1%



Esta funcion de probabilidad, la normal N(μ,σ) verifica el teorema de adición para los parámetros media y varianza. Esto es, dado un conjunto de variables aleatorias normales independientes de distintas medias y varianzas, la variable suma de todas ellas se distribuirá según una distribución normal con media, la suma de las medias; y con varianza, la suma de las varianzas.

Teniendo en cuenta que hemos caracterizado la distribución normal con los parámetros media, "μ", y desviación típica "σ", el enunciado del teorema quedará de la forma siguente.

Dado un conjunto de variables aleatorias normales de distintas medias y distintas desviaciones típicas, la variable aleatoria suma de todas ellas se distribuye según una distribución normal, con media, la suma de las medias, y con disviación típica, la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de las desviaciones típicas.

La demostración se da en los libros especializados, pero la aplicación es muy interesante en el mantenimiento siendo su formulación para dos distribuciones, que se puede ampliar a n, de la forma siguiente:

$X \rightarrow N(\mu_x, \sigma_x)$

$Y \rightarrow N(\mu_y, \sigma_y)$

La función suma $Z = X + Y \rightarrow N[(\mu_x + \mu_y); \sqrt{\sigma x^2 + \sigma y^2}]$; este resultado es extensible a un número más amplio de distribuciones normales independientes.

Ejemplo 4.3 Una pieza está compuesta por dos elementos de tipo X y un elemento de tipo Y, que se unen sin ninguna clase de solapamiento. La longitud de la pieza X sigue una normal N(4,1) cm en relación con los errores de fabricación y medida, y la pieza Y sigue una normal N(12,2) cm, con el mismo criterio. Calcular la probabilidad de que la pìeza resultante sea de longitud inferior a 20,2 cm. Calcular el intervalo de confianza, con el 50%, 75% y 90% de probabilidad de ocurrencia, para la medida de la pieza resultante Z.

La pieza X_1 es de una determinada longitud y la pieza X_2, que procede de una misma distribución aleatoria, no tiene por que ser de la misma longitud exacta. El hecho de utilizar la suma y el producto no da el mismo resultado al aplicar el teorema fundamental de las distribuciones normales, ya que la suma o producto se realizan dentro de una raiz. Por lo anterior, y para evitar errores de interpretación y medida, se deben usar las expresiones tal como se indican:

longitud(Z) = longitud(X) + longitud(X) + longitud(Y), luego se tiene para las funciones de probabilidad, aplicando el teorema general anterior, de:

$$P(Z) = P(X) + P(X) + P(Y)$$

$$P(X) \rightarrow N(4,1), \text{ y } P(Y) \rightarrow N(12,2)$$

La función resultante sigue una distribución:

$$N[\mu x + \mu x + \mu y; \text{raiz}(\sigma x^2 + \sigma x^2 + \sigma y^2)] = N[(2\mu x + \mu y); \text{raiz}(2\sigma x^2 + \sigma y^2)]$$

$$N(2 \cdot 4 + 12; \text{raiz}(2 \cdot 1^2 + 2^2)] = N(20, \text{raiz}(6) = N(20; 2{,}45)$$

Para obtener las probabilidades de ocurrencia del suceso, normalizamos a la N(0,1) con el cambio $Z=(x-\mu)/\sigma$ ya indicado.

$$\text{La } P(Z \leq 20{,}2 \text{ cm}) \rightarrow P(t \leq t1) = P[t \leq (20{,}2-20)/2{,}45] = P(t \leq 0{,}0816) = 0{,}532;$$

$$\text{La } P(t \leq 0{,}0816 \mid N(0{,}1)] = 0{,}532 \rightarrow 53{,}2\%$$

El intervalo de confianza, para las probabilidades pedidas será: $(\mu-t_s\cdot\sigma,\ \mu+t_s\cdot\sigma)$, con los coeficientes ts siguientes obtenidos de la tabla para la N(0;1). El coeficiente t_s, para la distribución normal, es el valor de la abscisa, de tal forma que la integral entre $-\infty$ y este valor (t_s) da como resultado una probabilidad de ocurrencia igual al valor buscado. Este comentario es igualmente aplicable a la t-Studen y en general a las funciones de distribución para el cálculo de probabilidades de ocurrencia de un suceso.

Así para:

$P=50\% \rightarrow t_s=0{,}67$; $P=70\% \rightarrow t_s=1{,}15$; $P=90\% \rightarrow t_s=1{,}64$,

Aplicado al cálculo de intervalos de seguridad tenemos:

$P=50\% \rightarrow [20-0{,}67\cdot2{,}45;\ 20+0{,}67\cdot2{,}45] = [18{,}36 \text{ cm}; 21{,}64 \text{ cm}] \approx (18{,}4 \text{ cm}; 21{,}6 \text{ cm})$

$P=70\% \rightarrow [20-1{,}15\cdot2{,}45;\ 20+1{,}15\cdot2{,}45] = [17{,}18 \text{ cm}; 22{,}82 \text{ cm}] \approx (17{,}2 \text{ cm}; 22{,}8 \text{ cm})$

$P=90\% \rightarrow [20-1{,}64\cdot2{,}45;\ 20+1{,}64\cdot2{,}45] = [15{,}96 \text{ cm}; 24{,}02 \text{ cm}] \approx (16 \text{ cm}; 24 \text{ cm})$

Se observa que a medida que se desea tener una mayor seguridad en los resultados el intervalo es mayor.

4.2.2 DISTRIBUCIÓN DE POISSON

La distribución de Poisson representa la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante un intervalo de tiempo dado, basándose en una frecuencia de ocurrencia media de parámetro (λ).

Se emplea para tratar sucesos estadísticos en los cuales se desconoce el tamaño de la muestra. Formalmente es una buena aproximación de la distribución binomial (fallo con probabilidad p) por lo que a veces se emplea como sustituta de las distribuciones binomiales, sobre todo si ***n*** (número de ensayos) es muy grande y ***p*** o ***q*** (probabilidad de éxito y fracaso respectivamente) son muy pequeñas. Se puede usar la distribución de Poisson, si se dan las condiciones (a) y (b) siguientes:

a) El número de ensayos es grande $n \geq 30$
b) El producto **np** ó **nq** < 5 (es pequeño)

La condición de probabilidad "pequeña" y número "muy grande" es de clara aplicación a los sistemas de mantenimiento ya que el nº de horas es, en principio, muy grande antes de la aparición de un fallo, y la probabilidad de que se produzca un fallo en un instante dado es pequeña.

En los casos en que se satisfacen tales condiciones, se puede sustituir la media de la distribución binomial por la media de la distribución de Poisson de modo que: $\boldsymbol{np = \lambda}$. La expresión se transforma en la de Poisson, donde $\lambda = np$ la tasa media de fallos, x el número medio de equipos (máquinas) en un determinado momento y P(x) la probabilidad de que (x) máquinas fallen en un determinado intervalo de tiempo (hora, día, etc.).

$$Px(t = 1) = P(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Más información sobre esta función y sus características puede encontrarse en Sixto Ríos, Elementos de estadística (1973).

4.2.2.1 Deducción

Esta distribución relaciona la probabilidad $P_k(t)$ de k sucesos en un intervalo de tiempo t, sometida a las siguientes hipótesis:

1º La probabilidad de <u>un solo suceso</u> en el tiempo Δt es asintóticamente $\lambda\,\Delta t$, es decir:

$P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$, con $\lim (\Delta t \rightarrow 0)$ de $o(\Delta t)/\Delta t = 0$; $(o\Delta t)$ es un infinitésimo de orden superior, y se deduce:

$$\mathbf{lim\ (\Delta t \rightarrow 0)\ \ de\ \ P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t}$$

Lo anterior significa que la probabilidad de ocurrencia de un suceso depende solo del tiempo y que para intervalos de tiempo (Δt) breves se considera proporcional (lineal) al tiempo.

2º La probabilidad de dos o más sucesos en el tiempo Δt es de un orden infinitesimal superior $\{o(\Delta t)\}$, es decir:

$$\lim(\Delta t \to 0) \text{ de } (1-P_o(\Delta t)) / \Delta t = \lambda$$

Como $[1-P_o(\Delta t)] = P_1(\Delta t) + P_2(\Delta t) + \ldots. P_k(\Delta t) + \ldots \; P_n(\Delta t)$

Resulta, aplicando la segunda condición:

$$\lim(\Delta t \to 0) \text{ de } P_k(\Delta t) / \Delta t = 0, \text{ para todo } k > 1$$

El número de sucesos posibles en un intervalo de tiempo Δt cuando Δt es suficientemente pequeño (tiende a cero) es 1 o es cero, no pueden ocurrir dos o más sucesos en un intervalo de tiempo suficientemente pequeño.

3º Los números de sucesos en dos intervalos de tiempo no rampantes, que no comparten ninguna unidad de tiempo, son variables aleatorias independientes, principio de independencia de sucesos.

4º Las probabilidades $P_k(t)$ son las mismas a lo largo del tiempo, es decir, que en dos intervalos (t_1,t_2) y (t_3,t_4) son las mismas si $(t_2-t_1) = (t_4-t_3)$

Por aplicación de los principios anteriores se tiene que la probabilidad $P_k\,(t+\Delta t)$ de que ocurran k sucesos en el tiempo $(t+\Delta t)$ es la suma de todos los sucesos posibles. Por el principio de independencia, y considerando que ocurren (a) sucesos en el tiempo t y (b) sucesos en el tiempo Δt, de tal manera que a + b =k, se obtiene:

k sucesos, suma de (k) + 0 $\to P_k(t)\cdot P_o(\Delta t)$

k sucesos, suma de (k-1) +1 $\to P_{k-1}(t)\cdot P_1(\Delta t)$

k sucesos, suma de (k-2) +2 $\to P_{k-2}(t)\cdot P_2(\Delta t)$

. . .

k sucesos, suma de (k-i) +i $\to P_{k-i}(t)\cdot P_i(\Delta t)$

. . .

k sucesos, suma de (k-k) +k $\to P_{k-k}(t)\cdot P_k(\Delta t) = P_o(t)\cdot P_k(\Delta t)$

Sumando todos los sucesos se obtiene:

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)\cdot P_o(\Delta t) + P_{k-1}(t)\cdot P_1(\Delta t) + \ldots + P_{k-i}(t)\cdot P_i(\Delta t) + \ldots + P_o(t)\cdot P_k(\Delta t)$$

Formando la razón de incrementos, pasando al límite ($\Delta t \to 0$), y aplicando la condición 2º de que la probabilidad de k sucesos en el tiempo Δt para k>1 es cero se obtiene la ecuación diferencial[4]:

[4] $P_k(t)\cdot P_o(\Delta t)=P_k(t)\cdot(1-P_1(\Delta t)) = P_k(t) - P_k(t)\cdot P_1(\Delta t)$; $\lim \{ [P_k(t+\Delta t)-P_k(t)] / \Delta t \} \to dP_k(t) / dt$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda(P_{k-1}(t) - P_k(t))$$

En la que se ha sustituido el lim ($\Delta t \rightarrow 0$) de P_1 (Δt)/Δt por λ de acuerdo con la condición primera de que la probabilidad de un solo suceso en el tiempo Δt es asintóticamente $\lambda \cdot \Delta t$.

Para k=0, tenemos que la probabilidad $P_o(t)$ de cero sucesos en el tiempo t, verificará:

$$\frac{dP_o(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_o(t)$$

La solución de esta ecuación diferencial, con la condición natural $P_o(0) = 1$, es:

$$P_o(t) = e^{-\lambda t}$$

Si hacemos que la probabilidad $P_k(t)$ sea el producto de varios sucesos iguales en el tiempo (t) de probabilidad $e^{-\lambda t}$, el estudio de 1, 2 … k sucesos en un tiempo (t) conduce a la ecuación general de la Ley de Poisson, que da la probabilidad de que ocurran exactamente k sucesos en un tiempo t, cuando la tasa es constante en el tiempo (λ), en base al parámetro λt, y viene dada por:

$$P_k(t) = \frac{\lambda^k \cdot t^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Una simplificación de la expresión anterior, cuando se consideran unidades de tiempo (t=1), hora, día, semana, periodo de 1500 horas, etc., de aplicación directa en el estudio de averías en un tiempo dado en mantenimiento, transforma la expresión anterior en la más sencilla:

$$P_k(t = 1) = P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

La expresión anterior aparece con frecuencia en los libros de mantenimiento en la forma siguiente:

$$f(x;\ \lambda, t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

Donde:

λ = tasa de fallos

t = tiempo considerado

x = número de fallos

Si en la expresión anterior, se sustituye el número de fallos por cero, que no haya fallos, se obtiene la función de fiabilidad, y por lo tanto:

$$R(t) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}$$

La cual coincide matemáticamente con la fórmula de la función exponencial.

4.2.2.2 Cálculo del parámetro λ

Supongamos que se repite un determinado experimento un número N grande de veces, y que cada vez contamos el número de sucesos en un intervalo de tiempo con longitud (t) constante.

Si es N_k el número de veces en que se han observado k sucesos en un experimento, y N el número total de experimentos, el número total de sucesos (T) será:

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + \ldots + N_k + \ldots + N_n$$

$$T = \Sigma(i \cdot Ni) = 0 \cdot N_0 + 1 \cdot N_1 + 2 \cdot N_2 + 3 \cdot N_3 + \ldots k \cdot N_k + \ldots + n \cdot N_n$$

y T/N es el promedio. Si N es grande se tiene, por la definición de probabilidad como límite de la frecuencia de un suceso cuando N es suficientemente grande que: $P_k = N_k/N$, que $N_k = N \cdot P_k$, luego se puede escribir:

$$T = N \cdot (P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + \ldots + k \cdot P_k + \ldots)$$

Sustituyendo ahora cada probabilidad por el valor obtenido de la ley de Poisson se llega a la expresión:

$$T = N \cdot (e^{-\lambda t}) \cdot \lambda t \, [1 + (\lambda t)/1! + (\lambda t)2 /2! + \ldots \ (\lambda t)k /k! \ \ldots] = N \cdot \lambda \cdot t \implies \lambda = T / (N \cdot t)$$

Si ahora hacemos el estudio de sucesos en unidades de tiempo (t=1), tal como hemos indicado anteriormente, para aplicación a la casuística de mantenimiento se obtiene la sencilla relación:

$$\lambda = T / N$$

Esto permite obtener aproximadamente el número de casos necesarios “N”, que debe ser grande, tal como se ha indicado en el principio de la demostración, para poder sustituir los valores de un experimento (tamaño limitado) con la probabilidad de una población. El problema es similar a cuando se pasa de frecuencia a probabilidad: el número de sucesos debe ser representativo. Calculado el λ del experimento, (una muestra o un determinado número de observaciones) se trabaja con este valor y se corrige a medida que se hacen más observaciones.

4.2.2.3 Cálculo de los intervalos de confianza[5]

Un criterio fácil y rápido para calcular un intervalo de confianza aproximado de λ=k/T, es el propuesto por Guerriero (2012). Dada una serie de eventos n (al menos de 15 - 20) en un periodo de tiempo T, los límites del intervalo de confianza para la frecuencia (tasa de fallos) vienen dadas por:

$$\lambda(inf, sup) = \left(1 \pm \frac{1{,}96}{\sqrt{n-1}}\right)\left(\frac{k}{T}\right)$$

Los limites inferior y superior, para el número de fallos se pueden obtener de la expresión k = λ (inf, sup) ·T.

Donde 1,96 corresponde al coeficiente que fija el intervalo de la N (0,1) para una probabilidad del 95%.

Interesa en ingeniería aplicada conocer los fundamentos y las limitaciones de las expresiones utilizadas para reducir los errores. Si se quiere una probabilidad superior al 95%, o simplemente distinta, se debe modificar este coeficiente de 1,96 por el correspondiente a la probabilidad o seguridad deseada y corregir por el tamaño de la muestra si es inferior al tamaño sugerido.

Se indica que en pruebas de mantenimiento, debido al coste de efectuar las misma, no es corriente que la muestra tenga un tamaño muy grande bajo el concepto de grande que se utiliza en estadística; de hecho, se limita este a los valores estrictamente necesarios como un

[5] Un intervalo de confianza en estadística es un intervalo en el que podemos asegurar que se encuentra el valor que se quiere determinar y esto con una probabilidad calculada. Podemos decir p.e. que un determinado valor estará entre 3 y 5 y que esto ocurre con una certeza del 95%.

balance entre el coste, el beneficio obtenido, y garantía que ofrecen los resultados medidos bajo el concepto fiabilidad o probabilidad estadística. En este sentido el aspecto de diseñar el tamaño correcto de las muestras puede considerarse como una especialidad a parte dentro del control de calidad. Especial relevancia tiene el diseño del tamaño muestral cuando la prueba es a destrucción como puede ser el ensayo de explosivos o la resistencia al choque de determinados vehículos.

Nota. La expresión de Guerriero (2012), como fórmula rápida y en cierta medida rígida, permite a partir de una muestra de mínimo 15-20 sucesos, estimar los intervalos para la tasa de fallos.

Un método general de estimar **intervalos de confianza** para una variable determinada, media de una población, parámetro λ(t) de una **distribución de Poisson**, etc., especialmente si la muestra no es muy grande (número de sucesos limitado) es mediante un estimador centrado del tipo:

$$\boldsymbol{\mu_{inf-sup} = \left(\bar{X}_m \pm t_s \cdot S_m \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\right)}$$

Siendo:

μ_o: Media de la población, valor central general, que se quiere determinar a través de una o varias muestra; el valor para medias muestrales es igual al valor medio, $\mu_o = \bar{X}m$

μ_{inf_sup}: Límites inferior y superior del valor a determinar (en este caso la media).

t_s: Parámetro que nos da el valor correspondiente del eje de las abscisas que corresponde a una probabilidad determinada al integrar la función de distribución. Depende del tipo de distribución utilizada, y está relacionado con la probabilidad o seguridad esperada en la estimación. Se dan referencias para dos distribuciones, distribución normal N(0,1), centrada y simétrica, de uso general en teoría de errores, y t-Student, distribución centrada e igualmente simétrica. Similar a la normal pero de intervalos más amplios, da más seguridad en la determinación de intervalos. Es válido para muestras pequeñas, y también de uso general, cuando n (el tamaño de la muestra) es grande tiende a la normal como referencia.

En la tabla 4.3 se dan referencias de valores para ambas distribuciones, la probabilidad considera los límites para un intervalo centrado con dos colas[6] simétricas.

Tabla 4.3 Coeficientes para determinar los intervalos de seguridad, valor de "k" en la fórmula ($\mu \pm k{\cdot}\sigma$) para la función N (0,1), y la t-Student con diferentes grados de libertad.

Probabilidad	Normal N (0,1) n> 30	t-Student con grados de libertad Gd=(n-1), muestra de n valores		
%	***	Gd-9	Gd-19	Gd-29
50	0,67	0,70	0,69	0,68
75	1,15	1,23	1,19	1,17
80	1,28	1,38	1,33	1,31
90	1,64	1,83	1,73	1,70
95	**1,96**	**2,26**	**2,09**	**2,05**
97	2,17	2,57	2,35	2,28
98	2,32	2,82	2,54	2,46
99	2,57	3,25	2,86	2,76
99,5	2,80	3,69	3,17	3,04

Sm: Desviación típica de la muestra (o muestras) de tamaño n. Es la raíz positiva de la varianza de la muestra.

$\sqrt{\frac{n}{n-1}}$**:** Es un factor que corrige, aumenta el rango del intervalo, por el tamaño de la muestra. Es de uso necesario cuando se deduce, calcula, la desviación típica de una población a través de una muestra obtenida de la población. El factor $\sqrt{n}$ compensa el mismo valor ya que se ha calculado a través de la raíz cuadrada de la varianza y ésta en su determinación incluye la división por el número de unidades. Dado que el estimador usado es un estimador centrado, su media vale cero, y uno de los valores se puede determinar por la diferencia a cero de los otros (n-1) valores. Esto es lo que se denomina grados de libertad.

[6] Se denomina, normalmente, "colas" a los extremos de la distribución por la derecha y por la izquierda.

Si el problema a resolver tuviera "m" ecuaciones y se obtuvieran "n" muestras, n>m, los grados de libertad serán (n-m-1) para efectuar la búsqueda en las tablas.

La razón es que en un sistema de m ecuaciones se pueden determinar m valores y por ser estimador centrado, su media vale cero, uno de los valores es igualmente determinado por diferencia. Luego realmente quedan (m-n-1) valores aleatorios que son los grados de libertad.

Esta razón, para valores de 30 Ud, vale 1,017 y para n=15, limite sugerido por Guerriero (2012), vale 1,035. La estimación de intervalos se puede realizar con cualquier criterio estadístico que esté justificada su aplicación en base al tamaño de la muestra fundamentalmente.

Conocido el criterio de la estimación de los intervalos se puede utilizar por ejemplo la t-Student, que sigue la ley normal N (0,1) para la media, y cuyo parámetro para un 95% de probabilidad o de seguridad en la estimación es 1,96, tal como consta en la expresión inicial. Este estadístico permite, al conocer su fundamento, modificar los criterios de probabilidad al 90%, 98%, 99%, etc.

Ejemplo 4.4 Un panel de control en el que se da seguimiento a las máquinas de una mina tiene una tasa horaria de fallos de los diodos que lo componen de 0.0011. El panel se espera que esté encendido por 1000 h y el número máximo de fallos esperable es de 2. Determinar:

a) Probabilidad de que ocurran exactamente 0, 1 y 2 fallos.
b) Probabilidad de que tengan lugar menos de 2 fallos.

Solución:

a)

$$\lambda = 0{,}0011; \text{ tasa horaria de fallos}$$
$$t = 1000; \text{ tiempo de referencia}$$
$$k \leq 2 \ (k=0,1,\ 2); \text{ número de fallos}$$
$$\lambda t = 1{,}1$$

$$P_k(\mathrm{t}) = \frac{\lambda^{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{t}^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!} \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}}$$

$$P\ (0\ ) = e^{-1,1} = 0{,}333$$

$$P\ (1\ ) = \ 1{,}1\ e^{-1,1} = 0{,}366$$

$$P\ (2\ ) = \frac{1{,}1^2\ e^{-1,1}}{2} = 0{,}201$$

b) $P\ (\mathrm{k}\ \leq\ 2\ ) = e^{-1,1} + 1{,}1\ e^{-1,1} + \frac{1{,}1^2\ e^{-1,1}}{2} = 0{,}333 + 0{,}366 + 0{,}201 = 0{,}89$

Ejemplo 4.5 En una mina existen 20 dúmpers idénticos trabajando a la vez generando un beneficio medio de 500 €/dúmper-día. Estos fallan de acuerdo con una tasa media, que se puede considerar constante, de 1.4 fallos/día. Determinar: a) Probabilidad de que 2 dúmpers fallen el mismo día, b) Pérdidas de facturación diaria que se generan de acuerdo a esa tasa media de fallos.

Solución:

a)

$$F(x) = \frac{\lambda^x\ e^{-\lambda}}{x!}$$

x= nº de máquinas estropeadas; λ= tasa media de fallos; P(x=3) probabilidad de que fallen 3 Ud. en un día. La unidad de tiempo es el día, y las máquinas son iguales, luego es adecuada la distribución de Poisson para t=1.

$$P(x = 2) = \frac{(1.4)^2\ e^{-1.4}}{2!} = 0{,}24 \rightarrow 24{,}16\ \%$$

b)

Pérdida esperada = 500·1,4=700 €/día; para este cálculo se supone que la máquina averiada está todo el día parada y se supone el valor medio de la distribución.

Si el tiempo de reparación es una fracción de la jornada y la máquina se incorpora al proceso, hay que hacer el cálculo completo del ejercicio considerando la nueva tasa en la unidad de tiempo (fracción de la jornada útil diaria, 1 hora, ½ jornada, etc.) y todos los periodos de tiempo iguales (ya que esta es la condición del método de cálculo utilizado).

Ejemplo 4.6 En una mina existen 15 dúmpers idénticos trabajando a la vez, y generando un beneficio medio de 100 €/dúmper y día. Estos fallan de acuerdo con una tasa media, que se puede considerar constante, de 2.2 fallos al día. Determinar:

a) La probabilidad de que 3 dúmpers fallen el mismo día.

b) Pérdidas de facturación diaria que se generan de acuerdo a esa tasa media de fallos.

c) Probabilidad de que en un periodo dado existan menos de tres equipos averiados y cuál es el coste correspondiente a esta opción.

d) Probabilidad de que en un periodo existan un máximo de cuatro equipos averiados, y el coste correspondiente a este supuesto.

Resolver considerando que el tiempo de reparación es media jornada y el equipo se incorpora al proceso el resto de la jornada.

Para este caso, y bajo el supuesto de que el periodo 1 y el periodo 2 tienen las mismas condiciones de trabajo, la tasa de fallo por periodo (media jornada) es $\lambda_1 = \lambda/2 = 1{,}1$ por el principio de tasa de fallos constante en un periodo de tiempo dado.

a) El cálculo para el mismo supuesto de fallo de tres máquinas es:

$$P(x = 3) = \frac{(1{,}1)^3\, e^{-1{,}1}}{3!} = 0{,}074 \rightarrow 7{,}4\ \%$$

Obsérvese que la probabilidad de fallo en un periodo mitad no guarda relación directa (lineal) con la subdivisión efectuada en el periodo de tiempo principal.

b) El coste, dado que la jornada se divide en dos periodos será:

$2\cdot(\lambda_1)\cdot$coste_dia/2 = $2\cdot 1{,}1\cdot 100/2 = 110$ €/día

Realmente el estudio de costes exige evaluar la probabilidad de 0 máquinas paradas, la de 1 maquina parada, la de k maquinas paradas, etc. De tal forma que la probabilidad de todos los grupos se aproxime al suceso seguro (se puede abortar el cálculo cuando la probabilidad del suceso k+1 es despreciable) y posteriormente se evalúan los costes con sus probabilidades correspondientes.

La suma de todas las posibilidades, probabilidad próxima a la unidad, debe ser igual a la calculada con el valor medio dado que la tasa de ocurrencia es constante con el tiempo[7].

Tabla 4.6.1, Estudio de costes para una tasa de λ=2,2

Tasa media de fallos (l): 2,2				
Coste de máquina parada/día: 100 €				
Nº de Equipos en avería (k_i)	**P(x=k_i)**	**Probabilidad acumulada**	**Coste de la avería**	**Coste acumulado**
0	0,11080316	0,11080316	0 €	0 €
1	0,24376695	0,35457011	24 €	24 €
2	0,26814364	0,62271375	54 €	78 €
3	0,19663867	0,81935242	59 €	137 €
4	0,10815127	0,92750369	43 €	180 €
5	0,04758656	0,97509025	24 €	204 €
6	0,0174484	0,99253865	10 €	215 €
7	0,00548378	0,99802244	4 €	218 €
8	0,00150804	0,99953048	1 €	220 €
		Total	220 €	

Tabla 4.6.2. Estudio de costes para una tasa de fallos de λ=1,1. Corresponde a una intervención de mantenimiento que recupera los equipos en media jornada respecto al valor anterior tal como se planteó en el enunciado.

Tasa media de fallos (l): 1,1 Coste de máquina parada/día: 100 €				
Nº de Equipos en avería (k_i)	**P(x=k_i)**	**Probabilidad acumulada**	**Coste de la avería**	**Coste acumulado**
0	0,33287108	0,33287108	0 €	0 €
1	0,36615819	0,69902928	37 €	37 €
2	0,20138701	0,90041628	40 €	77 €

[7] Cuando una distribución no mantenga este principio de tasa constante no se debe realizar esta afirmación.

3	0,0738419	0,97425818	22 €	99 €
4	0,02030652	0,99456471	8 €	107 €
5	0,00446744	0,99903214	2 €	109 €
6	0,00081903	0,99985117	0 €	110 €
7	0,0001287	0,99997988	0 €	110 €
8	1,7697E-05	0,99999757	0 €	110 €
		Total	110 €	

Se observa que para el total de los casos posible los valores coinciden con los obtenidos anteriormente, pero este tipo de planteamiento permite obtener información adicional para la programación de equipos de trabajo de mantenimiento.

El estudio anterior permite obtener información del tipo siguiente:

c) c_1) para λ=2,2; $P(x<3)$= 0,6227; Coste acumulado= 78€

c_2) para λ=1.1; $P(x<3)$= 0,9004; Coste acumulado= 77€

d) d_1) para λ=2,2; $P(x\leq4)$= 0,9275; Coste acumulado= 180€

c_2) para λ=1.1; $P(x\leq4)$= 0,9945; Coste acumulado= 107€

Ejemplo 4.6 Se ensayan 10 componentes iguales hasta las 1000 horas, o hasta el momento de fallo, si se produce antes de las 1000 horas. Los valores obtenidos se dan en la tabla siguiente[8]:

Componente	horas		Componente	horas
1	1000		6	590
2	1000		7	1000
3	467		8	285
4	1000		9	648
5	630		10	882

[8] Esto es un ejemplo de valores truncados por la derecha

Se pide determinar:

a) **Calcular la tasa de fallos λ (t).**
b) **Determinar el intervalo de confianza para la tasa de fallos (considerar que se dispone de dos muestras iguales a las de la tabla).**

Nota: Supóngase que los datos siguen una distribución de Poisson.

Solución:

a) El periodo es de 0 a 1000 horas, t constante y el funcionamiento es fallo o no fallo como sucesos excluyentes. Se puede aplicar la ley de Poisson bajo la consideración de que la probabilidad de fallo es proporcional al número de horas de funcionamiento ($\lambda \cdot \Delta t$).

$\lambda (t)$ = n fallos / n total horas de funcionamiento

$\lambda (t)$ = 6 fallos / 7502 horas $= 7{,}998 \cdot 10^{-4}$

Normalmente este tipo de ensayos son hasta que el componente pierde alguna característica propia: fallo de resistencias eléctricas, desgaste de rodamientos, calentamiento de motores, etc. Los equipos no se suelen recuperar posteriormente para el mercado, luego es importante de los resultados del ensayo, que normalmente no son baratos, obtener el máximo de información.

b) Se considera que se dispone dos muestras de 10 unidades cada muestra (iguales cada una de ellas a la de la tabla principal) con el objetivo de considerar el tamaño muestral de n=20 unidades (una muestra de tamaño n=20 con k=12 fallos).

Intervalos de confianza (P = 95%)

$$\lambda(inf, sup) = \left(1 \pm \frac{1{,}96}{\sqrt{n-1}}\right)\left(\frac{k}{T}\right)$$

Variable	Valor	Observaciones
n =	20	Número de pruebas
$k = \lambda \cdot T$	12	Número de defectos

T = Σhi	15004	Total horas T=Σhi
λ = k/T	0,00079979	Tasa de fallos

Intervalos para λ y nº de fallos (k=λ·T)

λ_{inf}	λ	λ_{sup}
$4{,}402\cdot10^{-04}$	$7{,}998\cdot10^{-04}$	$1{,}16E\cdot10^{-03}$

nº f_{inf}	nº fallos	nº f_{sup}
6,6	**12,0**	**17,4**

Ejemplo 4.7 Se ensayan 9 artefactos por un tiempo de 450 horas. Durante los ensayos tienen lugar 2 fallos. Se pide calcular:

a) Tasa de fallos (λ).

b) Intervalo de confianza para la tasa de fallos.

c) Tiempo medio entre fallos (MTBT).

d) Tiempo medio por unidad (MTTF).

Solución:

a) Tasa de fallos

$\lambda=2/(9\cdot450) = 4{,}94 \cdot10^{-4}$ fallos/hora

b) Intervalo de confianza

Al ser el número de sucesos tan pequeño, k=9, la fórmula aproximada nos da una referencia de aplicación.

$$\lambda(inf, sup) = \left(1 \pm \frac{1{,}96}{\sqrt{n-1}}\right)\left(\frac{k(fallos)}{T(horas)}\right)$$

$\lambda(t)(inf\_sup) = \{1\pm(1{,}96/(raíz(9\text{-}1)\}\cdot(2/9\cdot450) = (1\pm0{,}69)\cdot 4{,}93 \cdot10^{-4}$

c) MTBT: $1 / \lambda = 1/4{,}93 \cdot10^{-4} = 2025$ horas/fallo.

d) La variable MTTF representa el tiempo para el fallo, considerado éste como el fallo definitivo que produce la sustitución del equipo. Con la información disponible, 2 Ud fallan antes de las 450 h, y no se conoce el valor, con lo que no se puede deducir nada mejor.

Únicamente se podría cuestionar, o no cuestionar, el lote como un conjunto. Para determinar si el lote tiene las 450 h de media, o no las tiene, hay que disponer de más información y hacer un estudio de intervalos de confianza. A lo largo del texto se dan varios ejemplos.

4.2.3 LEY EXPONENCIAL DE FALLOS

La función de distribución, de uso generalizado para modelar la fiabilidad de los equipos, es la exponencial. Ésta, además de ser muy sencilla, se adapta muy bien a la zona central de la curva de la bañera en la cual la tasa de fallos es constante y aleatoria.

Durante esta etapa la unidad no presenta síntomas de envejecimiento durante el periodo modelado[9], o lo que es lo mismo, es igualmente probable que falle cuando está más nueva que cuando no lo está. Empleando esta distribución se considera que un elemento que aún no ha fallado es tan bueno como un componente nuevo.

Como se indicó al principio, la distribución exponencial aparece cuando la tasa de fallos es constante, es decir:

$$\lambda(t) = \lambda.$$

La función de fiabilidad correspondiente es entonces:

$$R(t) = e^{-\lambda t},$$

La función de distribución de probabilidad de fallo, por tanto:

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

y la función de densidad f (t):

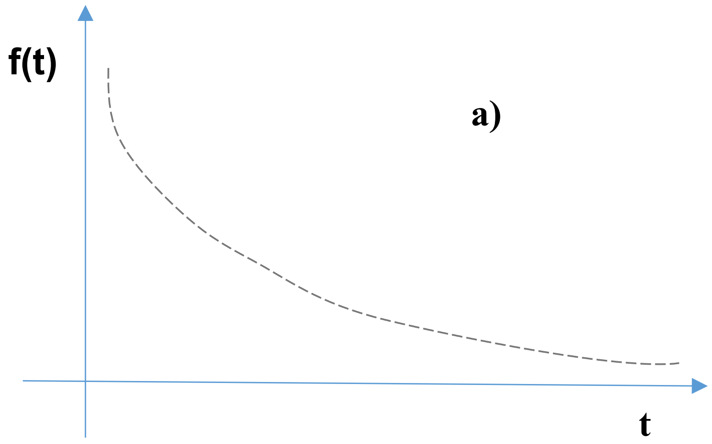
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

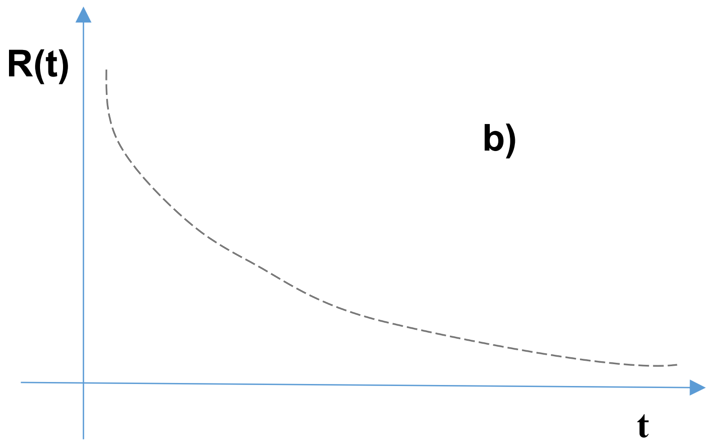
El valor medio esperado y la varianza de una variable aleatoria X con distribución exponencial son:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

[9] Para equipos donde el desgaste es una variable importante, no es la más adecuada. Para este supuesto de fuerte desgaste son más adecuadas la función de Weibull multiparamétrica o incluso la función normal.

El modelo exponencial, con un solo parámetro, es el más simple de todos los modelos de distribución del tiempo de vida, la forma de sus principales ecuaciones quedan recogidas en la figura 4.2.3 siguiente.





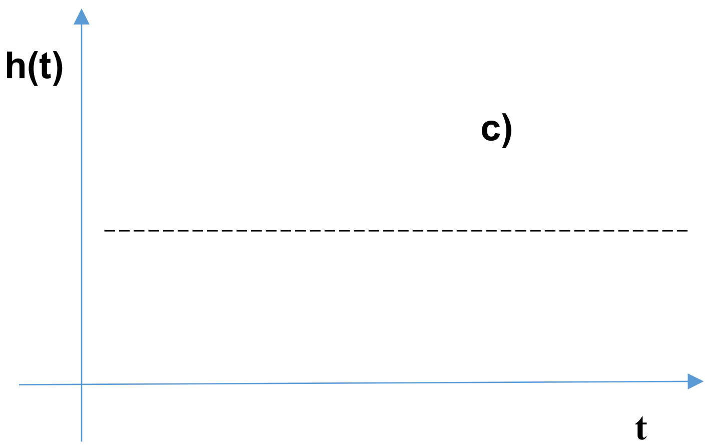


Figura 4.2.3 Funciones de: a) densidad de probabilidad f(t), b) fiabilidad R(t) y c) tasa de fallos h(t) de la distribución exponencial.

La distribución exponencial es un caso particular de la distribución de Poisson con k = 0. Ambas distribuciones están muy relacionadas en mantenimiento a través de la teoría de colas. Mediante la función de Poisson se modela la llegada de equipos con avería, mientras que mediante la función exponencial se modelan los tiempo sin servicio o huecos de trabajo en la teoría de colas (cuando el valor de k=0, no hay equipos con avería o no hay equipos en la cola de espera).

Ejemplo 4.8 Los tiempos entre los fallos sucesivos de la cinta transportadora en una mina de fluorita fueron los siguientes: 120, 125, 130, 110, 95, 100

Si se supone que los datos de fallos siguen una distribución exponencial, calcular la fiabilidad de la cinta para un periodo de 100 h de funcionamiento.

Solución:

MTBF= (120+125+130+110+95+100)/6 = 113,33

R= $e^{-1 \cdot t/MTBF} = e^{-100/11,33}$ =0,41 → 41%

Ejemplo 4.9. Una pala cargadora de ruedas presenta una tasa horaria de fallos de 0,0025 fallos/h. Determinar la probabilidad de que la cargadora falle durante las primeras 100 h de servicio. Suponer que la fiabilidad de la cargadora se ajusta a una distribución exponencial.

Solución:

$P(T \leq 100) = F\ (100) = 1 - \ e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0.0025 \cdot 100}$= 0,22 → 22%

4.2.4 DISTRIBUCIÓN WEIBULL

En teoría de la probabilidad y estadística, la distribución de Weibull es una distribución de probabilidad continua y multiparamétrica. En el campo de la fiabilidad y el mantenimiento es la más utilizada y una de las que aportan mayor precisión. Puede ser usada con dos y tres parámetros, siendo el tercer parámetro el tiempo T_o en que empieza la función o aquel a partir del cual cambia de forma importante el comportamiento del equipo. Se usa en el estudio de fallos de los sistemas mecánicos (análisis de la supervivencia)

Mientras que la función de la distribución exponencial modela la característica de vida de los sistemas, la de Weibull modela las características de vida de los componentes y partes. La distribución de Weibull modela la fatiga y los ciclos de fallos con gran flexibilidad adaptándose a un gran número de situaciones: sistemas que fallen cuando lo hace el elemento más débil, elementos que se desgastan hasta consumirse, fatiga de materiales y tensiones de rotura, entre otros muchos[10].

La función de densidad de una variable aleatoria con la distribución de Weibull para dos parámetros y variable (**x**) es:

$$f(x;\lambda,k) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Luego el dominio de existencia es $0 \leq x \leq \infty$.

En ella:

k ó β[11] (k>0) es **el *parámetro de forma***. Variando este parámetro se genera una familia de curvas de probabilidad que se adaptan mejor a determinados sucesos o experimentos.

[10] Es una función muy usada para modelar las velocidades de los vientos y la energía obtenida con los aerogeneradores.

[11] En lo que sigue se utilizarán (x) o (t) para el tiempo, (λ) para el parámetro de escala y (k) para el de forma.

λ ó η (λ>0) es **el *parámetro de escala***. Se trata de un parámetro que cuanto mayor sea más amplia es la distribución, es decir, más se extiende sobre el eje 0-x. **No se debe confundir con la tasa de fallos de las distribuciones vistas anteriormente**.

Con los valores adecuados de los parámetros permite modelar los tres tramos conceptuales de la curva de la bañera:

- Un valor $k<1$ indica que la tasa de fallos decrece con el tiempo. Esto se adapta bien a la curva de la bañera en el tramo de fallos por puesta en marcha donde abundan los fallos debidos a la mala instalación y operación, así como a la inexperiencia en el proceso.
- Cuando $k \approx 1$, la tasa de fallos es constante en el tiempo. Esto se adapta bien a la curva de la bañera en el periodo de tasa de fallos en funcionamiento habitual (fallos de tipo aleatorio). Para k=1, haciendo el cambio λ=1/η, la función Weibull se transforma en la exponencial (figura 4.3). El supuesto k=1, se denomina funcionamiento estable o vida útil (figura 4.3).

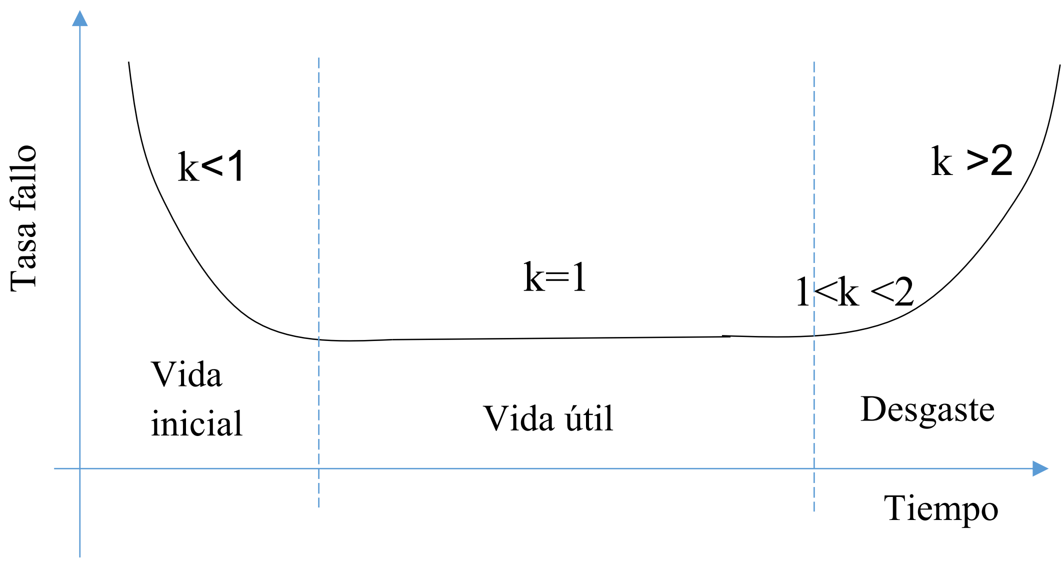


Figura 4.3 Parámetro de forma (k) de la función de Weibull y curva de la bañera.

- Un valor $1<k<2$ indica que la tasa de fallos es bastante estable con el tiempo. Se modela la zona central de la curva de la bañera donde los fallos comienzan a dejar de ser de tipo aleatorio y empiezan a crecer ligeramente con el tiempo. Causas posibles pueden ser cierta falta de dominio del proceso, exigencias limite por necesidades de producción, desgaste natural por el uso, mantenimiento preventivo escaso y en general una casuística sometida a condiciones estocásticas de probabilidad.

- Cuando k = 2, la distribución de Weibull se vuelve idéntica a la de Rayleigh.
- Un valor k>2 corresponde a la fase de envejecimiento, deterioro rápido del equipo o elemento.
- Si k = 2,5 la distribución de Weibull se parece a la logmormal.
- Un valor de k=3,6 hace que la distribución Weibull coincida bastante bien con la distribución normal.

Cuando la variable es el tiempo t, si se considera un punto T_o a partir del cual se inicia el periodo de fallos, la función depende de tres parámetros, (λ, k, T_o). Las expresiones fundamentales para este caso general tienen la forma siguiente:

Función acumulada de distribución de probabilidad (CDF):

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-To}{\lambda}\right)^k}$$

Fiabilidad o confiabilidad:

$$\boldsymbol{R(t)} = e^{-\left(\frac{t-To}{\lambda}\right)^k}$$

Esta es la función más sencilla, que incorpora los tres parámetros (λ, k, To) y es la que se utiliza en anexo para ajustar los parámetros de la función Weibull para un determinado muestreo de fallos de equipos o componentes. Tanto la función de probabilidad acumulada como la tasa de fallos son matemáticamente más complejas y más difíciles de manejar (ajustar los parámetros) debiendo recurrir a métodos en publicaciones especializadas.

Función de distribución de probabilidad (PDF): $f(t) = \frac{k}{\lambda^k}(t - To)^{k-1} e^{-\left(\frac{t-To}{\lambda}\right)^k}$

Media: $\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$; cuando To ≠ 0; entonces la función empieza en este valor y la media se calcula sumando To al valor anterior; **Media (To ≠ 0)** = $To + \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$;

Mediana: $\lambda(ln2)^{\frac{1}{k}}$; como en el caso anterior de la media, si To≠, la función se inicia en este valor y la mediana es: **Mediana (To ≠ 0)** = To + $\lambda(ln2)^{\frac{1}{k}}$

Varianza: $\lambda^2\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)-\left[\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]^2$

Tasa de fallos: Z(t)=f(t) / R(t) = $\frac{k}{\lambda}\left(\frac{t-To}{\lambda}\right)^{k-1}$

λ=μ es un parámetro de escala, la **vida característica**, y k=β el **parámetro de forma** (pendiente) y Γ es la función Gamma con Γ(N) = (N-1)!, para N entero.

La forma de las diversas funciones f(t), R(t) y h(t) que se ajustan a este modelo se muestra en la figura 4.4 siguiente:

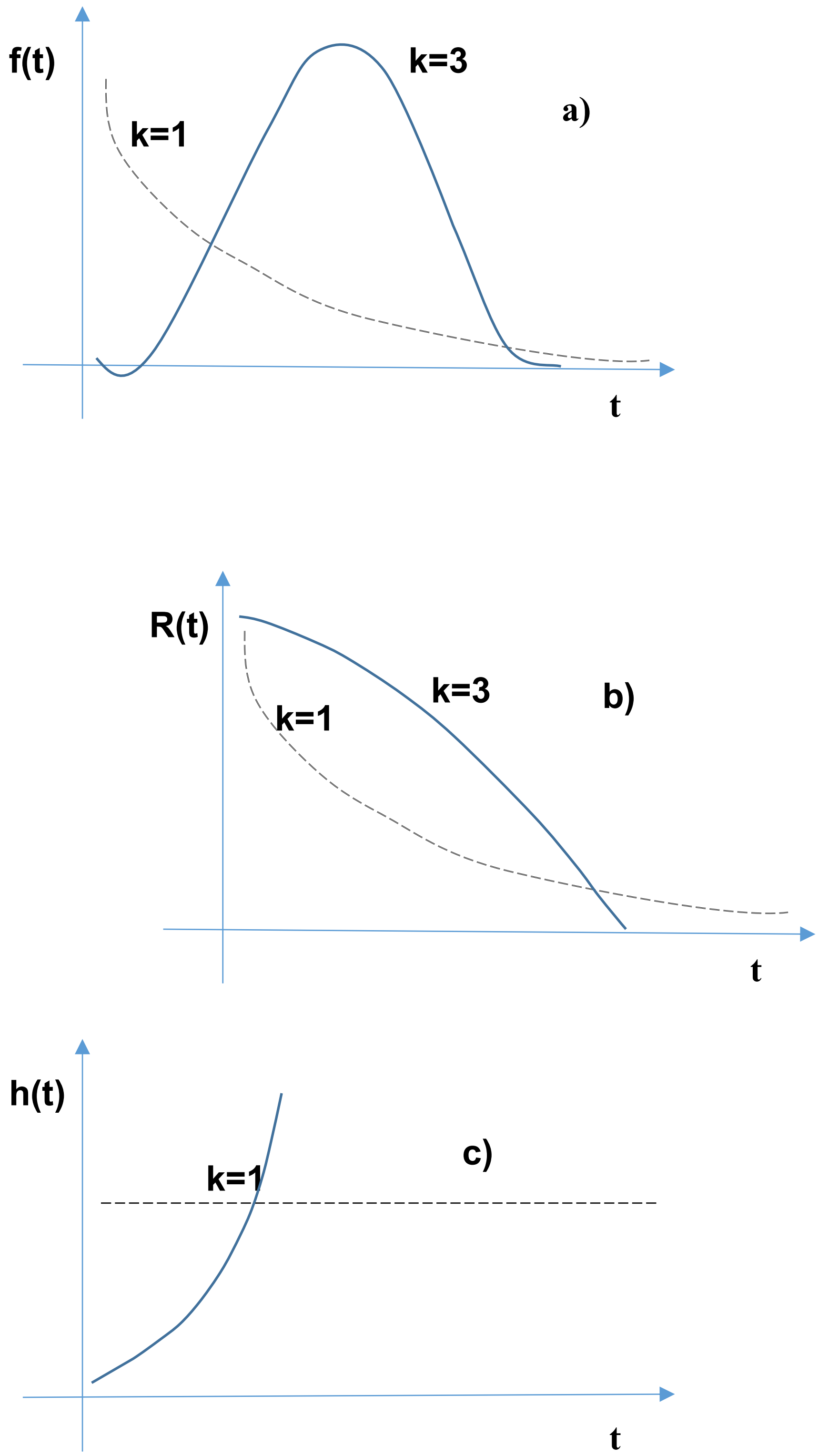


Figura 4.4 Funciones de: a) densidad de probabilidad f(t), b) fiabilidad R(t) y c) tasa de fallos h(t) de la distribución de Weibull.

Ejemplo 4.10 Efectuar un análisis de la variación que experimenta la forma de la función PDF de Weibull, para los valores del parámetro de forma 0,5; 1; 1,5; 3 y 5.

Solución:

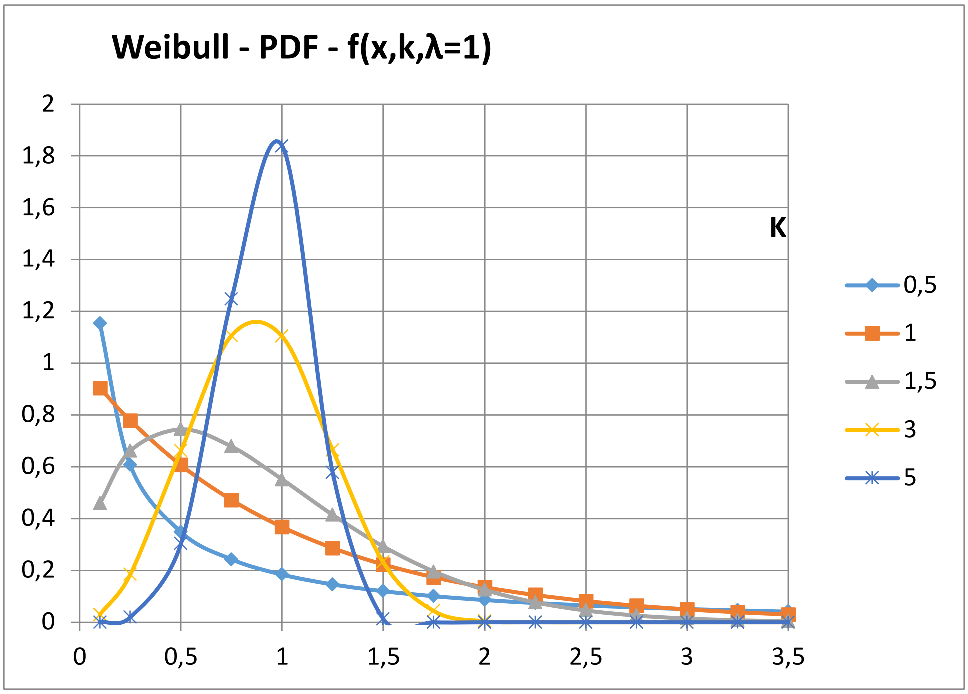
En primer lugar se construye una tabla para los diversos valores de x. A partir de ella se fija el parámetro λ=1, y se sustituyen en la ecuación:

$$f(x;\lambda,k) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Los diversos valores del parámetro k.

X	**x/λ**	**Valor de k, parámetro de forma**				
		0,5	**1**	**1,5**	**3**	**5**
0,1	0,1	1,15248168	0,90483742	0,45957634	0,02997001	0,0005
0,25	0,25	0,60653066	0,77880078	0,66187268	0,18459308	0,01951219
0,5	0,5	0,34865222	0,60653066	0,74478338	0,66187268	0,30288539
0,75	0,75	0,24284509	0,47236655	0,67848359	1,10668952	1,24782862
1	1	0,18393972	0,36787944	0,55181916	1,10363832	1,83939721
1,25	1,25	0,14620392	0,2865048	0,41457325	0,66482887	0,57709655
1,5	1,5	0,11995668	0,22313016	0,29260853	0,2309723	0,0127471
1,75	1,75	0,10067772	0,17377394	0,19597672	0,04321658	0
2	2	0,08595475	0,13533528	0,12538222	0,00402555	0
2,25	2,25	0,07437672	0,10539922	0,07699077	0,00017163	0
2,5	2,5	0,06506091	0,082085	0,0455367	0	0
2,75	2,75	0,05742589	0,06392786	0,0260147	0	0
3	3	0,05107275	0,04978707	0,01438771	0	0
3,25	3,25	0,04571859	0,03877421	0,00771778	0	0
3,5	3,5	0,04115716	0,03019738	0,00402169	0	0

Se obtiene el gráfico siguiente:



Ejemplo 4.10 Efectuar un análisis de la variación que experimenta la forma de la función CDF Weibull, para los valores del parámetro de forma 0,5; 1; 1,5; 3 y 5.

Solución: En primer lugar se construye una tabla para los diversos valores de x. A partir de ella se fija el parámetro λ=1, y se sustituyen en la ecuación:

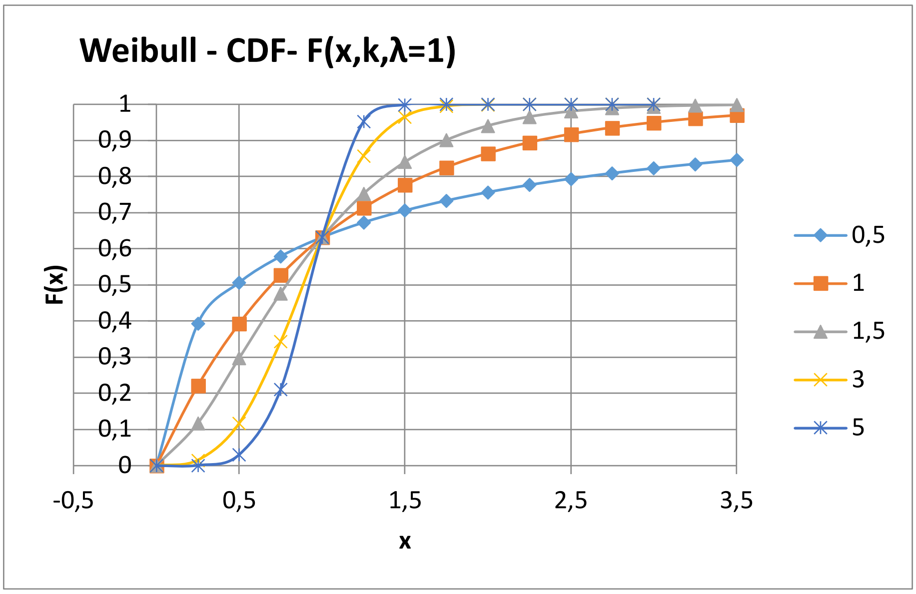
c.d.f.: $$F(x;k,\lambda) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k}$$

Valor de landa (λ): 1 Parámetro de escala

Valores para c.d.f; F(x; k, λ=1)

	Valor de k, parámetro de forma				
x	0,5	1	1,5	3	5
0	0	0	0	0	0
0,25	0,39346934	0,22119922	0,1175031	0,01550356	0,00097609
0,5	0,50693131	0,39346934	0,2978115	0,1175031	0,03076677
0,75	0,57937997	0,52763345	0,47770309	0,34418399	0,21124907
1	0,63212056	0,63212056	0,63212056	0,63212056	0,63212056
1,25	0,6730781	0,7134952	0,75279628	0,85816984	0,95272425
1,5	0,70616734	0,77686984	0,84072409	0,96578188	0,99949641
1,75	0,73363178	0,82622606	0,90123702	0,99529615	0,99999993

2	0,75688327	0,86466472	0,94089425	0,99966454	1
2,25	0,77686984	0,89460078	0,96578188	0,9999887	1
2,5	0,79425934	0,917915	0,98080004	0,99999984	1
2,75	0,80953987	0,93607214	0,9895417	1	1
3	0,82307879	0,95021293	0,99446217	1	1
3,25	0,83515929	0,96122579	0,99714596	1	1
3,5	0,84600401	0,96980262	0,99856688	1	1



Ejemplo 4.11 Se tiene un componente en el cual sus fallos se ajustan a una distribución Weibull (β,λ), donde β=1/3 y λ=16000; λ^{-1} = 0,0000625 (h^{-1}). Determinar el tiempo medio entre fallos y el tiempo mediano hasta el fallo.

Calcular: La vida media del componente (mean time), el tiempo medio entre fallos (MTBF) y la mediana (median) del equipo.

k = β (Parámetro de forma) = 1/3 (para este caso)

λ = 1.600 (Parámetro de escala, no confundir con tasa de fallos)

λ^{-1} = 1 / λ = 1 / 16000 = 0,0000625 (para este caso)

Fórmula de Weibull:

PDF: $f(t,k,\lambda) = (k/t) \cdot (t/\lambda)^k \cdot e^{(-t/\lambda)\text{ pot }(k)}$ {pot (k): elevado a (k)}

Fiabilidad $R(t) = e^{(-t/\lambda)\text{ pot }(k)}$ pot (k): elevado a (k)

La función gamma corresponde a: $\Gamma(N) = (N - 1)!$

Media (MTTF)= $\lambda \cdot \Gamma\, [1+ (1/ k)] = 16000 \cdot 3! = 96.000$ horas.

Mediana = $\lambda \cdot \ln (2)^{(1/k)} = 16000 \cdot (\ln 2)^3 = 5.328{,}4$ horas.

Ejemplo 4.12 Los fallos de una cargadora de ruedas sigue una ley de Weibull con parámetro de escala λ de 2.800 horas y un parámetro de forma k= 3,8. Se vende con una garantía, a todo riesgo[12], hasta cumplir las 1.700 horas de trabajo (un turno de trabajo al año).

a) Determinar la proporción de averías que se esperan durante el periodo de garantía, y que deberá soportar el suministrador.

b) Calcular la fiabilidad, la tasa de fallos de los equipos y el MTBF.

c) Determinar cómo varía la proporción de averías a soportar por el suministrador si se extiende la garantía para el trabajo a dos turnos durante un año, tiempo de garantía de 2·1700=3400 h/año de trabajo del equipo.

d) Calcular la fiabilidad, la tasa de fallos y el MTBF bajo este supuesto de trabajo a doble turno.

Solución:

a) Las piezas a sustituir (equipos a reparar) son aquellas que tienen algún fallo o defecto, luego se trata de determinar la función de probabilidad de fallos F (t), y para la distribución de Weibull es la siguiente:

$F(t) = 1 - e^{(-t/\lambda)\ \mathrm{pot}(k)}$;   {pot(k)= elevado a (k)}

$F(t) = 1 - e^{-(1700/2800)\hat{}3{,}8} = 0{,}1394 \rightarrow 13{,}95\% \rightarrow 14\%$

Se espera un fallo en 14 unidades por cada 100 unidades suministradas. Para una unidad la probabilidad de fallo es del 14%.

[12] Las garantías normalmente cubren las averías producidas por el uso normal, pero no los elementos de desgaste como pueden ser ruedas, aceite de reposición, etc; ni las reparaciones que son causa de un accidente evitable. El concepto de “todo riesgo” en contrato no implica una operación de “leasing” (alquiler donde sí que está todo incluido, incluso el cambio de equipo por otro nuevo cuando falla).

b) La fiabilidad de un sistema R (t) es la probabilidad de que a un tiempo dado el equipo esté funcionando, y es complementaria de la probabilidad de fallo. Para la función Weibull (repaso) tiene las expresiones siguientes:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k}} = R(t) = e^{-\left(\frac{1700}{2800}\right)^{3,8}} = 0,8606;\ \ R(t) = 1\text{-}F(t) = 1\text{-}0,1394{=}0,8606$$

La tasa de fallos viene dada por:

$$h(t) = \left(\frac{k}{\lambda}\right)\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} = \left(\frac{3,8}{2800}\right)\left(\frac{1700}{2800}\right)^{(3,8-1)} = 0,000336$$

El tiempo medio entre fallos viene dado por la expresión:

$$MTBF = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ 2800\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{3,8}\right) \ = 2.531 \text{ horas}$$

c) La función de probabilidad de fallos F (t), para la distribución de Weibull, es la siguiente:

F (t) = 1 - $e^{(-t/\lambda)\ \wedge k}$

F (t) = 1 – $e^{-(3400/2800)\wedge 3,8}$ = 0,87647535 → 87,65 %

Se espera un fallo en 88 unidades por cada 100 unidades suministradas. Para una unidad la probabilidad de fallo es del 88%.

d) La fiabilidad de un sistema R (t) es la probabilidad de que a un tiempo dado el equipo esté funcionando, y es complementaria de la probabilidad de fallo. Para la función Weibull tiene las expresiones siguientes:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k}} = R(t) = e^{-\left(\frac{3400}{2800}\right)^{3,8}} = 0,1235;\ \ R(t) = 1\text{-}F(t) = 1\text{-}0,8765{=}0,1235$$

La tasa de fallos viene dada por:

$$h(t) = \left(\frac{k}{\lambda}\right)\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} = \left(\frac{3,8}{2800}\right)\left(\frac{3400}{2800}\right)^{(3,8-1)} = 0,002337$$

El tiempo medio entre fallos viene dado por la expresión:

$$MTBF = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ 2800\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{3,8}\right) = 2.531 \text{ horas}$$

Ejemplo 4.13 El tiempo medio de fallo para un equipo determinado se modeliza mediante una distribución de Weibull con los parámetros k=4,3; λ=1700 y T_o=500. Calcular la fiabilidad del componente y la tasa de fallos para un tiempo de funcionamiento de 1600 horas. Calcular la media y la mediana.

Solución:

La fiabilidad, cuando existe un parámetro de localización To se obtiene con la expresión:

$$\mathrm{R(t = 1600)} = e^{-\left(\frac{t-To}{\lambda}\right)^{k}} = e^{-\left(\frac{1600-500}{1700}\right)^{4,3}} = 0.86$$

La tasa de fallos viene dada por:

$$h(t) = \left(\frac{k}{\lambda}\right)\left(\frac{t-To}{\lambda}\right)^{k-1} = \left(\frac{4.3}{1700}\right)\left(\frac{1600-500}{1700}\right)^{(4.3-1)} = 6{,}01 \cdot 10^{-4}$$

La función gamma corresponde a la expresión: Γ(N) = (N – 1)!

Media (MTTF)=To+ λ· Γ [1+ (1/ k)] = 500+ 1.547 = 2.047 horas.

Mediana = To + λ·ln $(2)^{(1/k)}$ = 500+ 1700· $(\ln 2)^3$ = 500+1561=2.061 horas.

4.2.4.1 CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN DE WEIBULL

A continuación se da una forma de calcular los parámetros (λ, k, T_o) de una distribución Weibull para el supuesto de disponer de un histórico de fallos por periodos de tiempo de un conjunto de componentes o equipos. Se utiliza la función de fiabilidad, la más sencilla para el ajuste, ya que permite ser linealizada por un procedimiento matemático simple (toma de logaritmos). Esto significa que la información técnica disponible (de fallos) se debe organizar (adaptar) conforme a la curva de fiabilidad, y de menor a mayor dar por intervalos, (en unidades de tiempo adecuadas), la probabilidad de ocurrencia del suceso, (o frecuencia de ocurrencia de fallos por intervalos).

Cuando los tiempos de los intervalos entre fallas no son iguales se debe ordenar la información del primero que falla al último que lo hace, y usar un estimador (el más sencillo es el rango mediana con la aproximación, RM[13] = (i-0,3) / (n+0,4); i = (1, 2,…i,…n), donde i es la posición del elemento que falla y n =nº total de elementos que han fallado. Esto asigna una probabilidad entre 0 y 1 a cada elemento y permite luego aplicar el método de mínimos cuadrados.

Se emplea en esta sección, el método de mínimos cuadrados para optimizar dos parámetros (λ, k); previamente se ha linealizado la expresión, es decir transformado a la forma y=mx+b, y la información se ha estructurada de acuerdo al proceso a usar. Se considera, en una primera fase de cálculo, T_o fijo (parámetro de tiempo de comienza de la función Weibull) y luego mediante un método de ajuste numérico, función Solver de Excel, se busca el óptimo de una variable de interés, por ejemplo el parámetro que mide la bondad del ajuste del método de mínimos cuadrados, R^2. La función Solver exige una función matemática para

[13] El estimador asigna una probabilidad de ocurrencia de fallo a un intervalo de tiempo determinado y formalmente corresponde a una función estadística compleja, denominada Rango Mediana (RM) del tipo siguiente (la variable es el eje o-x y se puede representar por (x_i) o por (t_i) cuando es el tiempo: RM(x_i) = RM(t_i) = [i/(n-i+1)]/[F(1-a, 2(n-i+1), 2i)+{1/(n-i+1)}]; (i) es el orden del fallo y (n) el número total de fallos. Los datos se han de ordenar del primero que falla al último en fallar por orden de tiempos de fallo.

Otros estimadores más sencillos como el indicado RM = (i-0,3)/(n+0,4) o el más sencillo aún dado por RM=(i-0,5)/n, dan valores que suelen ser suficientes en precisión para estudios de fiabilidad en mantenimiento.

optimizar (buscar el máximo o mínimo según interese). En el ejemplo incluido en anexo se desarrolla y explica el método con detalle.

El análisis detallado de los parámetros de la función, incluido el de tiempo T_o, en el que se inician los fallos, o que existe un cambio importante en la ley de fallos, que se modifique algún parámetro sin causa justificada, permite detectar y determinar la existencia de un fallo sistemático si este se identifica como de fallo de un determinado componente al analizar el porqué del suceso (por ejemplo, que al analizar el problema del fallo se identifique un mismo tornillo que falle por fatiga). Si los fallos son aleatorios para diferentes componentes de un equipo se puede interpretar como fallos normales de envejecimiento del mismo.

En la mayoría de los trabajos se usa en su formato biparamétrico, es decir, se modela con dos parámetros: el parámetro de forma (k) que determina el perfil de la distribución y da una medida de la asimetría de la misma, y el parámetro de escala (λ) que determina que tan aguda o plana es la distribución. En el estudio de la vida de los equipos interesa el tercer parámetro T_o, denominado a veces parámetro de localización, que indica a partir de qué momento la función toma importancia, por ejemplo, se puede determinar a partir de qué valor un determinado elemento de fabricación comienza a tener fallos de desgaste o roturas.

Cuando se determinan los parámetros de la función a través de medidas o controles realizados para el trabajo objeto de estudio, se puede obtener, tal como ya se indicó anteriormente, toda la información útil para la toma de decisiones como son la probabilidad de que falle un determinado elemento, tiempo garantizado de uso con una cierta fiabilidad, nº de equipos que se espera que fallen en un determinado momento y en general toda la información necesaria para planificar y organizar un servicio de mantenimiento.

Interesa ahora determinar, por un procedimiento actual, rápido y fiable, los parámetros de dicha función, reiterando que en la mayoría de los textos matemáticos se determinan dos parámetros, pero en mantenimiento interesa determinar los tres dado que el parámetro tiempo, o de localización, es en el que se producen los cambios de interés para el servicio de mantenimiento.

Se implementa en Excel un proceso, cuya base es el principio de mínimos cuadrado para determinar dos de los parámetros, más un proceso de cálculo numérico para determinar el tercer parámetro.

Nota técnica. Cuando el tiempo (t) tiene un valor tal que $(t\text{-}T_o)=\lambda$, se verifica que la expresión $(t\text{-}T_o)/\lambda=1$ y la fiabilidad $R(t) = e^{-1} = 0{,}368$, para cualquier valor de k. La probabilidad de fallo, para este valor de (t) toma el valor dado por la expresión:

$$F(t) = 1 - e^{-1} = 0{,}632 \rightarrow 63{,}2\%$$

Y representa una probabilidad de 63,2% en la que se espera que falle el equipo o para un conjunto de n equipos se espera que falle el 63,2 % de los equipos. Este valor de (t) se denomina normalmente *"vida característica*" del equipo o también tasa esperada de fallo para un conjunto de equipos iguales.

Esta denominación de "tasa esperada de fallos", muy utilizada en publicaciones de mantenimiento de equipos, puede causar confusión cuando se utilizan como contraste otras funciones donde no se utiliza este concepto sino que se utiliza el numero esperado de fallos pero con una probabilidad determinada, p.e. del 75%, 90, 95%, etc. Es importante conocer qué modelo se está utilizando y lo que representa el concepto, que no debe confundir o distorsionar si se quiere tener una tasa esperada de fallos de mejor consistencia, con más seguridad, y esto de forma independiente de que modelo se esté usando. Incluso con el modelo Weibull se puede desear, y calcular, una tasa esperada de fallos (X) con una probabilidad del 80%, 90% 95% o superior.

4.2.4.2 FORMAS DE DETERMINAR LOS PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN WEIBULL

Existen diversos métodos para determinar los parámetros de la función entre los que podemos enumerar:

- Método de máxima probabilidad: utiliza un sistema de iteraciones numéricas. Válido para determinar dos parámetros.
- Máxima probabilidad modificada: similar al anterior. Determina dos parámetros.
- Mínimos cuadrados: usa una transformación doble logarítmica para optimizar la información y ajustar dos parámetros (forma y escala).

- Método de estimación de los momentos: determina dos parámetros El modelo iguala un determinado número de momentos[14] teóricos de la distribución de la población con los correspondientes momentos muestrales, obteniéndose de estas igualdades varias ecuaciones que, resueltas, permiten estimar los parámetros de la distribución poblacional.
- Estimadores lineales: usados para modelos específicos, determinan uno o dos parámetros. Cuando se determina un parámetro, el segundo se obtiene mediante una relación sencilla con algún método anterior conocido.
- Métodos gráficos: usan normalmente la función de tasa de fallo. Se necesita el empleo de gráficos específicos. Los gráficos en su concepción suelen emplear el procedimiento de mínimos cuadrados para buscar una solución. Dan dos parámetros solamente. Exige cierta práctica de uso y son métodos aproximados tal como corresponde a buscar una solución en un gráfico con ejes específicos tabulados para una función. Estos métodos con la potencia de cálculo de los ordenadores actuales y la facilidad de acceso a programas tipo Excel han perdido interés.

El sistema de cálculo, que maneja mucha información y utiliza diferentes expresiones (con mayor o menor complejidad) no es indiferente al método usado para el cálculo de los parámetros, el problema de ajuste de una función tipo Weibull, no es un problema de solución única exacta sino un problema de búsqueda de un modelo que ayuda a predecir y a evaluar. En la bibliografía, Serrano (2013), compara los diversos métodos y estudia las desviaciones, lo cual redunda en funciones de Weibull con formas distintas (tabla 4.4 siguiente).

Tabla 4.4 Comparativa entre las diversas metodologías para estimación de parámetros (Serrano, 2013).

[14] El momento en distribuciones estadísticas es la función resultante de multiplicar la variable por la función de probabilidad. Si la variable tiene de exponente 1 es el momento de primer grado, si tiene 2 es el momento de segundo grado y así sucesivamente {$M_1=x\cdot f(x)$, $M_2=x^2\cdot f(x)$,…$M_n=x^n\cdot f(x)$}. El momento de primer grado está relacionado con la media y el momento de segundo grado está relacionado con la desviación típica, conceptos ya explicados anteriormente.

Método	Denominación	Parámetro de escala λ	Parámetro de forma k
1. MP	Máxima probabilidad	2,2027	1,9291
2. MPM	Máxima probabilidad modificado	2,2076	1,9732
3. MM	Método de momentos	2,2018	1,9223
4. MC	Mínimos cuadrados	2,2106	2,0299
5. Otro	Otro, específico	2,3081	2,3373

En general todos los métodos exigen previamente la ordenación de los datos en forma ascendente y según la función usada (distribución, tasa de fallos, etc.), preparar la información, ordenándola, en base a la ecuación usada, tal como se indica en los ejemplos que se dan a continuación.

La función Weibull multiparamétrica, para el supuesto de tres parámetros, k: parámetro de forma, λ parámetro de escala y To parámetro de tiempo o de localización, de amplio uso en solución de problemas de averías y calidad de los equipos, utilizada ampliamente para el cálculo de fallos de elementos y componentes, y para determinar el tipo o la forma en que fallan. Se puede determinar actualmente por métodos de cálculo usando hojas Excel de fácil comprensión, y será el usado aquí para, mediante ejemplos desarrollados, adquirir habilidad en un proceso fácil, accesible y riguroso desde un punto de vista matemático de ajuste.

4.2.4.3 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

El método de mínimos cuadrados permite calcular los parámetros de forma y de escala mediante la transformación doble logarítmica de la función acumulada de probabilidad de Weibull F(t).

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-T_0}{\lambda}\right)^k}$$

$$1 - F(t) = \frac{1}{e^{\left(\frac{t-To}{\lambda}\right)^k}}$$

$$\frac{1}{1 - F(t)} = e^{\left(\frac{t-T_0}{\lambda}\right)^k}$$

Tomando logaritmos neperianos en la expresión se tiene:

$$ln\left[\frac{1}{1 - F(t)}\right] = ln\left[e^{\left(\frac{t-T_0}{\lambda}\right)^k}\right]$$

Y por tanto:

$$ln\left[\frac{1}{1-F(t)}\right] = \left(\frac{t-T_0}{\lambda}\right)^k$$

Tomando nuevamente logaritmos neperianos queda que:

$$ln\left[ln\left[\frac{1}{1 - F(t)}\right]\right] = k \cdot ln\left(\frac{t - T_0}{\lambda}\right)$$

$$ln\left[ln\left[\frac{1}{1 - F(t)}\right]\right] = k \cdot \ln(t - T_0) - k \cdot \ln(\lambda)$$

Que se corresponde con la ecuación de una recta en la forma y = m·x + b, siendo:

$$y = ln\left[ln\left[\frac{1}{1 - F(t)}\right]\right]$$

$$x = \ln(t - T_0)$$

La pendiente m=k, es el parámetro de forma de la distribución, y el término independiente, punto de corte con el eje para x=0 es b = -k·ln (λ) lo que permite calcular el parámetro de escala, por sustitución una vez calculado k, mediante la expresión:

$$\lambda = e^{-\left(\frac{b}{k}\right)}$$

El ajuste se basa en determinar a partir de la información de los fallos a lo largo del tiempo la función F (t) y a partir de ella determinar el doble ln dado por la expresión

$$y = ln\left[ln\left[\frac{1}{1-F(t)}\right]\right]$$

Si se dispone de información suficiente que permite determinar F(t), para intervalos regulares de tiempo (t_a - t_b) a partir de las frecuencias de fallo, la determinación de F(t) como función acumulada es, para cada intervalo ordenado de menor a mayor, un proceso sencillo tal como se ve en los ejemplos.

Se calcula sucesivamente, F(1), F(2)=F(1)+F(2); F(3)=F(2)+F(3), … F(i)=F(i-1)+F(i), y se dispone de dos series t_1, t_2, t_3 … ti; y la serie F(i) anterior. Con ambas se calcula la recta de regresión por los métodos estadísticos conocidos, ordenando la información con la formulación desarrollada anteriormente y se obtienen los coeficientes de correlación m y b, y a través de estos los dos parámetros (de forma y de escala) de la función Weibull.

Si no se dispone de intervalos regulares, por ejemplo cuando la información de los fallos corresponde a tiempos de fallo en los que cada elemento falla a un determinado tiempo de funcionamiento sin ninguna relación sencilla entre los espacios de tiempo entre fallas. En este caso se necesita un modo para determinar la función F(t) y esto se realiza a través de un estimador no paramétrico basado en el orden de las fallas.

El estimador asigna una probabilidad de ocurrencia de fallo a un intervalo de tiempo determinado y formalmente corresponde a una función estadística compleja, denominada Rango Mediana (RM) del tipo siguiente (la variable es el eje 0-x (eje 0-t con valores de tiempo) y se puede representar por (x_i) o por (t_i) cuando es el tiempo: RM (x_i) = RM (t_i) = [i/(n-i+1)]/[F(1-a, 2(n-i+1), 2i)+{1/(n-i+1)}]; (i) es el orden de la falla y (n) el número total de fallos. Los datos se han de ordenar del primero que falla al último en fallar por orden de tiempos de fallo.

La función F (1-a,v_1,v_2) es la distribución F estadística con el nivel de significancia (1-a), y con grados de libertad v_1 y v_2 definidos en estadística. La distribución F es una distribución estadística continua denominada “F de Fisher-Snedecor”, definida en la literatura especializada.

Otros estimadores más sencillos como[15] RM = (i-0,3)/ (n+0,4), i=orden de falla y n=número total de fallos; o el más sencillo aún dado por RM = (i-0,5)/n, dan valores exactos dentro del rango 0,005 que son suficientes, para cualquier estudio de fiabilidad en mantenimiento.

Nota práctica de cálculo para los ejercicios. La función a calcular contiene la expresión [1/(1-F(t)] y para F(t)=1 da infinito; lo que produce un error en la determinación del doble logaritmo en Excel. Esta situación se da con frecuencia pues al determinar el último elemento se suele tener la probabilidad acumulada igual a la unidad o muy próximo a ella.

Cuando se utilizan los estimadores del tipo (i-0,5)/n no se presentan problemas pero cuando se utilizan intervalos regulares sí. Para no tener errores de cálculo, se puede modificar el último elemento, o mejor establecer un elemento ficticio (n+1) con una probabilidad del tipo 0,0005 o menor y al considerar luego las tablas y calcular no incluirlo. Con este sistema se evita el error y se tiene una referencia de la precisión del cálculo según el valor introducido.

En general el método usado necesita el cálculo de la función F(t) de probabilidad acumulada y esta se debe obtener de los datos de partida recogidos que pueden estar en diferentes formas:

a) Intervalos regulares de tiempo y para cada uno de ellos conocer la frecuencia de un suceso (nº de fallos o de averías). Esto facilita, por acumulación, obtener la función de falla, ver ejemplo 4.14.

b) Tiempos totales (t_i) a los que se produce una falla (avería). Se emplea un estimador en base al orden de la falla.

c) Tiempo entre fallos, normalmente no regulares. En este caso se puede intentar obtener el tiempo de cero a t_i y operar como en el supuesto del ejemplo 4.15, tiempo hasta el fallo y ordenarlos. También se puede considerar la variable de $\Delta(t_i)$ como tiempo entre fallos independiente y ajustar la función con estos valores. Este segundo método requiere normalmente, considera un puntos de inicio para determinar algunos parámetros como puede ser el tiempo medio esperado hasta el fallo para un equipo dado, que será un tiempo inicial

[15] Estimador de Bernard; para i=1 y n=1, una única falla y un único elemento, el estimador RM(Bernard) =0,5 →50% de probabilidad, valor intuitivo y razonable

a estimar por algún procedimiento (podría ser el comienzo de la función, valor de T_o, pero no siempre es así) más el tiempo medio entre averías.

4.2.4.4 CÁLCULO DEL PARÁMETRO DE LOCALIZACIÓN (T_O)

Determinados los parámetros de forma (k) y de escala (λ) por el procedimiento de mínimos cuadrados, se trata ahora de identificar un método que nos permita introducir el tercer parámetro de tiempo (T_o) y optimizar el sistema mediante técnicas de cálculo iterado o cálculo numérico mediante la función Solver de Excel.

Esta función necesita una fórmula que incluya los anteriores parámetros en relación al problema a estudiar, más el parámetro de tiempo y buscar el óptimo con algún concepto. Se formula el proceso en base a la variable T_o, que en origen puede tomar el valor $T_o=0$, y se le pide que modificando esta variable optimice el ajuste de mínimos cuadrados con el que se calcularon los dos parámetros anteriores.

Se utiliza el coeficiente de correlación del método de mínimos cuadrados, R^2, que para un ajuste de regresión a una recta tiene un máximo en $R^2=1$. También tiene interés el ajuste a $f=1-R^2$, los métodos de optimización, de búsqueda de máximos y mínimos se optimizan en cálculo y en tiempo cuando buscan el valor cero, punto de corte con el eje.

La función Solver, calculando de forma automática, mediante el procedimiento que escoge el ordenador, da un valor optimo tal como se ve en los ejercicios.

Las funciones Excel que resuelven el problema son las siguientes:

PENDIENTE (conocido: y; conocido: x), da el valor de m=k, parámetro de forma.

INTERSECCIÓN (conocido: y; conocido: x), da el valor de b, y a través de este valor se calcula λ $\left(\lambda = e^{-\left(\frac{b}{k}\right)}\right)$.

COEFICIENTE.R^2 (conocido: y; conocido: x) devuelve el cuadrado del coeficiente de correlación. Varía entre 0 y 1. Es la variable adecuada para buscar el máximo mediante la función solve. También es correcto buscar el mínimo (0) de la función f= $(1-R^2)$.

COEF.DE.CORREL (conocido: y; conocido: x) devuelve el coeficiente de correlación, estadísticamente viene dado por $R=S_{xy}/(S_x \cdot S_y)$ y varía entre (-1) cuando la correlación es inversa al aumentar x disminuye la y, y el valor (+1) de correlación directa al aumentar x aumenta la y.

Conocido: y, es la columna que contiene los valores de y= $ln\left[ln\left[\frac{1}{1-F(t)}\right]\right]$.

Conocido: x, es la columna que contiene los valores de x = ln (t-T_o). To debe estar en una celda independiente para poder optimizar el proceso variando esta celda, en una segunda fase de cálculo, con la función Solver.

En los ejercicios siguientes se dan los resultados para varios ejercicios como ejemplo de uso y siguiendo el procedimiento aquí indicado.

Ejemplo 4.14 Para el total de las 100 bombas iguales que funcionan en una mina se registran los fallos, obteniéndose los resultados que se suministran en la tabla adjunta. Ajustar una función de Weibull a esta estadística de fallos.

Datos de fallo de bombas para 100 unidades iguales.

A. Tiempo hasta el fallo t_i, t_{i+1}	B. Tiempo medio intervalo tm_i	C. Nº de fallos en el periodo
900-1000	950	0
1000-1100	1050	2
1100-1200	1150	6
1200-1300	1250	16
1300-1400	1350	14
1400-1500	1450	26
1500-1600	1550	22
1600-1700	1650	7
1700-1800	1750	6
1800-1900	1850	1
1900-2000	1950	0,00001
	Total	100,00001

Solución:

Columna A: Tiempo hasta es fallo; intervalos en los que se ha dividido la información para su estudio.

Columna B: Tiempo medio del intervalo; valor que caracteriza el intervalo y se usa para ajustar la recta de regresión.

Columna C: Nº de bombas (fallos) en el periodo; información base recogida en fábrica

Columna D: Fallos acumulados; corresponde al nº de fallos total acumulado desde el tiempo t=0 hasta el valor superior reflejado para el intervalo

Columna E: Probabilidad de fallo; se calcula para cada intervalo por el cociente entre el número total de fallos acumulados y el número total de bombas. P (t=1250)=24/100=0,24

Columna F: Fiabilidad; R (t) = 1- F (t)

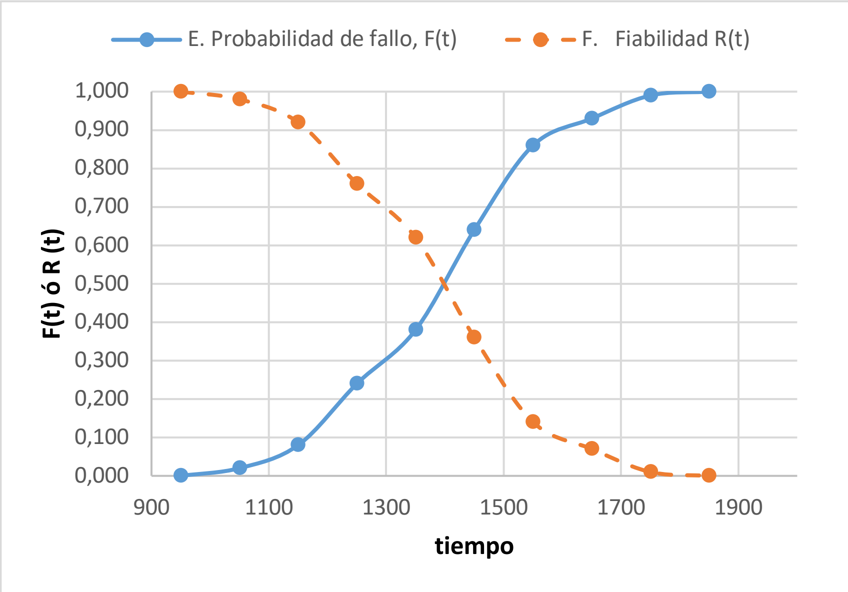
El ítem con la referencia 1900-2000, tiempo medio en el intervalo 1950 y nº de fallos en el periodo de 0,00001 se incluye para evitar los errores de cálculo de las funciones logarítmicas con la tabla excel tal como se ha indicado anteriormente. No es un dato en origen del problema.

Tabla Datos de fallo de bombas para 100 unidades iguales

A. Tiempo hasta el fallo t_i, t_{i+1}	**B. Tiempo medio intervalo tm_i**	**C. Nº de fallos en el periodo**	**D. Fallos acumulados S(de 0 a t)**	**E. Probabilidad de fallo, F(t)**	**F. Fiabilidad R(t)**
900-1000	950	0	0	0,000	1,000
1000-1100	1050	2	2	0,020	0,980
1100-1200	1150	6	8	0,080	0,920
1200-1300	1250	16	24	0,240	0,760
1300-1400	1350	14	38	0,380	0,620
1400-1500	1450	26	64	0,640	0,360
1500-1600	1550	22	86	0,860	0,140
1600-1700	1650	7	93	0,930	0,070
1700-1800	1750	6	99	0,990	0,010
1800-1900	1850	1	100	1,000	0,000
1900-2000	1950	0,00001	100,00001	***	***
	Total	100,00001			

(*) La última línea de la tabla (1900-2000) es de referencia (y de precisión deseada del cálculo) para no bloquear el cálculo de los logaritmos neperianos por el ordenador (evitar errores de cálculo)

Con los valores de las columnas B, E y F se hace la figura siguiente. Se identifica la forma característica de las curvas de probabilidad de fallo acumulado y la curva de fiabilidad.



Proceso de ajuste para los parámetros de forma y de escala. Con la información de la tabla A.4.1 se calculan los valores de la siguiente tabla, que permite aplicar el procedimiento de mínimos cuadrados en la hoja Excel y obtener la recta de regresión.

Tabla A.4.2 Cálculo para ajustar los parámetros (1, k) a una recta

Tiempo (t)	A=1/(1-F(t))	B=ln(A)	Y=Ln(Ln(A))	X=ln(t-To)
950	1	0	#¡NUM!	5,745503328
1050	1,02040816	0,02020271	-3,90193876	6,022917234
1150	1,08695651	0,0833816	-2,48432761	6,239848892
1250	1,31578943	0,27443681	-1,29303423	6,418007645
1350	1,61290313	0,47803574	-0,73806978	6,569174248
1450	2,77777728	1,02165107	0,02142001	6,700461725
1550	7,14285276	1,96611224	0,67605811	6,816496005
1650	14,2856953	2,65925871	0,9780474	6,920455311
1750	99,99901	4,60516029	1,52717748	7,014617584
1850	10000001	16,1180958	2,7799426	7,100671365
1950	#¡VALOR!	#¡VALOR!	#¡VALOR!	***

La última línea corresponde al intervalo de t=1950 que se usa de referencia para no bloquear el cálculo, el valor dado de número de fallos no corresponde a ningún control en fábrica, es únicamente para permitir el cálculo del doble logaritmo. No introduce error en los valores obtenidos (admite valores inferiores a 10^{-10}).

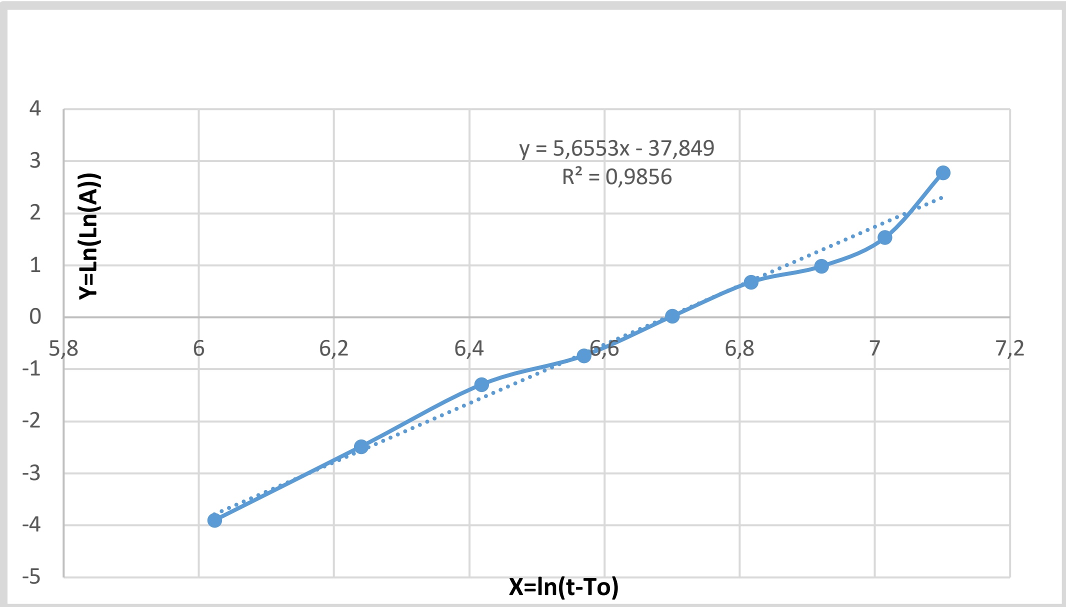
Como valor de T_o se puede usar cualquiera mayor que cero para ajustar solo con dos parámetros la recta de regresión y en una segunda fase de cálculo, mediante la función solver de Excel, optimizar la ecuación correspondiente a R^2 haciendo variable el valor de T_o (la casilla donde se indica este valor).

Los resultados del proceso se dan en la tabla siguiente:

Calculo de parámetros y funciones de optimización	**Concepto**	**Valor**
Valor de referencia para el cálculo, parámetro de inicio de la función Weibull	**To**	**637,22**
Pendiente de la recta de regresión, parámetro de forma de la función Weibull	**k**	**5,66**
Punto de corte con el eje, término independiente	-b=k·ln(l)	-37,849
Parámetro de escala de la función Weibull	l = e $^{(-b/k)}$	**806,4**
Parámetro de control para el ajuste de la regresión	**(*) R^2**	**0,986**
Coeficiente de correlación	R	0,993

(*) Función a optimizar mediante cálculo numérico con Solver variando el valor del parámetro T_o

En la gráfica se dan los valores y la recta de ajuste, se observa que en el ajuste, R=0,993, es muy bueno. Si el coeficiente de correlación está próximo a 1 o -1 (según que la correlación sea directa o inversa), la correlación será muy buena.



El ejercicio anterior, resuelto por Kelly (1998) (mediante los gráficos de Chartwell) da los valores siguientes:

Tiempo de inicio de la función (To): 900 h

Parámetro de forma (K): 3,5

Parámetro de escala (l): 600 h

Se observa que la precisión del gráfico (se adjunta a continuación) no permite mayor ajuste. Los valores calculados, forzando la solución para T_o=900, en coincidencia con la solución aportada por Kelly (1998) son los de la tabla siguiente, y se observa coincidencia formal (3,5 frente a 3,36 calculado) y (600 h frente a 517 h calculadas) para los dos parámetros obtenidos del gráfico.

Para ambos cálculos, T_o = 900 y T_o= 637, el coeficiente de correlación es de 0,98 y 0,99, respectivamente, muy bueno en ambos casos, luego ambas soluciones, con los datos disponibles son correctas para el estudio de mantenimiento del número de fallos de las bombas.

Cálculo de parámetros y funciones de optimización	**Concepto**	**Valor**
Valor de referencia para el cálculo, parámetro de inicio de la función Weibull	**To**	**900,00**
Pendiente de la recta de regresión, parámetro de forma de la función Weibull	**k**	**3,36**
Punto de corte con el eje, término independiente	-b =k·ln(l)	-20,968
Parámetro de escala de la función Weibull	**l** = e $^{(-b/k)}$	**517,1**
Parámetro de control para el ajuste de la regresión	**(*) R^2**	**0,976**
Coeficiente de correlación	R	0,988

Definidos los parámetros de la función, para el supuesto de cálculo numérico, más preciso, se obtiene todos los valores que se derivan de las funciones de fallos entre los que podemos resaltar los valores siguientes:

Función de densidad: $f(t) = \frac{5,66}{806^{5,66}}(t-637)^{4,66}e^{-\left(\frac{t-637}{806}\right)^{5,66}}$

Media, (MTBF): $\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$ = 806 · Γ(1+ 1/5,66) =745 horas

Mediana: $806 \cdot (ln2)^{\frac{1}{5,66}}$ = 755 horas

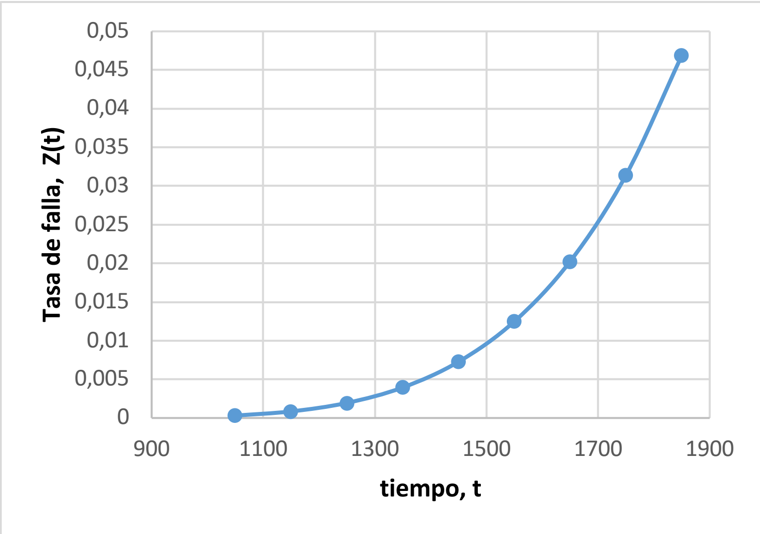
Dado que To = 637 horas, es el inicio de la función, el valor de (To + mediana) = =637+755=1.392 horas; representa el tiempo en que se producen igual número de fallos antes que después, la mediana real del proceso.

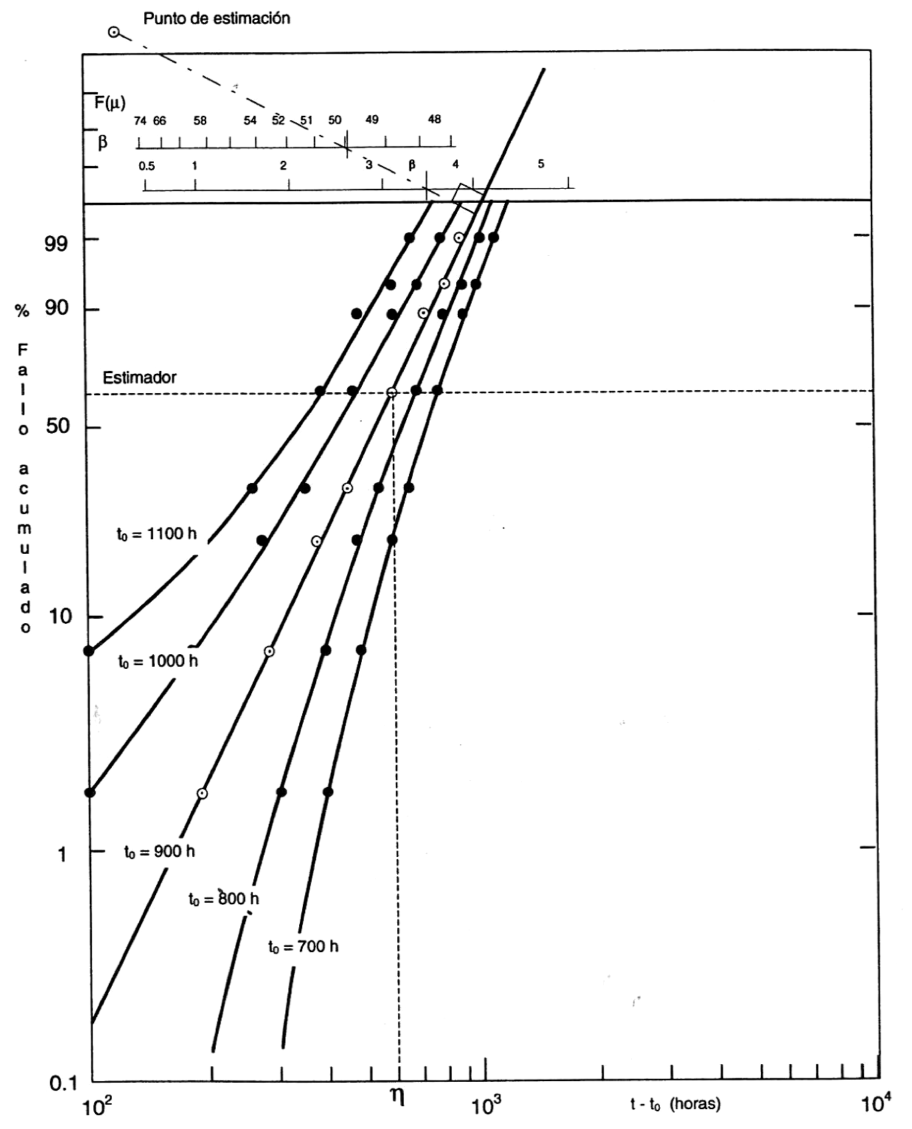
El tiempo medio de vida corresponde, igualmente, a la suma de To más la media de la función, (To+media) o (To+MTBF)= 637+745=1.382 horas

Tasa de falla: h(t)=Z(t)=f(t) / R(t) = $\frac{k}{\lambda}\left(\frac{t-To}{\lambda}\right)^{k-1} = \frac{5{,}66}{806}\left(\frac{t-637}{806}\right)^{4{,}66}$

El gráfico de la función tasa de fallos, claramente creciente, indica que los fallos corresponden a la fase de desgaste o fase tercera de la curva de vida de un componente (o equipo).

t	Z(t)
1050	0,0003104
1150	0,0008523
1250	0,0019534
1350	0,0039484
1450	0,0072753
1550	0,0124868
1650	0,0202598
1750	0,0314059
1850	0,0468806





El gráfico de Chapwell, utilizado por Kelly (1998), da la solución gráfica del ejercicio de la función Weibull para diferentes To; en él, para 900 horas se obtiene prácticamente una recta lo que indica la mejor correlación.

Ejemplo 4.15. Se dispone de los datos siguientes correspondientes a tiempos desde la puesta en marcha de un equipo hasta la avería:

Tiempo hasta el fallo (t_i) (1)
2
7
14
22
24
25
26
30
31

Se desea:

a) Ajustar una función de Weibull a los datos.

b) Estimar el MTBF, la vida media hasta el fallo y la media por medio de la misma.

Los datos aparecen ordenados de menor a mayor en relación al tiempo transcurrido hasta el fallo. El ajuste mediante mínimos cuadrados y su posterior cálculo con Solver, es similar al ya utilizado. La información base es la columna A: Datos de fallo para equipos de una gama.

A. Tiempo hasta el fallo (t_i) (1)	B. Orden del fallo (rango) (i)	RM (2) estimador Bernard	E. Probabilidad de fallo, F(t)	F. Fiabilidad R(t)
2	1	0,07446809	0,074	0,926
7	2	0,18085106	0,181	0,819
14	3	0,28723404	0,287	0,713
22	4	0,39361702	0,394	0,606
24	5	0,5	0,500	0,500
25	6	0,60638298	0,606	0,394
26	7	0,71276596	0,713	0,287
30	8	0,81914894	0,819	0,181
31	9	0,92553191	0,926	0,074
Total	9	(2) RM = (i-0,3)/(n+0,4)		

(1) unidades de tiempo, horas, semanas, meses, según interese

Tabla auxiliar de cálculo para ajustar los parámetros (l, k) a una recta

Tiempo (t)	A=1/(1-F(t))	B = l (A)	Y = Ln(Ln(A))	X = ln (t-To)
2	1,08045977	0,07738666	-2,55894082	0,693147181
7	1,22077922	0,19948936	-1,61199438	1,945910149
14	1,40298507	0,33860216	-1,08292942	2,63905733
22	1,64912281	0,50024351	-0,69266027	3,091042453
24	2	0,69314718	-0,36651292	3,17805383
25	2,54054054	0,93237687	-0,07001818	3,218875825
26	3,48148148	1,24745792	0,22110781	3,258096538
30	5,52941176	1,71008144	0,53654099	3,401197382
31	13,4285714	2,59738463	0,95450503	3,433987204

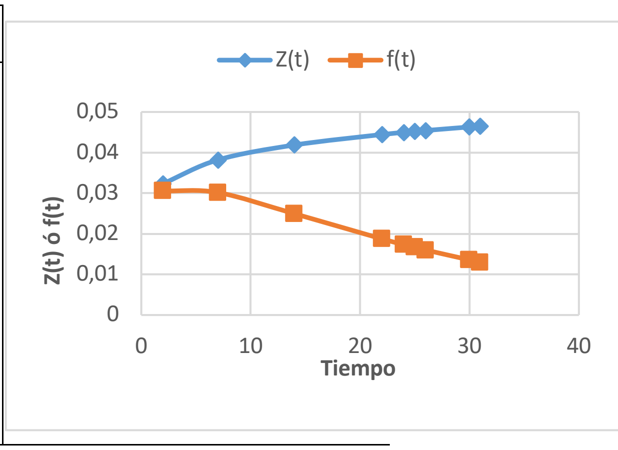
Calculo de parámetros y funciones de optimización	**Concepto**	**Valor**
Valor de referencia para el cálculo, parámetro de inicio de la función Weibull	**To**	**0,00**
Pendiente de la recta de regresión, parámetro de forma de la función Weibull	**k**	**1,13**
Punto de corte con el eje, término independiente	-b=k·ln(l)	-3,647
Parámetro de escala de la función Weibull	**l** = e $^{(-b/k)}$	**25,0**
Parámetro de control para el ajuste de la regresión	**(*) R^2**	**0,861**
Coeficiente de correlación	R	0,928

(*) Función a optimizar mediante cálculo numérico con Solver variando To

Tasa de falla:
Z(t)=f(t)/R(t)= $\frac{k}{\lambda}\left(\frac{t-To}{\lambda}\right)^{k-1}$

Función de distribución: $f(t) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{t-To}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{t-To}{\lambda}\right)^{k}}$

t	Z(t)	f(t)
2	0,0323673	0,03056876
7	0,0382015	0,03016575
14	0,0418700	0,02495002
22	0,0444498	0,01874102
24	0,0449644	0,01733634
25	0,0452079	0,01666179
26	0,0454431	0,01600626
30	0,0463115	0,01357684
31	0,0465129	0,01301744



Media (MTBF): $\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$		23,9	Ud de tiempo
Vida media hasta el fallo: T_0 + Media		23,9	Ud de tiempo
Mediana($\lambda(ln2)^{\frac{1}{k}}$) = 18,1	Periodos, para T_0 >0;	18,1	Ud de tiempo

Si se utiliza el estimador, F(t)= (i-0,5)/n, se obtiene los valores que se dan en la tabla siguiente:

Concepto	Variable	Estimador (i-0,3)/(n+0,4)	Estimador (i-0,5)/n
Parámetro de inicio	T_0	0	0
Parámetro de forma	k	1,13	1,26
Parámetro de escala	λ	25,0	24,5
Ajuste	R^2	0,861	0,877

Ejemplo 4.16 Estudio comparado para un problema con dos tipos de información, una recogida según el orden del fallo identificando el tiempo y otra con información por intervalos de tiempo. Análisis comparado del tipo de información y de los resultados.

En la tabla A, base del cálculo, se da la siguiente información.

Columna A: Tiempos de falla para los equipos o instalaciones en estudio, detallado por el orden en que se producen. El resto de columnas, como en ejemplos anteriores, responden al mismo criterio y son calculadas para ordenar los datos conforme se necesitan para resolver el problema.

Solución A. Usando el orden de falla y numerando correlativamente de i=1 a i=n

Tabla A. Datos de fallo para equipos de una gama (lámparas de iluminación, sistemas de vigilancia instalados, etc.)

A. Duración (h)	B. Orden del fallo (rango) (i)	(2) RM estimador Bernard	Estimador (i-0,5)/n	E. Probabilidad de fallo, F(t)	F. Fiabilidad R(t)	Meses	Tiempo de uso al mes-media
2170	1	0,02651515	0,01923077	0,027	0,973	6,1	355,7
2858	2	0,06439393	0,05769231	0,064	0,936	8,03	355,9
2858	3	0,10227272	0,09615385	0,102	0,898	8,03	355,9
4066	4	0,14015151	0,13461538	0,140	0,860	11,43	355,7
4329	5	0,17803030	0,17307692	0,178	0,822	12,16	356,0
5209	6	0,21590909	0,21153846	0,216	0,784	14,64	355,8
5209	7	0,25378787	0,25	0,254	0,746	14,64	355,8
5595	8	0,29166666	0,28846154	0,292	0,708	15,72	355,9
5693	9	0,32954545	0,32692308	0,330	0,670	16	355,8
5693	10	0,36742424	0,36538462	0,367	0,633	16	355,8
5693	11	0,40530303	0,40384615	0,405	0,595	16	355,8
6143	12	0,44318181	0,44230769	0,443	0,557	17,26	355,9
6464	13	0,48106060	0,48076923	0,481	0,519	18,16	355,9
6796	14	0,51893939	0,51923077	0,519	0,481	19,1	355,8
7304	15	0,55681818	0,55769231	0,557	0,443	20,53	355,8
7304	16	0,59469697	0,59615385	0,595	0,405	20,53	355,8
7625	17	0,63257575	0,63461538	0,633	0,367	21,43	355,8
7625	18	0,67045454	0,67307692	0,670	0,330	21,43	355,8
8540	19	0,70833333	0,71153846	0,708	0,292	24	355,8
9369	20	0,74621212	0,75	0,746	0,254	26,33	355,8
9736	21	0,78409090	0,78846154	0,784	0,216	27,36	355,8

9736	22	0,82196969	0,82692308	0,822	0,178	27,36	355,8
11113	23	0,85984848	0,86538462	0,860	0,140	31,23	355,8
12157	24	0,89772727	0,90384615	0,898	0,102	34,16	355,9
12367	25	0,93560606	0,94230769	0,936	0,064	34,76	355,8
15097	26	0,97348484	0,98076923	0,973	0,027	42,43	355,8
Total	26	(2) RM = (i-0,3)/(n+0,4)				Media:	355,8

Se adjuntan las tablas auxiliares de cálculo para mejor comprensión del sistema de solución

Tabla auxiliar de cálculo para ajustar los parámetros (l, k) a una recta

Tiempo (t)	A=1/(1-F(t))	B=ln(A)	Y=Ln(Ln(A))	X=ln(t-T_0)
2170	1,019607	0,0194180	-3,9416	7,0165
2858	1,061224	0,059423	-2,8231	7,4972
2858	1,1063829	0,1010961	-2,2917	7,4972
4066	1,1555555	0,1445812	-1,9339	8,0100
4329	1,2093023	0,1900436	-1,6605	8,0937
5209	1,2682926	0,2376716	-1,4369	8,3318
5209	1,3333333	0,2876820	-1,2459	8,3318
5595	1,4054054	0,3403258	-1,0779	8,4207
5693	1,4857142	0,3958956	-0,9266	8,4420
5693	1,5757575	0,4547361	-0,7880	8,4420
5693	1,6774193	0,5172565	-0,6592	8,4420
6143	1,7931034	0,5839478	-0,5379	8,5346
6464	1,9259259	0,6554068	-0,4225	8,5958
6796	2,08	0,7323678	-0,3115	8,6554
7304	2,2608695	0,8157495	-0,2036	8,7402
7304	2,4761904	0,9067212	-0,0979	8,7402
7625	2,7368421	1,0068047	0,0068	8,7903
7625	3,0588235	1,1180303	0,1116	8,7903
8540	3,4666666	1,2431935	0,2177	8,9206
9369	4	1,3862943	0,3266	9,0257
9736	4,7272727	1,5533484	0,4404	9,0689
9736	5,7777777	1,7540191	0,5619	9,0689
11113	7,4285714	2,005333	0,6958	9,2161
12157	10,4	2,3418058	0,8509	9,3149
12367	17,333333	2,852631	1,0482	9,3336
15097	52	3,9512437	1,3740	9,5498

Con los valores calculados se obtiene los resultados del resumen, ordenado de igual forma que en ejercicios anteriores.

Calculo de parámetros y funciones de optimización	Concepto	Valor
Valor de referencia para el cálculo, parámetro de inicio de la función Weibull	**To**	**1055,10**
Pendiente de la recta de regresión, parámetro de forma de la función Weibull	**k**	**2,07**
Punto de corte con el eje, término independiente	-b=k·ln(λ)	-18,315
Parámetro de escala de la función Weibull	λ= e $^{(-b/k)}$	**6942,7**
Parámetro de control para el ajuste de la regresión	**(*) R^2**	**0,981**
Coeficiente de correlación	R	0,991

(*) Función a optimizar mediante cálculo numérico con Solver variando el valor del parámetro To.

Tasa de falla: Z(t)=f(t)/R(t) $\frac{k}{\lambda}\left(\frac{t-To}{\lambda}\right)^{k-1}$

Función de distribución: $f(t)=\frac{k}{\lambda}\left(\frac{t-To}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{t-To}{\lambda}\right)^{k}}$

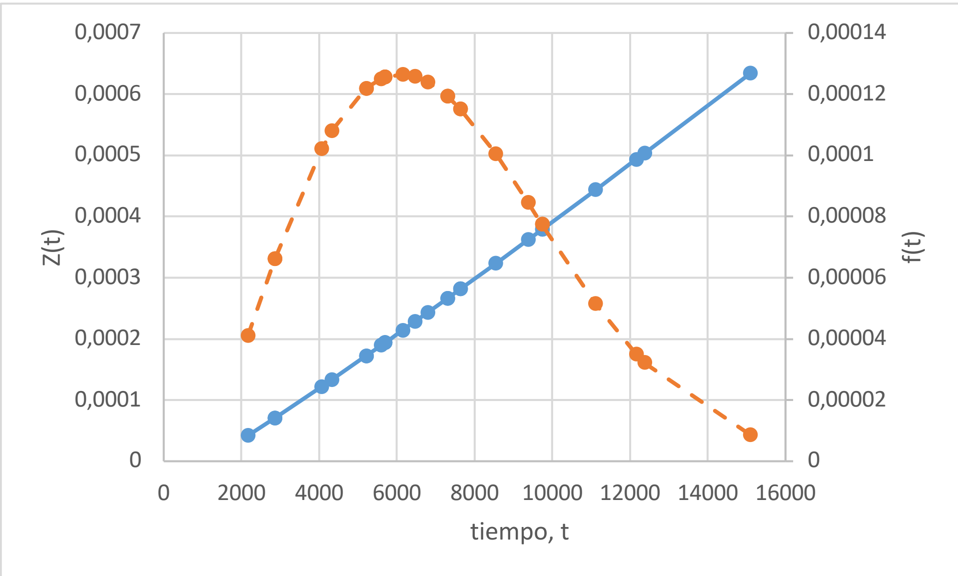


Figura. Se representa la tasa de fallos y la función de distribución correspondiente al ejercicio anterior, solución A, calculada con los valores dados en la tabla de resultados.

Media (MTBF): $\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$		6149,8	Ud: h
Vida media hasta el fallo (T_o+Media)		7204,9	Ud: h
Mediana: $\lambda(ln2)^{\frac{1}{k}}$ = 5816,4	Periodos, para $T_o > 0$	6871,5	Ud: h

La ***vida característica***, valor para el que F (t) = 63,2% (ver nota) y se cumple cuando la expresión (t-To)/λ) = 1

t - To = λ → t = 6.942,7 + 1.055,1 = 7.997,8 ≈ 8.000 horas

Solución B. Ordenado por intervalos de tiempo iguales y obteniendo la frecuencia de fallo para cada intervalo, de la información base horaria. Lo resolvemos por trimestres, pero con la información base de la tabla A se puede ordenar como mejor interese.

Tabla B, base para la solución.

Estudio de la función mediante intervalos trimestrales de falla

Mes Inicio	Mes fin	Media	Nº fallos	Acumulados	F(t)	R(t)=1-F(t)
6	9	7,5	3	3	0,115380	0,88461
9	12	10,5	1	4	0,153840	0,8461597
12	15	13,5	3	7	0,269220	0,7307795
15	18	16,5	5	12	0,461520	0,5384792
18	21	19,5	4	16	0,615360	0,3846390
21	24	22,5	3	19	0,730741	0,2692588
24	27	25,5	1	20	0,769201	0,2307988
27	30	28,5	2	22	0,84612	0,1538786
30	33	31,5	1	23	0,884581	0,1154186
33	36	34,5	2	25	0,961501	0,0384985
36	39	37,5	0	25	0,961501	0,0384985
39	42	40,5	1	26	0,999961	$3{,}846E^{-05}$
42	45	43,5	0,001	26,001	Fila de referencia por Ln	
			Total muestra	26,001		

Tablas auxiliares y resultados obtenidos:

Tabla auxiliar de cálculo para ajustar los parámetros (l, k) a una recta

Tiempo (t)	A=1/(1-F(t))	B=ln(A)	C=Ln(Ln(A))	X=ln(t-To)
7,5	1,13042911	0,12259731	-2,0989	2,0149
10,5	1,18180992	0,16704709	-1,7895	2,3514
13,5	1,36840166	0,31364339	-1,1595	2,6027
16,5	1,85708164	0,61900624	-0,4796	2,8034
19,5	2,59984002	0,95544991	-0,0456	2,9704
22,5	3,71389801	1,312082	0,2716	3,1135
25,5	4,33277787	1,46620888	0,3827	3,2387
28,5	6,49862534	1,87159067	0,6268	3,3499
31,5	8,66411196	2,15918943	0,7697	3,4500
34,5	25,975025	3,2571355	1,1808	3,5410
37,5	25,975025	3,2571355	1,1808	3,6243
40,5	26001	10,1658903	2,3190	3,7013

Cálculo de parámetros y funciones de optimización	Concepto	Valor
Valor de referencia para el cálculo, parámetro de inicio de la función Weibull	**To**	**0,00**
Pendiente de la recta de regresión, parámetro de escala de la función Weibull	**k**	**2,38**
Punto de corte con el eje Y (término independiente)	$b=k\cdot\ln(l)$	-7,196
Parámetro de escala de la función Weibull	$l = e^{-b/k}$	**20,6**
Parámetro de control para el ajuste de la regresión	**(*) R^2**	**0,955**
Coeficiente de correlación	R	0,977

(*) Función a optimizar mediante cálculo numérico con Solver variando el valor del parámetro T_o.

Media (MTBF): $\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$			18,2 meses
Vida media hasta el fallo (T_o+Media)			18,2 meses
Mediana:	$\lambda(ln2)^{\frac{1}{k}}$ 17,6	Periodos, para $T_o > 0$	17,6 meses

Media (mes) · h/mes (355,8)	6481,0 h
Vida característica, $(t-T_o)/\lambda = 1$	7329,5 h

Conclusiones:

a) La información se debe organizar en función del sistema de solución que se va a utilizar, y este tiene que estar en consonancia con lo que se espera de él.

b) Mayor precisión en los datos, tiempos de falla con detalle horario, permite mejor solución.

c) Resuelto por más de un procedimiento, las soluciones no son comparables de forma directa, necesitan interpretación y criterio en base al conocimiento del proceso. Si se quiere obtener el número medio de fallos por mes y la vida media en horas para cada equipo, es necesario resolver el modelo con dos criterios diferentes de organización de datos.

d) Se calcula el tiempo medio para el fallo del sistema (lámpara, equipo, etc.) mediante la solución A (por horas y orden de fallo) y mediante la solución B (por meses e intervalos regulares) y se observa cierta discrepancia, 7205 h frente a 6481 h para la media y 8.000 h frente a 7330 para la vida característica.

4.2.4.4 CONSIDERACIONES SOBRE EL PARÁMETRO DE LOCALIZACIÓN

Los siguientes aspectos se deben tener presente al estudiar parámetros de localización To distintos de cero:

a) La existencia de una cola de puntos ascendentes o descendentes respecto de la recta de regresión es indicativo de que es preciso calcular el parámetro de cola.

b) Reducciones abruptas de pendiente o presencia de una cola hacia abajo corresponden a un parámetro de localización positivo.

c) Aumento rápido de la pendiente o presencia de una cola ascendente indican un parámetro de localización negativo. En cualquier caso, el problema debe ser estudiado con mucho detalle antes de asumir que se pueden producir fallos antes del tiempo t=0.

Un parámetro de localización negativo se presenta cuando ante la presencia de unidades con fallos en servicio, o unidades defectuosas también en servicio que pueden causar fallos, por ejemplo: defectos de ensamble en fábrica, transporte, embalaje, instalación, almacenamiento y falta de formación/información sobre el uso del equipo.

d) Valores altos del parámetro de forma (β > 10, según referencias documentales) sugieren también que el parámetro de localización ha de ser determinado.

El cálculo del parámetro To se efectúa por métodos numéricos. En los ejercicios de estos apuntes se emplea la función Solver de Excel. Esta función necesita una expresión dependiente de los valores a optimizar, por lo que se propone en los ejercicios el empleo de la función R^2, que es positiva entre los valores 0 y 1. Para iniciar el cálculo se debe indicar al programa un punto de inicio, (T_o= valor numérico inicial o punto semilla). El mejor valor de inicio es uno ligeramente inferior al valor más bajo del tiempo entre fallas de la muestra o del tiempo de aparición de la primera falla. En el ejercicio 4.16, el primer fallo aparece en el intervalo 1000-1100, tiempo medio 1050, luego un buen punto puede ser T_o=900, aunque iniciado en T_o=0 también calcula correctamente para este ejercicio.

Si se inicia en cero es aconsejable repetir el cálculo una segunda vez, pero esta segunda vez se inicia el cálculo con el valor de To obtenido en el primer cálculo de tanteo. Esto es recomendable cuando el número de datos es elevado.

4.2.4.5 PERIODOS DE SUSTITUCIÓN DE ELEMENTOS A TRAVÉS DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN WEIBULL

Una aplicación de gran utilidad para el mantenimiento, principalmente de aquellas máquinas más importantes en el proceso de fabricación, consistente en, a través de la información obtenida de las distribuciones (en el caso que nos ocupa la de Weibull), facilitar la decisión de los tiempos a los que es preciso sustituir o remplazar un equipo o un elemento de una máquina.

Así, para efectuar este estudio sobre un conjunto de máquinas similares se precisa de los parámetros siguientes:

N: nº de equipos, máquinas o elementos a considerar.

C_{eq}: Coste del equipo o repuesto.

T: Intervalo de tiempo para el periodo de sustitución.

C_t: Coste total para N máquinas supuesto que unas se remplazan antes de fallo y otras, por probabilidad, se cambian después del mismo.

C_f: Coste de la sustitución del equipo o del elemento con posterioridad al fallo. En este parámetro han de tenerse presentes los costes del equipo, los de no producción y en general los incrementos de coste frente a la sustitución programada como pueden ser horas extras por la urgencia. Debe darse la condición de $C_f > C_{eq}$. Si el coste de sustitución del equipo por un fallo es menor o igual que el debido a sustituirlo de forma programada, formalmente, matemáticamente, no interesa nunca hacer sustitución preventiva.

E[N]: Es la esperanza matemática de que fallen N equipos en un tiempo T. Se obtiene usando la distribución de trabajo, para el ejemplo actual la distribución Weibull, considerando la probabilidad de fallo (1- R(t)) aplicada al conjunto de equipos (N). En ese caso el número de equipos que probablemente fallen en un tiempo T es:

$$\mathrm{E}\,[\mathrm{N}] \;=\; \mathrm{N} \cdot\, E[N] = N \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{T}{1/\lambda}\right)^{k}}\right]$$

Donde:

λ: Tasa media de fallos obtenida como valor medio de las ocurrencias de fallo en un periodo anterior (λ=1/MTBF).

K: Parámetro de forma de la distribución. Se admite que estamos en la fase de estudio para la sustitución de un equipo por lo que se ha rebasado la zona de funcionamiento estable y se está en fase de desgaste por envejecimiento (k, normalmente, superior a 2).

El valor de T buscado es el que minimiza el coste obtenido de la expresión:

$$C_{total} = (N \cdot C_{eq} + E\,[N] \cdot C_f) \,/\, T$$

Remplazando el valor de E[N] en la expresión anterior y calculando la derivada dC/dT=0 se obtiene el valor óptimo de T. La expresión a resolver es X=Y con los valores siguientes:

$$X = C_{eq}/C_f + 1;$$

$$Y = \left[e^{-\left(\frac{T}{1/\lambda}\right)^k}\right]\left[1 + k\left(\frac{T}{1/\lambda}\right)^k\right]$$

Se trata de una ecuación trascendente, cuya solución aproximada por métodos de cálculo numérico se puede obtener con la función Solver (o las equivalentes de Matlab). Interesa resolver la función Z=X-Y=0 pues los métodos de aproximación son más eficientes[16]. Por otra parte, indicar que una solución es el valor T=∞, pero que evidentemente esta solución no es técnicamente aceptable, pues si bien es una solución matemática, no tiene aplicación real posible al carecer de valores acotados en el tiempo.

Ejemplo 4.17 Un sistema sigue una distribución de Weibull con tasa de fallos de 0,004 averías día y un parámetro de forma, k, de valor 5. Calcular el periodo óptimo de sustitución de equipos para el supuesto de un conjunto de 60 máquinas que presentan unos costes de sustitución antes del fallo de 100 €/unidad y un coste cuando se produce la avería de 200 €/avería.

Se verifica la condición Cf > Caq (200 > 100) luego el problema tiene una solución técnica aceptable.

[16] Con anterioridad al uso generalizado de métodos numéricos (dependientes de la potencia de cálculo de los programas actuales) la solución se planteaba por métodos gráficos aproximados.

Se utiliza en Excel (por la facilidad de modificar variables y analizar soluciones) la función "Solver"; también lo resuelve la función similar "buscar objetivo" aunque Solver admite más condiciones en el modelo, como acotar el rango de las soluciones o forzar valores entre rangos para determinadas variables.

La aplicación reiterada para varios valores (se puede calcular para k= 2, 3, 4, 5, etc. si este valor no es conocido) permite hacer una gráfica y determinar dónde nos interesa actuar teniendo varias soluciones a elegir, calculadas con relativa comodidad.

Solución: Calculo del periodo de actuación (sustitución o reparación) de equipos que siguen una distribución de Weibull con los valores del enunciado:

Variable	**Valor**	**Concepto**
N_{eq}	60	nº de equipos
C_{eq}	100	Coste del equipo, sustituido antes del fallo
C_f	200	Ídem sustituido por fallo
l	0,004	Tasa de fallos (1/MTBF)
m=1/l	250	Parámetro de escala (MTBF)
k	5	Parámetro de forma

Expresiones básicas del ejercicio:

$C_{total} = (N \cdot C_{eq} + E[N] \cdot C_f) / T$

$X = C_{eq} / C_f + 1$

$$Y = \left[e^{-\left(\frac{T}{1/\lambda}\right)^k}\right]\left[1 + k\left(\frac{T}{1/\lambda}\right)^k\right]$$

Se resuelve: Z = X-Y =0, para calcular T. El programa busca el valor de T que más aproxima Z al valor cero, se da el error de cálculo en la tabla posterior de soluciones y se observa que es del orden de 10^{-11}.

Notas:

- X es la función $X=C_{eq}/C_f+1$, de teoría; Y_1 e Y_2 son los dos factores cuyo producto da Y (ver expresiones básicas).
- Iniciar el cálculo, valor de T, cualquier valor > 0 (1,2, etc.)
- Hacer un segundo cálculo, puede que el primero solo aproxime por el número de iteraciones.

- El periodo de actuación está en las mismas unidades de tiempo que el cálculo de la tasa de fallos.
- Si se modifican los valores, la función Solver no se actualiza, hay que volverla a calcular, esta función no es automática ante un cambio en algún valor inicial.

Valores obtenidos para los diferentes parámetros y funciones que interviene

T(días):	**170,5535**	Periodo óptimo de sustitución/ actuación, (días)		
X	Y_1(exp)	Y_2(suma)	$Y=Y_1 \cdot Y_2$	**Z=X-Y**
1,5	0,86262438	1,73887968	1,5	**$1{,}6599 \cdot 10^{-11}$**

El periodo óptimo de sustitución de equipos es a los T=170,6 ≈ 171 días

4.2.5 OTRAS FUNCIONES DE PROBABILIDAD

Conocer las herramientas a disposición del ingeniero es una labor que lleva tiempo y este no siempre esta a disposición durante los trabajos. Con el objetivo de tener un conocimiento del campo de las funciones de distribución en su amplitud, se considera que esta con suficiente amplitud tratado el de las funcines continuas, aquellas de alta aplicación al servicio de mantenimiento en sus especialidades pero incompleto el de otras funciones discretas que pueden tener su aplicación en casos especiales.

Se enumeran los parámetros básicos, media y desviación típica de las distribuciones de Bernouilli y geométrica pues se verán aplicaciones de las mismas en capítulos posteriores:

Distribución de Bernouilli, cuando la probabilidad de ocurrencia es diferente, es la más sencilla, la variable solo puede tomar dos valores, A o B con una cierta probabilidad p y (1-p) respectivamente. La media es (p) y la desviación típica es la raiz{ p·(1-p)}. Se puede aplicar cuando solo interesa conocer si existe avería, o no existe avería, como dos sucesos complementarios y excluyentes, con probabilidad distinta.

La distribución Binomial, ya vista, es la probabilidad de obtener k sucesos A con probabilidad “p” a partir de “n” intentos. Es la suma de n funciones de Bernouilli de probabilidad “p”. La media es (n·p) y la varianza es n·p·(1-p), la desviación típica es la raiz{n·p·(1-p)}. Tiene aplicación directa en la evaluación del número de fallos posibles y su generalización, ya visto, es la distribución de Poisson.

La distribución geométrica, representa la probabilidad de obtener la primera ocurrencia A en el lanzamiento “n”, o lo que es lo mismo que la primera avería se produzca al cabo de “n” periodos de tiempo”T”. Esta variable tiene rango infinito aunque sigue siendo discreta. La media es (1/p) y la varianza es $(1\text{-}p)/p^2$. La desviación típica es la raiz positiva de la varianza. Se usa en teoría de colas y en el estudio de situaciones de espera de reparaciones pero está mejorada por el par Poisson–Exponencial que se desarrolla posteriormente al plantear la aplicación de la teoría de colas al diseño de los servicios de mantenimiento, que permite el cálculo del número de equipos necesarios.

REFERENCIAS

Guerriero, V. (2012). Power law distribution: Method of multi-scale inferential statistics. Journal of Modern Mathematics Frontier, 1(1), 21-28.

Kelly, A., & Harris, M. (1983). Gestión del mantenimiento industrial. Madrid, España: Editorial Fundación REPSOL Publicaciones e Impreso en Gráficas del Mar. Traducido por Gerardo Álvarez Cuervo y equipo de trabajo. 1998. ISBN: 84-923506-0-1. Traducido de Management Industrial Maintenance Soft.–Edit.

Ríos, Sixto. (1952) Introducción a los Métodos de la Estadística (vol. I). Industrias Gráficas España.

Ríos, Sixto. Introducción a los Métodos de la Estadística (vol. II). Industrias Gráficas España.

Ríos, S. (1973). Métodos estadísticos. Ediciones del Castillo. España.

BIBLIOGRAFÍA

Libros y revistas

Bedford, T., Cooke, R. (2003). Probability risk analysis: foundations and methods. Cambridge University Presss, Cambridge, UK.

Brick, J. M., Michael, J. R., & Morganstein, D. (1989). Using statistical thinking to solve maintenance problems. Quality Progress, 22(5), 55-60.

Dhillon, B. S. (1999). Design reliability: fundamentals and applications. CRC press.

Dhillon, B. S. (2002). Engineering maintenance: a modern approach. CRC press.

Fernández, F. J. G. (2005). Teoría y práctica del mantenimiento industrial avanzado. FC editorial.

Guerriero, V. (2012). Power law distribution: Method of multi-scale inferential statistics. Journal of Modern Mathematics Frontier, 1(1), 21-28.

Heydorn, R. P. (2001). Reliability Engineering Handbook. Technometrics.

Ireson, W. G., Coombs, C. F., & Moss, R. Y. (1996). Handbook of reliability engineering and management. McGraw-Hill Professional.

Jardine, A. K., & Tsang, A. H. (2013). Maintenance, replacement, and reliability: theory and applications. CRC press.

Kececioglu, D. (2002). Reliability and life testing handbook (Vol. 2). DEStech Publications, Inc.

Kelly, A. (1998). Gestión del mantenimiento industrial. Fundación REPSOL, Madrid.

Leavenworth, R. S., & Grant, E. L. (2000). Statistical quality control. McGraw-Hill Education.

Meeker, W. Q., & Escobar, L. A. (2014). Statistical methods for reliability data. John Wiley & Sons.

MIL-HDBK-338 (1988). Electronic reliability design handbook. US Department of defense.

Monchy, F. (1990). Teoría y práctica del mantenimiento industrial. Masson.

Nelson, W. B. (2009). Accelerated testing: statistical models, test plans, and data analysis (Vol. 344). John Wiley & Sons.

O'Connor, P., & Kleyner, A. (2012). Practical reliability engineering. John Wiley & Sons.

Rey, F. (1996). Hacia la excelencia en mantenimiento. TGP Hoshin, Madrid, España.

Ríos, Sixto. (1952) Introducción a los Métodos de la Estadística (vol. I). Industrias Gráficas España.

Ríos, Sixto. Introducción a los Métodos de la Estadística (vol. II). Industrias Gráficas España.

Ríos, S. (1973). Métodos estadísticos. Ediciones del Castillo. España.

Sacristán, F. R. (2001). Manual del mantenimiento integral en la empresa. FC Editorial.

Serrano, J.C. (2013). Comparación de métodos para determinar los parámetros de Weibull para la generación de energía eólica. Scientia et Technica 18.2: 315-320.

Sacristán, F. R. (2001). Manual del mantenimiento integral en la empresa. FC Editorial.

Tobias, P. A., & Trindade, D. (2011). Applied reliability. CRC Press.

Torell, W., & Avelar, V. (2004). Mean time between failure: Explanation and standards. white paper 78.

Páginas web

"Cálculo de los parámetros de la distribución de Weibull”. Reliabilityweb. N.p., n.d. Web. 31 Oct. 2016.

"Distribución exponencial" Wikipedia: The Free Encyclopedia. Wikimedia Foundation, Inc. 22 July 2004. Web. 30 Aug. 2016.

"Distribución normal" Wikipedia: The Free Encyclopedia. Wikimedia Foundation, Inc. 22 July 2004. Web. 30 Aug. 2016.

"Distribución de Poisson" Wikipedia: The Free Encyclopedia. Wikimedia Foundation, Inc. 22 July 2004. Web. 30 Aug. 2016.

"Distribución de Weibull" Wikipedia: The Free Encyclopedia. Wikimedia Foundation, Inc. 22 July 2004. Web. 30 Aug. 2016.

"Prueba t de Student" Wikipedia: The Free Encyclopedia. Wikimedia Foundation, Inc. 22 July 2004. Web. 30 Aug. 2016.