ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE MINAS Y ENERGÍA
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
MASTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA DE MINAS

Capítulo 7: Dimensionamiento del Servicio de mantenimiento

Emilio Andrea Calvo
Ingeniero industrial
Profesor Asociado
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

Carlos Sierra Fernández, PhD
Ingeniero de minas
Profesor Ayudante Doctor
Departamento de Transportes y Tecnología de Proyectos y Procesos

Índice

CAPÍTULO 7: DIMENSIONAMIENTO DEL SERVICIO DE MANTENIMIENTO

"El viaje de las mil millas comienza con un solo paso".

Lao Tzu

Carlos Sierra Fernández

Emilio Andrea Calvo

7.1 DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO DEL EQUIPO DE PERSONAS DE MANTENIMIENTO

La teoría de colas (Inglés: Waiting Lines or Queuing Theory) es una rama de la matemática que estudia la relación entre las demandas de servicios y los equipos necesarios para optimizar las respuestas. Particularizando lo anterior para el mantenimiento, estudia el tiempo que deben espera los elementos averiados antes que los servicios de mantenimiento los restituyan a la normalidad del trabajo.

La teoría de colas aplicada al mantenimiento tiene algunas particularidades respecto a la teoría general que simplifican notablemente el uso de las expresiones, que en el entorno de la casuística de la teoría de colas de nivel avanzado adquieren una cierta complejidad de cálculo y de interpretación.

Estas simplificaciones son las siguientes:

Las colas no se abandonan: Esto tiene especial sentido en el caso de la teoría particularizada para el mantenimiento pues al ser un servicio interno, un elemento raramente abandonaría la cola, por ejemplo, por falta de tiempo, para buscar un servicio en otra empresa con menos demora, o para poner una reclamación.

No existe trato preferente: En el caso de tratarse de la avería de una máquina de mucha importancia dentro del sistema productivo o que afecte de manera considerable a la seguridad es habitual que se repare ésta primero sin ponerla a la cola, pero este hecho no distorsiona el estudio de las colas de reparaciones de mantenimiento desde un punto de vista formal.

Dentro de las ***rutinas de la cola***[1], la más frecuente en mantenimiento es la FIFO ("first in, first out") que procede del concepto de gestión de almacenes y que se interpreta "primero que entra primero que sale", "primero que llega, primero que se atiende" o como cola sin prioridades. La rutina de tipo LIFO ("last-in-first-out"), primero que entra último que sale, es muy usada por la facilidad de almacenar y desalmacenar una pieza, cuando ésta no tiene problemas de envejecimiento o de caducidad y es siempre la misma, es decir, no varía el modelo (p.e. grifo de 3/8 en latón; rodamiento ref. xxx del eje xx que es siempre igual, etc.).

La teoría de colas aplicada a los procesos de mantenimiento tiene las limitaciones que imponen los modelos, y dentro de ellas está el que el número de actuaciones o equipos no supere un determinado número (ya se ha visto que las funciones de probabilidad exigen más de 15 unidades para las primeras aproximaciones). Además, cuando los equipos son un número pequeño, no tiene sentido la teoría de colas. Ésta se refiere a empresas de tamaño mediano-grande, con equipamiento cuyas averías responden a un modelo estocástico en cuanto a sus necesidades de atención por averías o defectos de funcionamiento. En los casos que aquí se desarrollan las poblaciones fuente se van a considerar de tamaño muy grande (infinitas bajo un concepto matemático).

Para los sistemas no continuos (trabajo a un turno o a dos turnos que no cubre las 24 horas del día), desde un punto de vista formal, se dan dos efectos:

a) Inicio de turno, si no hay equipos pendientes del día anterior, hay una pérdida de tiempo por la no existencia de equipos para reparar que puede producir cierta inactividad. El tiempo del turno será entonces ($T-\Delta T$) y en primera aproximación se puede considerar como el valor medio de una reparación (distribución estadística equiprobable a lo largo del tiempo)

[1] Otras rutinas de cola son: RSS, cuando la selección se hace de forma aleatoria; PR, selección con algún criterio de prioridad y GD o disciplina general, concepto estadístico-matemático cuando el modelo y sus resultados son válidos para cualquier distribución estadística cuyas variables son independientes e idénticamente distribuidas.

$\Delta T=0{,}5\cdot(T/N^o\_averías)$. El Nº de averías corresponde a la media de averías reparadas por turno.

Si en k_i, el nº de averías pendientes es: Av_Pte=0; $\rightarrow T(k_i+1) = T-\Delta T$;

b) Supuesto contrario, equipos pendientes del día anterior no reparados totalmente y que hay que reiniciar la actividad al día siguiente. Esto produce igualmente un aumento del tiempo de reparación individual que puede estar contemplado en los valores medios (empresas de cierto tamaño), se puede considerar en la tasa de reparaciones (m) o tratarse de forma particular según cada empresa, ya que se pueden rellenar huecos de tiempo con otras actividades programadas dentro del taller. Esto no es posible en sistemas de cola puro que dan un servicio (p.e de atención de llamadas), donde los tiempos de inactividad por no demanda suelen ser tiempos perdidos[2]. En estos casos hay un compromiso entre productividad del servicio, tiempos de espera en la cola y posibles abandonos de clientes u otras rutinas que se pueden estudiar.

En el tiempo útil, como valor medio de una actuación, se supone una pérdida de tiempo de los equipos que inician un trabajo, lo abandona y lo continúan en otro periodo de tiempo (al día siguiente), como mínimo se duplican los desplazamientos cuando estos son de una entidad en tiempo, respecto al total de la avería, que exige su consideración.

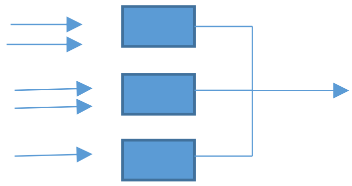
En teoría de colas los problemas se pueden modelar con diferentes criterios de nº de colas de espera y nº de puestos o equipos de atención, para modelar el servicio de mantenimiento se considera el modelo de una cola y un único servidor que da una precisión suficiente, referencia a) de los esquemas siguientes:

a) Una cola y un único servidor 

[2] Estos tiempos se suelen modelar con una distribución exponencial y los de llegadas de servicios con una de Poisson, luego el sistema se denomina Poisson-Exponencial. La exponencial es una simplificación de la distribución de Poisson por lo que es normal en la bibliografía que ambos, averías y reparaciones se indique su modelado bajo el concepto Poisson-Exponencial.

b) Varias colas y un único servidor

c) Varias colas y varios servidores[3]



Por otra parte, la distribución de tiempos de averías puede seguir distintas funciones pero la comúnmente empleada es la distribución de Poisson. En cuanto a los tiempos de servicio se utiliza la exponencial negativa (pensar por ejemplo en la cola de un cajero automático, o un peaje de autopista) o la tasa de reparaciones constante (túnel de lavado o una atracción de feria) conceptos ya vistos en capítulos anteriores.

Diseñar un sistema de atención de mantenimiento que sea eficiente consiste, básicamente, en definir un sistema cuyo coste (de diseño y operación) se justifique por el servicio que da. Este servicio, al ser un departamento interno no tiene, normalmente, facturación o ingresos, por lo que se puede evaluar mediante el *"coste de no darlo"*. Dicho de otro modo, al diseñar el sistema se pretende minimizar unos supuestos costes totales y que corresponden al gasto de mantenimiento (gasto real) más el gasto de no producción por avería de las máquinas (gasto no real pero cuantificable por el paro de las máquinas que no producen)[4], de tal forma que se obtenga una referencia de coste total mínimo.

---

[3] Varios canales en teoría de colas.

[4] Existe una denominación que proviene del contexto económico-jurídico: "lucro cesante". Este concepto es una forma de daño patrimonial que consiste en la pérdida de una ganancia legítima esperada o de una utilidad económica por parte del equipo, y que ésta no se habría producido si el equipo no estuviera en situación de avería improductiva. El lucro cesante aplicado a la tecnología se calcula como el tiempo medio de parada por el beneficio estimado de la producción. Hay una pérdida de una perspectiva cierta de beneficio en la empresa.

7.1.1 TEORÍA DE COLAS PARA UN SOLO CANAL, LLEGADAS SEGÚN DISTRIBUCIÓN DE POISSON Y TIEMPOS DE SERVICIO SEGÚN EXPONENCIAL NEGATIVA

Como se ha indicado existen diversos modelos de teoría de colas. Nosotros solamente nos ocuparemos del modelo de un solo canal: llegadas según distribución de Poisson y tiempos de servicio según exponencial negativa, que aporta precisión suficiente en los cálculos.

El resto de las asunciones, condiciones, del modelo, algunas de las cuales ya han sido indicas, se resumen a continuación:

1. Las llegadas siguen un sistema FIFO. Primero en llegar, primero en salir.
2. Todo lo que llega a la cola, toda avería que se produce, espera en la misma a ser reparado con independencia de la longitud de la misma (con independencia del tiempo de espera o del número de equipos averiados).
3. Las llegadas nuevas son independientes de las llegadas anteriores: el sistema no tiene memoria.
4. La tasa de llegadas es constante a lo largo del tiempo (se formula el estado estacionario del sistema, modelo). Las premisas 3, 4, 6 y 7 son la justificación base para la aplicación del teorema de Markov.
5. Las llegadas siguen una distribución de Poisson.
6. Las reparaciones son independientes de los sucesos anteriores. El ritmo de reparaciones no depende de las incidencias anormales del sistema, sino de su valor medio.
7. La media de los servicios de reparación es conocida (estado estacionario).
8. Las reparaciones siguen una distribución exponencial negativa.

9. La tasa media de reparación es superior a la tasa media de llegada. En el supuesto contrario el sistema es inestable, el equipo no es capaz de reparar todo lo que le llega.

Las variables que se consideran para el estudio de las funciones son las siguientes, se da la denominación más utilizada y aquella de uso similar en la formulación que se usa en publicaciones más especializadas de mantenimiento:

Tabla 7.1.1 Variables utilizadas en el texto, definición y relaciones básicas.

Varia-ble	**Concepto**	**Notas / Notación de mantenim.**
λ	Número de ***averías por unidad de tiempo***. Obtenida como media de los sucesos a lo largo de un tiempo representativo. Se calcula con los métodos de la estadística, ponderando los valores (asignando probabilidad o peso a cada suceso). Una aproximación más real es considerarla una variable estocástica con un modelo de previsión exponencial (de tasa constante) o de Poisson. Su cálculo es la media ponderada de los sucesos ocurridos en un determinado periodo de tiempo. $\lambda=(1/n)\sum(x,\cdot f_i)=\sum x_i\cdot P_i$ f_i: frecuencia; P_i: Probabilidad (límite de la frecuencia cuando $n \to \infty$ (cuando n es grande).	Aver/T; sujeta a un modelo. f_i: frecuencia del suceso (i) $P_i \approx P(i)$ Probabilidad del suceso (i)
μ	Número de ***reparaciones por unidad de tiempo*** cuando el mantenimiento está ocupado. Este comentario adquiere importancia si se dan tiempos muertos. Esta variable se puede considerar en el mismo sentido que λ, pero para los servicios de	Reparaciones/T

Varia -ble	**Concepto**	**Notas / Notación de mantenim.**
	mantenimiento.	
T	***Periodo de cálculo*** que puede ser, hora, día, 1500 horas, mes, etc. pero es un periodo fijo.	Normalmente constante
c	Número de ***equipos o grupos de trabajo*** de mantenimiento que realizan una labor similar, puede ser una persona o un equipo pero se considera una unidad de trabajo, que hace un trabajo similar en dedicación y en todo caso su variabilidad está sometida a una norma de probabilidad que modelamos con un valor medio fijo. Es, normalmente, un valor a calcular en el proceso, ¿Cuántos equipos de trabajo de mantenimiento se necesitan para hacer un servicio de una determinada forma? Si determinados equipos trabajan a un tiempo inferior al periodo T, por planificación o necesidades[5], se debe modelar y tener en cuenta en la variable "μ".	Es un valor a determinar. Se considera, para simplificar, que $c=(1/n)\sum c_i \cdot \mu_i$
$\rho=\lambda/\mu$	***Factor de utilización***. Parámetro que mide la relación entre las necesidades medias de reparación (averías) y la capacidad de reparación del mantenimiento. Si $\rho < 1$ el sistema es estable, el mantenimiento repara con capacidad suficiente; puede ser necesario para un servicio fijar este límite por la necesidad de no tener más de "X" máquinas paradas. Si $\rho = 1$, el sistema se considera	Si $\rho \geq 1$ el sistema se colapsa, llegan más averías que la capacidad de reparación

[5] P.e: Cuando en un tiempo t=día, hay dos equipos de mañana y un equipo de tarde

Varia-ble	Concepto	Notas / Notación de mantenim.
	equilibrado o estable; y si $\rho > 1$ el sistema se colapsa, tiende a infinito el número de máquinas pendientes de reparación al aumentar el tiempo. La variable **ρ** representa la probabilidad de que un sistema o un equipo esté ocupado en reparación y ($1-\rho$) la probabilidad de que esté en espera, inactivo.	
k, k_q, k_m	***Número de equipos averiados***, q (en la cola) y m (en proceso de reparación, en el servicio de mantenimiento);	$k=k_q + k_m$
P_n, P_{n_q}, P_{n_m}	***Probabilidad de*** que haya un número n de máquinas averiadas en el estado estable. P_{n_q} = Prob. de que n máquinas estén en espera. P_{n_m} = Prob. de que n máquinas estén en reparación.	$P_n \approx P(n)$ $P_{n\_q} \approx P(n\_q)$ $P_{n\_m} \approx P(n\_m)$
T, T_q, T_m	***Tiempo*** que se tarda en una reparación. T_m=S, este tiempo, el de reparación, se suele denominar tiempo de servicio en teoría de colas	$T=T_q+T_m$ $T_q \approx T(q)$, etc.
$T_m = 1/\mu$	Dado que μ es la tasa de reparación (número de equipos reparados por unidad de tiempo), la inversa es el ***tiempo medio de reparación para un equipo***. Es independiente del número de equipos de trabajo, variable c, siempre que a todos los equipos trabajen con (se les pueda asignar) la misma tasa de reparación.	
$W_q = E[Tq]$	Es el ***tiempo medio de espera*** para una reparación, y es, formalmente, la esperanza matemática de los tiempos de espera en la cola. De forma similar, pero	W, W_q y W_m $W = W_q+W_m$

Varia-ble	Concepto	Notas / Notación de mantenim.
	en reparación, se define W_m. Y el tiempo total T será la suma de ambos.	$W_q \approx W(q)$, etc.

7.1.2 JUSTIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES DE TEORÍA DE COLAS APLICADA AL MANTENIMIENTO

Como referencia directa fundamental para las secciones que siguen, correspondientes a la teoría matemática de colas y sus justificaciones, se ha empleado García-Sabater & Maheut (2011) y Gross (2008).

El número medio de averías, para un periodo de tiempo T, se puede obtener por varios procedimientos de cálculo.

a) Si se conocen las probabilidades de 0, 1, 2,..., k número de averías, se tiene, para el número medio de averías en el tiempo T:

$$\mathrm{K} = \mathrm{E[k]} = \sum_0^{\infty} k_i \cdot P(k_i)$$

Y para (c) equipos (servidores o reparadores) el número medio de averías en espera será, dado que "c" están siendo atendidos:

$$\mathrm{K_q} = \mathrm{E[k_q]} = \sum_{c+1}^{\infty} (k_i - c) \cdot P(k_i),$$

Que para c=1, un servicio de mantenimiento de un solo equipo de trabajo, se modifica a:

$$\mathrm{K_q} = \mathrm{E[k_q]} = \sum_2^{\infty} (k_i - 1) \cdot P(k_i),$$

b) Si asumimos una tasa de producción de avería proporcional al tiempo, bajo la consideración del modelo Poisson–Exponencial, se tiene las relaciones siguientes:

nº de averías en un tiempo T: $K = \lambda \cdot T$

nº de averías, en espera de reparación, en un tiempo T: $K_q = \lambda \cdot T_q$

El tiempo de un equipo desde que se avería hasta que se restablece el funcionamiento será,

T(tiempo total) = T_q(Tiempo de espera en cola) + T_m(tiempo en reparación), que sustituyendo los valores anteriores se tiene:

$$T = T_q + 1/\mu \;\rightarrow\; T - Tq = 1/\mu \;\rightarrow\; T_m = 1/\mu$$

El nº medio de equipos que se están atendiendo, será el tiempo total menos el tiempo de espera, luego:

$$K_m = K - K_q = (\lambda T - \lambda T_q) = \lambda(T - T_q) = \lambda/\mu$$

7.1.3 PROBABILIDAD DE QUE UN SERVIDOR ESTE OCUPADO

Para un único servidor (un sistema de mantenimiento), la probabilidad de que una avería este en espera o esté siendo atendida, se obtiene fácilmente de las relaciones anteriores (esto corresponde al número de averías que en un momento dado se están atendiendo, la opción k=0 no produce cola ni necesidad de atención, luego se calcula a partir del índice n=1, para ser atendido al menos hay una avería[6]):

Se tiene:

$$K - K_q = K_m = \lambda/\mu = \sum_1^\infty k_i \cdot \mathrm{P}(k_i) - \sum_1^\infty (k_i - 1) \cdot P(k_i) =$$

$$\sum_1^\infty k_i \cdot \mathrm{P}(k_i) - \sum_1^\infty (k_i \cdot P(k_i) + \sum_1^\infty P(k_i) = \sum_1^\infty P(k_i) = 1 - \mathrm{P}(k_0)$$

Luego la probabilidad de que un sistema está vacío, $P(k_0)$, complementaria a que está ocupado, es

[6] No confundir con el cálculo de la tasa media de averías que considera en su determinación, también, la posibilidad de que haya cero averías en un instante dado.

$P(k_0) = P(k{=}0) = 1 - \lambda/\mu$; y $P(k>0) = \lambda/\mu = \rho$

Para un sistema de c servidores, "c" equipos de reparación, y considerando el sistema en el estado estable, la probabilidad de que esté ocupado es:

$P(k>0) = \frac{\lambda}{c\mu}$; y la probabilidad de que esté vacío es: $P(k{=}0) = 1 - \frac{\lambda}{c\mu}$

Cuando un sistema está en equilibrio estable, la tasa de equipos que entran con avería es igual a la tasa de equipos que son reparados, $\lambda = c\mu$, la probabilidad de que esté vacío es nula.

$\{P(k{=}0) = 1 - \frac{\lambda}{c\mu} = 1 - 1 = 0\}$

Lo anterior nos permite identificar algunas de las ideas base y de las expresiones de la teoría de colas aplicada al servicio de mantenimiento.

7.1.4 DESARROLLO DE FÓRMULAS BÁSICAS, TEORÍA DE COLAS EN UN SISTEMA ESTABLE

Un proceso estocástico es la abstracción matemática de un proceso empírico cuyo desarrollo está gobernado o responde al modelo de alguna ley de probabilidad.

Conocer las probabilidades en el estado estacionario, aquel que está calculado (gobernado) por los valores medios de las variables, cuando esto se da, un modelo no depende de su historia, sino que lo que pueda ocurrir, o no ocurrir, depende únicamente del estado actual del sistema, o sea lo que pueda pasar en el instante "n" depende únicamente[7] del instante "(n-1)".

Una cola o secuencia de producción de averías con un proceso Poisson-Exponencial de media "λ" y con un proceso de reparaciones de Poisson-

[7] Algunos autores denominan a este principio con la expresión "Dada la situación presente, el futuro es independiente del pasado y el proceso carece de memoria".

Exponencial de media "μ", en el estado estacionario, se puede modelar con el principio de Markov (cadena de Markov continua) de la siguiente manera:

En cada intervalo infinitesimal de tiempo puede ocurrir una llegada (avería) o una salida (reparación) y para un proceso Poisson_Exponencial, tal como se ha visto anteriormente, ver capítulo de funciones estadísticas aplicadas al mantenimiento, se formula de la siguiente forma, siendo ΔT incrementos de tiempo suficientemente pequeños, y $\sigma(t)$ una función infinitesimal que caracteriza el error posible entre el valor real y el considerado en la expresión de proporcionalidad a $\lambda \cdot \Delta t$ o $\mu \cdot \Delta t$ según se consideren averías o reparaciones.

Con estas consideraciones se tiene:

Llegada (avería): $P\{n \rightarrow n+1 \text{ en } (t, t+\Delta t)\} = \lambda(n) \cdot \Delta t + \sigma(t)$, para $n \geq 0$

Salida (reparación): $P\{n+1 \rightarrow n \text{ en } (t, t+\Delta t)\} = \mu(n) \cdot \Delta t + \sigma(t)$, para $n \geq 1$

Para que exista la posibilidad de hacer una reparación tiene que haber al menos una avería, luego el contador se inicia a partir de $n=1$.

Ambas expresiones, cuando $\Delta T \rightarrow 0$, se anula el valor de $\sigma(t)$ tal como corresponde a los principios de modelo Poisson_Exponencial (ya visto al explicar la teoría de funciones aplicadas al servicio de mantenimiento), se hacen infinitésimos de orden superior o lo que es lo mismo $\lim(\Delta t \rightarrow 0)$ de $\sigma(t)=0$

Esta consideración y la hipótesis de proceso estable que se da a continuación (Markov) son la base de la teoría de colas en la formulación aplicable a los servicios de mantenimiento.

Al representar las anteriores probabilidades se ha considerado que las tasas de llegada y de servicio (λ y μ respectivamente) dependen del número de elementos en el sistema y solamente de esta factor. En la figura siguiente se representa el estado (n), el anterior y el posterior que son, tal como se ha indicado los únicos que afectan, según el principio de estabilidad, a la condición del propio estado (n).

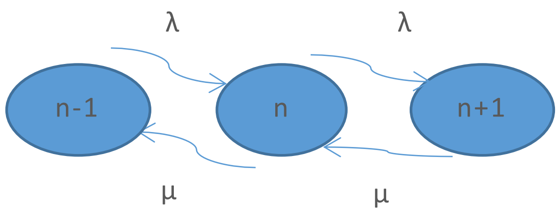


Figura. 7.1 Fragmento de cadena de Markov

La probabilidad de que haya (n) elementos en el sistema en el estado estacionario, según el balance de flujo, solo depende del estado (n-1) y que aparezca un fallo, o de que estemos en el estado (n+1) y se produzca una reparación, y de la evolución en el propio estado (n) en el que puede haber una entrada y una salida con lo cual permanece estable.

En el equilibrio será, para el estado (n), el balance de flujo nulo, la probabilidad de las entradas debe ser igual a la probabilidad de las salidas ya que en caso contrario se romperá la regla de estar en situación de estado estacionario, y así se tiene:

Entradas:

-Del estado anterior, (n-1) porque se produzca una nueva avería y que viene dado por: $\lambda(n-1)\cdot P(n-1)$

- Del estado posterior porque se produce una reparación y que viene dado por: $\mu(n+1)\cdot P(n+1)$

Salidas:

- Del estado (n) porque se produce una salida por reparación de un equipo hacia el estado (n-1), y viene dado por: $\mu(n)\cdot P(n)$

- Del estado (n) porque se produce una entrada (nueva avería) hacia el estado (n+1) y viene dado por: $\lambda(n)\cdot P(n)$

El equilibrio de salidas igual a entradas en el entorno del estado (n) debe ser cero, sino no sería un punto estable, luego se tiene la ecuación de equilibrio siguiente:

$$\lambda(n)\cdot P(n) + \mu(n)\cdot P(n) = \lambda(n\text{-}1)\cdot P(n\text{-}1) + \mu(n+1)\cdot P(n+1);$$

Para todo (n) dado que el sistema está en equilibrio.

En el origen, dado que el equilibrio se debe cumplir para todos los estados del sistema, se tiene:

$$\lambda(0)\cdot P(0) + \mu(0)\cdot P(0) = \lambda(\text{-}1)\cdot P(\text{-}1) + \mu(1)\cdot P(1) \qquad (7.2.1)$$

En el origen, comienzo del proceso, puede aparecer una avería, pero no es posible que se efectúe una reparación dado que no hay ningún equipo pendiente en el sistema, luego se tiene la igualdad siguiente aplicada al punto inicial (origen) del sistema estacionario:

$$\lambda(0)\cdot P(0) = \mu(1)\cdot P(1) \quad \rightarrow \quad P(1) = P(0)\cdot\lambda(0)/\mu(1)$$

Dado que el sistema está en situación estable: $\lambda(0) = \lambda(1) = \lambda(i)=\lambda$; $\mu(0) = \mu(1) = \mu(i)=\mu$, luego se simplifica la expresión de la forma siguiente:

$P(1) = P(0)\cdot\lambda(0)/\mu(1)$, se puede escribir de la forma $P(1) = P(0) \cdot \lambda/\mu$ (7.2.2)

Si repetimos el proceso para el nudo (1) se tiene:

$\lambda(1)\cdot P(1) + \mu(1)\cdot P(1) = \lambda(0)\cdot P(0) + \mu(2)\cdot P(2)$, o lo que es igual simplificando la grafía:

$\lambda(1)\cdot P(1) + \mu(1)\cdot P(1) = \lambda(0)\cdot P(0) + \mu(2)\cdot P(2)$, que sustituyendo (7.2.2.) se obtiene:

$$\lambda(1)\cdot P(0)\ \lambda(0)/\mu(1) + \mu(1)\cdot P(0)\ \lambda(0)/\mu(1) = \lambda(0)\cdot P(0) + \mu(2)\cdot P(2) \ \rightarrow$$

$$\lambda(1)\cdot P(0)\ \lambda(0)/\mu(1) = \mu(2)\cdot P(2) \rightarrow$$

$$P(2) = P(0)\ \cdot\{\lambda(0)/\mu(1)\}\cdot\{\lambda(1)/\mu(2)\} = P(0)\ \prod_1^2 \frac{\lambda(i-1)}{\mu(i)}$$

La expresión generalizada para el punto (n) es la siguiente:

$$Pn = Po \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda(i-1)}{\mu(i)} \qquad (7.2.3)$$

Si ahora diferenciamos dos sucesos, P(0) como la probabilidad de que no haya ningún equipo averiado, de la probabilidad de que haya algún equipo averiado, se tiene la relación:

Dado que[8] $\sum_{i=0}^{\infty} P(i) = 1; \;\rightarrow\; P(0) + \sum_{i=1}^{\infty} P(i) = 1;$ y sustituyendo (7.2.3) y reordenando:

$$1 - P(0) = \sum_{i=1}^{\infty} P(i) = \sum_{i=1}^{\infty} Po \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda(i-1)}{\mu(i)} = Po \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda(i-1)}{\mu(i)}$$

$$P(0) = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda(i-1)}{\mu(i)}} \qquad (7.2.4)$$

La aplicación a un proceso con un servidor, caso normal de mantenimiento y con tasa de llegada de averías (λ) y tasa de reparación (μ), la fórmula (7.2.3) queda simplificada en la forma, (dos expresiones (formas) usando el parámetro $\rho=\lambda/\mu$). Aplicando la relación entre sistema vacío y sistema ocupado dada por $(P(0)=(1-\lambda/\mu)$, vista anteriormente.

$$P(n) = P(0) \cdot (\lambda/\mu)^n = \{1-(\lambda/\mu)\} \cdot (\lambda/\mu)^n \;\rightarrow P(n) = (1-\rho) \cdot \rho^n \qquad (7.2.5)$$

Y la expresión (7.2.4) se reduce a la más sencilla (7.2.6):

$$P(0) = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

Esta última expresión se puede resolver ahora, según el valor del parámetro $\rho = \lambda/\mu$ para las siguientes condiciones, (según la relación de tasa de averías a la tasa de reparaciones) para obtener las condiciones en las que el sistema es estable, o lo que es lo mismo, el sistema tienen solución razonable desde el punto de vista técnico:

[8] La suma de las probabilidades de todos los casos posibles es la unidad.

a) La relación $\lambda/\mu > 1$; el sistema es inestable, la cola tiende a infinito ya que permanentemente la tasa de llegadas es mayor que la de reparaciones y se tiene que cuando $n \rightarrow \infty$:

$\lim (\lambda/\mu |> 1)^n \rightarrow \infty$; luego $P(0) = 0$

b) La relación es $\lambda/\mu = 1$; la tasa de llegadas es igual a la de salidas, en este caso se tiene:

$\lim (\lambda/\mu |= 1)^n = 1$ y $\sum_1^\infty 1 \rightarrow \infty$; luego $P(0) = 0$, el sistema es inestable, ya que nunca se recupera de las inestabilidades aleatorias que permanecen en el tiempo.

c) La relación $\lambda/\mu < 1$; la tasa de llegadas es menor que la de salidas, en este caso se tiene:

$\lim (\lambda/\mu |< 1)^n < 1$, y la suma $\sum_1^\infty (x| < 1)$ es convergente, tiene límite en el campo de los números reales.

La suma de 0 a ∞, (o la suma de 1 a ∞) de una progresión geométrica de razón $(\rho=\lambda/\mu)<1$ tiene la solución siguiente:

$$\sum_1^\infty \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (\rho^n \cdot \rho - \rho)/(\rho - 1) = \rho(\rho^n - 1)/(\rho - 1) = -\rho\ ((\rho-1) = \rho/(1-\rho)$$

Y la probabilidad P(0) sustituyendo el resultado anterior en la fórmula (7.2.6) es la siguiente:

$$P(0) = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = 1/\ \{1+\rho/(1-\rho)\} = (1-\rho)$$

La probabilidad de que el sistema esté ocupado, complementaria como sucesos excluyentes, de que esté vacío, será, en base a lo anterior:

$P(k>0) = 1 - P(0) = 1-(1-\rho) = \rho = \lambda/\mu$

Este resultado ya se vio anteriormente y queda justificado ahora mediante un procedimiento formal más riguroso.

7.1.5 APLICACIÓN DE LAS EXPRESIONES DE LA TEORÍA DE COLAS A LA PLANIFICACIÓN DEL SERVICIO DE MANTENIMIENTO

Con la consideración, ya apuntada, del par de modelación Poisson–Exponencial y con el uso del parámetro $\rho=\lambda/\mu$, ($\rho = \lambda/c\mu$ cuando hay más de un equipo de trabajo pero que se comporta como un único[9] servidor), se particularizan y resuelven las expresiones generales para su aplicación en el estado estacionario.

Número de clientes atendidos por el servicio: $km = \rho=\lambda/\mu$

Probabilidad de que el servicio esté vacío: $P(o) = 1\text{-}\rho$

Probabilidad de que haya n clientes en el sistema: $P(n) = (1\text{-}\rho)\cdot\rho^n$

De esta última expresión se deduce la relación, que usamos normalmente para resolver el sistema general aplicado al mantenimiento. Considerando que la suma de todas las probabilidades posibles es siempre la unidad se tiene:

$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$; Luego se deduce:

$1 = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n \rightarrow \quad 1/(1\text{-}\rho) =\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n \quad (7.2.5)$

El número medio de averías en espera será la esperanza matemática, la media de todas las opciones posibles, luego operando y sustituyendo para:

k (averías) =n (sucesos):

$$L(K \text{ averías en mantenimiento})= E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(n) = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$E[n]=\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(n) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = (1-\rho)\rho\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{(n-1)} \qquad (7.2.7)$$

[9] Cuando hay más de un equipo de trabajo y que operan con tiempos distintos se puede hacer algún tipo de normalización del tipo tiempos ponderados o por personas en cada equipo o lo que interese mejor a los cálculos, para unificar el valor de “c” a un solo factor.

Esta estructura de la fórmula es la simplificación del desarrollo de un polinomio, y utilizando una propiedad de las derivadas de los polinomios, de forma que se tiene:

$\frac{d\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n}{d\rho} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} d\rho^n}{d\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{(n-1)}$; sustituyendo este valor en la fórmula anterior (7.2.7) y utilizando la expresión (7.2.5) obtenida anteriormente, se tiene:

$$E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(n) = (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{(n-1)} = (1-\rho)\rho \frac{d(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n}{d\rho}$$

$$E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(n) = (1-\rho)\rho \frac{d(\frac{1}{1-\rho})}{d\rho} = (1-\rho)\rho \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Si ahora deshacemos el cambio de la variable ($\rho=\lambda/\mu$) se tiene la fórmula, para la situación estacionaria de funcionamiento del sistema de mantenimiento:

E[n] = K (número medio de averías)

$$K = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

El tiempo total para una reparación (cola + mantenimiento) será:

$$K = \lambda \cdot T \quad \rightarrow \quad \boxed{T = K/\lambda = 1/(\mu-\lambda)} \qquad (7.1.5)$$

Si el tiempo máximo que se quiere de espera está condicionado, en el sentido de que no es deseable que este valor sea mayor de un determinado tiempo de espera fijado (como valor medio de los tiempos de espera), esto obliga a diseñar el servicio, y se puede utilizar esta última expresión en la forma:

$T\mu - T\lambda = 1 \quad \rightarrow \quad \mu = (1-T\lambda)/T$ que permite identificar el número de recursos necesarios para que el tiempo no exceda de un valor predeterminado.

El número medio de reparaciones en espera (en la cola) es:

$$K_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \; ;$$

Y el tiempo medio en la cola (espera de servicio) es:

$T_q = \rho/(\mu-\lambda)$

La probabilidad de que haya k elementos averiados en el sistema, pendientes de reparación, en un momento dado (esto permite tomar decisiones respecto al dimensionamiento del sistema) es de:

$P(k \geq X) = \rho^x = (\lambda/\mu)^x$; y la $P(k<X) = (1- \rho^x)= 1 - (\lambda/\mu)^x$

Un valor interesante es el tiempo de espera en la cola cuando el sistema no está vacío, el servicio de mantenimiento está ocupado, trabajando por averías anteriores, este valor es:

$L'q = K'q = E[Kq \mid Km\neq 0] = \mu / (\mu - \lambda)$

Una curiosidad del sistema es que la cola observada por el cliente que espera $\mu/(\mu- \lambda)$, depende de la tasa de servicio y la cola observada por el servidor que espera depende de la tasa de llegada $\lambda/(\mu-\lambda)$. Una vulgarización de este resultado es que cuando estoy en la cola siento que se repara o atiende muy despacio y cuando soy un reparador o servidor siento que no me llegan los clientes (averías) de manera adecuada.

La solución obtenida para la estabilidad del sistema impone la condición matemática de que el parámetro $\rho=\lambda/\mu < 1$, sea menor de la unidad, luego en todo diseño estable la tasa de reparación para un sistema (μ) o la total para un sistema de varios equipos ($c\mu$) debe ser mayor que la tasa (λ) de llegada de averías. Todo sistema de mantenimiento correctamente diseñado debe tener una capacidad de reparación (disponer de medios suficientes) para acometer con holgura todas las órdenes de reparación que le puedan llegar como media en un diseño adecuado, en caso contrario el sistema no es capaz de atender el servicio, la acumulación de trabajos pendientes rebasa la capacidad del servicio diseñado y con el tiempo colapsa.

Recapitulación de fórmulas de aplicación práctica

Número medio de unidades en espera de ser reparadas (K):

$$K = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Tiempo medio que un elemento averiado permanece en la cola (tiempo de espera más tiempo de servicio) (T, W):

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Número medio de unidades en la cola (K_q):

$$K_q = \frac{\lambda^2}{\mu\,(\mu - \lambda)}$$

Tiempo medio que una unidad espera en la fila (T_q):

$$T_q = \frac{\lambda}{\mu\,(\mu - \lambda)}$$

Factor de utilización del sistema (ρ):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Probabilidad de cero unidades en el sistema (sistema inactivo) (P_0):

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Probabilidad de que en el sistema haya más de k unidades ($P_{n>k}$):

$$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$$

Ejercicio 7.1 Una factoría tiene 250 máquinas controladas por el servicio de mantenimiento. La política de mantenimiento es reparar la máquina averiada y ponerla en producción en un tiempo no superior a 2,5 horas. Si la tasa media de rotura es de 3,9 máq./h y cada grupo de mantenimiento puede reparar de media 0,27 máq./h. Determinar cuántos grupos de mantenimiento se necesitan. Suponer un patrón de llegadas en distribución de Poisson y uno de atención de las reparaciones exponencial negativo.

Solución:

Para el caso indicado el tiempo total promedio de espera incluido el tiempo de reparación (T_s), se puede calcular como:

$$T_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Donde:

μ: Tiempo medio de unidades servidas, tasa de reparación (salen del sistema reparadas)

λ: Tasa a la que llegan al sistema las máquinas que no funcionan por unidad de tiempo.

Con la imposición de T_s = 2,5 horas se tiene:

$2{,}5 = \frac{1}{\mu - 3{,}9}$; cuya solución es: $\mu = (1/2{,}5) + 3{,}9 = 4{,}3$

μ = 4,3 unidades reparadas por unidad de tiempo. Cada grupo repara 0,27 maq/h . Luego los grupos necesarios para un funcionamiento estable serán:

$$\frac{4{,}3}{0{,}27} = 15{,}94 \approx 16$$

Ejercicio 7.2 En un taller de mantenimiento las peticiones de reparación se producen a razón de 6,5 máq/h. Cada especialista precisa de media 0,9 h para su reparación. El director específica que una máquina averiada tiene que estar fuera de servicio no más de 3 h. Determinar:

a) Cuántas personas de mantenimiento debe tener la fábrica para que el tiempo de reparación de avería no sea superior a T_s=3 h.

b) Cuántas personas de mantenimiento debe tener la fábrica para que el tiempo de reparación de avería no sea en ningún caso superior a T_s=3 h.

Plantear a la dirección una tabla de decisión adecuada para el mínimo coste.

Solución:

Ambos problemas, de similar planteamiento son de solución totalmente diferente. El a) plantea una solución con valores medios de ocurrencia de averías y el b) plantea la necesidad de calcular límites, intervalos, con alta probabilidad de ocurrencia.

a) La solución para este supuesto es operar con valores medios de tasa de fallos y de tasa de reparación y así se obtiene

$$Ts = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad \rightarrow \quad 3 = \frac{1}{\mu - 6{,}5} \quad \rightarrow \quad \mu = (1/3) + 6{,}5 = 6{,}83$$

μ = 6,83 unidades servidas, reparadas por unidad de tiempo. Si de media se emplean 0,9 h/máq en la reparación se obtiene una necesidad de:

1/0,9= 1,11 unidades servidas (reparadas) por un especialista a la hora.

$\frac{6{,}83}{1{,}11} = 6{,}2$ → 6 ó 7 especialistas (equipos) en reparación de máquinas.

b) Se trata de resolver el problema, ahora, con la condición de que el tiempo de espera ***en ningún caso*** sea superior a T_s=3 h.

Se supone que el taller funciona de forma estable y que los equipos fallan conforme a una ley Weibull de parámetro beta = 1 (zona plana de fallos aleatorios de la curva de la bañera). Esto equivale a usar la distribución de Poisson para la tasa de fallos en la que se tiene[10]:

Media: $\lambda = 6{,}5$

Desviación típica (raíz cuadrada de la varianza): $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$; $\sigma=\lambda = 6{,}5$

El intervalo de confianza, para una determinada probabilidad de ocurrencia será:

Averías: $P(X=a\%) = (\text{media} \pm t_s \cdot \sigma) = (6{,}5 \pm t_s \cdot 6{,}5)$; t_s factor que depende del grado de fiabilidad exigido al proceso.

Las reparaciones se hacen con una tasa de media μ y es independiente del orden de llegada de los equipos, luego sigue (se modela) una distribución exponencial de tasa constante.

Media: $1/\mu = 1/0{,}9 = 1{,}11$

Desviación típica: $\sigma = 1/\mu = 1/0{,}9 = 1{,}11$

Reparaciones: $P(X=b\%) = (\text{media} \pm t_s \cdot \sigma) = (1{,}11 \pm t_s \cdot 1{,}11)$; t_s, igual que en el caso anterior, depende del grado de fiabilidad. Definido este se obtiene los valores extremos de la tasa de reparación y con este valor se determinan los equipos.

La solución es un problema combinado de regla Poisson-Exponencial que corresponde a lo habitual en el estudio de teoría de colas, con el que se han desarrollado las expresiones de tiempos de espera, equipos en cola, etc. dadas anteriormente.

Los valores de t_s, se pueden obtener de las tablas de coeficientes de fiabilidad para intervalos, ya mencionadas, y que para una probabilidad del 95%, t_s obtenida de la tabla de la función N(0,1) toma el valor $1{,}96 \approx 2$. Este

[10] La función Weibull para beta=1 ($\beta=k=1$, según denominación del parámetro usado) se transforma en una función de Poisson y en una función de distribución modelo Poisson, la media tiene de valor (λ). También se obtiene igual valor con la función Weibull directamente ya que su media es: $\text{Media}=\lambda\Gamma(1+1/k)$, que para k=1 queda: $\text{Media}=\lambda\Gamma(1+1/1)= \lambda\Gamma(2)=\lambda$

cálculo, para intervalos, es excesivamente caro si tomamos el margen superior de seguridad tal como se puede plantear por el enunciado de "**en ningún caso sea superior a Ts**" y tiene una duda formal ya que utiliza coeficientes de la normal cuando el problema se modela con la función Poisson-Exponencial.

En el ejercicio siguiente se aporta el desarrollo completo de la solución para un ejemplo tipo. Se obtienen intervalos, y diferentes soluciones que permiten obtener los costes y las fiabilidades de estas soluciones en cuanto a dimensionamiento de los equipos. Esto facilita notablemente la toma de decisiones empresariales y la justificación del funcionamiento de los servicios de mantenimiento.

Ejercicio 7.2.0 En un taller de fabricación las máquinas se averían a razón de 6 máq/día; y se reparan con una tasa media de 0,75 máq/día. Se especifica que un equipo no debe estar en avería (fuera de producción) más de dos días. Dar los resultados A) mediante valores medios y mediante intervalos de fiabilidad. Aportar la solución B) para que "en ningún caso" como expresión de mayor rigor o mayor fiabilidad de la solución, los equipos estén más de dos días en condición de avería.

Solución:

A) Cálculo sobre valor medio: c= 9; fiabilidad de la solución: 60,6%

B) B1) Fiabilidad del 90%; equipos necesarios c=14

B2) Fiabilidad del 96%; equipos necesarios c= 15

C) Cálculo con coeficientes aproximados de intervalos mediante N(0,1)

Fiabilidad del 90%; equipos necesarios c= 22

Fiabilidad del 95%; equipos necesarios c= 24

D) Cálculo extremo, λ en el máximo del intervalo y μ en el mínimo del intervalo de fiabilidad.

Fiabilidad del 91% (error 9%); Equipos necesarios c= 38

Ejercicio 7.2.0 En un taller de fabricación, las máquinas se averían a razón de						6	maq/día
y se reparan con una tasa de media			0,75	maq/día/Eq	1 Eq: Ud de Equipo de mantenimiento		
Se especifica que un equipo no esté fuera de servicio, sin producir, más de						2	días
Determinar el número de equipos de mantenimiento (un equipo una persona) necesarios.							
El problema se puede resolver bajo dos supuestos							
A) Calcular el número de equipos, para que **de media no esten fuera de servicio** más del tiempo							
especificado. Se utilizan las expresiones del proceso estable (Cadena de Markov)							
B) Calcular el número de equipos para que **en ningún caso** el tiempo de espera sea superior al indicado							
Se considera que el número de fallos sigue una distribución de Poisson (Wiebull de beta=1), y la tasa							
de reparaciones una ley exponencial con tasa μ							
A)	Tasa de averías, λ =		6	mq/día			
	Tiempo de espera, Ts =		2	días			
	Tasa de reparaciones, μ =		0,75	mq/día/eq	Máquinas / día /equipo		
Para un sistema estable, de media, se tiene por teoría de colas					Ts = 1/(μ - λ)	luego:	
	μ = (1-Ts·λ)/Ts =	6,5				(1)	
Para múltiples equipos de mantenimiento "c", se tiene que la tasa total debe ser							
μ_total = c·μ_equipo →		c = μ_total / μ_eq ;	c =	8,67	→	9 equipos	

Los valores de la función de probabilidad para k=(1, 2 … k.) equipos averiados se dan en la tabla siguiente, probabilidad por ítem y acumulada:

Tasa media de fallos:		$(\lambda)=$	6				
				Nº equipos averiados		Probabilidad intervalo	
Equipos en averia ki	(1) Pro(X=ki)	Prob. Acum. Pr(X≤ki)	Ref. Estudio Nº_Máq./día	Intervalo, media λ	± Δλ	Intervalo λ±Δλ	Pro (Kmin_Kmax)
0		0,000	0	6	6	6±6	0,9887
0	0,00247875	0,00247875	1	6	5	6±5	0,9626
1	0,01487251	0,01735127	2	6	4	6±4	0,8954
2	0,04461754	0,0619688	3	6	3	6±3	0,7649
3	0,08923508	0,15120388	4	6	2	6±2	0,5622
4	0,13385262	0,2850565	5	6	1	6±1	0,2983
5	0,16062314	0,44567964	6	6	0	6±0	**0,1606**
6	0,16062314	0,60630278	7	6	1	6±1	0,2983
7	0,13767698	0,74397976	8	6	2	6±2	0,5622
8	0,10325773	0,84723749	9	6	3	6±3	0,7649
9	0,06883849	0,91607598	10	6	4	6±4	0,8954
10	0,04130309	0,95737908	11	6	5	6±5	0,9626
11	0,02252896	0,97990804	12	6	6	6±6	0,9887
12	0,01126448	0,99117252	13	6	7	6±7	#N/A

(1) El calculo sigue la ley de Poisson
λ(t): tasa de fallos

$$Pk(t=1) = Pk = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Y las probabilidades de los intervalos correspondientes, con dos colas, derecha e izquierda, intervalo calculado sobre el valor central correspondiente a la media, se dan en las columnas de “probabilidad intervalo”. Para el intervalo 6±2, que corresponde a un número de equipos en avería entre (4, 8), la probabilidad es 0,5622 indicada, la misma, en ambos lados, 4 y 8.

Se observa que para tener fiabilidades de ocurrencia superiores al 95%, los rangos varías entre 6±5, donde la probabilidad es del 0,9626 → 96,26%

Sobre la base del número de equipos para el intervalo, rango superior para garantizar la fiabilidad deseada, y suponiendo la tasa de reparaciones (μ) constante y de valor medio, se calculan los equipos necesarios de mantenimiento para asegurar que no estén más de dos días averiados.

B) Con los mismos valores, calcular para que **"en ningún caso"** el tiempo de avería sea Ta> Ts

La expresión obliga a operar con coeficientes de fiabilidad altos

Se considera que los fallos siguen una ley de Poisson (Weibul de tasa beta =1), y que la ley de reparaciones sigue una ley exponencial. (se considera constante la tasa μ por simplicidad del ejercicio)

Se considera que la media de reparaciones es estable y se hace el cálculo exacto, ley de Poisson, en averías

Tabla de decisión (B1)		Ts = 2		(μ)medio= 0,75		**Condiciones duras**	
Pr(%)	Fiabilidad	λ_sup	(μ)medio	μ_calculo	Nº Eq	Fiab_total	Error
Estable	0,16	6	0,75	6,50	9	0,16	0,84
0,2983	0,30	7	0,75	7,50	10	0,30	0,70
0,5622	0,56	8	0,75	8,50	11	0,56	0,44
0,7649	0,76	9	0,75	9,50	13	0,76	0,24
0,8954	0,90	10	0,75	10,50	14	0,90	0,10
0,9626	0,96	11	0,75	11,50	15	0,96	0,04
0,9887	0,99	12	0,75	12,50	17	0,99	0,01
#N/A	#N/A	13	0,75	13,50	18	#N/A	#N/A

Nota: Con el cálculo B1, cuando se pide mayor fiabilidad, los equipos de mantenimiento quedan con un rendimiento por ocupación inferior a la unidad, hay periodos de no trabajo, salvo actividad complementaria por mantenimiento programado. Este cálculo (B1) se puede considerar cuando tengo equipos de reserva y el personal de producción y el mantenimiento no queda ocioso. En este supuesto la tasa de reparaciones se puede considerar constante y de valor medio el obtenido en periodos anteriores de medida.

p.e. Para una fiabilidad d 0,90 el no cumplimiento es el 10 de los días, y la necesidad pasa de ser 9 equipos a se 14 equipos, un 156 % superior, y los costes tienen similar incremento.

Realmente cuando la diferencia es tan importante (por imagen, necesidad de producción por plazos, etc.) se debe estudiar el balance entre el coste de equipos en stock para suplir carencias por averías y el coste de los equipos de mantenimiento (su aumento) por necesidad de mayor seguridad en producción.

En algunas casos se recomienda, en el tema de intervalos, el empleo de métodos aproximados, basado fundamentalmente en coeficientes de la N(0,1). Esto es aproximado como suelen indicar, está bien siempre que no se involucren costes de empresa de importancia ya que en este supuesto se deben calcular, con los medios actuales, tipo Excel, programación Matlab, wxMaxima, u otros de fácil acceso, los valores empresariales reales y correctos, cuanto más ajustado y cierto sea el modelo usado, mejor se ajustan los costes correspondientes. Como ejemplo se calcula con métodos aproximados y más rápidos de calcular, el mismo ejercicio anterior para ver las diferencias cuyas soluciones ya se han indicado anteriormente.

Para el mantenimiento, y dado que es un servicio interno que se actualiza periódicamente en necesidades, y tal como hemos indicado anteriormente, se puede uno quedar corto y luego corregir la necesidad con cierta experiencia de rodaje.

En el ejemplo anterior, para una fiabilidad del 90%, se obtiene una necesidad de 14 personas (equipos) calculado correctamente y una necesidad de 22 personas (equipos de mantenimiento), ver ejercicio siguiente, con cálculo aproximado (en ambos supuestos con las mismas simplificaciones de cálculo), que es una diferencia notable.

Ejercicio 7.2.1 En la tabla siguiente se resuelve el mismo ejercicio anterior, para una tasa de fallos de media $\lambda=6$, mediante el sistema da cálculo de intervalos con coeficientes de fiabilidad obtenidos de la normal N(0,1). Se observa en la tabla que para fiabilidades del 90% se calcula una necesidad de 22 equipos de trabajo, valor ya indicado anteriormente cuando se comparan los resultados, y que es un valor muy elevado. Ver ejercicio 7.2.0 y sus comentarios.

Cálculos aproximados, evitación de excesos. Aproximación mediante coeficientes de la normal

Fallos:	Distribución de Poisson		Media, λ =	6	Para la N(0,1)	
		Desviación típica, σ = λ		6	Prob(%)	ts
Intervalo de confianza:		Pro(X=%) = (media ± ts·σ)			50	0,67
		λ_inf	λ_sup	Fiabilidad	70	1,15
Pr(50%; (inf; sup)) =		1,98	10,02	0,50	90	1,64
Pr(70%; (inf; sup)) =		0	12,90	0,70	95	1,96
Pr(90%; (inf; sup)) =		0	15,84	0,90		
Pr(95%; (inf; sup)) =		0	17,76	0,95		

Reparacion:	Tasa de reparaciones, μ =		0,75	mq/día/Eq	Máquinas / día /equipo	
	Distribución exponencial Media, 1/μ =			1,333		
		Desviación típica, σ = 1/μ		1,333		
Intervalo de confianza:		Pro(X=%) = (media ± ts·σ)				
		(1/μ)inf	(1/μ)sup	(μ)inf	(μ)sup	Fiabilidad
Pr(50%; (inf; sup)) =		0,44	2,23	2,2727	0,4491	0,50
Pr(70%; (inf; sup)) =		0	2,87	#¡DIV/0!	0,3488	0,70
Pr(90%; (inf; sup)) =		0	3,52	#¡DIV/0!	0,2841	0,90
Pr(95%; (inf; sup)) =		0	3,95	#¡DIV/0!	0,2534	0,95

Resolvemos para cada supuesto la ecuación (1) y calculamos la fiabilidad como sucesos independientes, F_total = 1-Π(1-P(i)); y se calcula la tabla siguiente:

Tabla de decisión (B2)		Ts = 2		**Cálculo para condiciones muy severas**			
Pr(%)	Fiabilidad	λ_sup	(μ)sup	μ_calculo	Nº Eq	Fiab_total	Error
Estable	***	6	0,75	6,50	9	***	***
50	0,50	10,02	0,449	10,52	23	0,75	0,25
70	0,70	12,90	0,349	13,40	38	0,91	0,09
90	0,90	15,84	0,284	16,34	58	0,99	0,01
95	0,95	17,76	0,253	18,26	72	0,9975	0,0025

Considerando que la media de reparaciones es muy estable, un segundo cálculo será

Tabla de decisión (B3)		Ts = 2		(μ)medio=	0,75	**Condiciones duras**	
Pr(%)	Fiabilidad	λ_sup	(μ)sup	μ_calculo	Nº Eq	Fiab_total	Error
Estable	***	6	0,75	6,50	9	***	***
50	0,50	10,02	0,75	10,52	14	0,50	0,50
70	0,70	12,9	0,75	13,40	18	0,70	0,30
90	0,90	15,84	0,75	16,34	22	0,90	0,10
95	0,95	17,76	0,75	18,26	24	0,95	0,05

Notas al cálculo. El cálculo (B3) se aproxima al más preciso dado en B1, pero siguen siendo muy conservador, en exceso, y desde luego el cálculo B2, de apariencia correcto, es de costes no soportable. Con los cálculos aproximados hay que ser prudente.

7.1.6 TEORÍA DE COLAS, MODELO DE SIMULACIÓN Y APLICACIÓN A UN CASO PRÁCTICO

El supuesto de λ conocido por el histórico de fábrica y μ desconocido permite simular diversos escenarios en base al diseño del servicio (el valor de μ está ligado a los medios y organización del mantenimiento) para decidir la opción más interesante.

En el desarrollo del ejercicio siguiente se modeliza sobre la base teórica del método Montecarlo de simulación de escenarios. Se trata de un método de simulación de lo que puede suceder realmente cuando esto no es conocido o modelable a priori.

Ejercicio 7.3 Se suministra entre el material del curso una hoja de Excel. El objeto de la misma es evaluar cómo afectan las variaciones de la tasa de fallo (λ) al servicio de mantenimiento. Para ello: a) se considera constante la tasa de reparación (μ) en cada cálculo, (aunque se puede variar manualmente en la hoja Excel para generar ejemplos o escenarios diferentes); b) se utiliza el método Montecarlo[11] para el cálculo de los equipos en fallo por periodo; c) los valores de cada intervalo se calculan con la ley de Poisson particularizada para t=constante (t=1 Ud que corresponde al trabajo de un día).

Fases de la simulación

a) Se calculan las probabilidades de ocurrencia de 0, 1, 2, ... k=n fallos, utilizando el modelo de Poisson particularizado para t=1 Ud, con una tasa de fallos determinada, λ=2,2 en el ejemplo. Esta tasa de fallos se ha obtenido previamente mediante alguno de los métodos ya comentado. El método se repite hasta que la probabilidad acumulada este tan próxima a la unidad como se desee.

La expresión usada corresponde a la fórmula

$$Pk(t=1) = Pk = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

b) Se ordena la información por el número de equipos y se relaciona con la probabilidad correspondiente para este suceso, (si k=3; P(x=3)), y a continuación se obtiene la probabilidad acumulada (sumando la probabilidad de los sucesos P(0), P(1), P(2) y P(3)) que corresponderá a $P(x \leq k)$, (línea de k=3 según el ejemplo de operativa indicado). Esta operación genera una sucesión de números creciente entre 0 y 1, obtenidos conforme a la ley de Poisson, para la tasa de fallos determinada (λ), y con intervalos cuya medida es proporcional a la probabilidad de ocurrencia del suceso.

[11] El método Montecarlo utiliza números aleatorios, obtenidos por ordenador en la hoja Excel mediante la función "=aleatorio()", para decidir en cada periodo (T) cual es el número de máquinas averiadas, respetando una ley para los sucesos, que previamente se ha utilizado para definir los intervalos. Se simula (estadísticamente sin dar preferencia a ningún suceso) la vida real y su casuística.

Se tiene ahora el siguiente proceso de razonamiento:

$P(x \leq 3) = a$, y la $P(x \leq 2) = b$; con $a > b$.

En este principio puede darse el supuesto $a = b$ si la probabilidad acumulada hasta el caso 2 y el caso 3 es la misma, pero nunca puede ser inferior por definición de probabilidad acumulada. Lo normal es que sea, por definición de probabilidad acumulada, $a > b$.

Luego la probabilidad de que ocurra el suceso $x=3$ será $P(x=3)=(a-b)$, y el intervalo formado por los valores extremos (b, a) representa la proporción, como medida matemática (numérica) del intervalo, dentro del intervalo general (0,1) que corresponde al suceso $k=3$.

Similar procedimiento se sigue para todos los valores entre $k=0$ y $k=n$ (de tal forma que la probabilidad acumulada es prácticamente la unidad) y se tiene así dividido el intervalo (0,1) en subintervalos cuya medida es proporcional a la ocurrencia del suceso que interesa y esto según una determinada ley con la cual hemos calculado las probabilidades de ocurrencia, en este supuesto el modelo de Poisson.

c) Se genera mediante la función Excel "=aleatorio()" un número aleatorio entre 0 y 1, y éste es el que determina el subintervalo que nos corresponde, o lo que es lo mismo, cuantos equipos, escogidos de forma totalmente aleatoria pero según una ley de determinación de los intervalos, se averían en ese periodo (día en el ejemplo).

d) Para ampliación de conceptos se considera que el periodo es un tiempo T de un turno con lo que se producen interrupciones y comienzos de ciclo que permiten modelar este aspecto, dando un valor añadido al ejercicio según un criterio lógico de programación.

Los resultados son del tipo dado en la tabla que se adjunta a modo de ejemplo. La primera tabla en la página siguiente da los valores iniciales y las siguientes los resultados para tasas de reparación $\mu<\lambda$; $\mu=\lambda$ (que corresponde a la solución estable), y $\mu>\lambda$.

Media de fallos:	(1)= 2,2		
Nº de Equipos en avería k_i	(1) Pro(X=k_i)	Prob. Acumulada Pr(X≤k_i)	Ref. Estudio colas Nº_Máq./día
		0,000	0
0	0,11080316	0,11080316	1
1	0,24376695	0,35457011	2
2	0,26814364	0,62271375	3
3	0,19663867	0,81935242	4
4	0,10815127	0,92750369	5
5	0,04758656	0,97509025	6
6	0,0174484	0,99253865	7
7	0,00548378	0,99802244	8
8	0,00150804	0,99953048	9
9	0,00036863	0,99989911	10

(1) El cálculo sigue la ley de Poisson

λ(t): tasa de fallos

$$Pk(t=1) = Pk = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Principio de programación

Se genera un número aleatorio para cada turno (día)

Pro(x≤2)=	0,62271375	valor 1

Pro(x≤3)= 0,81935242 valor 2
Nota: Todo nº aleatorio entre valor 1 y valor 2 corresponde a 3 equipos averiados en ese día

Este criterio se hace extensivo para todos los intervalos entre 0 y 1, calculados según la ley de probabilidades de Poisson, y escogidos según un sistema aleatorio, análisis tipo Montecarlo

La columna, "Ref. Estudio colas Nº Máq/día", es una columna auxiliar debido a que las fórmulas de búsqueda en Excel eligen un valor (≤) y esto obliga a desfasar una línea los valores para coincidencia de resultados (evitar errores de programación)

Estudio de un ciclo bimensual (2x4 semanas); tasa de reparación y tasa de fallos se referencia a T= día

μ: Tasa de reparación (máq./periodo):				1,6	Factor por trabajo pendiente				0,3
Sistema Montecarlo Nº aleatorio	Nº Maquinas en el día	Nº Maq Día+ Pte.	λ(t)=2,2	Ud reparada /periodo	Quedan, sistema estable	Quedan, según Prob.	Dia	Para T=O y Eq_Pte =0	Para T=T y Eq_Pte >0
0,24157022	1	1	2,2	1,6	0,6	0	lunes	si	no
0,92115357	4	4	2,2	1,6	0,6	2,4	martes		si
0,56724144	2	4,4	2,2	1,6	0,6	2,8	mierc.		si
0,35061471	1	3,8	2,2	1,6	0,6	2,2	jueves		si
0,19452737	1	3,2	2,2	1,6	0,6	1,6	viern		si
0,29819887	1	2,6	2,2	1,6	0,6	1	sábado		si
			Total_semana 1		3,6	1			
0,43578906	2	1	2,2	1,6	0,6	0	lunes	si	no
0,11767408	1	1	2,2	1,6	0,6	0	martes	si	no
0,19428585	1	1	2,2	1,6	0,6	0	mierc.	si	no
0,25388568	1	1	2,2	1,6	0,6	0	jueves	si	no
0,24169947	1	1	2,2	1,6	0,6	0	viern	si	no
0,83364718	4	4	2,2	1,6	0,6	2,4	sábado		si
			Total_semana 2		3,6	2,4			
0,20329789	1	2,4	2,2	1,6	0,6	1,1	lunes		si
0,9743964	5	6,1	2,2	1,6	0,6	4,5	martes		si
0,72684324	3	7,5	2,2	1,6	0,6	5,9	mierc.		si
0,90960139	4	9,9	2,2	1,6	0,6	8,3	jueves		si
0,32535329	1	9,3	2,2	1,6	0,6	7,7	viern		si
0,18680627	1	8,7	2,2	1,6	0,6	7,1	sábado		si
			Total_semana 3		3,6	7,1			
0,16092265	1	7,1	2,2	1,6	0,6	5,8	lunes		si
0,54249412	2	7,8	2,2	1,6	0,6	6,2	martes		si
0,96343918	5	11,2	2,2	1,6	0,6	9,6	mierc.		si
0,21173312	1	10,6	2,2	1,6	0,6	9	jueves		si
0,91937015	4	13	2,2	1,6	0,6	11,4	viern		si

0,54949828	2	13,4	2,2	1,6	0,6	11,8	sábado		si
			Total_semana 4		3,6	**11,8**			
0,52137828	2	11,8	2,2	1,6	0,6	10,5	lunes		si
0,70256083	3	13,5	2,2	1,6	0,6	11,9	martes		si
0,41487075	2	13,9	2,2	1,6	0,6	12,3	mierc.		si
0,72493987	3	15,3	2,2	1,6	0,6	13,7	jueves		si
0,40682346	2	15,7	2,2	1,6	0,6	14,1	viern.		si
0,24432677	1	15,1	2,2	1,6	0,6	13,5	sábado		si
			Total_semana 5		3,6	**13,5**			
0,57040507	2	13,5	2,2	1,6	0,6	12,2	lunes		si
0,63796904	3	15,2	2,2	1,6	0,6	13,6	martes		si
0,49831745	2	15,6	2,2	1,6	0,6	14	mierc.		si
0,32508508	1	15	2,2	1,6	0,6	13,4	jueves		si
0,38412703	2	15,4	2,2	1,6	0,6	13,8	viern.		si
0,62478068	3	16,8	2,2	1,6	0,6	15,2	sábado		si
			Total_semana 6		3,6	**15,2**			
0,76042127	3	15,2	2,2	1,6	0,6	13,9	lunes		si
0,0818944	0	13,9	2,2	1,6	0,6	12,3	martes		si
0,22652953	1	13,3	2,2	1,6	0,6	11,7	mierc.		si
0,24685006	1	12,7	2,2	1,6	0,6	11,1	jueves		si
0,04996688	0	11,1	2,2	1,6	0,6	9,5	viern		si
0,44293071	2	11,5	2,2	1,6	0,6	9,9	sábado		si
			Total_semana 7		3,6	**9,9**			
0,42535939	2	9,9	2,2	1,6	0,6	8,6	lunes		si
0,51383849	2	10,6	2,2	1,6	0,6	9	martes		si
0,5516315	2	11	2,2	1,6	0,6	9,4	mierc.		si
0,95472705	5	14,4	2,2	1,6	0,6	12,8	jueves		si
0,56410531	2	14,8	2,2	1,6	0,6	13,2	viern		si
0,44265948	2	15,2	2,2	1,6	0,6	13,6	sábado		si
			Total_semana 8		3,6	**13,6**	Total_ si=	6	42
							s/ 48 días	13%	88%

Conclusiones obtenidas del modelo

a) Tasa de reparación menor que la tasa de fallos ($\mu < \lambda$)

Cuando la tasa de reparación es inferior a la tasa de fallos, el sistema se desestabiliza y el número de equipos pendientes de reparación aumenta muy rápido. Esto es congruente con el concepto básico dado por el parámetro:

$$p = \lambda / \mu;$$

Realmente este valor es $c \cdot \mu$, con c: nº de equipos o grupos de trabajo y μ: la tasa media de reparación por grupo, pero se considera un único servicio con tantos grupos como sea necesario.

Si este valor de "ρ" es mayor de 1, la función de probabilidad indica que el número de equipos en situación de avería tiende a infinito al aumentar el número de periodos.

En el modelo se observa que muy pocos días se termina con el trabajo, ni siquiera en los comienzos del ciclo que no hay equipos pendientes, y que en la mayoría de las simulaciones prácticamente todos los días quedan equipos no reparados a final del turno.

Resumen, valores obtenidos
T= 48 días

Equipos pendientes al final del día

Mínimo	Media	Máximo
0	8,22	15,2

Días de CERO Eq. Pendientes a fin de turno		
Con_Eq_Pte_fin_Turno (Eq=0) =	6	13%
Días con comienzo de turno con Eq. Pendientes		
Con_Eq_Pte_Inicio_día =	42	88%

Trabajo a tasa constante, total acumulado en 8 semanas, N_Eq(T=48): (λ -η+ Δ)=	**43,2**

λ:Tasa de fallos; η: Tasa de reparación; Δ:Distorsión (factor por trabajo pendiente)

A medida que van quedando equipos pendientes el sistema no puede repararlos con la tasa calculada y el número de equipos crece indefinidamente. En el valor obtenido a tasa constante, se obtiene un valor de 43,2 equipos pendientes y crece regularmente como corresponde a una operación simple aritmética sin discriminación por el concepto aleatorio del fenómeno.

b) Tasa de reparación igual a la tasa de fallos con anomalías ($\mu \approx \lambda$)

Cuando la tasa de reparación es igual a la tasa de fallos, el sistema es cuasi estable pero ligeras distorsiones, modeladas por el índice de final o de comienzo de turno, producen distorsiones en el modelo que pueden ser relevantes en los tiempos de espera de reparación, demasiados equipos pendientes en un día concreto.

La tasa de reparación es, normalmente, el número de reparaciones por unidad de tiempo cuando el servidor está ocupado, no hay tiempos muertos o de espera sin actividad, y las anomalías (fin de turno a inicio sin equipos para reparar, producen distorsiones puntuales como se ve en el modelo.

Esto es congruente con lo indicado anteriormente ya que el efecto real de las distorsiones es que la tasa de reparación es inferior a la tasa de fallos aunque esto sea en un valor muy pequeño, aunque el sistema puede cuasi estabilizarse, ya que de hecho cuando hay equipos pendientes no se producen tiempos muertos de espera y el sistema tiende al equilibrio, pero se mantiene un índice de equipos pendientes que está normalmente fuera de rango o más bien está en niveles no deseados y que puede ser de dos y tres veces la tasa de fallos para un día concreto.

Esto indica que cuando se pueden dar estos efectos hay que tenerlo en cuenta en el cálculo de los equipos de reparación necesarios. En la expresión:

$p = \lambda/c\mu$; c: el número de equipos debe ser algo mayor que el teórico correspondiente al equilibrio matemático para conseguir que el valor de "*p*" sea en todo caso menos de la unidad.

Resumen, valores obtenidos T= 48 días

Equipos pendientes al final del día

Mínimo	Media	Máximo
0	1,61	7,2

Días de CERO Eq. Pendientes a fin de turno		
Con_Eq_Pte_fin_Turno (Eq=0) =	17	35%
Días con comienzo de turno con Eq. Pendientes		
Con_Eq_Pte_Inicio_día =	31	65%

Trabajo a tasa constante, total acumulado en 8 semanas, N_Eq(T=48):	(λ -η+ Δ)=	**14,4**

λ:Tasa de fallos; η: Tasa de reparación; Δ:Distorsión (factor por trabajo pendiente)

c) Tasa de reparación es igual a la tasa de fallos y no hay distorsiones (μ=λ).

En este supuesto se dan distorsiones, tal como corresponde a la ocurrencia de sucesos raros, que tiene probabilidades muy bajas de que sucedan pero alguna vez ocurren. Este supuesto corresponde a la optimización de los recursos pero la dirección y los responsables del servicio de mantenimiento tienen que ser conscientes de que pueden existir y de hecho se darán días conflictivos por acumulación de quipos pendientes, pero el sistema, cuando se evalúa en periodos lagos, recupera estos momentos.

Resumen, valores obtenidos T= 48 días

Equipos pendientes al final del día

Mínimo	Media	Máximo
0	1,12	5,4

Días de CERO Eq. Pendientes a fin de turno		
Con_Eq_Pte_fin_Turno (Eq=0) =	24	50 %
Días con comienzo de turno con Eq. Pendientes		
Con_Eq_Pte_Inicio_día =	24	50 %

Trabajo a tasa constante, total acumulado en 8 semanas, N_Eq(T=48):	$(\lambda - \eta + \Delta)=$	**0**

λ:Tasa de fallos; η: Tasa de reparación; Δ:Distorsión (factor por trabajo pendiente)

Por comparación con el ejemplo anterior, los valores son más regulares, pero siguen existiendo días que doblan la tasa en equipos pendientes. El trabajo a tasa constante da un número de equipos pendiente de cero como corresponde al equilibrio matemático de $\lambda=\mu$. Mayores periodos de tiempo hacen más estable este principio.

En este apartado, y bajo la consideración de que el servicio de mantenimiento es un servicio interno de las fábricas, se puede tomar este supuesto como adecuado para el diseño de talleres de mantenimiento, así corresponde al modelo y la simulación lo confirma, y dar por admitido que pueden darse momento de acumulación de trabajo o bien tener que suplementar (apoyar con medios extra) el servicio por acumulación puntual de averías.

d) Tasa de reparación superior a la tasa de fallos ($\mu \geq \lambda$)

En este supuesto el sistema mantiene el número de equipos pendientes en niveles muy bajos, de hecho el nivel medio de equipos pendientes puede ser de 0 o 1 unidad según el grado de mayoración incluso considerando, como en el ejemplo, cierto grado de distorsión por fin o comienzo de turno. De todas formas es obligado comentar que aunque con probabilidades muy bajas algún día hay pendientes [la probabilidad de que te toque la lotería es ínfima, menor de 10^{-5}, pero a alguien le toca alguna vez].

El resumen para este supuesto es el que se da en la tabla siguiente:

Resumen, valores obtenidos T= 48 días

Equipos pendientes al final del día

Mínimo	Media	Máximo
0	0,24	2,6

Días de CERO Eq. Pendientes a fin de turno		
Con_Eq_Pte_fin_Turno (Eq=0) =	37	77 %
Días con comienzo de turno con Eq. Pendientes		
Con_Eq_Pte_Inicio_día =	11	23 %

Trabajo a tasa constante, total acumulado en 8 semanas, N_Eq(T=48):	$(\lambda - \eta + \Delta)=$	**0**

λ:Tasa de fallos; η: Tasa de reparación; Δ:Distorsión (factor por trabajo pendiente)

Es evidente que el trabajo a tasa constante, cuando la relación es $\lambda<\mu$ en todo momento, es de cero equipos pendientes. Este supuesto es el adecuado para programar los servicios de mantenimiento cuando la exigencia es que el número de equipos fuera de servicio, por indicación o exigencia de la dirección, se deba mantener por debajo de un número determinado y con una alta seguridad (probabilidad) de que así ocurra.

Ofrecemos a continuación al estudiante, aunque sea a estas alturas un poco redundante, un e**jemplo de cómo se comporta el sistema para el supuesto de sistema equilibrado, tasa de reparación igual a la tasa de fallos ($\mu=\lambda$) y sin distorsión**[12]. Realmente hay que hacer un número grande de simulaciones y obtener valores medios.

[12] Cuando se hacen simulaciones con funciones de tipo aleatorio, cada vez que se interactúa con la hoja Excel se produce una simulación diferente.

Estudio de un ciclo bimensual (2x4 semanas); tasa de reparación y tasa de fallos se referencia a T=día

μ: Tasa de reparación (maq./periodo):				**2,2**	Factor por trabajo pendiente				0,00
Sistema Montecarlo Nº aleatorio	Nº Maqui-nas en el día	Nº Maq Día+ Pte.	λ(t)= 2,2	Ud reparada /periodo	Que-dan, siste-ma esta-ble	Quedan, según Prob.	Dia	Para T=O y Eq_ Pte =0	Para T=T y Eq_P te>0
0,08833973	0	0	2,2	2,2	0	0	lunes	si	no
0,01081444	0	0	2,2	2,2	0	0	mart	si	no
0,33704863	1	1	2,2	2,2	0	0	mierc	si	no
0,30620641	1	1	2,2	2,2	0	0	jueves	si	no
0,65781182	3	3	2,2	2,2	0	0,8	viern		si
0,41555555	2	2,8	2,2	2,2	0	0,6	sába		si
			Total_semana 1		0	**0,6**			
0,10897942	0	0,6	2,2	2,2	0	0	lunes	si	no
0,91753478	4	4	2,2	2,2	0	1,8	martes		si
0,98618843	6	7,8	2,2	2,2	0	5,6	mierc		si
0,78688111	3	8,6	2,2	2,2	0	6,4	jueves		si
0,23487907	1	7,4	2,2	2,2	0	5,2	viern		si
0,55796108	2	7,2	2,2	2,2	0	5	sába		si
			Total_semana 2		0	**5**			
0,9972549	7	5	2,2	2,2	0	2,8	lunes		si
0,42339834	2	4,8	2,2	2,2	0	2,6	mart		si
0,55567945	2	4,6	2,2	2,2	0	2,4	mierc		si
0,45210011	2	4,4	2,2	2,2	0	2,2	jueves		si
0,80274633	3	5,2	2,2	2,2	0	3	viern		si
0,83114593	4	7	2,2	2,2	0	4,8	sába		si
			Total_semana 3		0	**4,8**			
0,99680237	7	4,8	2,2	2,2	0	2,6	lunes		si
0,44921918	2	4,6	2,2	2,2	0	2,4	martes		si

0,61928837	2	4,4	2,2	2,2	0	2,2	mierc		si
0,1485029	1	3,2	2,2	2,2	0	1	jueves		si
0,53437948	2	3	2,2	2,2	0	0,8	viern		si
0,7504905	3	3,8	2,2	2,2	0	1,6	sába		si
			Total_semana 4		0	**1,6**			
0,08111775	0	1,6	2,2	2,2	0	0	lunes	si	no
0,29983398	1	1	2,2	2,2	0	0	mart	si	no
0,99043012	6	6	2,2	2,2	0	3,8	mierc		si
0,5745245	2	5,8	2,2	2,2	0	3,6	jueves		si
0,83374565	4	7,6	2,2	2,2	0	5,4	viern		si
0,35947208	2	7,4	2,2	2,2	0	5,2	sába		si
			Total_semana 5		0	**5,2**			
0,07083546	0	5,2	2,2	2,2	0	3	lunes		si
0,24707413	1	4	2,2	2,2	0	1,8	mart		si
0,94714913	5	6,8	2,2	2,2	0	4,6	mierc		si
0,7925493	3	7,6	2,2	2,2	0	5,4	jueves		si
0,46289112	2	7,4	2,2	2,2	0	5,2	viern		si
0,28618255	1	6,2	2,2	2,2	0	4	sába		si
			Total_semana 6		0	**4**			
0,48094303	2	4	2,2	2,2	0	1,8	lunes		si
0,91395903	4	5,8	2,2	2,2	0	3,6	mart		si
0,81124442	3	6,6	2,2	2,2	0	4,4	mierc		si
0,04306584	0	4,4	2,2	2,2	0	2,2	jueves		si
0,58766755	2	4,2	2,2	2,2	0	2	viern		si
0,64402583	3	5	2,2	2,2	0	2,8	sába		si
			Total_semana 7		0	**2,8**			
0,10205998	0	2,8	2,2	2,2	0	0,6	lunes		si
0,42925142	2	2,6	2,2	2,2	0	0,4	mart		si
0,11886333	1	1,4	2,2	2,2	0	0	mierc	si	no
0,52621191	2	2	2,2	2,2	0	0	jueves	si	no
0,65773511	3	3	2,2	2,2	0	0,8	viern		si
0,58480445	2	2,8	2,2	2,2	0	0,6	sába		si

Total_semana 8	0	**0,6**	Total _si=	9	39
			s/ 48 días	19%	81%

Resumen, valores obtenidos T= 48 días

Equipos pendientes al final del día

Mínimo	Media	Máximo
0	2,45	6,4

Días de CERO Eq. Pendientes a fin de turno		
Con_Eq_Pte_fin_Turno (Eq=0)	9	19%
Días con comienzo de turno con Eq. Pendientes		
Con_Eq_Pte_Inicio_día =	39	81%

Trabajo a tasa constante, total acumulado en 8 semanas, N_Eq(T=48):	(λ -η+ Δ)=	**0**

λ:Tasa de fallos; η: Tasa de reparación; Δ:Distorsión (factor por trabajo pendiente)

7.2 CÁLCULO DEL NÚMERO DE MÁQUINAS EN STAND-BY

Ejercicio 7.4 En el almacén de una mina existe un stock de equipos destinado a reemplazar las máquinas estropeadas mientras dura la reparación. Si una máquina en espera no está disponible cuando se necesita los costes (A) para la mina se estiman en A=350 €/semana. Si por el contrario la maquina se encuentra en stock (B), los costes derivados de su almacenamiento se estiman en B=190 € por semana[13].

Este coste, de máquina parada, se puede evaluar por el coste de tener inmovilizado un recurso económico con una tasa de interés correspondiente al pago del dinero por la empresa, más la parte proporcional por espacios ocupados, manejo o manipulación de los equipos, y en general más la parte de gastos generales imputable al almacén.

Se conoce, además, el patrón de fallos (demanda semanal de máquinas por mal funcionamiento o avería). Así, de las 85 semanas estudiadas ha habido 10 semanas en las que solo se han necesitado 5 máquinas, 20 semanas en las que han sido precisas 10 unidades, 30 semanas en las que se han empleado 15 unidades, y finalmente 25 semanas en las que fueron precisas 20 recambios.

Se pide determinar, con los datos anteriores, el número de máquinas más adecuado que se debe disponer en el almacén, en stand-by, preparadas para su utilización, de tal forma que los costes sean mínimos. El patrón de fallos (demanda de máquinas por mal funcionamiento o avería) indicado anteriormente, se resume en la tabla siguiente:

[13] Los costes de almacenamiento por unidad deben ser siempre inferiores a los de avería, de lo contrario nunca interesa tener equipos en stock (en almacén en espera de uso), salvo por otros criterios diferentes al económico.

Demanda semanal, máq/semana; Ni	Ocurrencia (nº de semanas para las que se da la demanda indicada) f_{abs}
5	10
10	20
15	30
20	25
Total:	85 semanas

Solución:

Para determinar cuántas maquinas se deben tener en almacén, preparadas para su utilización, al objeto de minimizar los costes, se supone que el patrón de fallos o necesidades se repite cada 85 semanas, y con la frecuencia indicada, o lo que es lo mismo, la frecuencia del suceso, considerada como probabilidad de un modelo, sigue la ley indicada en la tabla.

Demanda semanal, (máquinas) N_i	Ocurrencia, (semanas) f_{abs}=fa	Probabilidad de fallo. $f_{relativa}$=fr
5	10	10/85= 0,1176
10	20	20/85= 0,2353
15	30	30/85= 0,3529
20	25	25/85= 0,2941
Total	85	Σ fr_i= 1,0 (0,9999)

Se plantea una tabla de doble entrada con los ítems N_i=5, 10, 15, 20 y se compara por parejas con cada uno de los otros valores, se compara necesarios con existencias en stock. Si el número de equipos necesarios es menor que el existente en stock entonces se produce un coste por equipos almacenados de B € por cada equipo almacenado de más.

Si N_n son los equipos necesarios y Na las existencias en almacén, se tiene:

Si $N_n < N_a \rightarrow$ Coste(B)= $(N_a-N_n)\cdot B$

Si el número de equipos necesarios es mayor que el de existencias, entonces se produce un coste de A euros por cada equipo necesarios y que no se puede sustituir ya que no existe en stock.

Si $N_n > N_a \rightarrow$ Coste(A)= $(N_n-N_a)\cdot A$

Y la relación evidente, cuando el número de equipos coincide con el necesario, no hay sobrecostes, $N_n = N_a$

En la tabla siguiente se dan los costes, conforme a la relación indicada Nn|Na de costes, para cada casilla, los de la diagonal son nulos (Nn=Na); y en la columna final se efectúa la suma de las columna de cada fila afectando cada valor de la probabilidad (frecuencia) de ocurrencia del suceso correspondiente, se realiza la operación (i: columnas, j: filas):

Coste_fila: $Cf_i=\sum_i fr_i \cdot \sqrt{(Nn_i - Na_j)^2}$ por (A si i>j), por (B si i<j), por (0 si i=j)

	N_n / N_a	Número de computadores necesarios (N_n)				Coste de la fila i
		5	10	15	20	Cf_i
N_a Número Computadores Almacenados	5	0	1750	3500	5250	3190,95
	10	950	0	1750	3500	1758,65
	15	1900	950	0	1750	**961,65**
	20	2850	1900	950	0	1117,49
	fr_j:	0,1176	0,2353	0,3529	0,2941	*****

El coste de la celda combinada de la columna N_n=15, con la fila N_a=10 será (exceso de demanda): C(15,10)=(15-10)·350=1750

El coste de la celda combinada de la columna N_n=10 y la fila N_a=20 será (exceso de almacén): C(10,20)=(20-10)·190= 1900

El coste para una fila, considerando la frecuencia de cada opción posible será:

1º fila, i=variable, j=1

Cf_1 = (0 · 0,1176)+(1750 · 0,2353)+(3500 · 0,3529)+(5250 · 0,2941) = 3190,95

2º fila, i=variable, j=2

Cf_2 = (950 · 0,1176)+(0 · 0,2353)+(1750 · 0,3529)+(3500 · 0,2941) = 1758,65

3º fila, i=variable, j=3

Cf_3 = (1900 · 0,1176)+(950 · 0,2353)+(0 · 0,3529)+(1750 · 0,2941) = 961,65

4º fila, i=variable, j=4

Cf_4 = (2850 · 0,1176)+(1900 · 0,2353)+(950 · 0,3529)+(0 · 0,2941) = 1117,49

La mejor opción, la de menor coste, es la correspondiente a la fila número 3 y consiste en tener en almacen 15 máquinas, para un estudio con incrementos de 5 Ud. Este resultado está condicionado a que el patrón de fallos se mantenga constante en torno a los valores de la tabla principal. Cuando está sujeto a una cierta ley de variabilidad consecuencia de un proceso estocástico, entonces la solución más general se puede plantear a través de una función de tasa de fallos o necesidades de sustitución que modela el problema.

Aplicamos aquí al planteamiento del ejercicio la función exponencial, con un solo parámetro, tasa de fallos "λ" por sencillez de cálculo, para comparar resultados.

Ejercicio 7.5 Generalización, cálculo de la tasa de sustitución necesaria

El ejercicio anterior se puede generalizar considerando que los valores de la tabla son una muestra de las necesidades de sustitución de equipos

Costes de no sustituir, A: 300 Costes de almacén, B: 180

k_i: Número de máquinas que se necesita sustituir en una semana

f_{abs}: Número de semanas que se necesita este nivel de sustitución

fr: Frecuencia relativa, $fr = fr_i / \Sigma fr_i$

Demanda, máq/semana k_i	Frecuencia f_{abs}	$fr=fr_i/\Sigma fr_i$
5	15	0,143
10	25	0,238
15	35	0,333
20	30	0,286
Total:	105	1,000

$$Pk(t=1) = Pk = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

	Tasa de fallos:	$\lambda=\Sigma fr_i \cdot k_i$ =	13,81	Valores
k_i	$Pr(X=k_i)$	Pr(X<=ki)	Coste €	puntuales
1	1,38924E-05	1,38924E-05	3843	
2	9,5924E-05	0,000109816	3543	
3	0,000441555	0,000551372	3243	
4	0,001524416	0,002075788	2943	
5	0,004210293	**0,00628608**	**2642,9**	**2643,0**
6	0,009690356	0,015976437	2343	

7	0,019117029	0,035093465	2043	
8	0,032999633	0,068093099	1743	
9	0,050634358	0,118727457	1443	
10	0,069923637	**0,188651094**	**1142,9**	**1486,2**
11	0,087782921	0,276434015	843	
12	0,101020028	0,377454043	543	
13	0,107310653	0,484764696	243	
14	0,105850644	0,59061534	34	
15	0,097449799	**0,688065139**	**214,3**	**900,6**
16	0,084108458	0,772173597	394	
17	0,068323397	0,840496993	574	
18	0,052417421	0,892914414	754	
19	0,038097875	0,931012289	934	
20	0,026305675	**0,957317965**	**1114,3**	**1114,2**
21	0,017298517	0,974616481	1294	
22	0,010858376	0,985474858	1474	
23	0,006519522	0,99199438	1654	
23	0,006519522	0,998513902	1654	
24	0,003751312	1	1834	

Ambas soluciones coinciden en los valores extremos, cuando claramente hay exceso de equipos en almacén (para 20 equipos ambos dan 1114,2 € de coste) o defecto evidente de equipos en la solución (para 5 equipos ambos dan 2643 €). Sin embargo, discrepan en la zona central, donde el modelo inicial plantea una solución de 15 equipos a 900,6 € de coste y el modelo exponencial se optimiza para 14 equipos con un coste de 34 € y aporta además una probabilidad de ocurrencia para k_i<=14 del 69%.

Es clara la ventaja de disponer de la probabilidad a la hora de tomar decisiones de costes, p.e se puede desear/preferir como solución un coste de 754 € con una fiabilidad del 90%. Que un modelo se repita 105 semanas de igual forma como si fuera una plantilla es realmente difícil, en estudios a largo plazo interesan los modelos probabilísticos de ocurrencia (ver teoría de colas aplicada al mantenimiento).

Se han realizado cálculos con incrementos de 5 en 5 unidades, lo que es correcto para identificar el punto de mínimo valor en una primera aproximación, válido cuando el rango es muy amplio[14], con $\Delta k=5$ el mínimo es de 15 unidades. Cuando se hacen cálculos con incrementos interesa afinar el mínimo y esto se realiza tanteando valores en el entorno del primer mínimo obtenido, 15 Ud en el ejemplo actual.

Se busca un primer mínimo de forma rápida y en el entorno de este valor se estudia como varía el modelo. En el cuadro siguiente se calculan valores en el entorno de 15 para optimizar el mínimo conforme a la plantilla de fallos inicial (se está optimizando mediante cálculo por fases con fase final de incrementos de 1 Ud. como corresponde a 1 equipo indivisible, en el supuesto de dosificaciones el valor puede ser inferior a la unidad).

	N_n / N_a	Número de computadores necesarios (N_n)				Coste de la fila $_i$
		5	10	15	20	Cf_i
Número Computadores Almacenados (N_a)	13	1440	540	600	2100	1134,8
	14	1620	720	300	1800	1017,8
	15	1800	900	0	1500	900,6
	16	1620	1080	180	1200	891,8
	17	2160	1260	360	900	986,0
	18	2340	1440	540	600	1028,8

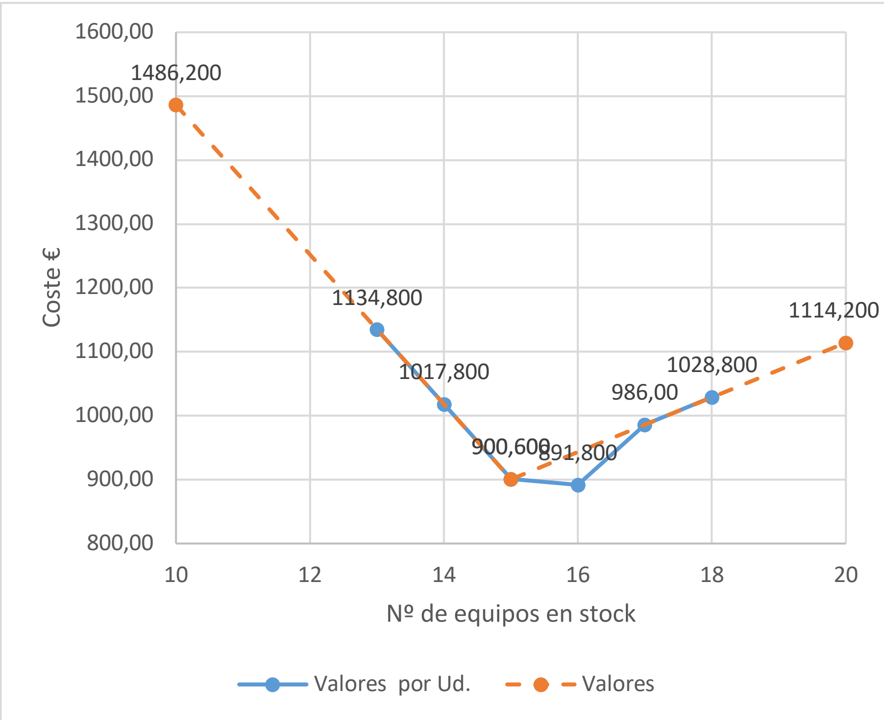
[14] P.e si se tiene que estudiar un modelo entre 10 y 100 Ud, en un primer paso se hace el estudio en incrementos de 10 Ud y luego de 2 Ud. Se optimiza la solución por fases para optimizar el proceso de cálculo. Esto da 14 o 16 operaciones frente a 90 realizado en una sola fase o 50 con incrementos de 2 Ud. En el ejemplo actual se está optimizando mediante el método de cálculo exhaustivo, también denominado cálculo bruto, (estudiar todas las opciones posibles), y esto cuando el incremento es pequeño, y el rango amplio no es aconsejable, pueden salir miles de opciones (para un rango de 100 que se dosifica por unidades de 0,01 salen 10.000 opciones de cálculo).

	fr(i):	0,143	0,238	0,333	0,286	*****

Se observa que la solución óptima corresponde a 16 unidades en stock. En el gráfico se da la solución inicial y la corrección posterior (Incrementos de Δk=5 Ud y para Δk=1 Ud)

Cálculo del ejemplo para una fila tipo:

Fila (Na=16)=1620·0,143+1080·0,238+180·0,333+1200·0,286= 891,8



De la observación de la solución, ver gráfico, se identifican tres zonas, aquella que es claramente un exceso de almacenamiento y el coste es lineal y con pendiente a este exceso, aquella en que hay escasez de equipos y el coste es lineal y con pendiente proporcional al coste de la avería no sustituida y la zona de cambio de pendiente y que está en un entorno al valor medio ponderado (13,81 equipos en el ejemplo).

Dada la diferencia de pendiente (300 frente a 180) interesa tomar la solución hacia el lado de menor pendiente ya que los errores o desviaciones serán proporcionales a 180 €, mientras que en el lado opuesto las desviaciones serán proporcionales a la pendiente y esta es de 300 € por equipo de menos.

Esta condición de menor pendiente es indicativa de hacia donde es más rentable desviar la solución, si se diera el caso inverso[15] (poco probable), de que una unidad en espera es más cara que un tiempo de parada, interesa desviarse una o dos unidades en el sentido de la pendiente mayor, hacia el lado de más espera en este supuesto. Ya se ha indicado que por motivos exclusivos de tipo económico, si el almacenaje es más caro que la reparación no interesa almacenar, pero pueden existir otros motivos como mantener una determinada imagen de servicio, o atender en los servicios de tipo social ante incidencias superiores a los valores medios.

Como conclusión, el punto mínimo está en 16 equipos y para cubrir incidencias y ganar en seguridad es más económico ir a 17 o 18 equipos en almacén, para sustitución, que la opción contraria de ir a 15 o 14 equipos. Para ganar en seguridad, hay que aumentar el número de unidades por el lado en que la pendiente es menor, es una solución más económica para cubrir incidencias en el proceso. Se observa además que para 14 unidades la probabilidad de que el número de averías o necesidades de sustitución sea menor o igual que 14 Ud. es del 59%, y para el caso opuesto, 18 unidades, la probabilidad de ocurrencia es del 89%, lo que mejora el interés de esta solución.

[15] Esta condición de que la maquinaria en stock (parada) pueda ser más cara que la dedicada a producción se puede dar en obra civil o minería, donde la espera de camiones de gran tonelaje, cuando hay varias unidades puede ser más caro (hay que estudiar la solución) que la máquina principal, normalmente una excavadora/cargadora, si bien en el estudio de tiempos interesa que el equipo que avanza el trabajo (el que hace de cuello de botella) no tengo tiempos muertos.

Ejercicio 7.6 Se dispone del histórico de fallos de los últimos 3 meses; 16 semanas trabajando de lunes a viernes en turno de mañana de 7,5 horas, total 600 horas. Se identifican las incidencias por el número de fallos/hora que se producen y que se relacionan en la tabla siguiente. Se considera que el ciclo es representativo del funcionamiento del taller:

Nº de equipos que fallan por hora (A)	Nº de veces que se da este nivel de fallo (B)
1	0
2	120
3	210
4	150
5	90
6	30
7	0
Total	600

Se sabe que el coste medio de la reparación es de 400 €/equipo y el coste del mantenimiento del stock unos 180 €/equipo. Se considera que 600 horas de trabajo es representativo del funcionamiento del taller y se pide calcular el número óptimo de equipos en stock que deben estar dispuestas para su utilización con la condición de que el coste total, máquinas en uso más equipos en stock, sea mínimo.

Solución:

En la tabla siguiente, las columnas A y B son información recogida en fábrica y en la columna tercera se calculan las frecuencias de ocurrencia para cada nivel de avería.

Nº de equipos que fallan por hora (A)	Nº de veces que se da este nivel de fallo (B)	Frecuencia C=B/A
1	0	0
2	120	120/600 = 0,20
3	210	210/600 = 0,35
4	150	150/60 = 0,25
5	90	90/600 = 0,15
6	30	30/600 = 0,05
7	0	0
Total	600	1,00

Las averías producen tiempos de no producción y para paliar esto se puede disponer de un cierto número de equipos de repuesto que sustituyen a la unidad dañada. Esto tiene sentido cuando el coste de mantener un stock en almacén[16] es inferior al de reparación más la pérdida de producción.

Generalmente resulta interesante tener en almacén un determinado número de máquinas para remplazar las que fallan, pero un elevado número en stop pueden acarrear gastos innecesarios. El cálculo se puede enfocar tal como se indica en el ejemplo siguiente.

[16] Un stock en almacén son inversiones improductivas que al menos tiene el coste del dinero para la empresa, más el correspondiente al prorrateo de los espacios, y los servicios correspondientes a la atención y manipulación que requieren estas dotaciones. El stock puede estar en almacén o en la línea de producción como máquina en stand-by que se utiliza cuando se avería una unidad dentro de la línea de fabricación.

	Nn / Na	Número de máquinas necesarios (averías) (Nn)						Coste de la fila (i)
		1	2	3	4	5	6	Cf_i
(Na) Número de máquinas en almacén (stock)	1	0	400	800	1200	1600	2000	1000 €
	2	180	0	400	800	1200	1600	600 €
	3	360	180	0	400	800	1200	316 €
	4	540	360	180	0	400	800	235 €
	5	720	540	360	180	0	400	299 €
	6	900	720	540	360	180	0	450 €
	7	1080	900	720	540	360	180	630 €
	fr_i:	**0,00**	**0,20**	**0,35**	**0,25**	**0,15**	**0,05**	*****

Coste_fila: $Cf_i = \sum_i fr_i \cdot \sqrt{(Nn_i - Na_j)^2}$ por (A si i>j), por (B si i<j), por (0 si i=j)

El coste por hora más económico corresponde a 4 equipos en almacén (235 €/h)

Ejemplo de cálculo de una línea, para Na=5

Cf (Na=5)=720·0,0+540·0,20+360·0,35+180·0,25+0·0,15+400·0,05 = 299 €

BIBLIOGRAFÍA

Chary, S. N. (1988). Production and operations management. Tata McGraw-Hill.

García-Sabater, J. P., & Maheut, J. (2011). Modelos y Métodos de Investigación de Operaciones. Procedimientos para Pensar. Spain, Investigacion Group ROGLE, 20112012, 42-44.

Gross, Donald. (2008). Fundamentals of queueing theory. John Wiley & Sons.

Jardine, A. K., & Tsang, A. H. (2013). Maintenance, replacement, and reliability: theory and applications. CRC press.

Kumar, S. A., & Suresh, N. (2009). Operations management. New Age International.

Morse, P. M. (2004). Queues, inventories and maintenance: the analysis of operational systems with variable demand and supply. Courier Corporation.

Ríos, Sixto. (1973). Métodos estadísticos. Ediciones del Castillo. España.

Shenoy, G. V., & Srivastava, U. K. (1986). Operations Research for management. New Age International.