Lugares geométricos:

Bisectriz
Mediatriz
Circunferencia
Ángulo central e inscrito
Arco capaz. Problema de Potenot
Elipse
Hipérbola
Parábola

Proporcionalidad

Operaciones matemáticas
Teorema de Thales
Cuarta proporcional
Tercera proporcional
Media proporcional
Áureo

Transformaciones geométricas.

De posición

Traslación
Giro
Simetría

De forma

Igualdad
Equivalencia
Semejanza-Homotecia

Polígonos

Triángulos
Cuadriláteros
Otros

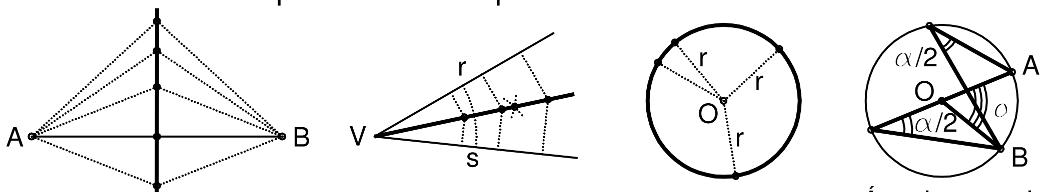
Tangencias

Geometría elemental

Lugares geométricos (LG):

<u>Mediatriz</u>: Es el LG de los puntos que equidistan de dos puntos A y B. Es la perpendicular al segmento AB por su punto medio.
<u>Bisectriz</u>: Es el LG de los puntos que equidistan de dos líneas r y s.
<u>Circunferencia</u>: Es el LG de los puntos que equidistan de uno, llamado centro.

- Ángulo: entre dos rectas que se cortan en un punto V o vértice, es la amplitud del arco comprendido entre ambas cuyo centro es V.
- Ángulos complementarios son los que suman 90º y suplementarios 180º.
- Ángulo central: En una circunferencia es el ángulo cuyo vértice está en el centro, la medida del ángulo es la del arco de circunferencia que abarca.
- Ángulo inscrito: Es el ángulo cuyo vértice está en la circunferencia, su medida es la mitad que la del arco que abarca.



Mediatriz de AB | Bisectriz de r,s | Circunferencia | Ángulo central e inscrito

Figura 1: Lugares geométricos y ángulos.

<u>Arco capaz</u> (figura 2). Es el LG de los puntos que son vértice de un ángulo cuyos lados pasan por dos puntos A y B, extremos de un segmento. Es un arco de circunferencia.

- Construcción del arco capaz: Por el extremo del segmento se traza una línea que forme el ángulo complementario al que se pide. Se traza la mediatriz y la intersección de ambas líneas es el centro de la circunferencia solución.

Problema de Potenot: Determínese la posición de un buque que ve los puntos A y B de la costa con un ángulo de 30º y los puntos B y C con un ángulo de 60º.

Para su resolución se aplica el arco capaz para AB y BC y en su intersección se encuentra el buque.

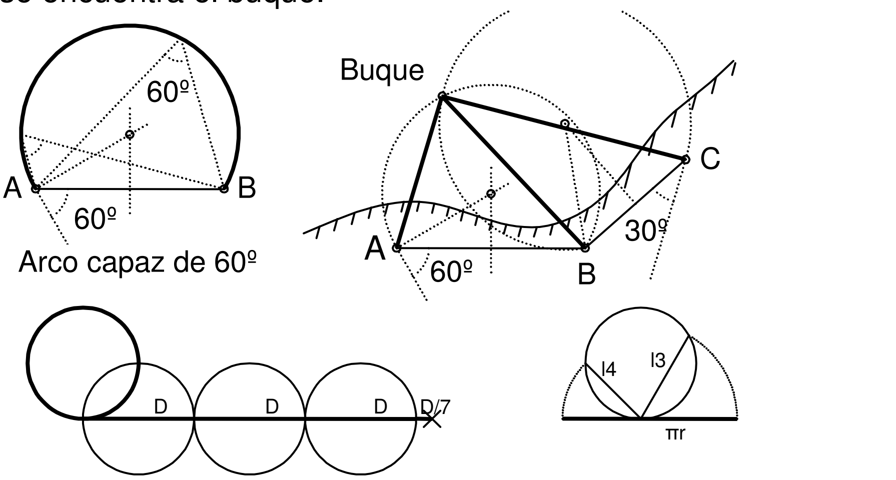


Figura 2: Arco capaz. Problema de Potenot. Rectificación circunferencia.

- Rectificación de la circunferencia. Consiste en obtener la longitud lineal de la circunferencia gráficamente. El resultado, aunque no es exacto, es bastante preciso.

La longitud de la circunferencia es l=2πr=πD≈22/7 D=3D+1/7 D.

La longitud de 1/2 circunferencia es πr≈l3+l4=r√3+r√4. El error es 0,0046.

Curvas cónicas (figura 3): Resultan de la sección plana de una superficie cónica.

- Teorema de Dandelin: las esferas inscritas al cono y tangentes al plano sección, tienen el punto de tangencia en un foco F-F'. Se deducen las siguientes definiciones:

Elipse: Es el LG de los puntos cuya suma de distancias r, r' a otros dos puntos fijos F y F', llamados focos, es constante e igual a 2a (a: es el semieje mayor de la elipse)

- Construcción del jardinero: uniendo con una cuerda de longitud 2a, dos puntos F y F', manteniendo tensa la cuerda se traza una elipse.

Hipérbola: Es el LG de los puntos cuya diferencia de distancias r, r' a otros dos puntos fijos F y F', llamados focos, es constante e igual a 2a.

Parábola: Es el LG de los puntos que equidistan del foco F y de una línea d, denominada directriz.

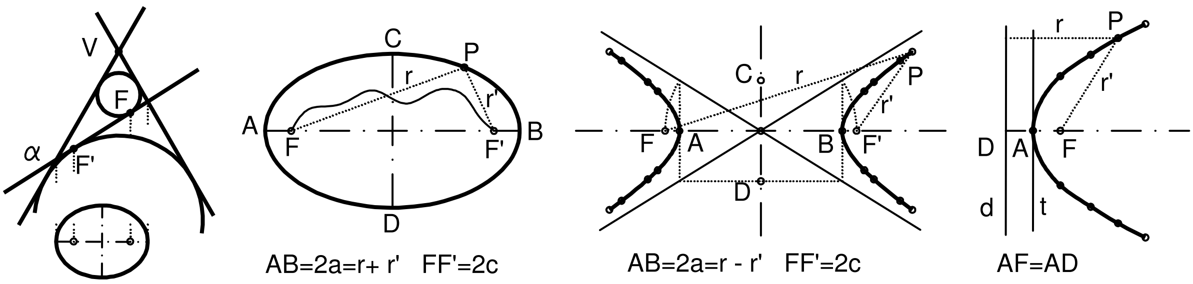
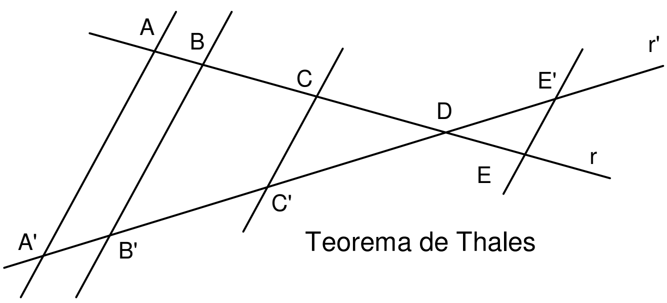


Figura 3: Curvas cónicas.

Proporcionalidad

Teorema de Thales: Si dos rectas r r' se cortan por una serie de paralelas, los segmentos determinados en una de ellas son proporcionales a los que determinados en la otra. Así:

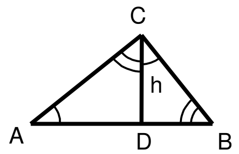


Teorema de Thales

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{BE}{B'E'}=\ldots$$

Relaciones geométricas de los triángulos rectángulos: En un triángulo rectángulo ABC, la altura perpendicular a la hipotenusa lo divide en otros dos triángulos rectángulos ACD y BCD, los cuales son semejantes al original, ya que los ángulos son iguales. Es decir, los lados respectivos son proporcionales. También, la relación entre los lados y la altura de uno de los triángulos, se conserva en los demás.

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{BC}\ ;\ \frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{BC}\ ;\ ...$$



Cuarta proporcional:

$$\frac{a}{b}=\frac{x}{c}\ ;\quad ac=bx$$

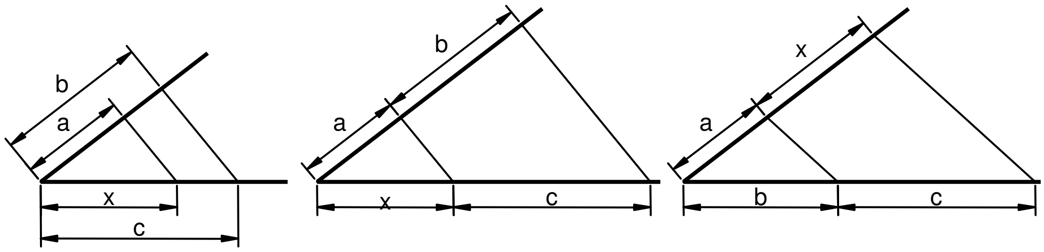
Tercera proporcional:

$$\frac{a}{b}=\frac{x}{a}\ ;\quad a^2=bx$$

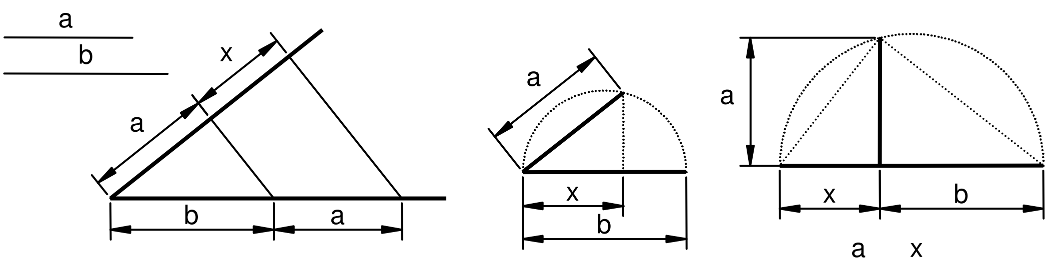
Media proporcional:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}\ ;\quad x^2=ab$$

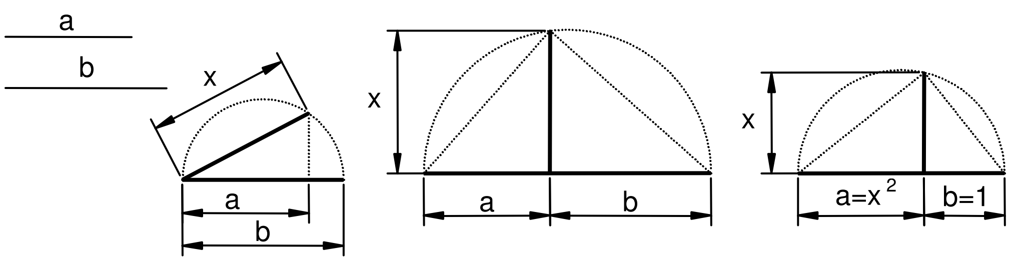
Estas magnitudes se pueden obtener aplicando el T. de Thales, y por medio de las relaciones geométricas de los triángulos rectángulos (figura 4).



Cuarta proporcional **x** a tres segmentos a, b, c; ac=bx; $\frac{a}{b}=\frac{x}{c}$



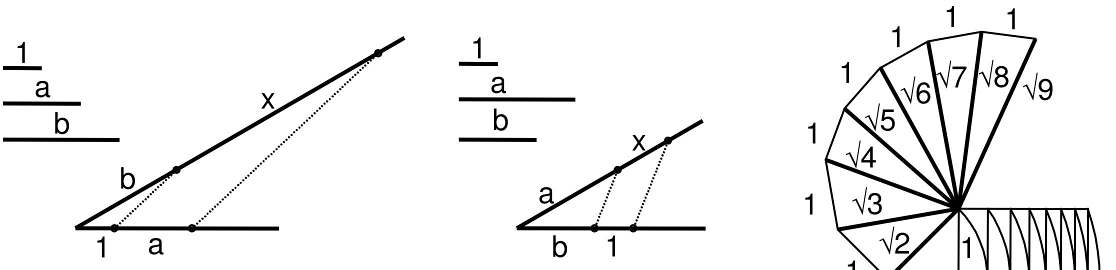
Tercera proporcional **x** a dos segmentos a, b; $a^2=bx$; $\frac{a}{b}=\frac{x}{a}$



Media proporcional **x** a dos segmentos a, b; $x^2=a\cdot b$; $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ Si b=1; $\mathbf{x=\sqrt{a}}$

Figura 4: Cuarta, tercera y media proporcional. Formas de obtenerlas.

Operaciones matemáticas (figura 5): Aplicación directa del T. de Thales y del de Pitágoras es la resolución gráfica del producto, cociente y raíz cuadrada.



Producto: $x = ab$; $\dfrac{b}{1} = \dfrac{x}{a}$ Cociente: $x = a/b$; $\dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{1}$ Raíz cuadrada. (2 métodos)

Figura 5: Operaciones matemáticas.

Áureo (figura 6): Se dice que un punto M divide a AB en media y extrema razón si

$$\mathbf{AM^2 = AB \times MB}. \qquad AM'^2 = AB \times M'B \qquad AB^2 = AC \times AD$$

Esta proporción, denominada como “divina” se da en numerosas ocasiones en la naturaleza y es considerada arquitectónicamente desde la antigüedad, como una proporción que da un carácter armonioso a las formas.

Analíticamente, el áureo de la unidad es: $(\sqrt{5}-1)/2 = 0{,}618$

El inverso: $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618$ Es decir, 1 es el áureo de 1,618

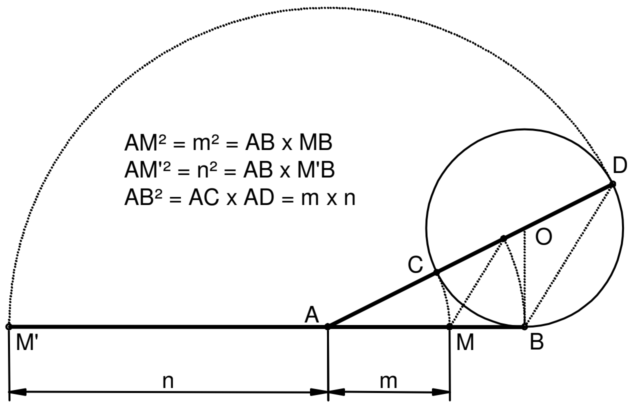


Figura 6: Áureo de un segmento.

Transformaciones geométricas.

De posición (figura 7):

Traslación: Una figura que al cambiar de posición, todos sus puntos recorren la misma distancia, efectúa una traslación. Ambas figuras permanecen iguales.

Giro: Es cuando una figura al cambiar de posición, todos sus puntos giran el mismo ángulo con respecto a un punto. Ambas figuras permanecen iguales.

Simetría: Si en dos figuras, cada par de puntos homólogos, tienen la misma distancia con respecto a un punto o recta, se dice que son simétricas con respecto a un punto o un eje. Ambas figuras son equivalentes.

De forma (figura 7):

Igualdad: Dos figuras son iguales si tienen la misma forma y tamaño. Es decir, sus ángulos y lados tienen la misma medida.

Equivalencia: Dos figuras son equivalentes si tienen diferente forma y el mismo tamaño.

Semejanza-Homotecia: dos figuras son semejantes si tienen la misma forma y distinto tamaño. Es decir, los ángulos homólogos son iguales y sus lados proporcionales.

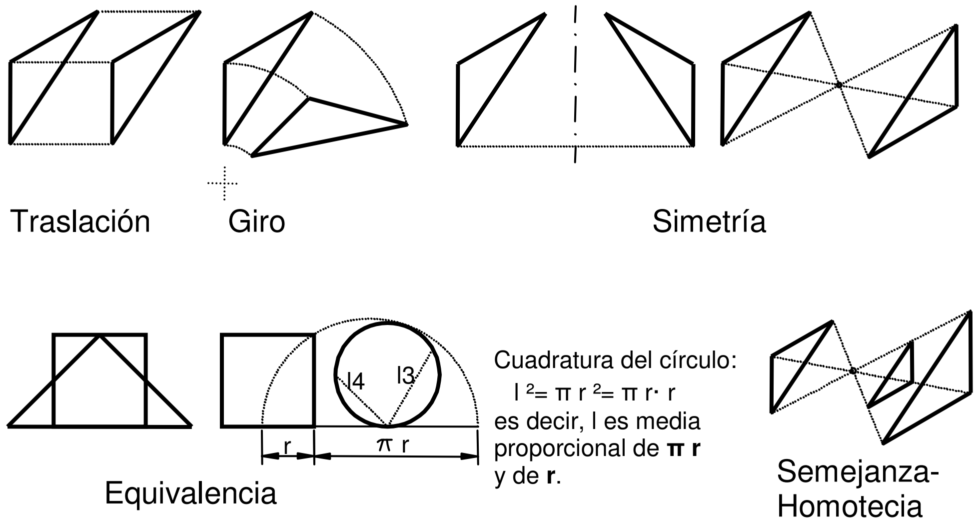


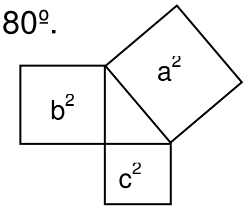
Figura 7: Transformaciones geométricas.

Polígonos. Triángulos.

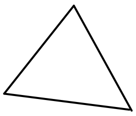
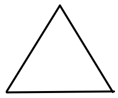
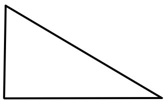
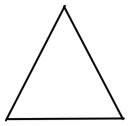
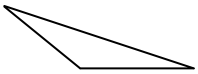
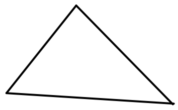
Son polígonos de tres lados.

Propiedades.

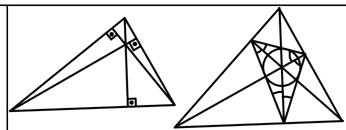
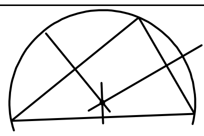
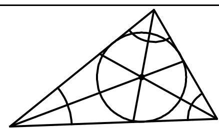
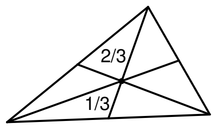
- La suma de los ángulos interiores de un triángulo A+B+C=180º.
- Su superficie es S = base x altura / 2.
- Teorema de Pitágoras: En triángulos rectángulos, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. $a^2 = b^2+c^2$



- Clasificación

	Según ÁNGULO	Según LADOS	
	Acutángulo Todos los ángulos agudos.	Equilátero Lados y ángulos iguales. 60º	
	Recto Un ángulo es de 90º	Isósceles Dos lados iguales. Dos ángulos iguales.	
	Obtusángulo Un ángulo obtuso	Escaleno Todos los lados y ángulos diferentes.	

- Elementos

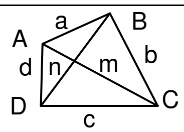
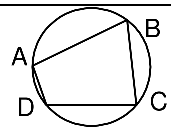
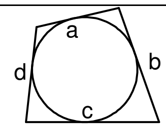
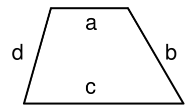
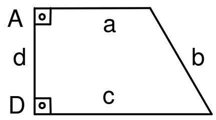
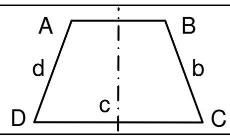
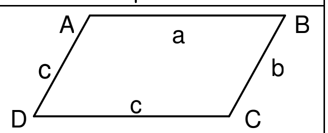
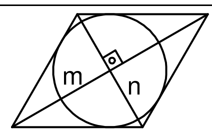
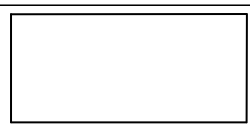
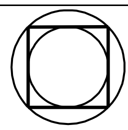
Alturas Perpendicular a cada lado por el vértice opuesto	Ortocentro Tr. Órtico, se obtiene al unir los pies de las alturas, que son bisectrices del Tr. Ortico.	
Mediatrices Son perpendiculares a cada lado por el punto medio.	Circuncentro Es el centro de una circunferencia circunscrita.	
Bisectrices Son bisectrices.	Incentro Es el centro de una circunferencia inscrita.	
Medianas Van del punto medio del lado al vértice opuesto	Baricentro Es el centro de gravedad del triángulo. Dista 1/3 del lado y 2/3 del vértice.	

Cuadriláteros.

Son polígonos de cuatro lados.

Propiedades:
- La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es A+B+C+D=360º
- Las diagonales son líneas que unen vértices no contiguos. Tiene dos.
- La superficie, es la suma de la de los dos triángulos en que lo divide una diagonal. En el cuadrado y rectángulo es el producto de dos lados contiguos.

- Clasificación

	Lados a,b,c,d Ángulos A,B,C,D	Diagonales m,n	
Cuadrilátero	a≠b≠c≠d A≠B≠C≠D	m≠n	
Cuadrilátero de cuerdas o inscrito	a≠b≠c≠d A+B=C+D=180º	m≠n m·n= a·c+b·d T. de Ptolomeo	
Cuadrilátero de tangentes o circunscrito	a+c = b+d A≠B≠C≠D	m≠n	
Trapecio escaleno	a≠b≠c≠d , a // c A≠B≠C≠D	m≠n	
Trapecio rectángulo	a≠b≠c≠d, a // c A = D = 90º; B≠C	m≠n	
Trapecio isósceles	a≠c ; b = d, a // c A = B ; C = D	m=n	
Romboide	a=c; b=d; a//c; b//d A = C ; B = D	m≠n	
Rombo	a=b=c=d; a//c; b//d A = C ; B = D	m≠n ; m ⊥ n	
Rectángulo	a=c; b=d; a//c; b//d A=B=C=D= 90º	m=n	
Cuadrado	a=b=c=d; a//c; b//d A=B=C=D= 90º	m=n ; m ⊥ n	

Otros polígonos.

Polígono convexo: Es cuando todo el polígono se encuentra en uno de los dos semiplanos determinados por un lado cualquiera. Es decir todos los lados miden menos de 180º. En caso contrario es cóncavo (figura 8).

Ángulos interiores: son los formados por dos lados (l) adyacentes. En polígonos convexos de n lados, suman 180º(n-2). Si el polígono es regular los lados forman entre sí 180º(n-2)/n.

Diagonal: es una línea que une dos vértices no consecutivos. Hay n(n-3)/2

Perímetro: es la suma de las longitudes de sus lados (p=n·l si es regular).

Polígono regular: es el que tiene todos sus lados y ángulos iguales.

Apotema (a): es la distancia del punto medio al lado del polígono. En polígonos regulares es el radio de la circunferencia inscrita. La relación entre la apotema y el lado es l=2·a·tg(180/n).

Área del polígono regular: S=p·a/2=n·l·a/2.

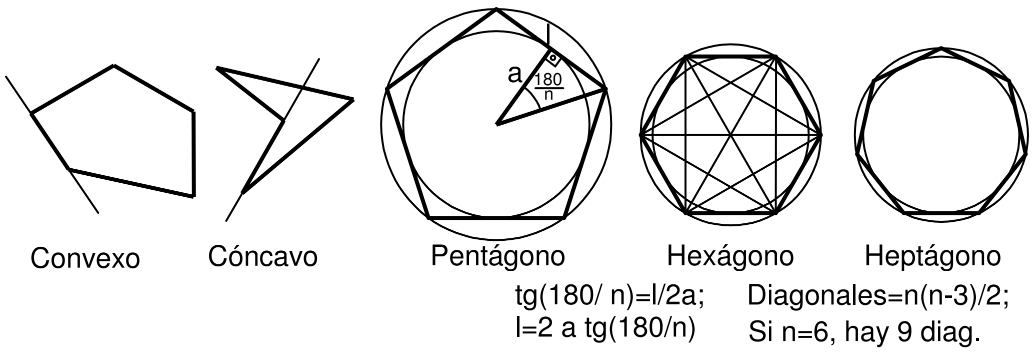


Figura 8: Polígonos.

Tangencias.

Una tangencia es la unión de dos líneas de modo que en el punto de unión la tangente sea la misma a ambos lados. Es decir, que haya continuidad en la línea resultante. Para ello, entre dos circunferencias, el punto de tangencia está alineado con los centros. Y entre circunferencia y recta, en el punto de tangencia, el radio es perpendicular a la línea (figura 9).

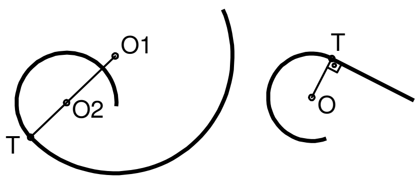
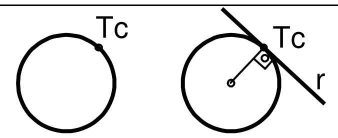
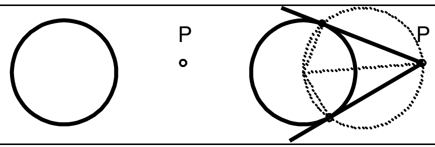
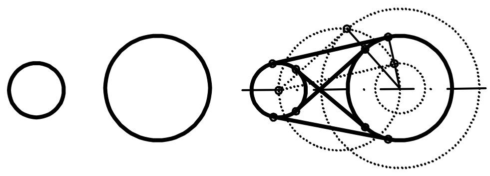
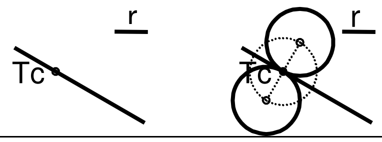
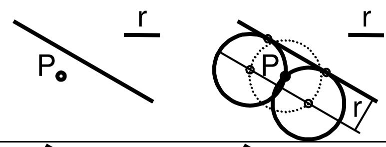
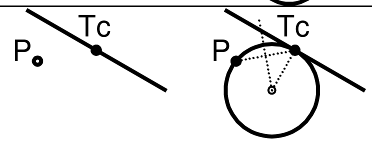
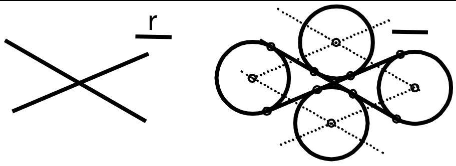
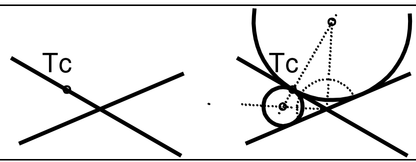
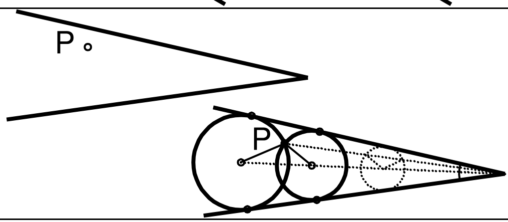
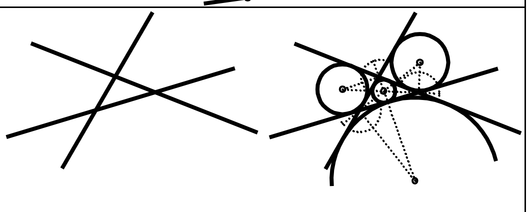
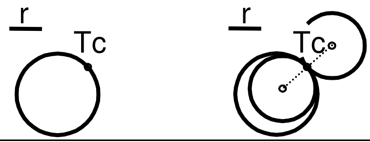
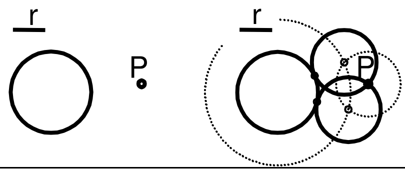
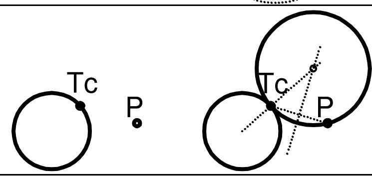
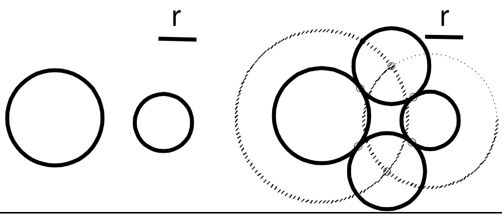
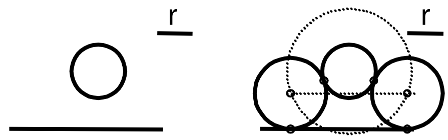
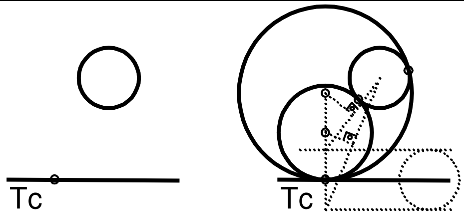
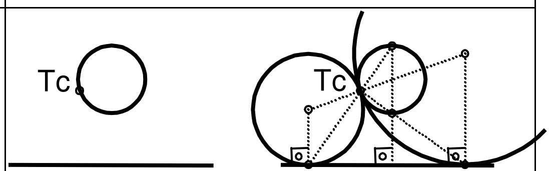


Figura 9. Tangencias elementales.

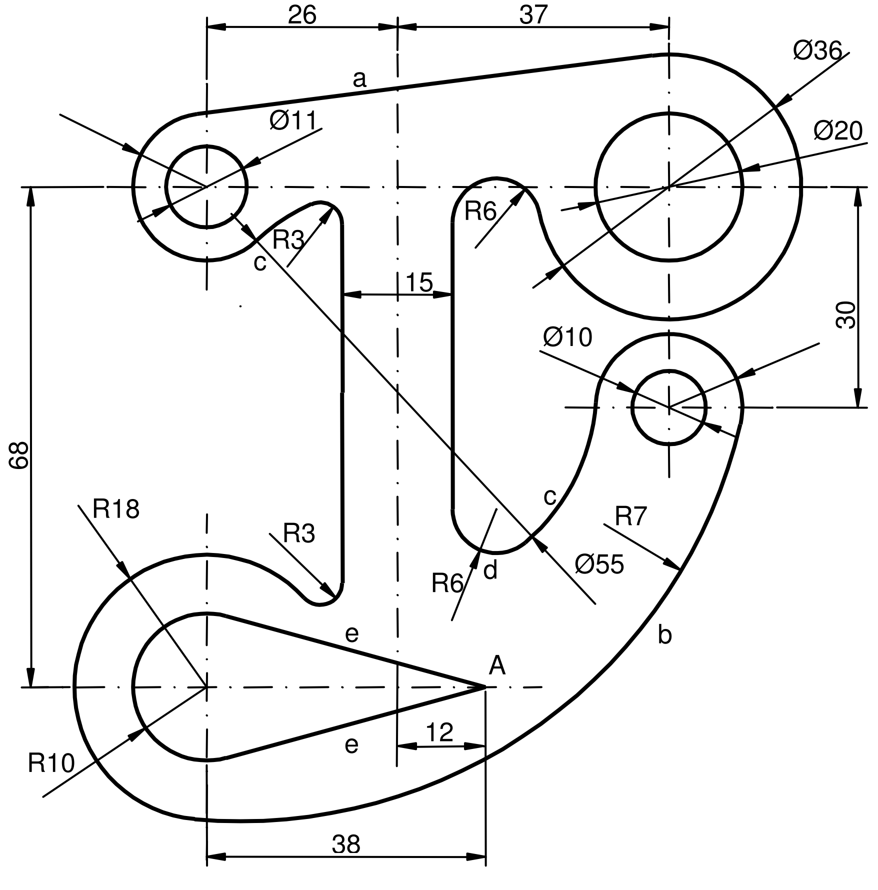
Los métodos de resolución que se van a tratar son: por lugares geométricos (LG), mediante contracción-dilatación (CD) y homotecia (H) (otros procedimientos son potencia e inversión). Por LG se aplican de modo que se obtienen los puntos que cumplen todos los requisitos para hacer la tangencia pedida. Por CD se dilatan y contraen los elementos de la tangencia, circunferencias y rectas, de modo que al transformar una circunferencia en punto, se resuelve por LG, a continuación se deshace la CD obteniéndose la solución. En la H se resuelve un caso genérico y por homotecia se obtiene la solución. A continuación se ven varios casos:

CASO		**INDICACIONES para resolverla.**	**DATOS de la tangencia. RESOLUCIÓN**
a) Rectas tgs. a una circunferencia.	1- Conocido el punto de tangencia en ella.		
	2- Por punto exterior a ella.	Por LG, radio y tg. forman 90º.	
b) Rectas tgs. a dos circunfs.	3- Exteriores e interiores a ambas.	Por CD, se resuelve como tg a pto y circunf. y se deshace la CD trazando paralelas.	
c) Circunferencia tangente a una recta.	4- Dado el radio y el punto de tangencia.	Por LG, circunf. y perpendicular por el punto de tangencia.	
	5- Dado el radio y un punto P.	Por LG, paralela a la recta y circunf. por P.	
	6- Dado un punto de tangencia y un punto P.	Por LG, mediatriz a P-Tc y perpendicu- lar a la recta por Tc.	
d) Circunferencia tangente a dos rectas.	7- Dado el radio.	Por LG. Se trazan paralelas a distancia r y se obtienen los cuatro centros de las circunf. solución.	
	8- Dado un punto de tangencia.	Por LG. Bisectrices y perpendicular por Tc.	
	9- Que pasen por P.	Por LG y H. Se traza bisectriz y línea que pasa por P. Se traza circunf. y por H se obtienen las soluciones.	
e) Circunfs tgs. a tres rectas.	10-	Por LG. Se trazan bisectrices y los ptos de corte son los centros de las cuatro circunf. solución.	

CASO		INDICACIONES para resolverla.	DATOS de la tangencia. RESOLUCIÓN
f) Circunferencias tangentes a una circunferencia	11- Conocido el radio y el punto de tangencia.	Por LG, Tc con el centro de la circunf. a radio r.	
	12- Conocido el radio y un punto P.	Por LG, circunf. de radio el de la circunf. dada más r y por P, circunf. de radio r.	
	13- Conocido el punto de tangencia y un punto P.	Por LG, mediatriz de Tc-P y perp. por Tc a la circunf.	
g) Circunfs tgs. a dos circunfs.	14- Dado el radio.	Por LG de los centros de circunf. de radio r tangentes a las dadas.	
h) Circunfs. tangentes a una recta y una circunf.	15- Dado el radio.	Por LG, circunf. de radio +r y paralela a la recta a distancia r.	
	16- Dado el punto de tangencia en la recta.	Por LG, paralelas a la recta a distancia r, perpendicular por Tc. Los puntos de corte, se unen con el centro de la circ. y la mediatriz da los centros solución.	
	17- Dado el punto de tangencia en la circunferencia.	Por LG, se traza diámetro perpend. a la recta, se une Tc con los extremos del diámetro y donde cortan a la recta, se traza perpend, las cuales cortan a la línea que une Tc con el centro de la circunf.	

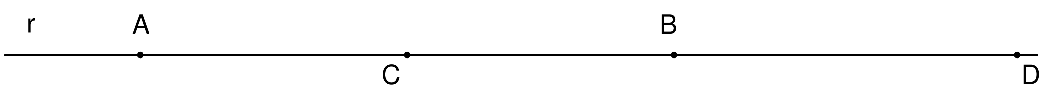
Ejercicio 1:

Dibújense las construcciones para la representación de la junta de la figura adjunta, siguiendo el orden que se indica:
1º. Construir la tangente a, a dos circunferencias dadas de radios 10 y18 mm
2º. Dibujar el arco b tangente a dos circunferencias de radios 10 y 18 mm.
3º. Trazar los arcos c de una circunferencia de 55 mm de diámetro, tangentes a los círculos de radio 10 mm.
4º. Construir el arco d del empalme entre el arco anterior y la recta.
5º. Trazar las líneas e tangentes al círculo de radio 10 mm. desde A.



Ejercicio 2:

Sobre una recta r se fijan dos segmentos AB y CD.
1º. Hallar los puntos en los cuales el segmento AB se ve bajo un ángulo de 60º y el CD bajo un ángulo de 45º.
2º. ¿Existe algún punto en el cual dichos segmentos se verán bajo los ángulos suplementarios de los dados? (AB bajo 120º y el CD bajo 135º).
3º. Únase uno de los puntos obtenidos en el apartado 1 con A y B y hállense las circunferencias inscrita y circunscrita a dicho triángulo.



Ejercicio 3:

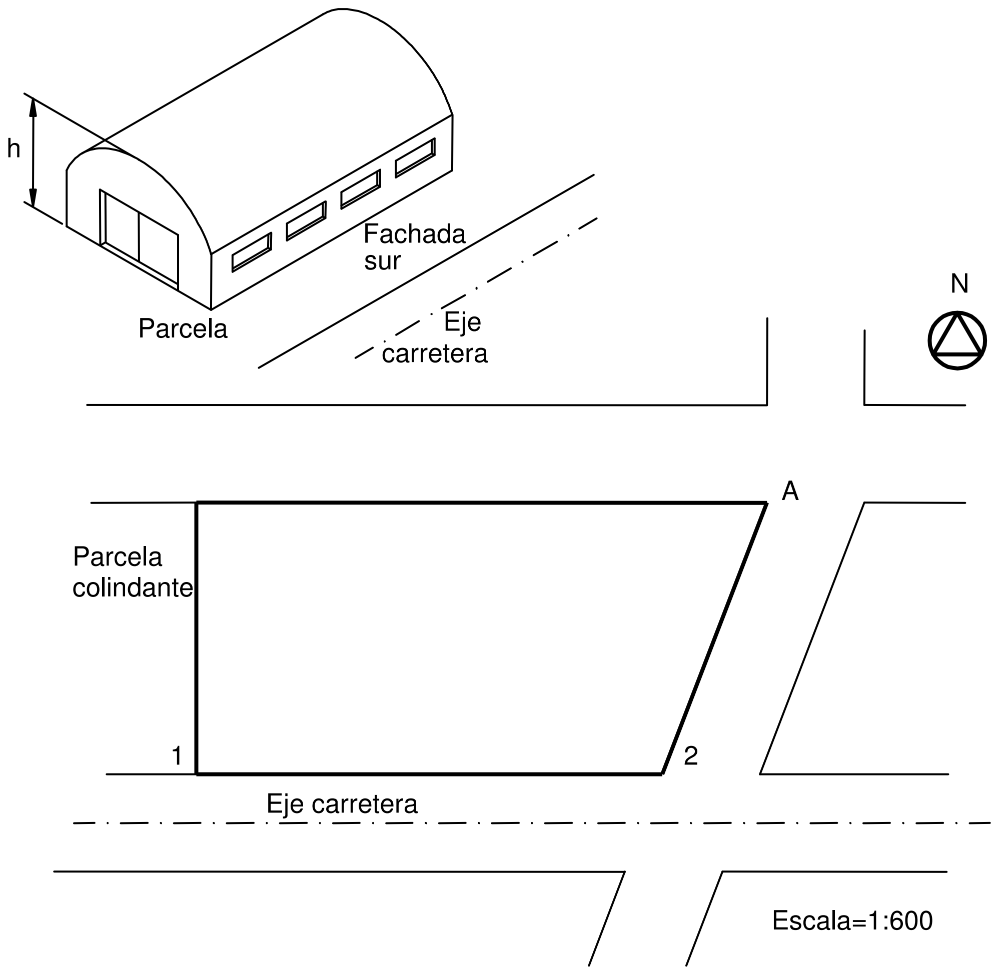
El plano adjunto representa la planta de una parcela de un polígono industrial, a escala 1/600.

El propietario nos encarga el proyecto de una nave industrial, de planta rectangular en dicha parcela y para su realización, será necesario aplicar las condiciones impuestas por las Normas de Planeamiento:

- La edificación estará separada 7 m. del límite con la parcela colindante.
- La fachada Sur será paralela al Eje de la carretera y estará situada a una distancia del mismo de 9 m. La proporción entre la longitud 1-2 de la parcela y la de la fachada Sur será de 3/5.

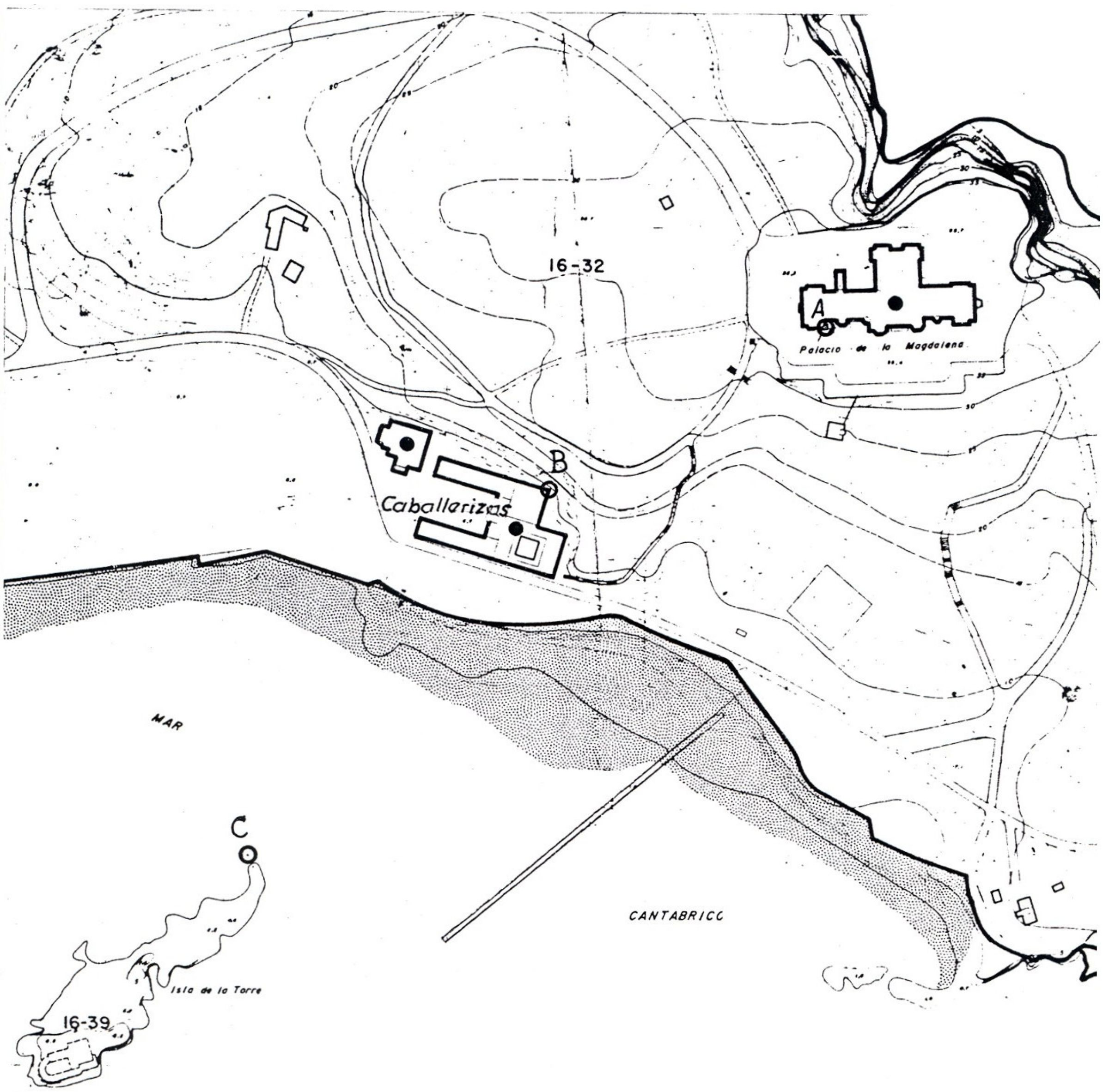
Se pide:

1. Dibujar la parcela a escala 1/200 y situar la nave en ella, hallando gráficamente la dimensión de la fachada Sur y sabiendo que la fachada Este se ve desde el punto A bajo un ángulo de 30º. Hallar el lugar geométrico de los puntos que cumplen la misma condición que A.
2. Determinar la verdadera magnitud de la fachada en m.
3. Determinar la altura de la nave, en metros, sabiendo que la fachada Este es media proporcional entre dicha altura y la fachada Sur de la citada nave.



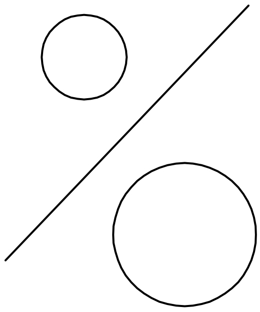
Ejercicio 4:

1. Indicar a que escala está el plano adjunto, sabiendo que la distancia marcada en el plano, desde la esquina A del Palacio de la Magdalena hasta el punto B del edificio de las caballerizas, mide en la realidad 160 metros.
2. La Junta del Puerto desea implantar una luz de situación en al zona de la Península de la Magdalena. Para ello pretende construir una torre, cuya implantación deberá cumplir las siguientes condiciones:
a) la distancia AB, anteriormente hallada, de debe ver desde la torre bajo un ángulo de 60º.
b) La distancia BC, desde el punto señalado del edificio de Caballerizas hasta el señalado por C, en la isla de la Torre deberá verse bajo un ángulo de 45º.
Se pide: señalar en el plano el punto de situación de la torre luminosa.



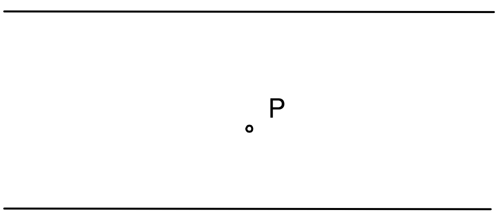
Ejercicio 5:

Dadas la recta y las circunferencias de la figura, se pide dibujar un cuadrado tal que una diagonal esté situada sobre la recta dada y los otros dos vértices sobre las circunferencias (Selectividad 97).



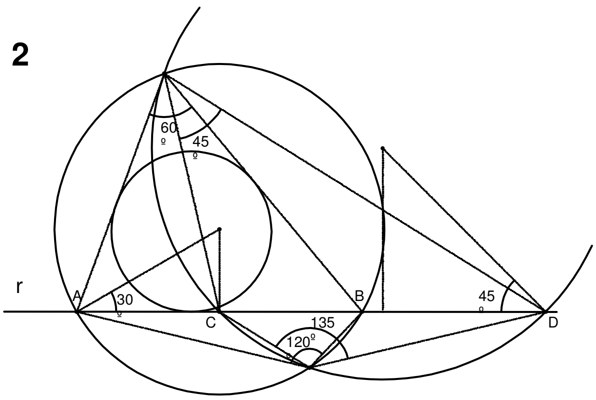
Ejercicio 6:

Dadas las dos rectas y el punto P trazar los cuadrados con vértice en P y otro en cada una de las rectas (Selectividad 96).

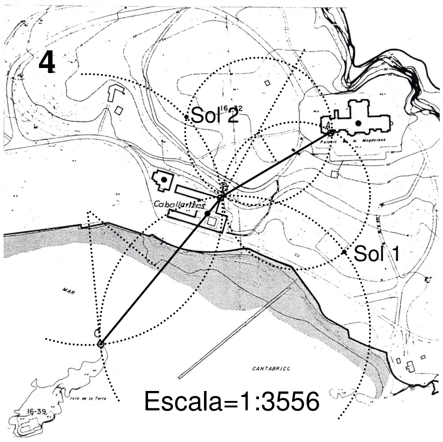


Soluciones:

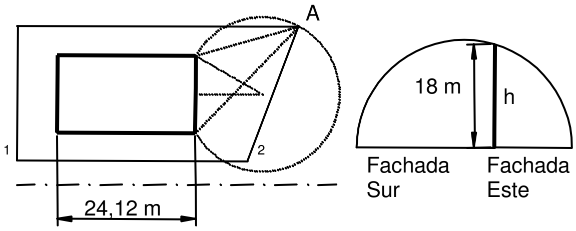
2



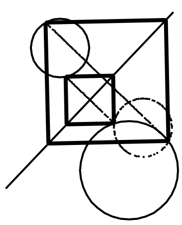
4



3



5 Simetría



6 Giro