

TEMA PRELIMINAR

1. Sistemas de Representación y Geometría.

En esta parte de la introducción, se trata de encuadrar el estudio de los sistemas de representación dentro de lo que es la geometría. Para ello se va a intentar mostrar de forma somera, qué se entiende por geometría y qué aspectos abarcan las diferentes partes en que se ha estructurado tras más de 4000 años de historia.

Los sistemas de representación son objeto de estudio en la geometría descriptiva, la cual se fundamenta en la geometría proyectiva.

En el diccionario de la Real Academia se encuentran las siguientes definiciones, que permiten acercarse a la **definición de geometría**:

Geometría: Medida del espacio ocupado por un cuerpo.

Dimensión: Longitud, área o volumen de una línea, superficie o un cuerpo, respectivamente.
Extensión de un objeto en una dirección determinada.

Medir: Es comparar una cantidad con su respectiva unidad, con el fin de averiguar cuantas veces la primera contiene la segunda.

Así, por consiguiente:

- La medida de un cuerpo es su volumen y tiene tres dimensiones.
- La medida de una superficie es su área y tiene dos dimensiones.
- La medida de una línea es su longitud y tiene una dimensión.
- La medida de un ángulo es su graduación y tiene una dimensión.

No obstante, esta definición de geometría resulta insuficiente para abarcar los diferentes campos de estudio que actualmente tiene, como son los espacios abstractos y ciertas partes de la geometría que están muy relacionadas con otras partes de las matemáticas, por ejemplo la geometría algebraica con el álgebra.

Para realizar una mejor aproximación de lo que se entiende por geometría, se recurre a Puig Adam, que da la siguiente definición: La geometría estudia relaciones que ligan directa o indirectamente los elementos (puntos, rectas, planos) constitutivos de las figuras geométricas.

A continuación para presentar el **método que sigue la geometría** para su desarrollo, se da el significado de los vocablos que se van emplear:

Definición: Proposición que expone con claridad y exactitud las características genéricas y diferenciadas de una cosa material o inmaterial.

Axioma: Principio, sentencia, proposición tan clara y evidente que no necesita demostración.

Postulado: Supuesto que se establece para fundar una demostración.

Postulado y axioma se consideran sinónimos.

Proposición: Enunciado de una verdad demostrada o que se trata de demostrar.

Teorema: Proposición que afirma una verdad demostrable.

La geometría se desarrolla siguiendo el proceso de razonamiento, que con gran claridad, expresa Puig Adam como sigue:

- 1º. Enunciar los conceptos primarios - punto, recta, plano -, sin definirlos, ya que no es posible referirlos a otros más sencillos, (se puede dar una descripción más o menos aproximada).
- 2º Admitir ciertas propiedades que relacionan estos conceptos, sin demostrarlos, es decir, enunciar los axiomas correspondientes.
- 3º Deducir lógicamente los restantes teoremas o propiedades geométricas, a partir de conceptos primarios y axiomas.

La importancia del método se debe a que es el fundamento que ha permitido desarrollar y estructurar la geometría tal y como actualmente se la conoce.

La trascendencia que tiene **Euclides** y su obra 'Elementos de Geometría', se debe a que los conocimientos de la época los estructuró y ordenó siguiendo un método similar al expuesto. No fue perfecto, y el tiempo lo ha mejorado, pero su validez perdura después de 23 siglos.

Euclides enunció sus cinco axiomas o postulados de carácter geométrico, que por su importancia histórica se transcriben, como sigue:

“Postúlese: 1) que por cualquier punto se pueda trazar una recta que pasa por otro punto cualquiera; 2) que toda recta limitada pueda prolongarse indefinidamente en la misma dirección; 3) que con un centro dado y un radio dado se pueda trazar un círculo; 4) que todos los ángulos rectos sean iguales entre sí, y 5) que si una recta, al cortar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectos.”

El quinto postulado es el que se denomina de Euclides y ha tenido gran trascendencia histórica en el desarrollo de la geometría. Expresado de otro

modo, dice: “Por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela a dicha recta, y sólo una.”

Actualmente hay distintos sistemas de axiomas que dan lugar a que la geometría se desarrolle de formas diferentes, en consecuencia, se puede hablar de geometría euclídea o métrica, geometría hiperbólica, geometría de Riemann.

Dentro del sistema de axiomas que da lugar a la geometría euclídea o métrica, se estudian diferentes transformaciones, como las métricas, que dan lugar a la geometría métrica; las proyectivas, a la geometría proyectiva; las afinidades, a la geometría afín, etc.

Las **ramas de la geometría** que afectan al estudio de los sistemas de representación son: la geometría métrica o euclídea, la geometría proyectiva y la geometría descriptiva, de las cuales se va a dar una somera descripción.

La **geometría euclídea** se puede definir en un sentido estricto como la que se deduce de los axiomas de Euclides (completados), que trata cuestiones del plano y del espacio, y comprende todas las nociones que son comunes en estudios elementales de geometría. En un sentido más amplio, estudia, en un espacio euclídeo de dimensión cualquiera dotado de una noción de distancia, cuestiones relativas a figuras que desde un punto de vista analítico son de primer y segundo grado, y de las figuras que se construyen con las anteriores.

Especificando un poco más, conocidos el plano, el espacio y los axiomas de partida, la geometría métrica estudia desde el punto de vista de la medida, las figuras geométricas planas y del espacio, dicho de otra forma, las características geométricas de las figuras planas y espaciales (ángulos, longitudes, superficies y volúmenes de polígonos, curvas, poliedros, así como las ideas de potencia y tangencia) y las siguientes transformaciones: desplazamientos (traslación, giro y simetría), homotecia y semejanza, e inversión. Es decir, transformaciones en las que los puntos de la figura homóloga con respecto a la original están definidos por medio de una relación en la que intervienen ángulos o distancias, y en los que se analizan los elementos geométricos que no varían en dicha transformación, a los que se llama invariantes.

La **geometría proyectiva** trata del estudio de las propiedades comunes a las diversas representaciones de una misma figura plana y que resulten invariantes mediante la proyección de la figura desde un punto sobre un nuevo plano. Surge de los estudios de perspectiva de los pintores del Renacimiento. Prescinde del concepto de medida.

Una transformación proyectiva estudia los elementos que permanecen invariantes en una figura al aplicar las operaciones de proyectar y cortar. Básicamente, son objeto de estudio la correlación, la homografía y la polaridad. Las transformaciones proyectivas son más generales que las

definidas en la geometría métrica y están englobadas estas últimas, excepto la inversión, como casos particulares de aquellas.

Correlación, es una proyectividad en la que los elementos que se corresponden son de distinta especie: punto-recta, punto-plano (como en la ley de dualidad). Homografía, cuando se corresponden punto a punto, recta a recta y plano a plano, de tal modo que a dos elementos incidentes de una figura correspondan elementos incidentes en la otra.

Obsérvese que las curvas cónicas se pueden estudiar aquí como consecuencia de transformaciones proyectivas de la circunferencia. Del mismo modo, cualquier triángulo se puede obtener por homología partiendo de un triángulo, cualquier cuadrilátero a partir de un cuadrado,...

La **geometría descriptiva** trata de la resolución de problemas tridimensionales, mediante proyecciones realizadas sobre un plano. Se puede considerar que la geometría descriptiva está fundamentada en la geometría proyectiva, aplicando las nociones que en ella se desarrollan.

2. El espacio euclídeo y los elementos del infinito.

- Elementos fundamentales de las **figuras geométricas**.

Los conceptos primarios en los que se sustenta la geometría son el punto, la recta y el plano. Tomándose como postulado el punto, una sucesión infinita de puntos da lugar a una recta, un conjunto infinito de rectas y puntos coplanarios da lugar al plano y el conjunto de puntos, rectas y planos da lugar al espacio.

Definidos los elementos geométricos básicos y aplicando el concepto de distancia a puntos, rectas y planos, resultan las diferentes figuras geométricas.

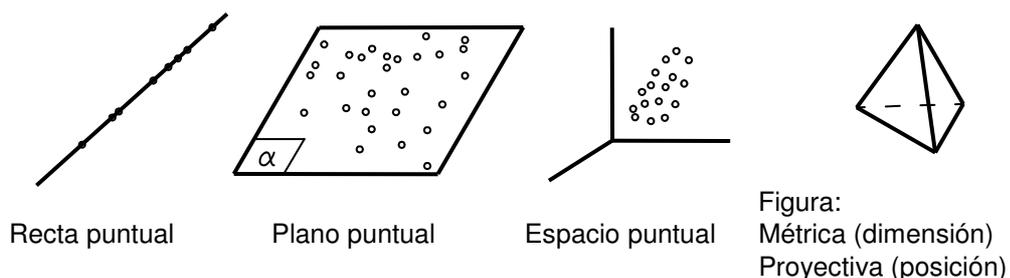


Figura 1. Elementos geométricos básicos. Figuras geométricas.

Estos elementos sirven de base de partida, junto con los axiomas o postulados que se irán exponiendo de forma sucesiva a medida que se vayan aplicando, para desarrollar los sistemas de representación y sus aplicaciones.

- **Elementos del infinito.** (∞)

En la época en que Euclides desarrolló sus “elementos de geometría”, el espacio abarcado era muy grande pero no llegaba al infinito, en consecuencia, el desarrollo de la geometría ha estado afectada por esta limitación hasta que

se incorporó la noción del infinito.

Una recta tiene un punto del infinito, es el que se encuentra en la recta infinitamente alejado y es el mismo sea en un sentido o en el otro de la recta (se entiende por dirección la que indica una línea, teniendo ésta dos sentidos).

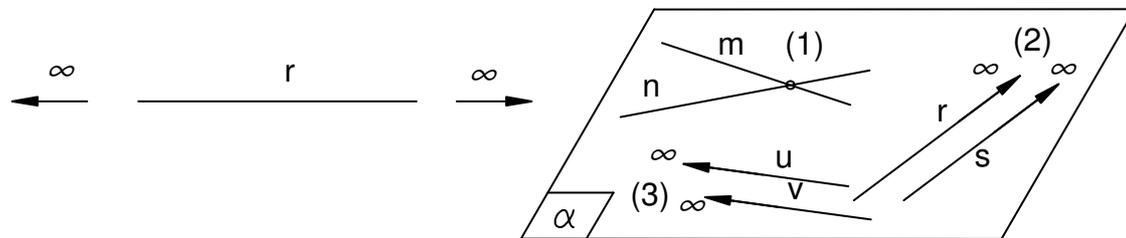


Figura 2. Punto del infinito de la recta. Haces de rectas. Punto del infinito.

Esto se puede entender un poco mejor, considerando que una recta es una circunferencia de radio infinito, esta circunferencia se cierra en el punto del infinito (que es uno sólo para esta recta). El punto del infinito de una recta está relacionado con la dirección que tiene, así pues, todas las rectas paralelas tienen el mismo punto del infinito.

Consecuencia de ello es que al postular que: “un plano queda definido por dos rectas que se cortan, como **m**, **n**, o con dos rectas paralelas, como **r**, **s**”, se está repitiendo la misma idea, pues las rectas paralelas se cortan en el punto del infinito que tienen común.

Dicho de otra forma: por un punto como el (1), de la figura 2, se puede hacer pasar cuantas rectas se quieran, por un punto (2) del infinito, se pueden hacer pasar cuantas rectas se quieran, todas ellas paralelas a **r**, **s**. Análogamente, por el punto (3) del ∞ pasan todas las paralelas a **u**, **v**.

Pues bien, al conjunto de puntos del ∞ de las posibles direcciones que pueden darse en el plano, es lo que se llama recta del ∞ de dicho plano.

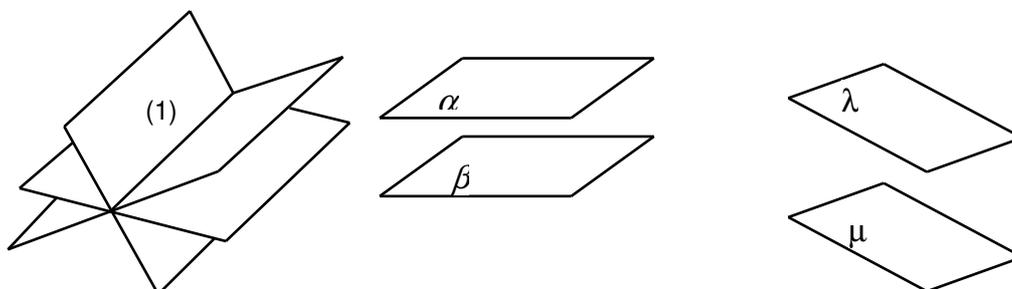


Figura 3. Haces de planos. Recta del infinito.

Siguiendo similar razonamiento para haces de planos del espacio, por la línea (1), de la figura 3, se puede hacer pasar cuantos planos la contengan; los

planos α, β pasan por la misma línea del ∞ ; los planos λ, μ se cortan en otra línea del ∞ , y el conjunto de todas las líneas del ∞ de las posibles posiciones diferentes de los planos, configuran el plano del ∞ . Es decir, el infinito tiene forma plana.

Así definidos los elementos del infinito (los cuales se pueden tratar también analíticamente) conservan los diversos postulados o principios definidos para la geometría métrica ‘finita’.

Se observa así, que la intersección de una recta con el plano del ∞ , es el punto del ∞ de la recta; la intersección de un plano con el del ∞ , es una línea, la del ∞ del plano. El postulado que dice que “una corta a un plano en un punto, o está contenida en él, o es paralela a él”, se simplifica a “una recta corta a un plano en un punto o está contenida en él”, ya que si es paralela a él implica que la intersección con el plano está en el ∞ . Este otro postulado por el que “dos rectas coplanarias, o se cortan o son paralelas” se simplifica así: “dos rectas coplanarias se cortan en un punto” pues las paralelas tienen el punto del infinito común.

Expresado de otro modo, el concepto de dirección o punto del ∞ cumple con las propiedades de incidencia, así:

| En Geometría Plana | |
|---|---|
| I. Dos rectas determinan un punto situado en ambas. | II. Dos puntos determinan una recta que pasa por ellos. |
| En Geometría del Espacio | |
| I. Dos puntos determinan una recta que pasan por ambas. | II. Dos planos determinan una recta situada en ambos. |
| III. Un punto y una recta no incidentes determinan un plano que pasa por ellos. | IV. Un plano y una recta no incidentes definen un punto situado en ambos. |
| V. Tres puntos no alineados determinan un plano que pasa por ellos. | VI. Tres planos no concurrentes en una recta, determinan un punto. |
| VII. Si una recta tiene dos puntos en un plano, está contenida en él. | VIII. Si una recta pertenece a dos planos que pasan por un punto, es incidente con dicho punto. |

Téngase en cuenta que las rectas se han representado con segmentos y el plano con cuadriláteros, pero estos son ∞ y no se limitan a la porción de recta y plano representados sino a todo él, llegando hasta el ∞ .

Al hablar del ∞ , se está hablando de algo que de forma directa no se puede observar, por lo cual, el conocimiento que se tiene del ∞ se obtiene extrapolando y verificando que las propiedades sean compatibles con el entorno finito mejor conocido, así puede aceptarse que el punto del ∞ de una recta es único yendo en uno u otro sentido de la recta y para todas las paralelas a ella, y así con otras cuestiones que se han señalado.

Para diferenciar unos puntos de otros, se denominan **puntos propios** a los que pueden representarse en el dibujo por encontrarse en el entorno “próximo” (aunque estén muy alejados) e **impropios** a los puntos que se hallan en el ∞ .

- Ley de dualidad o correlación en el espacio.

Es una ley, por la que enunciados, proposiciones y teoremas, en los que no interviene el concepto de magnitud, es decir, la dimensión de las figuras, admiten el intercambio de recta por punto y viceversa en la geometría plana (Véase el cuadro anterior) y punto por plano o recta por recta en la geometría del espacio. En las radiaciones, las rectas por planos, y transforman la redacción de pertenencia “estar en” por su recíproca “pasar por”.

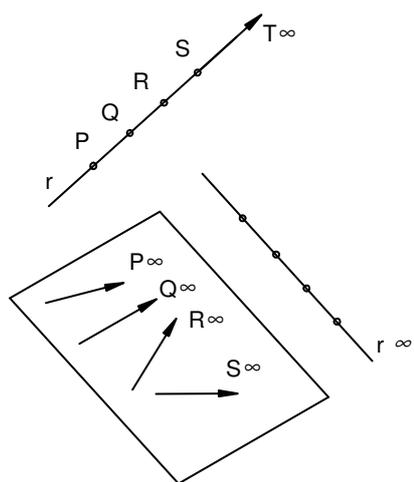
La ley de dualidad permite pues agrupar en pares las propiedades de la Geometría Proyectiva, empleándose la forma de exposición de doble columna. Esta ley es válida para las propiedades gráficas de las figuras y no lo es, en general, para las métricas. Esto facilita la resolución de problemas, al poder resolverlos mediante el enunciado propuesto o mediante su dual.

- Figuras de primera categoría.

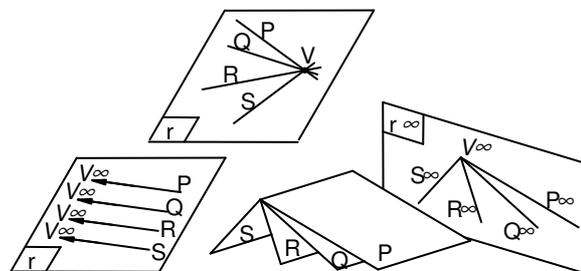
Están constituidas por uno sólo de los elementos geométricos fundamentales (punto, recta, plano). Hay tres tipos: la serie rectilínea o alineación de puntos, haces de rectas y haces de planos:

Serie rectilínea.

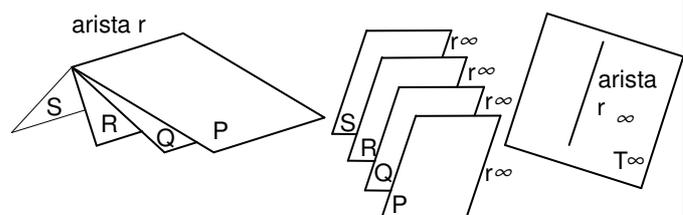
El conjunto de los puntos situados en una recta.
La recta es la base de la serie.
Puede ser propia o impropia.



Haz de rectas del plano que pasan por un punto, denominado vértice del haz. El vértice puede ser propio o impropio y la base también.

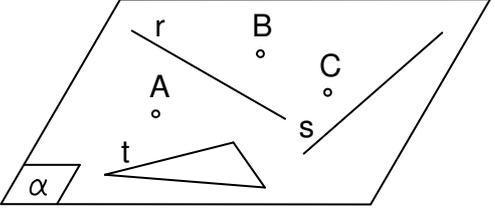
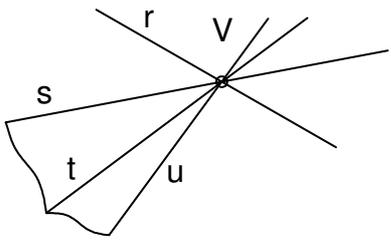


Haz de planos que pasan por una recta, denominada arista. La arista puede ser propia o impropia.



- Figuras de segunda categoría.

Son las constituidas por dos elementos geométricos fundamentales. Las hay de dos especies y son duales entre sí.

| En el plano | En el espacio |
|--|--|
| <p>Todos los puntos y rectas de un plano, constituyen elementos de figuras planas. Ej. triángulo, circunferencia,...</p>  | <p>Todos los planos y rectas que pasan por un punto constituyen una radiación. Ej. Superficie cónica, cilíndrica, prismática, ...</p>  |

- Figuras de tercera categoría.

Es todo conjunto de puntos, rectas y planos del espacio y es lo que constituye el espacio tridimensional, como son el tetraedro o el hiperboloide...

Operaciones gráficas.

Las dos operaciones gráficas fundamentales son proyectar y cortar, realizadas de forma sucesiva, es decir, proyectar desde un punto y cortar después esta radiación por un plano, es lo que se denomina obtener la proyección de la figura puntual espacial desde ese punto sobre un plano.

| Proyectar | Cortar |
|--|--|
| Proyectar un punto A desde otro punto V, es trazar la recta VA. | Cortar una recta por otra en el plano, es obtener el punto intersección de ambas. |
| Proyectar una recta r desde el punto V, no incidente con r, es trazar el plano Vr. | Cortar una recta r por un plano π es obtener el punto intersección de π con r. |
| Proyectar el punto P desde la recta r es trazar el plano r P. | Cortar el plano α con la recta r es obtener el punto intersección. |

En consecuencia, las operaciones de proyección y corte, que son duales, conservan las relaciones de incidencia.

La proyectividad según Poncelet: Dos formas de 1^o o 2^a categoría son proyectivas entre sí cuando pueden obtenerse una de otra por una sucesión de proyecciones y secciones. Otras proyectividades se han definido por Chasles, Staudt y otros atendiendo a propiedades métricas u otras características.

La combinación de estas dos operaciones se va a aplicar para proyectar de forma que puedan restitirse, una figura de tres dimensiones sobre una de dos, dando lugar a los diferentes sistemas de proyección.

- Algunas **consecuencias** de la incorporación del plano del ∞ al espacio euclídeo.

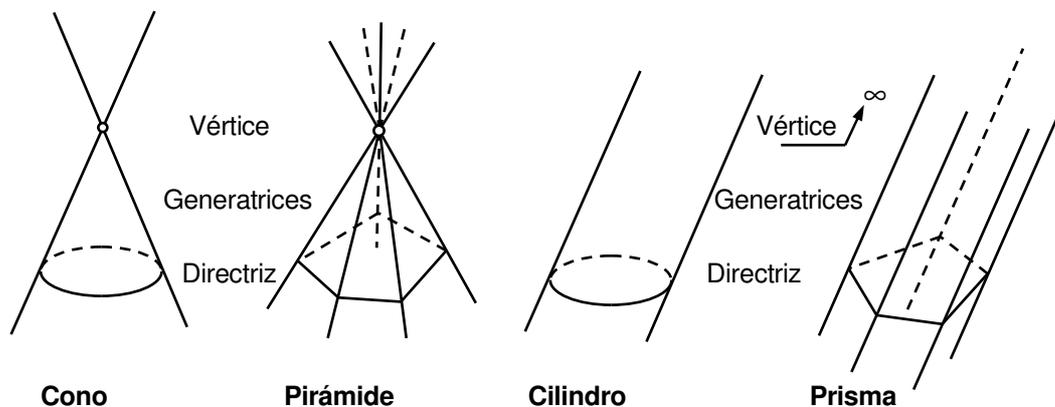
Ya se han indicado los efectos que sobre algunos de los postulados tiene la incorporación del ∞ ; otras aplicaciones geométricas en las que resulta de gran utilidad, ya que unifica y simplifica su estudio, son:

- I. El cono-cilindro, pirámide-prisma.
- II. Elipse, parábola e hipérbola.
- III. Proyecciones paralelas (que se estudian en el siguiente tema).

I. El cono-cilindro, pirámide-prisma.

El cono y la pirámide, figura 4, son figuras geométricas que se generan por medio de una línea o generatriz que pasa por un punto fijo o vértice y se apoya en una circunferencia o en una línea poligonal denominada directriz, respectivamente.

Al alejar los vértices del cono y la pirámide hasta el ∞ , se observa que las generatrices quedan paralelas (tienen todas ellas el mismo punto del ∞) y la superficie resultante es un cilindro o un prisma respectivamente. Es decir, el cilindro es un cono con el vértice impropio (en el ∞) y el prisma es una pirámide de vértice impropio, lo cual muestra que todas ellas son figuras con aspectos



geométricos comunes.

Figura 4. Cono - pirámide, cilindro - prisma.

II. Elipse, parábola e hipérbola.

Las curvas cónicas son el resultado de la intersección de un plano con una superficie cónica. Siendo: α el ángulo formado por las generatrices y el eje, β el ángulo formado por el plano y el eje.

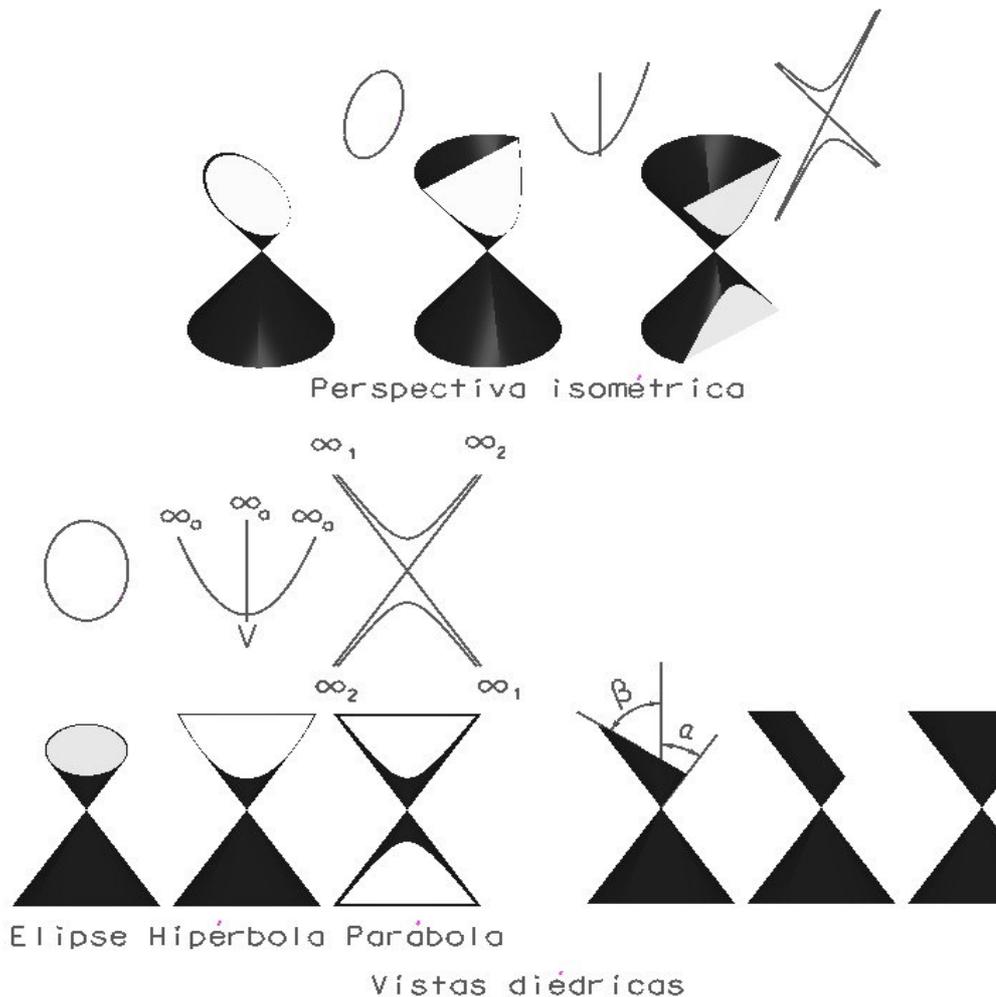


Figura 5. Curvas cónicas.

Si $\beta > \alpha$ la intersección que sale es una elipse, que es más alargada a medida que el valor de β se va acercando al de α .

Cuando $\beta = \alpha$ la intersección es una parábola, pero teniendo en consideración al ∞ , podría decirse que es un caso particular de elipse en la que uno de los extremos está en el ∞ . Y así como en el extremo V confluyen el eje y las dos mitades de la parábola, en el otro extremo, que es un punto del ∞ , coinciden las otras dos mitades y el otro extremo del eje.

Si $\beta < \alpha$ el plano corta a la superficie cónica a ambos lados del vértice, por lo cual la curva tiene dos ramas. Podría decirse que las dos ramas de esta curva se cierran en el ∞ .

Las rectas tangentes en los puntos del ∞ son las asíntotas, por lo que el punto del ∞ de cada asíntota y los dos extremos de la curva correspondientes, coinciden en un mismo punto del ∞_1 y la otra asíntota junto con los otros dos extremos coinciden en otro, ∞_2 .

III. Proyecciones paralelas

En el siguiente tema se hace una exposición más detallada de los diferentes sistemas de representación, lo que aquí se muestra es una diferencia cualitativa que resulta entre una proyección cónica y una cilíndrica o //.

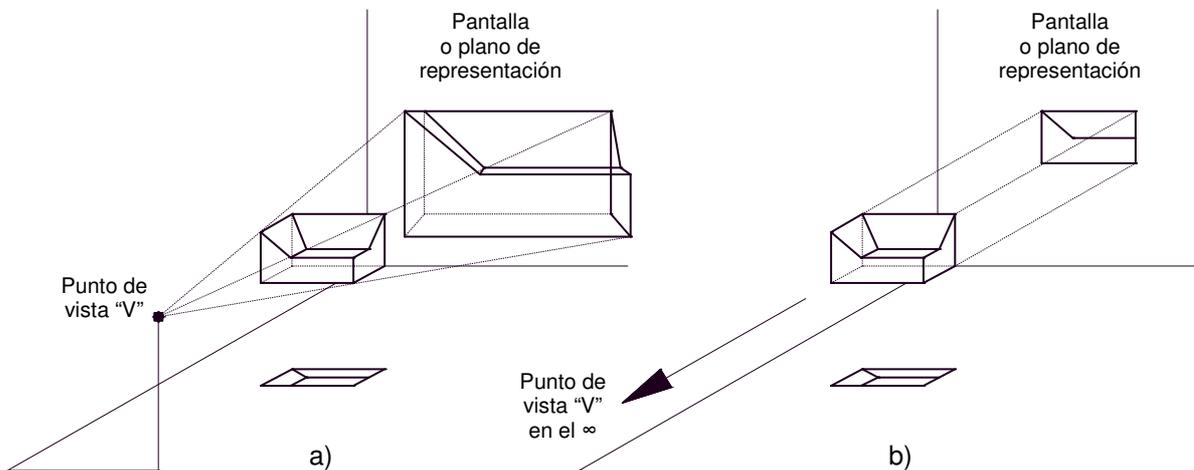


Figura 6. Proyecciones cónica y paralela. (En perspectiva caballera).

Se observa que en la figura 6 a), más intuitiva, el punto de vista se asimila al ojo del observador y en el plano de representación se aprecia lo que el observador estaría viendo, es una figura que da una idea más real de cómo es el objeto.

En la figura 6 b), se aplica el artificio de enviar al observador al ∞ , con lo que los rayos de visualización son //, el resultado es una representación que no da una idea tan real del objeto, pero tiene la ventaja de que las magnitudes que son // al plano de proyección conservan su valor, con lo cual se conocen mejor las medidas y características geométricas del mismo.

- Notación empleada.

Se adoptan los siguientes criterios para designar los elementos geométricos y sus proyecciones:

Para designar puntos, rectas y planos representados en los dibujos en proyección directa (la que muestra su posición en el espacio):

- Punto:** A, B, C, ... P, Q, ... Letras mayúsculas del alfabeto latino.
- Recta:** a, b, c, ... r, s, ... Letras minúsculas del alfabeto latino.
- Plano:** $\alpha, \beta, \gamma, \dots \pi, \omega, \dots$ Letras minúsculas del alfabeto griego.

Las proyecciones del punto y la recta se designan con la misma letra, añadiendo una comilla a la proyección sobre el plano horizontal, dos comillas a la proyección sobre el plano vertical, tres comillas a la del segundo vertical. Por

ejemplo: $A' - A'' - A'''$ $r' - r'' - r'''$.

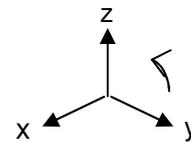
La traza (o intersección) del plano con el horizontal, se designa añadiendo el subíndice 1 al nombre del plano. A la traza con el vertical se le añade el subíndice 2. Por ejemplo: δ δ_1 δ_2

Los ángulos se designan con letras del alfabeto griego λ , θ , ... y estarán indicados de modo que no dé lugar a confusión con un plano.

Para indicar:

| | |
|------------------|----------|
| rectas paralelas | // |
| perpendicular | \perp |
| pertenece | \in |
| no pertenece | \notin |
| intersección | \cap |

Los ejes x,y,z se van a designar siguiendo la regla de la mano derecha.



Desarrollo de la exposición.

Vistos los elementos geométricos básicos en los que se sustentan los sistemas de representación, en el primer tema se pasa a exponer sus fundamentos y una clasificación en los que se muestran los de más interés por su aplicación en la expresión gráfica en la ingeniería.

El siguiente tema aborda el punto, la recta y el plano en el sistema diédrico. Los temas tercero y cuarto desarrollan el cambio de plano, giro y abatimiento, es decir, las herramientas que permiten manipular las figuras para conocer sus magnitudes, formas u otros aspectos geométricos que sea necesario conocer.

Los temas quinto al octavo plantean la resolución de los problemas más usuales: intersecciones, paralelismo, perpendicularidad y ángulos.

Las superficies y algunas aplicaciones características se estudian en los temas 9 al 12. Del 13 al 16 se desarrolla el sistema de planos acotados.

Para clarificar la exposición se dibujan esquemas en perspectiva que facilitan la visualización del problema, que seguidamente se resuelve en el plano de dibujo.

El objetivo es llegar a ser capaces de representar un objeto, de forma clara, geoméricamente precisa y siguiendo criterios comúnmente establecidos.

Para lo cual se pretende estudiar: los sistemas de representación diédrico y de planos acotados, nociones de perspectiva isométrica y caballera, homología, fundamentos de normalización del dibujo técnico y DAO 2D y 3D de modo que los problemas habitualmente resueltos en 2D, en el papel, se resuelvan en 3D desarrollando la geometría del espacio apropiada y el método idóneo para este entorno.