

ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

MASTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA DE MINAS

Capítulo 6: Costes del mantenimiento

Carlos Sierra Fernández

Ingeniero de minas

Profesor Ayudante Doctor

Departamento de Transportes y Tecnología de Proyectos y Procesos

Emilio Andrea Calvo

Ingeniero industrial

Profesor Asociado

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

“Competition is the keen cutting edge of business, always shaving away at costs”.

-Henry Ford

Emilio Andrea Calvo
Carlos Sierra Fernández

ÍNDICE

6.1 Costes asociados al mantenimiento	4
6.2 Indicadores de gestión	5
6.3 Grado Óptimo de Mantenimiento Preventivo	9
6.4 Frecuencia del Mantenimiento Preventivo	15
6.5 Cantidad Económica de Pedido, modelo Wilson.....	24
Referencia.....	30
Bibliografía.....	30

6.1 COSTES ASOCIADOS AL MANTENIMIENTO

Los costes de mantenimiento son los pagados para la conservación o la restauración de los bienes o de los equipos. Estos gastos pueden ser considerados también como inversiones para la protección de equipos e incluso como seguros para la producción. Aunque se pueden desglosar de diversas formas, siempre hay dos partidas: gastos directos y gastos indirectos. Los primeros son los producidos por la propia estructura del mantenimiento. Los **gastos de tipo directo** pueden ser los siguientes (relación conceptual no exhaustiva):

- **Mano de obra:** Incluye personal propio y personal de empresas contratadas.
- **Suministros:** Consumibles, elementos de desgaste y componentes de reposición.
- **Equipos¹:** Equipos empleados en forma directa en la ejecución de la actividad de mantenimiento. Pequeños taladros, soldadoras, tornos, bombas de achique, bancos de pruebas, vehículos, grúas, etc.
- **Contratos externos:** Estos pueden corresponder a apoyos puntuales, o subcontratas continuas de parcelas más o menos amplias de servicios propios de un sistema de mantenimiento. En el primero, son habituales los subcontrataciones a fabricante o empresas altamente especializadas de labores de apoyo en procesos altamente tecnológicos. En el segundo, en su concepción extrema, puede estar subcontratado (externalizado) la totalidad del servicio de mantenimiento.
- **Costos por Indisponibilidad Operacional (de parada):** Cualquier ingreso perdido por ausencia de producción o penalizaciones por riesgo mientras se realiza el trabajo de mantenimiento.

¹ Los equipos de dotación de un servicio se dividen, normalmente en dos grupos: equipo de dotación de las personas, de tipo individual, como herramientas de mano y dotación de protección individual y equipos de entidad superior, que son de uso a demanda, pero por tipo de especialidad. En un servicio de mantenimiento, al menos hay dos grupos claramente diferenciados: eléctrico-electrónico y mecánico-calefactor o frigorista. Además, según el tamaño de la empresa, es habitual un tercer grupo dedicado a reformas y reparaciones de obra civil, saneamiento y fontanería.

Por otra parte los **gastos indirectos** corresponden a una parte proporcional de los gastos generales que no son atribuibles directamente al servicio de mantenimiento y que normalmente se distribuyen en forma proporcional a la importancia del departamento. Pueden ser: artículos del personal soporte o de estructura (supervisión, gerencial, seguridad y administrativo) y equipos suplementarios para garantizar la logística de ejecución (transporte, comunicación, otras facilidades de la empresa). Ante la falta de mejor criterio se pueden distribuir de modo proporcional a los m² usados, gastos producidos o plantilla del equipo de mantenimiento, respecto a la totalidad de los mismos conceptos para la empresa.

Es de vital importancia tener presente que aunque el mantenimiento sea subcontratado en su totalidad, esto no exime a la empresa principal de sus obligaciones con respecto al bien principal que se mantiene y a los servicios que éste da. Dicho de otro modo, empresa contratista (o empresa principal) que hace el contrato a una firma externa a la fábrica, y la empresa subcontratada son, normalmente, copartícipes en las responsabilidades ocurridas por problemas identificados como deficiencias claramente corregibles con los servicios de mantenimiento. Esto es importante en empresas de servicios ya que el fallo del sistema de mantenimiento por imprevisión, falta de medios, organización inadecuada o causas de fácil corrección a criterio judicial, en los tiempos actuales, no exime al contratista principal ni al propio servicio de mantenimiento subcontratado de las responsabilidades objeto de su deficiencia.

En este sentido, existen ejemplos en la legislación española de responsabilidad compartida por ambas empresas, la principal o contratista y la contratada, ante un accidente o negligencia de los servicios externalizados. Con ello queda establecido que la responsabilidad correspondiente al dueño de las instalaciones no se externaliza ni se cede en contrato. Por tanto, la labor de vigilancia y seguimiento del sistema de mantenimiento externo es una obligación del contratista principal.

6.2 INDICADORES DE GESTIÓN

La asignación de gastos requiere un esfuerzo administrativo y un sistema de asignación de costes por departamentos en el que los directos no se discuten y los indirectos (aquellos

generales de la empresa) hay que distribuirlos con algún criterio pactado internamente. No es muy relevante su distribución dado que son costes internos pero si su permanencia en el tiempo dentro de la misma partida para no desvirtuar la información anual o periódica.

Es habitual la medida de la eficacia del servicio de mantenimiento a través de indicadores de gestión. A continuación se suministran algunos de ellos, pero es importante dejar claro que lo importante no es su interpretación directa como valor, sino su evolución relativa con datos de otros años. Así, se ha de tener presente que la ejecución de reformas de importancia en la compañía altera el histórico y con él los ratios. Hecho que también sucede por un aumento de carga al mantenimiento o por asumir conceptos que normalmente no tenía asignados como puede ser instalación de líneas nuevas de producción, pequeñas obras de modificados, etc., que se realizan de forma puntual.

Los ratios son algo específico de cada compañía y además no a todas las industrias le interesa controlar los mismos aspectos de su proceso. Es por ello que se exponen a continuación algunos de los más populares, de entre los que cada profesional del mantenimiento debe escoger aquellos que se le sean más significativos.

La nomenclatura usada pretende facilitar la identificación del concepto implícito en el valor, dado que ésta no se encuentra estandarizada. Para este fin, se usa la primera letra o sílaba del concepto implícito en la variable. De este modo:

T_{prev} : Tiempo total en el periodo (usualmente un año) de paradas por actuaciones de mantenimiento preventivo.

H_{prev} : Horas dedicadas por el departamento de mantenimiento a trabajos de preventivo, (aquellas que constan en las gamas de preventivo).

T_{corr} : Tiempo total de paradas por actuaciones de mantenimiento correctivo.

H_{corr} : Horas dedicadas por el servicio de mantenimiento a trabajos de correctivo, aquellas que constan en las Órdenes de Trabajo².

² Una orden de trabajo (OT), también denominada parte de trabajo (PT) u hoja de actividad del día, es un documento que se entrega al operario o realiza el trabajador por cada actividad. Normalmente se utiliza un formato estándar de la empresa el cual está íntimamente ligado a su sistema informático. Suele incluir: departamento en el que actúa; equipo indicando su referencia de inventario; trabajo realizado; tiempo dedicado; piezas salidas de almacén; repuestos sustituidos; información complementaria si procede del tipo: operación realizada, queda pendiente... etc.; así como una relación de incidencias. Estas órdenes se cierran por administración, cargando los costes individuales por concepto. Es un documento base del servicio de mantenimiento para poder realizar estudios y seguimientos de cualquier tipo. Todo operario que

H_{tot_mant} : Total de horas disponible por el servicio de mantenimiento, algunos manuales utilizan el valor de horas totales útiles, pero este valor no es tan constante a lo largo del tiempo, genera más distorsión que el aquí indicado.

H_{teor_prod} : Horas teóricas de producción, corresponde al producto de los turnos por las horas útiles.

Ratios relacionado con la calidad de la programación.

Se mide la interferencia del mantenimiento en la producción:

$$E1_calidad = (T_{prev} + T_{corr}) / H_{teor_prod}$$

Ratios relacionados con la utilización de los recursos propios del sistema de mantenimiento.

Mide la utilización de los recursos (horas) en trabajo real de mantenimiento, la diferencia a 1 son las horas no productivas (oficinas, tiempos muertos, descansos, tiempos improductivos por esperas, no existencia de equipos averiados al comienzo del turno (ver teoría de colas), etc.

$$E2 = (H_{prev} + H_{corr}) / H_{tot}$$

Ratios relacionados con la modificación del servicio

$E3-1 = H_{prev}/H_{corr}$ este ratio no es lineal en su definición

$$E3-2 = H_{prev}/H_{total}$$

$$E3-3 = H_{corr}/H_{total}$$

Los ratios anteriores se pueden duplicar considerando los costes en lugar de las horas y así se tendría:

$E_costes3-3 = C_{corr}/C_{total}$; y similar para el resto.

Un ratio de gestión general, útil para valorar la importancia del mantenimiento es el que valora el coste de las paradas por manteniendo respecto al valor de la producción, del tipo:

$$E_G1 = C_{mant}/C_{prod}$$

$C_{mant} = \text{Costes totales de mant.} + \text{Costes paradas de producción (prev + corr)}$

$C_{prod} = \text{Producción valorada a coste industrial}$

sale del departamento de mantenimiento a hacer un servicio, lleva uno de ellos. Lo aconsejable es un parte por persona, con lo que aunque se trabaje en equipo cada operario debe rellenar y firmar su OT.

En general el número y la diversidad de los ratios posibles depende de la empresa pero estos no deben ser demasiados³. Lo lógico es fijar objetivos por periodos (anuales) y seguirlos con uno o dos ratios.

Otros índices de gestión tecnológica, tipo MTBF, MTTF, tasa media de averías, etc. y que están relacionados con procesos específicos se trataron en el capítulo correspondiente. Como referencia se aporta una tabla 6.1 (Borda, 1990) con indicadores y valores sobre algunos ratios de gestión correspondiente al servicio de mantenimiento.

Tabla 6.1 Valores habituales de los ratios de gestión (Borda, 1990).

Indicador / Ratio	Concepto	Valor
$H_{\text{paro}}/H_{\text{teo_prod}}$	Paradas en producción (h)/Horas teóricas de producción realizadas	1 – 3%
$C_{\text{mant}}/C_{\text{prod}}$	Costes de mantenimiento / Costes de producción	5 – 6%
C_{mant}/IB	Coste de mantenimiento/Valor inmovilizado bruto	4 – 5%
$C_{\text{subcont}}/C_{\text{mant}}$	Costes subcontratas/Costes totales de mantenimiento (*)	20 – 40%
$Per_{\text{mant}}/Per_{\text{total}}$	Personal mantenimiento/ Personal total	10%
$Ing_{\text{tec_mant}}/ Per_{\text{mant}}$	Técnicos de mantenimiento/ Personal mantenimiento	10%
$C_{\text{prev}}/C_{\text{mant}}$	Costes preventivo/Costes totales mantenimiento	20%
IB/Per_{mant}	Valor inmovilizado bruto/Plantilla mantenimiento	360.000€

³ Piénsese que unos pocos valores: producto interior bruto, renta media anual, tasa de paro, etc. permiten definir con bastante acierto el estado de la economía de todo un país.

(*) Este valor en empresas muy tecnológicas es muy bajo (como corresponde a una vigilancia propia de los aspectos tecnológicos y de competencia) y aumenta en empresas de tipo general. Actualmente crece llegando a ser del 90-100% en empresas de servicios, lo que se vulgariza como privatización del servicio de mantenimiento.

6.3 GRADO ÓPTIMO DE MANTENIMIENTO PREVENTIVO

Una cierta componente de mantenimiento preventivo es obligada en todos los equipos sometidos a algún tipo de movimiento, calor, electricidad, y en general a energías y roces que producen desgaste, ya que de lo contrario la vida útil del equipo es muy breve. Lo que se comenta a continuación es la mayor o menor importancia del mantenimiento preventivo (actuar antes de que se produzca un fallo) frente al correctivo (actuar después de que se produzca el fallo).

El tipo de mantenimiento es de nivel superior a medida que las empresas son tecnológicamente más complejas y tecnificadas (sofisticadas). La calidad o necesidad del tipo de mantenimiento que requiere una empresa no condiciona cómo se debe hacer o con qué medios se debe acometer (propios, externos o mixtos), pues esto forma parte de otras consideraciones.

El tamaño de las empresas es una variable importante para la relación de los recursos dedicados al mantenimiento correctivo respecto a igual concepto pero de mantenimiento preventivo. La elección de más o menos correctivo o más o menos preventivo / predictivo va ligado al tamaño empresarial en primera aproximación, y a la importancia de los elementos o equipos⁴, y esta relación varía con el tiempo y los objetivos generales de las empresas.

⁴ Como ejemplo de la importancia de un equipo que requiera trato preferente en lo referente al funcionamiento exigiendo mantenimiento preventivo, se puede indicar la tuneladora TBM pues si se para ésta se produce el paro de todo un túnel. En las naves de molienda existe, normalmente un solo molino principal de gran capacidad que alimenta al resto, si tiene una avería que provoca la parada, se para todo el taller de molienda. A estos equipos se les suele hacer el preventivo en periodos fuera de producción y en coincidencia con paradas de producción programadas.

No obstante algunas empresas en determinados momentos prefieren el mantenimiento correctivo, especialmente en empresas de tamaño mediano pequeño o aquellas que permiten, ampliando jornada después de la reparación, cumplir con los plazos de entrega.

En la figura 6.1 se puede observar la relación existente entre los costes de reparación y los costes de mantenimiento preventivo. La suma de las dos curvas, permite obtener la de coste total de reparaciones. Interesa, en teoría, estar en torno al punto mínimo de la curva suma; es decir en el entorno de la intersección de las dos curvas (costes totales mínimos). Las empresas de servicio, donde la atención y la imagen tiene un valor añadido, prefieren operar en la zona más a la derecha: más preventivo y menor riesgo de avería; mientras que las empresas con procesos redundantes operan más a la izquierda: menos gastos en personal y medios y posibilidad de un ligero aumento de averías (no hay problemas de imagen).

Estas gráficas de general distribución en los manuales de gestión del mantenimiento son realmente de elaboración compleja. Exigen una empresa muy mentalizada desde los puestos directivos, un sistema de control de gastos departamental de alta precisión⁵, con asignación de gastos y contabilidad analítica, y una dedicación al conocimiento de la distribución de costes muy exhaustiva. La información es imprescindible para realizar cualquier trabajo de mejora, y las técnicas de análisis de datos facilitan la toma de decisiones. Actualmente se dispone de abundante información que es manejable con la facilidad que provee la informática y con los programas de control existentes considerándose que esta tendencia, de aumento de la información disponible, será mayor con el paso del tiempo. El análisis de la información será para el mantenimiento, será con ello, una rama que adquiere más importancia cada vez.

⁵ Sistema de contabilidad analítica con asignación y distribución de gasto por departamento y servicio, incluso por persona, para poder identificar los costes de una acción determinada de mantenimiento y su asignación al departamento receptor.

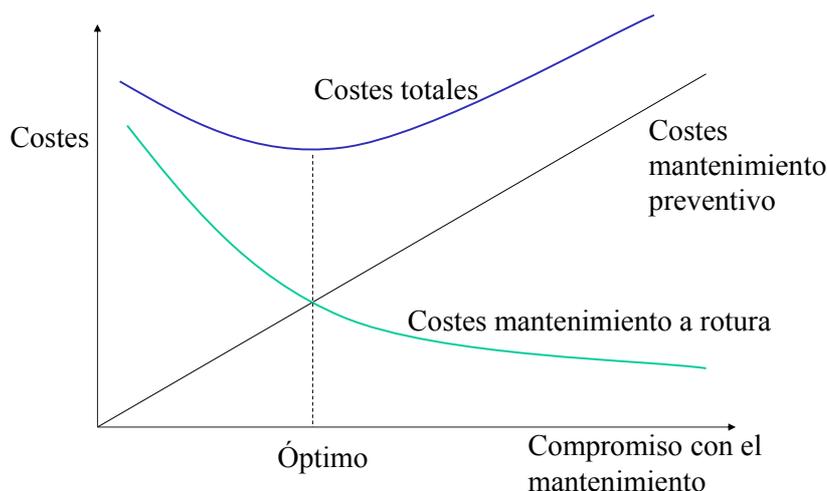


Figura 6.1 Costes por mantenimiento a rotura, por mantenimiento preventivo y totales en función del grado de actividad en la tarea de mantenimiento.

La implantación de modernos sistemas de recogida de información interna⁶, y de la informática a todos los niveles, así como equipos cada vez más tecnológicos, facilita esta labor cada vez es más necesaria para la competitividad industrial, pero en la que el éxito no siempre se alcanza.

Ejercicio 6.1 En una empresa cada avería tiene un coste medio histórico de 500€. El mantenimiento preventivo se contrata a 250€/mes y limitará las roturas (se pone la condición en contrato⁷) a una media de 1 al mes. El histórico de averías se presenta en la tabla. ¿Decidir entre seguir operando hasta que se produzca la rotura o contratar un servicio de mantenimiento preventivo?

Nº Roturas (n)	Nº de meses que ha ocurrido (n) roturas
0	2

⁶ Partes de trabajo informatizados, codificación de equipos y tareas realizadas, estandarización de procesos, codificación de almacenes de repuestos con lectura de código por pistola láser, y en general las técnicas de control disponibles en cualquier otro departamento, facilitan la labor técnica de seguimiento, disminuyen errores en la información, y facilitan la realización de trabajos y estudios para optimizar los servicios, entre ellos los de mantenimiento.

⁷ El programa de mantenimiento preventivo realmente reduce las averías pero si se produce más de una rotura al mes el servicio contratado corre con los gastos.

1	6
2	9
3	4
4	1
Total	22

Solución:

Se comienza calculando la tabla de frecuencias acumuladas.

Nº Roturas (n)	Nº de meses que ha ocurrido n roturas	Probabilidad de ocurrencia, al mes, de las (n) roturas	Valor esperado de las roturas producidas
0	2	$2/22 = 0,091$	$0 \cdot 0,091 = 0,000$
1	6	$6/22 = 0,273$	$1 \cdot 0,273 = 0,273$
2	9	$9/22 = 0,409$	$2 \cdot 0,409 = 0,818$
3	4	$4/22 = 0,182$	$3 \cdot 0,182 = 0,546$
4	1	$1/22 = 0,045$	0,180
Total	22	$\Sigma = 1,00$	$\Sigma = 1,817$

$$\text{Coste por averías} = 1,817 \text{ avería/mes} \cdot 500 \text{ €/avería} = 908,5 \text{ €/mes}$$

Coste con mantenimiento preventivo:

$$C_{\text{total}} = 250 \text{ €} + 1 \text{ avería/mes} \cdot 500 \text{ €/avería} = 750 \text{ €/mes}$$

Solución: Interesa hacer el contrato de mantenimiento preventivo.

Nótese que la solución se fundamenta en una tabla de fallos histórica que se ha obtenido antes de iniciar o hacer ningún sistema preventivo (ninguna actuación sobre los equipos). La premisa de cálculo ha sido que después de una intervención de mantenimiento preventivo se mantienen las condiciones de fallo que han sido obtenidas, como ley de fallos, de un sistema previo sin preventivo.

Ejercicio 6.2 Las roturas de equipamiento en una mina durante los últimos 24 meses han sido registradas en la tabla siguiente:

Número de fallos/averías	Número de meses en que ocurre este nivel de fallos
--------------------------	--

0	3
1	9
2	7
3	5
Total	24

Cada rotura cuesta, por reparación, una media de 1500 €. El mantenimiento preventivo cuesta 600 € por mes y garantiza las roturas a 1,5 al mes. Determinar:

- La conveniencia de efectuar mantenimiento preventivo.
- El número máximo de roturas que debería garantizar el sistema de mantenimiento preventivo para que interesase contratar este servicio.

Solución: Se comienza calculando la tabla de frecuencias acumuladas siguiente:

Número de fallos/averías	Número de meses en que ocurre este nivel de fallos	Frecuencia	Frecuencia acumulada
0	3	$3/24 = 0,125$	0,125
1	9	$9/24 = 0,375$	0,500
2	7	$7/24 = 0,292$	0,792
3	5	$5/24 = 0,208$	1,000
Total	24	1,00	***

- Inicialmente se calcula el número esperado de fallos o tasa de fallos por periodo (Unidad de referencia T=mes):

$$\text{Numero esperado de fallos} = \sum (\text{Numero de fallos} \cdot \text{frecuencia de fallos})$$

$$N = \sum N(i) \cdot f(i)$$

$$\begin{aligned} \text{Numero esperado de fallos} &= 0 \cdot 0.125 + 1 \cdot 0.375 + 2 \cdot 0.292 + 3 \cdot 0.208 \\ &= 1,583 \text{ fallos/mes} \end{aligned}$$

Coste esperado de fallas = Nº de fallos · coste por fallo = $1.583 \cdot 1500 = 2375\text{€}$

Coste del servicio con mantenimiento preven. = precio contrato + rotura al mes
 $= 600 + 1,5 \cdot 1500 = 2850 \text{ €}$

Bajo estas condiciones el mantenimiento preventivo contratado es más caro.

b) El equilibrio en costes se da para

$$600 + X \cdot 1500 = 2375 \rightarrow X = (2375 - 600) / 1500 = 1,183$$

La garantía debe asegurar menos de 1,18 averías mensuales

Reflexión sobre contratos de mantenimiento.

Los contratos de mantenimiento incluyen cláusulas de intenciones, de colaboración, generales, jurídicas, y otras cuantificables o medibles. En el servicio preventivo de mantenimiento son de especial relevancia aquellas basadas en valores medibles: tasa de fallos, coste producido, horas de parada improductivas, etc.; si bien cuando hay discrepancia entre partes se recurre a las cláusulas generales del contrato.

Cuando se contratan mantenimientos preventivos con garantía de número de averías esperadas (tasas de fallos), el sistema debe ser especialmente colaborativo entre las partes, al ser los valores de ocurrencia información de la empresa. Debe quedar bien claro⁸ que los fallos tienen varias vertientes: propias del funcionamiento del equipo, debidas a su uso incorrecto o consecuencia del inadecuado sistema de atención por parte del servicio de mantenimiento.

Las tasas de fallos de los equipos referenciadas en los contratos se deben medir antes y después de la misma forma, lo que implica emplear al menos periodos equivalentes de contrato (normalmente un año) y hacer un balance total de regularización en este periodo. Además, no es formalmente correcto en un contrato de servicio de mantenimiento preventivo garantizado, a por ejemplo 1 avería al mes, que cuando se producen tres averías

⁸ El ingeniero responsable puede estar tanto en la empresa contratante como en la que debe realizar el servicio, por lo que el problema se debe estudiar desde las dos vertientes. De forma natural el estudiante suele ponerse del lado del contratista bajo la premisa de que el que paga exige, pero éste no es un criterio técnico ni garantiza tener la razón.

en un mes éstas se facturen a la empresa de mantenimiento, mientras que en el mes que no se produzca ninguna no se le efectúa compensación alguna. En este caso se estaría ante una descompensación formal a favor de una de las partes.

6.4 FRECUENCIA DEL MANTENIMIENTO PREVENTIVO

El mantenimiento preventivo disminuye, en principio, los costes de reparación (entendiendo como hemos venido haciendo de forma general en el texto, que los costes de reparación son los directos más los inducidos por la parada). Por tanto, interesa disponer de un criterio o método que permita identificar, para un caso concreto del que se dispone de información histórica de la tasa de fallos, hasta donde es correcto invertir en el mantenimiento preventivo. Esto matemáticamente queda expresado por el mínimo de la función de *“coste de correctivo más preventivo”*.

Ha de tenerse presente que pueden existir otros intereses en el modelo a estudiar, pues no siempre el criterio económico es el más relevante. Este hecho adquiere especial importancia cuando la imagen del servicio o la calidad pueden verse resentidas por una mala atención llevando parejas la fabricación de unidades no válidas o la pérdida de clientes. La seguridad o calidad puede ser, por tanto, un criterio que condicione también el diseño de los servicios de mantenimiento.

Para el planteamiento de un modelo matemático se consideran conocidas las probabilidades de que una máquina falle en un tiempo determinado y los costes de reparación cuando falla el equipo, así como los costes del mantenimiento preventivo cada vez que se realiza una operación de ese tipo.

En este tipo de estudio, se conoce la tabla de probabilidades de ocurrencia de averías entre periodos de mantenimiento preventivo. Cuando se realiza una operación de mantenimiento preventivo se considera que se restituyen las máquinas al origen de tiempos en lo referente a probabilidad de fallo.

Las principales variables son:

i: Números de periodos que transcurren entre operaciones de mantenimiento preventivo

$P(x=i)$: Probabilidad de ocurrencia de fallo de la máquina (x) en el periodo (i).

$P(x \leq i)$: Probabilidad de ocurrencia de fallo de la máquina (x) desde el periodo (1) hasta el periodo (i) inclusive.

El planteamiento particularizando es el siguiente. Se dispone de (es conocido por el histórico de funcionamiento) la distribución de probabilidades de ocurrencia de una avería, el fallo de la máquina (Y), a lo largo de un número de tiempos iguales, de tal forma que $T_1=T_2=\dots=T_i=\dots=T_n$ (tabla 6.2). Se desea conocer en qué periodo (x), comprendido entre $T=1$ y $T=n$, los extremos incluidos, es más rentable realiza un determinado mantenimiento preventivo conociendo los costes de este servicio y los correspondientes al supuesto de una avería.

El periodo de tiempo es el que interese para el estudio y puede modificarse para T, T/2, 2·T u otro, en base a los datos disponibles para el periodo, este se puede medir en horas, semanas, meses, 1500 horas de funcionamiento y en general aquel que interese, pero que se debe corresponder con la información disponible o derivada de forma sencilla de esta.

Dado que las leyes de probabilidad de fallo no son lineales, el tiempo afecta notablemente a esta función, no es recomendable tener un histórico por un periodo de tiempo T y hacer el estudio para valores muy distintos de este periodo. En general se aconseja respetar el intervalo de tiempo que coincide con la información disponible.

Tabla 6.2 Datos históricos.

Número de periodos de tiempo (T) entre mantenimiento preventivo, índice i	Probabilidad de que una maquina funcione mal, en el periodo i, $P(x=i)$	Probabilidad de que una maquina funcione mal, desde $T=1$ hasta $T=i$, $P(x \leq i)$, ambos (1,i) inclusive
1	0.05	0,05
2	0.2	0,05+0,2
3	0.3	0,05+0,2+0,3
....
n	0,Y	0,05+0,2+0,3+...+0,Y=1
Total	1,0	***

Se considera que una operación de preventivo restituye las máquinas al origen de tiempos en lo referente a la ley o secuencia de probabilidad de ocurrencia de fallos. Una

máquina sometida a un proceso de preventivo en el periodo (i) inicia el ciclo de probabilidades de ocurrencia de fallo, en el periodo (i+1) y la probabilidad de ocurrencia de fallo, para una máquina reparada en el periodo (i) será para el periodo (i+1) de:

$$P(x=i+1) = P(x=1), \text{ para toda máquina actualizada en el periodo (i)}$$

Una máquina puede necesitar ser reparada más de una vez cuando el número de periodos de tiempo aumentan. Así si el nivel medio de fallos es de uno al trimestre y se estudian seis trimestres lo normal es que el mismo equipo falle, de media, seis veces en el periodo estudiado.

Una máquina reparada en el periodo i, inicia su ciclo de vida como si fuera nueva, luego en el periodo (i+1) tiene una nueva probabilidad de avería que será la primera línea de la tabla anterior y que corresponde al periodo 1, $P(x \leq 1)$, y en el periodo (i+2) tendrá la probabilidad de avería $P(x \leq 2)$. De este modo, el número total de máquinas que fallan (B_1) cuando el mantenimiento tiene lugar en el periodo (supongamos un mes, trimestre o periodo considerado) es igual al producto del número de máquinas estudiadas (N) por su probabilidad de fallo en el periodo, en lo que sigue y por simplicidad de la exposición consideramos que el periodo es $T=1$ mes, luego:

$$B_1 = N \cdot p_1$$

Si el mantenimiento tiene lugar cada dos meses, el número de averías es igual al número de máquinas que se espera que se averíen durante los dos primeros meses, $N(p_1+p_2)$, más el número de ellas reparadas durante el primer mes y que se estropearon el segundo mes, $B_1 p_1$; ($B_1 = n^\circ$ de máquinas averiadas el mes 1 y que fueron reparadas, $p_1 =$ probabilidad de avería en el mes 1) con lo que la suma de ambos términos será, para las averías del mes dos:

$$B_2 = N(p_1+p_2) + B_1 p_1$$

Para un ciclo de mantenimiento de tres meses, el número esperado de averías es el de las que se averiarían a los tres meses $N(p_1+p_2+p_3)$, más el número de ellas que se repararon el primer mes y se estropearon el segundo, $B_1 p_2$, más las que siendo reparadas en el segundo mes se estropearon de nuevo en el tercero $B_2 p_1$:

$$B_2 = N(p_1+p_2 +p_3) + B_1 p_2 + B_2 p_1$$

Luego, el número de máquinas averiadas, y que se han reparado, desde el inicio hasta el instante $i=n$, en que se realiza el mantenimiento preventivo, viene dado por la expresión:

$$B_n = N \sum P_n n + B_{(n-1)} \cdot p_1 + B_{(n-2)} \cdot p_2 + B_{(n-3)} \cdot p_3 + \dots + B_1 \cdot p_{(n-1)}$$

O con notación más compacta:

$$B_n = N \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^{n-1} B_i \cdot P_{(n-i)}$$

Donde:

B_n : nº esperado de roturas por cada política de mantenimiento (cada 1, 2, 3, ..., n meses).

P_n : Probabilidad de que una rotura tenga lugar entre el mantenimiento preventivo en cada periodo n.

n: Número de meses entre actuaciones de mantenimiento preventivo.

N: nº de máquinas.

El coste total del proceso, correspondiente a realizar el mantenimiento preventivo en el ciclo $i=n$ corresponde a:

$$C_i(i=n) = B_n \cdot C_a + C_p/n$$

Donde:

C_a : Coste de reparación por avería cuando se llega al fallo

C_p : Coste de una operación de mantenimiento preventivo

Si ahora se calcula el coste para todas las opciones posibles de realizar el mantenimiento preventivo en el periodo 1, ó realizarlo en el periodo 2, etc.: $C_i(i=1, 2, \dots, n)$, sobre él se identifica el valor de i que hace mínimo el sistema combinado de reparación más preventivo. En los ejercicios siguientes se calculan y realizan todas las fases con sus correspondientes aclaraciones.

Ejercicio 6.3 Se calcula en 5000 € el coste del mantenimiento preventivo de un grupo de 5 máquinas. El coste de una parada por avería más la reparación correspondiente es de 7000 €. Se dispone de la información histórica de averías en fábrica dada en la tabla siguiente:

Periodos entre actuaciones de mantenimiento preventivo	Número esperado de fallos entre revisiones
1	0.15
2	0.35
3	0.50

¿Con qué frecuencia debe realizarse el mantenimiento preventivo para minimizar los costes totales?

Solución:

Se determina el número esperado de roturas para cada política de mantenimiento mediante la expresión.

$$B_n = N \sum P_n n + B_{(n-1)} \cdot p_1 + B_{(n-2)} \cdot p_2 + B_{(n-3)} \cdot p_3 + \dots + B_1 \cdot p_{(n-1)}$$

Dónde:

B_n = nº esperado de roturas por cada política de mantenimiento. (1,2,...,n meses).

P_n = Probabilidad de que una rotura tenga lugar entre mantenimiento preventivo en cada periodo n.

B_n : nº esperado de roturas, fallos, para cada política de mantenimiento.

P_n : Probabilidad de la rotura (sucede entre inspecciones de mantenimiento).

N: Número de máquinas.

Periodo T=1; $B_1 = 5 \cdot 0,15 = 0,750$

Periodo T=2; $B_2 = 5 \cdot (0,15 + 0,35) + 0,750 \cdot (0,15) = 2,613$

Periodo T=3; $B_3 = 5 \cdot (0,15 + 0,35 + 0,50) + 2,613 \cdot (0,15) + 0,750 \cdot (0,15 + 0,35) = 5,767$

A continuación se aplica la fórmula: $B_n = N_{máquinas} \cdot P_{fallo} \cdot Coste_{fallo} + Coste_{preventivo}$, en el periodo, y el nº esperado de fallos por periodo se calcula con las expresiones ya indicadas anteriormente, donde las máquinas ya reparadas en un periodo dado inician un nuevo ciclo.

Nº de Periodo	Nº esperado de fallos	Nº esperado de fallos por periodo	Coste del número esperado de fallos por mes (€)	Coste del mant. preventivo por mes (€)	Costes totales por mes (€)
1	0,750	$0,750/1=0,750$	$0,750 \cdot 7000=5250$	$8000/1 = 8000$	$5250+8000=13250$
2	2,613	$2,613/2=1,307$	$1,307 \cdot 7000=9149$	$8000/2 = 4000$	$9149+4000=13149$
3	5,767	$5,767/3=1,922$	$1,922 \cdot 7000=13454$	$8000/3=2667$	$13454+2667=16121$

La política de intervención programada cada $T=2$ periodos da el menor coste (13149 €), pero la decisión entre $T=1$ periodo y $T=2$ periodos tiene un margen de duda cuya base es la fiabilidad de los datos de frecuencia, si queda claramente descartada la opción de $T=3$ periodos. El periodo es una unidad temporal (semana, mes, 1500 h, trimestre, año, etc. tal como se ha comentado anteriormente)

Ejercicio 6.4 Se dispone de la información histórica dada de la probabilidad de fallo para distintas políticas de mantenimiento. El periodo de tiempo se mide en semanas y corresponden a los tiempos entre dos operaciones de mantenimiento preventivo. El coste por semana del mantenimiento preventivo se estima en 3000 €, y el coste por avería en 2000 €.

Semanas entre mant. prev.	Probabilidad de fallo $P(x=i)$
1	0,05
2	0,20
3	0,35
4	0,40

Determinar:

- El número esperado de roturas para cada política de mantenimiento.
- Costes totales semanales de cada una de ellas.
- Política óptima de mantenimiento preventivo.

Solución:

a) Se determina el número esperado de roturas para cada política de mantenimiento mediante la expresión.

$$B_n = N \sum P_n n + B_{(n-1)} \cdot p_1 + B_{(n-2)} \cdot p_2 + B_{(n-3)} \cdot p_3 + \dots + B_1 \cdot p_{(n-1)}$$

Dónde:

B_n = nº esperado de roturas por cada política de mantenimiento. (1,2,3 ó 4 semanas)

P_n = Probabilidad de que una rotura tenga lugar entre mantenimiento preventivo en cada periodo n.

n = Número de semanas entre actuaciones de mantenimiento preventivo

N = nº de máquinas.

Número esperado de averías en T = n semanas

T = 1 semana; $B_1 = 8 \cdot 0,05 = 0,40$

T = 2 semanas; $B_2 = 8 \cdot (0,05 + 0,20) + 0,40 \cdot (0,05) = 2,02$

T = 3 semanas; $B_3 = 8 \cdot (0,05 + 0,20 + 0,35) + 2,02 \cdot (0,05) + 0,40 \cdot (0,05 + 0,20) = 5,001$

T = 4 semanas; $B_4 = 8 \cdot (1) + 5,001 \cdot (0,05) + 2,02 \cdot (0,05 + 0,20) + 0,40 \cdot (0,05 + 0,20 + 0,35) = 8,995$

b) A continuación se calcula el coste total para cada mantenimiento.

En el ejemplo se considera que para N=8 equipos, el mantenimiento preventivo cuesta, A=3000 € y la reparación de una avería, B= 2000 €.

Política de mto, cada T_i semanas	Nº esperado de fallos entre revisiones	Nº esperado de fallos por semana	Coste del número esperado de paradas por semana (€)	Coste del mantenimiento preventivo por semana (€)	Costes totales por semana (€)
1	0,40	$0,40/1=0,40$	$0,40 \cdot 2000=800$	3000	3800
2	2,02	$2,02/2=1,01$	$1,01 \cdot 2000=2020$	1500	3520
3	5,001	$5,001/3=1,667$	$1,667 \cdot 2000=3334$	1000	3204
4	8,995	$8,995/4=2,249$	$2,249 \cdot 2000=4498$	750	5248

c) La opción en costes más económica corresponde a un periodo de $T=3$ semanas. Realizar el mantenimiento preventivo cada tres semanas.

Ejercicio 6.5 Se considera el periodo de referencia $T=1$ mes, y el total de máquinas de la empresa $N=20$. El coste del mantenimiento preventivo es de 15000 € mensuales, y la reparación de la avería cuando se produce tiene un coste de 7000 € por unidad. El historial de mantenimiento de las máquinas nos da la tasa de fallos de la tabla siguiente:

Meses entre mantenimiento preventivo (i)	Probabilidad de avería en el periodo $P(x=i)$
1	0.15
2	0.20
3	0.30
4	0.35
Total	1,00

Determinar la frecuencia a la que debe realizarse el mantenimiento preventivo para minimizar los costes.

Solución:

Meses entre mantenimiento preventivo (i)	Probabilidad de avería en el periodo $P(x=i)$	Probabilidad acumulada $P(x \leq i)$
1	0.15	0,15
2	0.20	0,35
3	0.30	0,65
4	0.35	1,00

Total	1,00	***
-------	------	-----

La expresión general del número de fallos esperado es la siguiente:

$$B_n = N \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^{n-1} B_i \cdot P_{(n-i)}$$

$$B_1 = N \cdot p_1 = 20 \cdot 0,15 = 3,00$$

$$B_2 = N \cdot (p_1 + p_2) + B_1 \cdot p_1 = 20 \cdot (0,15 + 0,20) + 3 \cdot 0,15 = 7,45$$

$$B_3 = N \cdot (p_1 + p_2 + p_3) + B_1 \cdot p_2 + B_2 \cdot p_1 = 14,72$$

$$B_3 = 20 \cdot (0,15 + 0,20 + 0,30) + 3 \cdot 0,20 + 7,45 \cdot 0,15 = 14,72$$

$$B_4 = N \cdot (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) + B_3 \cdot p_1 + B_2 \cdot p_2 + B_1 \cdot p_3 = 24,60$$

$$B_4 = 20 \cdot (0,15 + 0,20 + 0,30 + 0,35) + 14,72 \cdot 0,15 + 7,45 \cdot 0,20 + 3 \cdot 0,3 = 24,60$$

Los costes para cada periodo de mantenimiento son:

Nº de Periodo	Nº Esperado de averías	Nº esperado de averías por mes	Coste esperado por averías por mes (€)	Coste por mto. preventivo por mes (€)	Coste total por mes (€)
1	3,00	3,00/1=3,00	3,00 · 7000=2100 0	15000/1=1500 00	21000+15000 = 36.000
2	7,45	7,45/2=3,73	3,73 · 7000=2610 0	15000/2=7500 0	26100+7500= 33.600
3	14,72	14,72/3=4,9 1	4,91 · 7000=3437 0	15000/3=5000 0	39.370
4	24,60	24,60/4=6,1 5	6,15 · 7000=4305 0	3750	46.800

La opción más económica, en costes totales, es para $i=2$, cada dos meses. Por lo tanto la recomendación, con la información disponible, sería contratar el mantenimiento preventivo para su realización cada dos meses y tener un coste estimado para el funcionamiento de la totalidad de las máquinas de 33.600 € mensuales.

6.5 CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO, MODELO WILSON

Dentro de los costes asociados a toda empresa y dentro de ésta al servicio de mantenimiento, están los correspondientes a la adquisición de aquellos elementos necesarios para desarrollar el trabajo y que son fabricados por otras compañías. Dado el concepto de avería repetitiva o producida en el tiempo con acuerdo a un modelo determinado, interesa conocer cuál es la forma, cantidad, y el tiempo adecuado de pedido que hace este servicio más económico.

El modelo siguiente (modelo de Wilson) es el más extendido y de amplio uso para determinar los límites de seguridad a partir del cual es necesario pedir repuestos para que el trabajo no tenga lagunas de producción en el tiempo (paradas) por el motivo de no disponer de un recambio o repuesto en el tiempo debido. Se indica igualmente que este modelo se aplica a medida que las industrias adquieren un determinado tamaño o volumen de adquisiciones y que éstas tienen un concepto de repetición del pedido que interesa optimizar en su conjunto.

El modelo de la Cantidad Económica de Pedido (Ingés: Economic Order Quantity, EOQ), es el más básico para el control de inventarios en almacenes. El modelo fue inicialmente planteado por el ingeniero de la Westinghouse Electric Corporation, F. Whitman Harris en 1913 y popularizado por el consultor R.H. Wilson en varios trabajos publicados a partir de 1934. El modelo es ampliamente utilizado para la gestión de inventarios, almacenes, compras en general en las industrias, y es muy aceptable para el caso particular de los repuestos de mantenimiento.

Este sistema considera una demanda conocida y constante de producto, así como un determinado coste de mantener el inventario, y de ordenar el pedido, y a partir de ellos da como salida la cantidad óptima de unidades a pedir para minimizar los costes de tener un bien almacenado hasta su uso.

El modelo se basa en encontrar el punto de equilibrio en el cual los costes de adquisición de un bien y los costes por mantenerlo almacenado son iguales. Además se hacen las siguientes asunciones:

1. La demanda, que se considera constante e independiente⁹.
2. El tiempo de reabastecimiento, del proveedor, es constante.
3. El almacén de repuestos se reabastece de forma instantánea al llegar a cero. En el servicio de mantenimiento es normal tener un límite de stock mínimo, sin esperar a que el valor llegue a cero, a partir del cual se hace el pedido para aquellos elementos de uso más regular. Se puede determinar como “stock mínimo de petición de repuestos”.
4. No se tienen en cuenta las rebajas en el precio que suelen darse cuando los pedidos son de gran volumen.
5. Los costes totales son la suma de los costes de adquisición, los de mantener el inventario (almacén de repuestos), que son proporcionales al volumen existente en almacén, y los costes de ordenar un pedido (costes internos de fábrica), que son fijos por cada orden de compra que se efectúa.

Es decir:

Coste total = coste compra + coste mantener inventario + coste ordenar

Cada uno de los términos de la expresión anterior se define a continuación.

- **Coste de comprar:** Se obtiene como el producto del coste unitario de compra por la demanda anual. Esto es: $C_c \cdot D_a$.
- **Coste de ordenar:** Es el coste de hacer las órdenes de pedido. Cada orden tienen un coste fijo C_f siendo requerida D_a/Q veces por año. Con lo que: $C_{fp} \cdot D_a/Q$.
- **Coste de mantener el inventario:** Como la cantidad de inventario promedio es $Q/2$, su coste será: $C_u \cdot Q/2$; ($C_u = i \cdot C_c$).

De modo que finalmente, sustituyendo variables en la función inicial, se obtiene:

$$TCI = C_c \cdot D_a + C_{fp} \cdot \frac{D_a}{Q} + C_u \cdot \frac{Q}{2}$$

⁹ Aquí el concepto independiente se refiere a que el consumo por uso no depende de cómo se compre el artículo, siendo únicamente necesario que no falten unidades en el proceso industrial o en almacenes de mantenimiento.

Siendo las variables:

TCI = Coste total del inventario (Inglés: Total Cost Inventory) (€).

Q = Cantidad de pedido (número de unidades).

C_c = Coste de compra unitario de producto (€).

C_{fp} = Coste fijo de realizar un pedido (€).

D_a = Demanda anual del producto (número de unidades). La demanda anual puede expresarse como una función del número de averías mediante el producto del número de equipos (N) por el del periodo considerado T (horas de trabajo al periodo), por la tasa de fallos λ (fallos/hora): $D_a = N \cdot T \cdot \lambda$

C_u = Coste unitario anual de mantener el inventario (€), $C_u = i \cdot C_c$

i = Coste de del interés del dinero para la empresa.

Por sustitución de lo anterior en la ecuación básica general del problema y calculando la derivada e igualando a cero, para obtener el mínimo, se tiene que:

$$\frac{dTCI}{dQ} = \frac{d}{dQ} \left(D_a \cdot C_c + \frac{C_{fp} \cdot D_a}{Q} + C_u \cdot \frac{Q}{2} \right) = 0$$

El cálculo de la cantidad óptima a ordenar (Q), se obtiene también igualando los costes anuales para mantener el inventario (almacén), con los costes anuales de ordenar los pedidos.

Idéntico resultado se obtiene al calcular el mínimo (cálculo matemático) de la función al derivar e igualar a cero. En ambos casos:

$$i \cdot C_c / 2 = C_{fp} \cdot (D_a / Q^2)$$

Despejando Q se obtiene la expresión de la cantidad óptima de pedido:

$$Q_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot D_a \cdot C_{fp}}{i \cdot C_c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot N \cdot T \cdot \lambda \cdot C_{fp}}{i \cdot C_c}}$$

Tiempo del ciclo de pedido

El tiempo que transcurre desde el aprovisionamiento de inventario con la cantidad de pedido Q hasta que ésta se agota por completo, siendo preciso su reaprovisionamiento en la misma cantidad viene dado por:

$$T_{pedido} = \frac{Q}{D_a} = \frac{Q}{N \cdot T \cdot \lambda}$$

Donde:

T : tiempo de ciclo de pedido (en fracción de año).

T^{-1} : frecuencia anual de pedidos.

El tiempo medio esperado entre órdenes se calcula teniendo en consideración el número de pedidos por año y los días de trabajo anuales.

En el caso de almacenes destinados al servicio de mantenimiento se asume que los costes de desatender una reparación son superiores a los de tener en almacén el número adecuado de repuestos. Es preciso, por tanto, fijar un stock mínimo a partir del cual se determina el ritmo de pedidos y su volumen unitario.

Ventajas del modelo

El modelo presenta gran sencillez.

La asunción de variables constantes (demanda anual, demanda durante el "lead time") no suele perjudicar la exactitud del modelo, pues el aumento de los costes totales respecto a su punto mínimo es comparativamente reducido.

Inconvenientes

Suponer la demanda constante puede ser un problema en el caso de que ésta se encuentre estacionalizada o de que existan picos en la producción que requieran de una mayor actividad industrial.

El servicio de mantenimiento no es una producción regular y constante tal como se ha visto a lo largo de la asignatura, aunque se pueda programar y predecir con la precisión de los modelos. Esto se debe tener en cuenta desde el punto de vista bien fijando puntos de corte de pedido en almacén algo mayores de lo que indica el modelo, o asumiendo en la organización este desfase y considerando la petición de pedidos especiales por acumulación de averías.

El método considera que el nivel de inventario se reabastece instantáneamente, hecho que no sucede en la práctica (p.e. considérese los periodos de vacaciones en que determinadas empresas de suministros cierran durante un mes).

Finalmente, no se tiene en cuenta los descuentos por grandes perdidos, los cuales son fundamentales para el caso de un elevado número de industrias.

Ejercicio 6.6 Una factoría utiliza 150 máquinas de producción con una tasa de fallos de 0,0004 Ud/h (una avería por equipo cada 2500 horas de funcionamiento). Se trabaja a turnos durante todo el año (8760 h). Las piezas para reparación tienen un coste de 350 €/reparación y el interés medio del dinero para la empresa es del 3,5%. Los costes de pedido (directos para efectuar el pedido, personal dedicado y estructura del departamento, más costes fijos de la empresa distribuidos proporcionalmente) son de 20 €/pedido. Se pide calcular:

- a) El número de unidades por pedido.
- b) La frecuencia de lanzamiento de pedidos.
- c) El límite inferior de almacén para no tener problemas en producción.

Considerar que hay un tiempo entre el pedido y servicio (suministro) hasta entrada en almacén de mínimo un mes.

Solución:

a)

Nº óptimo de pedido

$$Q_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot N \cdot T \cdot \lambda \cdot C_{fp}}{i \cdot C_c}}$$

$$N = 150 \text{ Ud}; \quad T=8760 \text{ h/año}; \quad \lambda=0,0004; \quad C_{fp}= 20 \text{ €}; \quad i=0,035; \quad C_c= 350$$

$$Q_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 8760 \cdot 0,0004 \cdot 20}{0,035 \cdot 350}} = 41,4$$

Luego 42 Ud/pedido

Coste unitario del pedido $42 \cdot 350 = 14.700 \text{ €}$

b) Frecuencia de pedidos

$$T_{pedido} = \frac{Q}{D_a} = \frac{Q}{N \cdot T \cdot \lambda}$$

El número de averías esperadas en un año, de media, es:

$$N \cdot T \cdot \lambda = 150 \cdot 8760 \cdot 0,0004 = 525,6 \text{ Av. /año}$$

El número de pedidos a formalizar, en un año, será:

$$N^{\circ}_{pedidos/año} = N \cdot T \cdot \lambda / Q_{opt} = 525,6 / 42 = 12,5 \text{ Pedidos/año} \approx 1/\text{pedido al mes}$$

Y la frecuencia de pedido, será entonces:

$$Frec_{pedido} = (1/12,5) \cdot 365 = 29 \text{ días} \rightarrow 1 \text{ Pedido cada 29 días}$$

c) El límite de ruptura de almacén será, considerando 1 mes entre pedido y suministro tal como se indica en el enunciado:

Averías, valor medio, en un mes (30,4 días):

$150 \cdot 30,4 \cdot 0,0004 = 43,8 \rightarrow 44 \text{ Ud. de repuestos}$. A este valor le es de aplicación los conceptos de probabilidad de ocurrencia, intervalos de seguridad, etc., desarrollados en capítulos anteriores.

REFERENCIA

Borda, J. (1990). Técnicas de mantenimiento avanzado. Ediciones Deusto, Bilbao.

BIBLIOGRAFÍA

Borda, J. (1990). Técnicas de mantenimiento avanzado. Ediciones Deusto, Bilbao.

Fitzsimmons, J. A., Fitzsimmons, M. J., & Bordoloi, S. (2008). Service management: Operations, strategy, and information technology (p. 4). New York, NY: McGraw-Hill.

Gaither, N., & Frazier, G. (2002). Operations management. South-Western/Thomson Learning.

Krajewski, L. J., & Ritzman, L. P. (2005). Operations management: processes and value chains. Prentice Hall.

Shenoy, G. V., & Srivastava, U. K. (1986). Operations Research for management. New Age International.