Tema 2: Representación del punto, recta y plano, en el sistema Diédrico.

Representación del punto.

El punto se define por medio de sus proyecciones sobre el horizontal y el vertical.

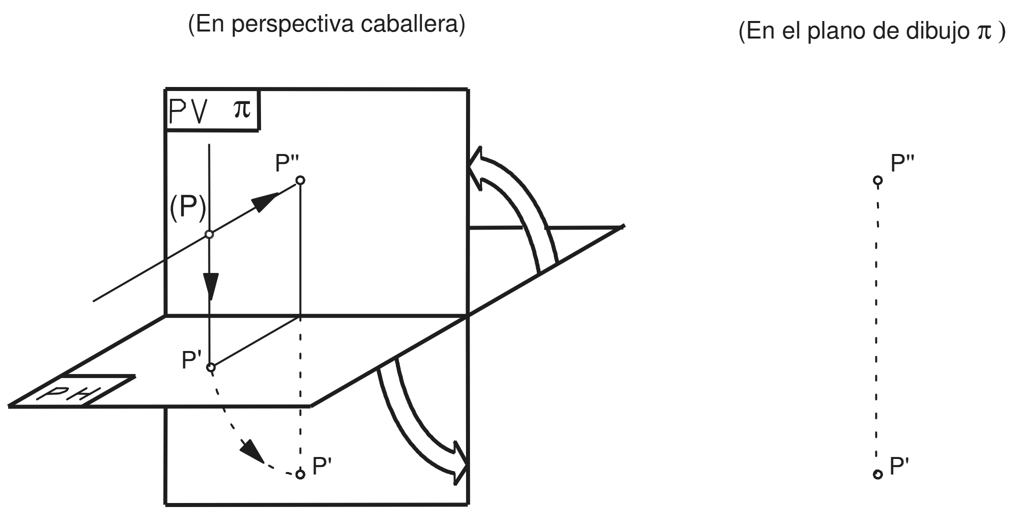


Figura 1. Representación del punto.

Las proyecciones del punto en el plano de dibujo se constata <u>que están en una línea que indica la dirección de proyección</u> que se sigue en la representación y que es la misma para todos los puntos. Este es un elemento de referencia importante.

Coordenadas relativas. Alfabeto del punto.

Se va a incluir en este punto un segundo plano vertical, perpendicular a los dos de proyección, de este modo se trabaja con terceras proyecciones que son de muy útiles en numerosos ejercicios.

Las coordenadas relativas: desviación (Δx), alejamiento (Δy), cota (Δz), entre dos puntos se dan siguiendo las direcciones del triedro de referencia que se indica en la figura 2.

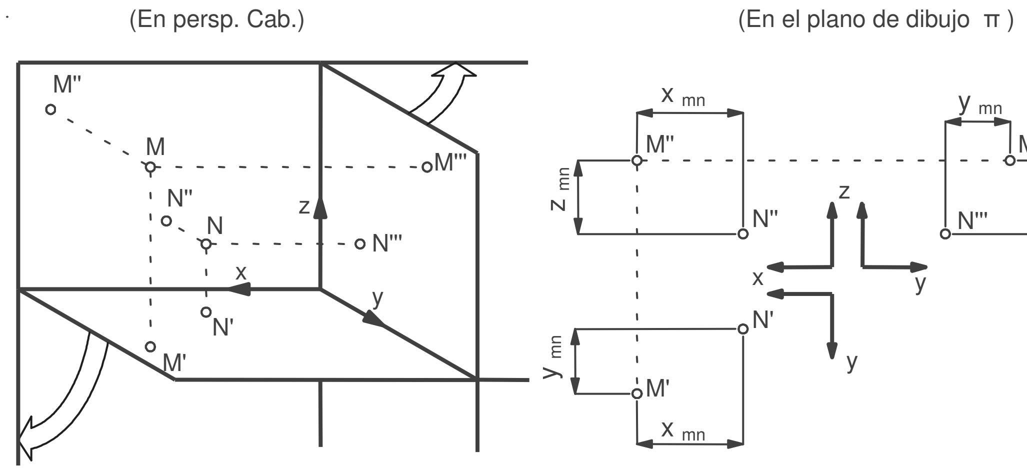


Figura 2. Coordenadas relativas.

El alfabeto del punto hace referencia a las posibles posiciones que puede ocupar un punto en el espacio. El método directo, al no definir unos planos de proyección fijos, hace que las posiciones de los puntos se consideren de forma relativa con respecto a otros, de modo que lo que se va a procurar es trabajar siempre en el primer diedro, ya que en los dibujos técnicos se trabaja así (o en el tercer diedro en el sistema americano, pero siempre en un diedro). Para situar todos los elementos en un diedro basta con cambiarlo de posición, como en la figura 3, en que el punto Q que se encuentra en el 4º diedro con respecto a los planos horizontal y vertical, pasa a estar en el 1er diedro con respecto a los señalados con el índice (1). En los planos de dibujo se aprecian las diferencias según los planos de referencia tomados.

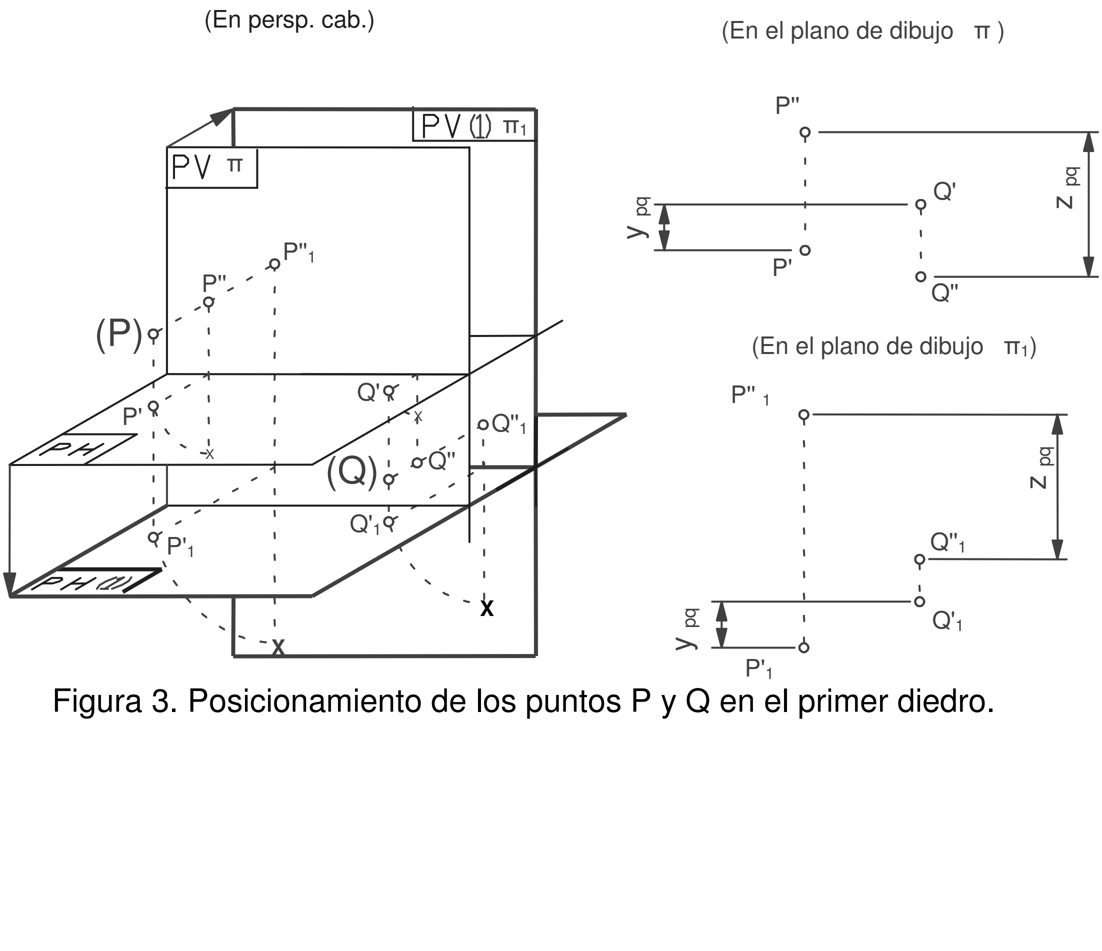


Figura 3. Posicionamiento de los puntos P y Q en el primer diedro.

Así, para evitar el uso de otros diedros basta con situar todos los elementos de una vista a mayor distancia de la otra en la dirección de proyección. Por consiguiente, el uso de un diedro es una cuestión de planteamiento y resolución de los ejercicios, así, los otros diedros se emplearán ocasionalmente. Esto se aprecia en la figura 3.

Determinación de una recta en el sistema diédrico. Pertenencia de un punto a una recta.

Definido un sistema de representación (es decir, conocida la dirección de proyección, que puede estar dada por las proyecciones de un punto) una recta queda determinada por sus proyecciones.

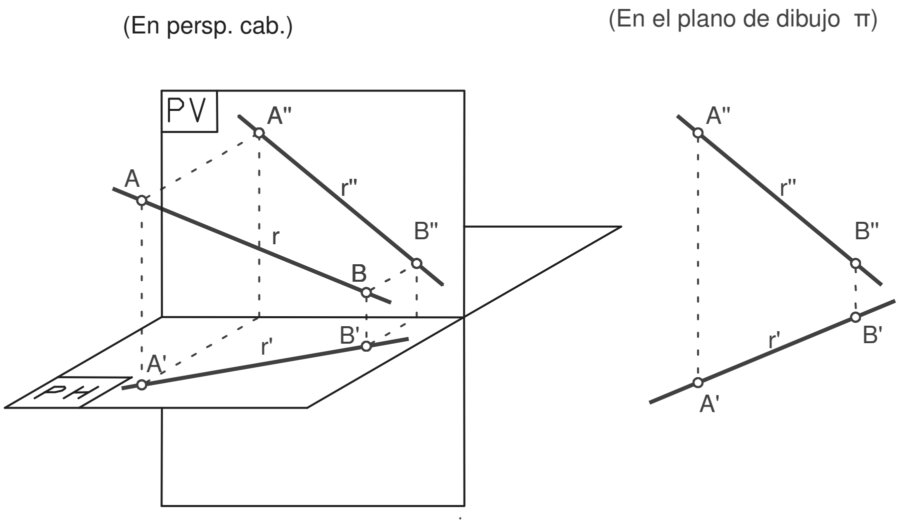


Figura 4. Representación de la recta.

Se verá que no siempre la dirección de proyección es vertical en el plano de dibujo, la figura 5 muestra la representación de las rectas **r** y **s** y los puntos **A**, **B** y **P** según una dirección de proyección inclinada.

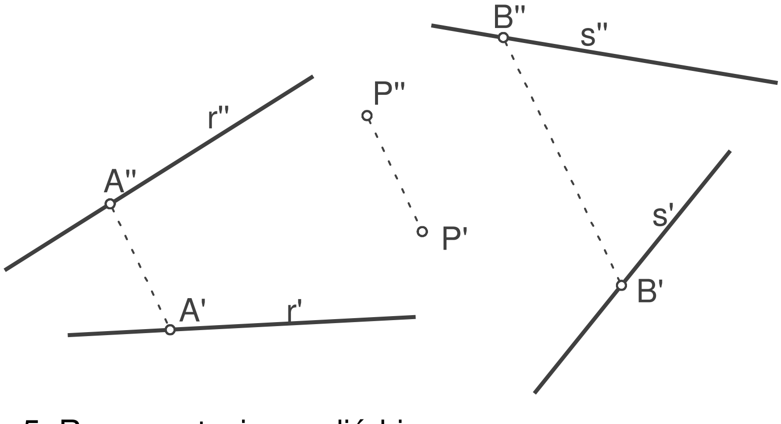


Figura 5. Representaciones diédricas.

Una observación, aunque sea evidente, es que las rectas que se están representando como segmentos, son de longitud infinita.

- Un punto pertenece a una recta cuando las proyecciones homónimas (del mismo nombre) del punto están sobre las de la recta. Por ejemplo en la figura 5, **A∈r** ya que **A'∈r'** y **A''∈r''**, igualmente **B∈s**.

Rectas particulares en la proyección.

a) Rectas paralelas a un plano de proyección o a ambos.

Paralela al plano horizontal. Dado que todos los puntos de la recta se encuentran a la misma cota, la proyección vertical es perpendicular a la dirección de proyección.

Es importante comprobar que como al recta y su proyección horizontal son paralelas, ésta se encuentra en verdadera magnitud. (V.M.)

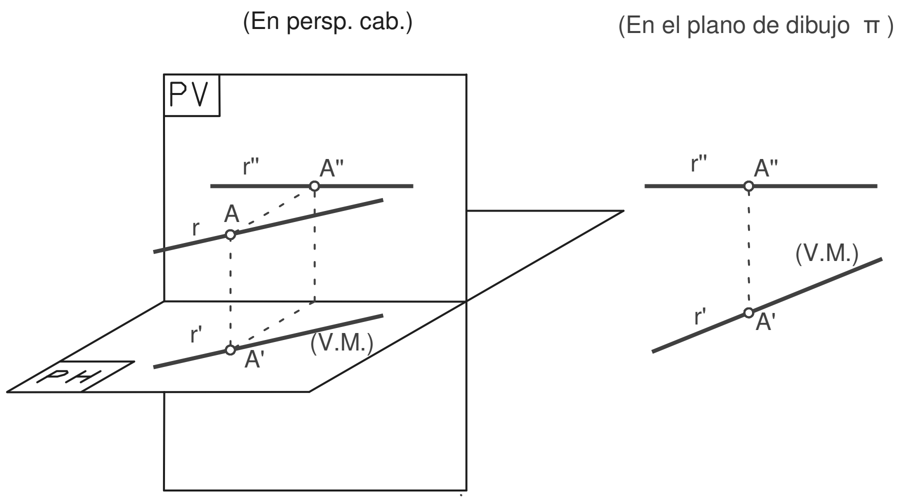


Figura 6. Línea paralela al plano horizontal.

Paralela al plano vertical. Razonando de forma análoga, como todos los puntos tienen el mismo alejamiento, la proyección horizontal es perpendicular a la dirección de proyección.

En este caso la recta y la proyección vertical son paralelas y, consecuentemente, ésta proyección está en verdadera magnitud.

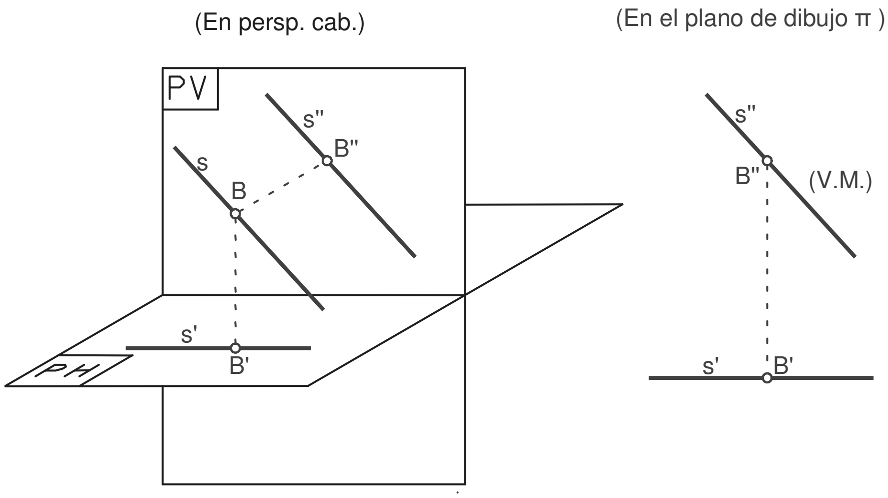


Figura 7. Línea paralela al plano vertical.

Paralela al 2º vertical. Recta de perfil. Son rectas que se encuentran en un plano de perfil. Estas rectas son las únicas que no quedan definidas con sus dos proyecciones, siendo preciso para ello conocer dos puntos de ella o bien su proyección sobre un segundo plano vertical, en el cual aparece la recta en verdadera magnitud por ser paralela a él.

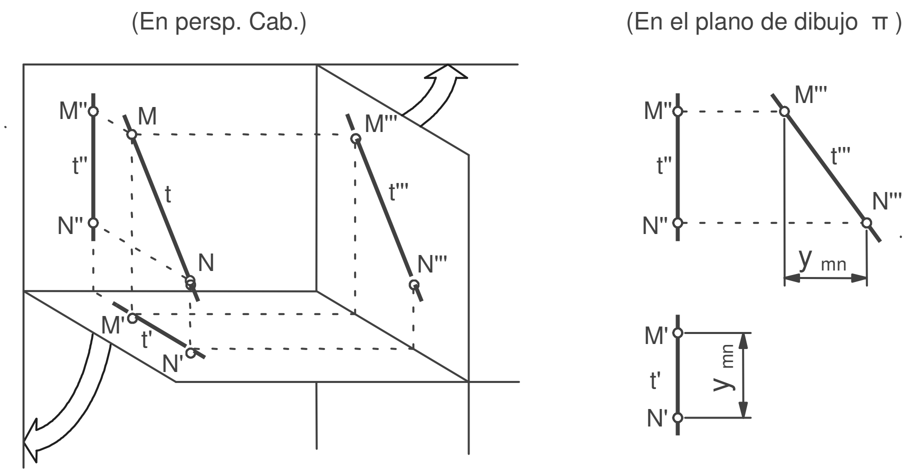


Figura 8. Recta de perfil.

b) Rectas perpendiculares a un plano de proyección.

Estos son casos particulares de rectas paralelas a los de proyección.

Recta perpendicular al horizontal o proyectante sobre el horizontal ya que tiene la misma dirección que la de proyección sobre el horizontal.

En este caso la proyección vertical está en verdadera magnitud y es paralela a la dirección de proyección y la horizontal es un punto.

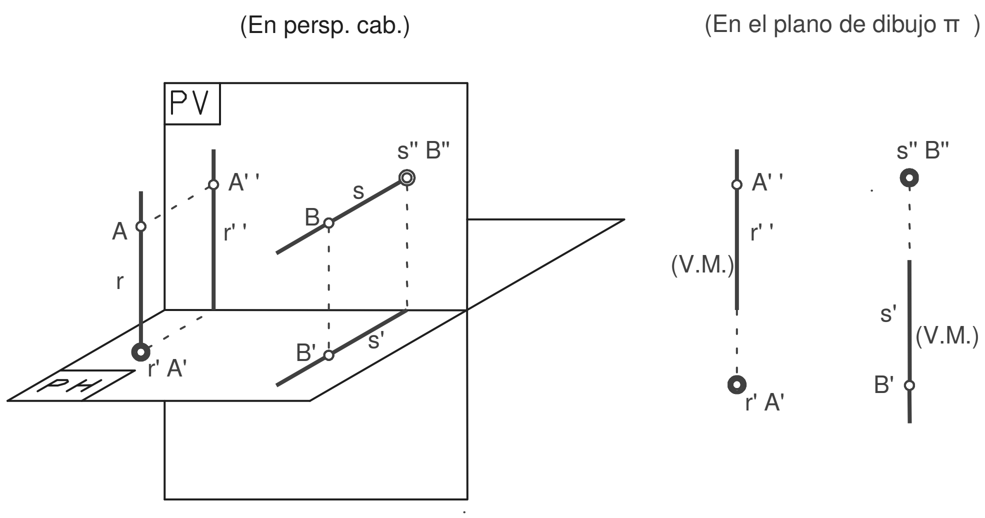


Figura 9. Proyectantes sobre el horizontal, y sobre el vertical.

Recta perpendicular al vertical o proyectante sobre el vertical. Se aprecia que la proyección horizontal está en verdadera magnitud y es paralela a la dirección de proyección, siendo un punto la vertical.

Perpendicular al 2º vertical. En este caso las dos proyecciones son perpendiculares a la dirección de proyección y se encuentran en verdadera magnitud.

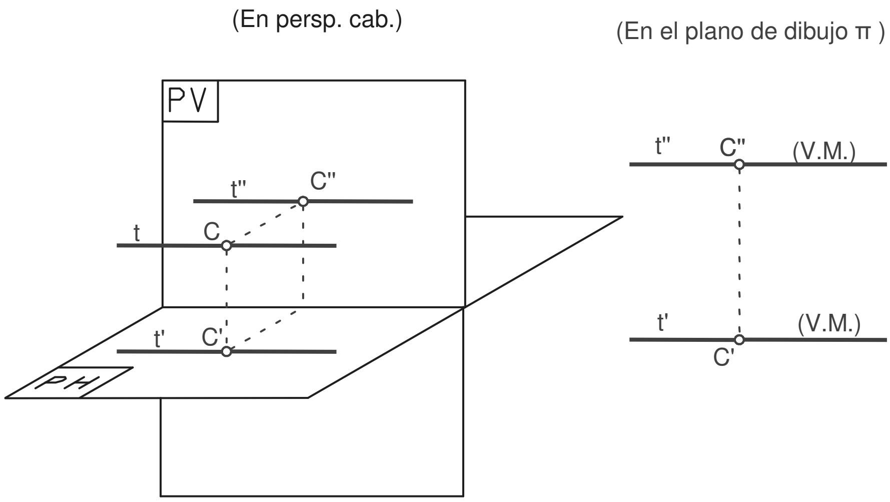


Figura 10. Línea perpendicular al 2º vertical.

Rectas que se cortan o cruzan.

Dos rectas se cortan cuando tienen un punto común, en este caso son coplanarias, es decir, definen un plano. El caso general se muestra en la figura 12 a), en que **P**$\in$**r**, y **P**$\in$**s**.

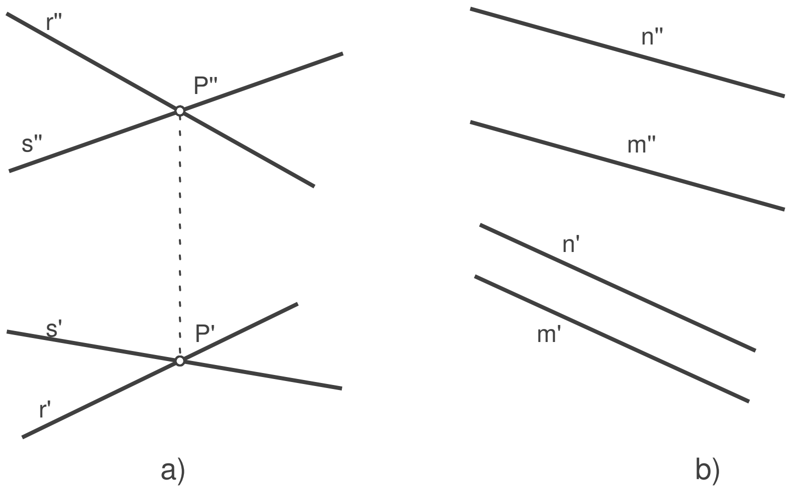


Figura 11. Rectas que se cortan.

Si ambas proyecciones son paralelas entre sí, las dos rectas son paralelas y también definen plano (figura 12 b). En este caso se entiende que el punto de corte de ambas rectas está en el ∞.

Otros casos particulares se presentan:

- Si ambas rectas tienen sus proyecciones horizontal o vertical coincidentes, en cuyo caso están definiendo un plano proyectante (figura 13 a, b y c).

- Una o las dos rectas está de perfil (Figura 13 d, e y f).

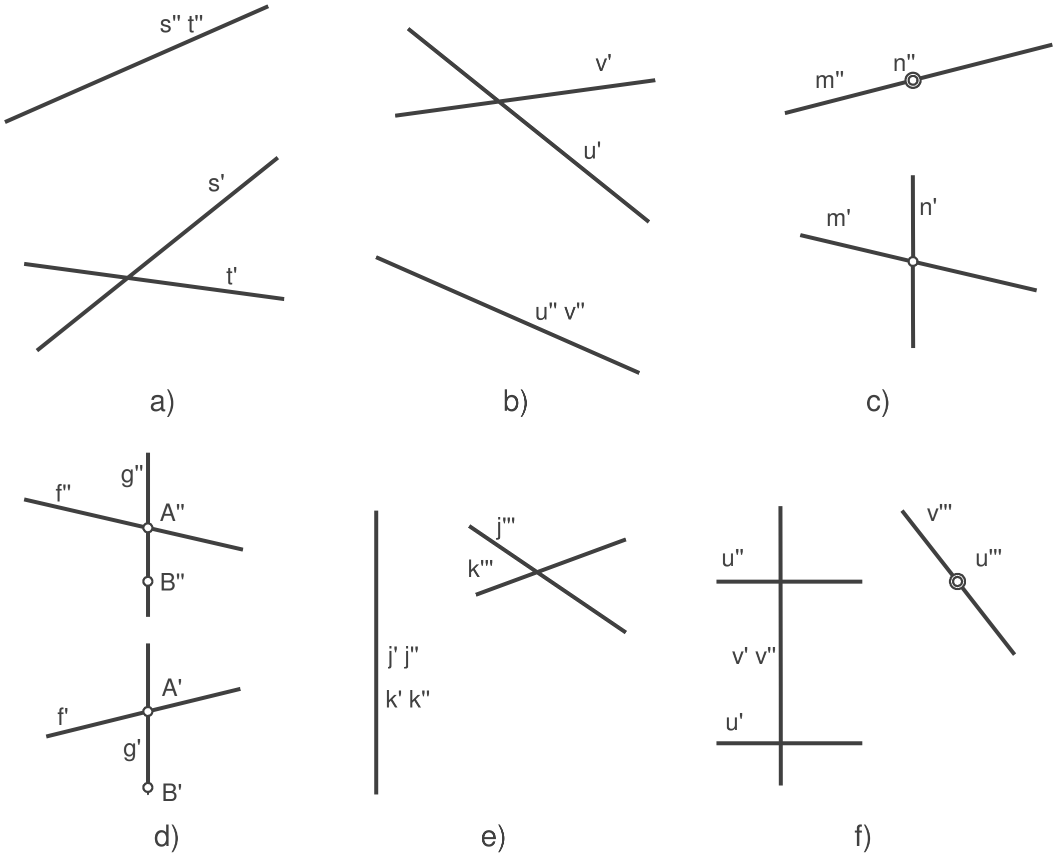


Figura 12. Otras rectas que se cortan.

Dos rectas se cruzan si no tienen ningún punto común, por lo cual no definen un plano. Observando la figura 14, los puntos **A**$\in$**m** y **B**$\in$**n**, aunque tienen las proyecciones verticales coincidentes, las horizontales no lo son, es decir son dos puntos distintos en la misma dirección proyectante sobre el vertical. Asimismo, **C**$\in$**m** y **D**$\in$**n**, se encuentran sobre la misma vertical, pero son distintos. Lo cual significa que no hay un punto común a ambas rectas.

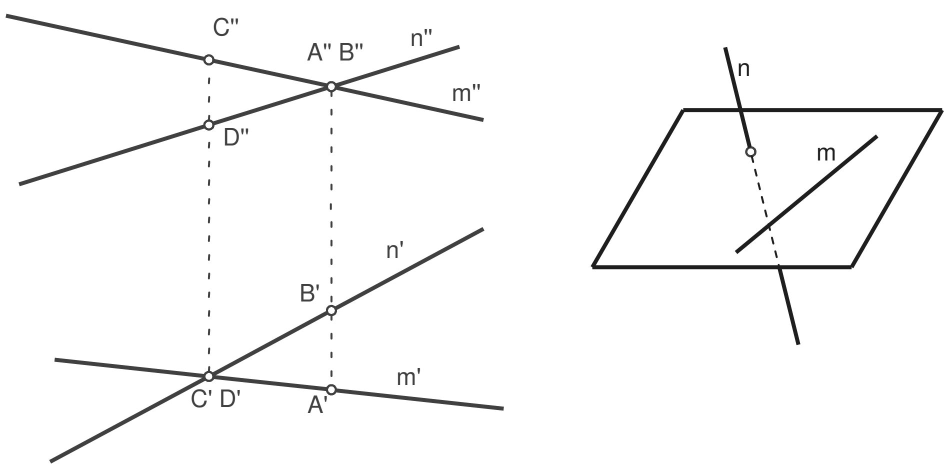
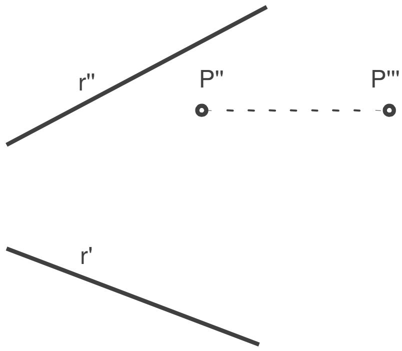


Figura 13. Rectas que se cruzan.

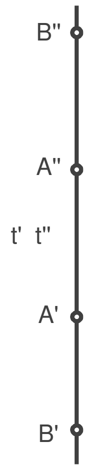
Ejercicio 1 :

Obténganse las proyecciones P' y r'''



Ejercicio 2 :

Obténgase la proyección t'''

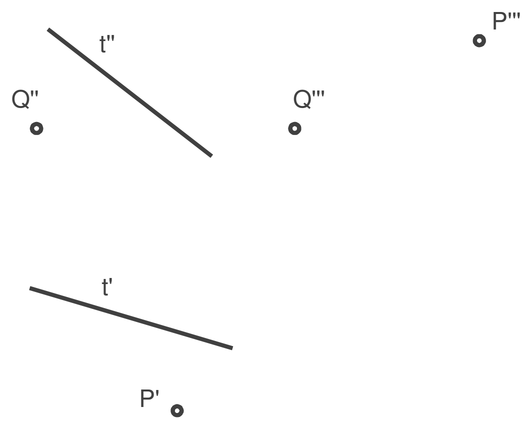


Ejercicio 3:

Obténgase la proyección s'

Ejercicio 4:

Obténganse las proyecciones t''', P'' y Q'.



Determinación geométrica del plano. Nomenclatura.

Se ha observado que el punto y la recta quedan definidos en el Sistema Diédrico por medio de sus proyecciones. Sin embargo, un plano proyectado sobre otro coincide con él, puesto que ambos son ∞ (salvo que sea perpendicular, en cuyo caso se proyecta según una recta). Por ello un plano va a quedar definido por medio de rectas o puntos a los que contiene.

Geométricamente un plano queda definido por:

- Tres puntos no alineados.
- Una recta y un punto no contenido en ella.
- Dos rectas que se cortan (o paralelas, cuyo punto de corte está en el ∞).

La nomenclatura empleada para indicar los planos así definidos es: $\alpha(A,B,C)$; $\beta(r,P)$; $\gamma(s,t)$ ó $\gamma(u,v)$. (Véase la figura 14 a).

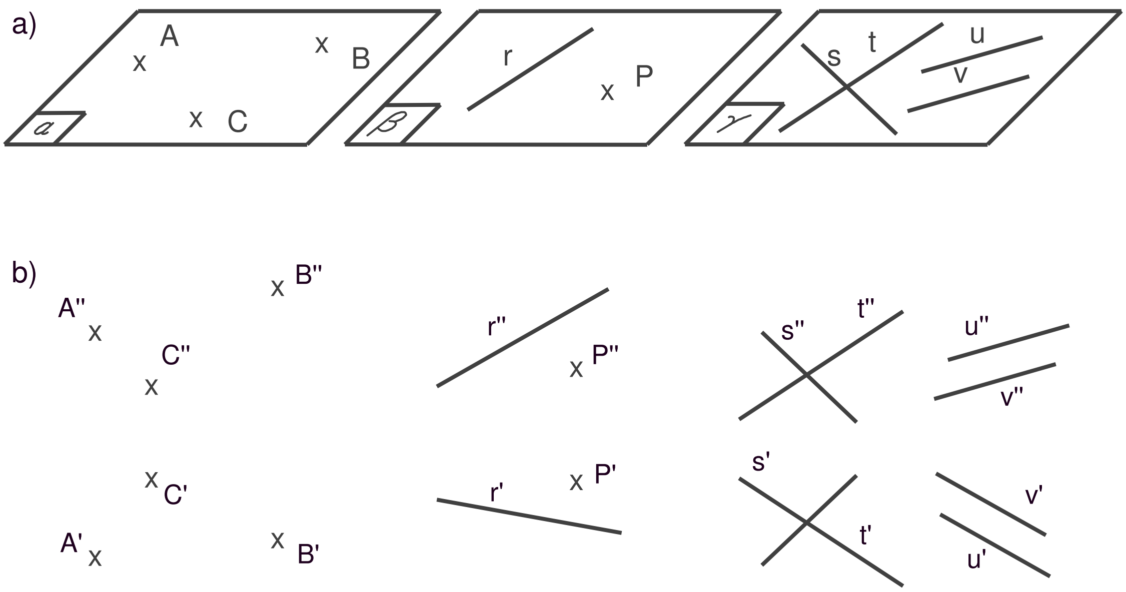


Figura 14. a) Elementos que definen un plano. b) Representación diédrica.

La figura 14 b) muestra la representación diédrica de los planos antes indicados.

De hecho, las condiciones que sirven para definir un plano son análogas y se puede pasar de una a otra de forma inmediata, por ejemplo:

- Si se hace pasar por A B una recta, se ha pasado de definir el plano por tres puntos a definirlo por recta y punto.
- Si por el punto P se traza otra recta que corta a r en un punto cualquiera, incluso del ∞, se está definiendo el plano dado por recta y punto, por medio de dos rectas que se cortan.

Se puede así maniobrar con los elementos del plano, una vez definido éste, (figura 15) para ello es preciso tener en cuenta que:

- Una recta $\in$ al plano si dos puntos de ella se sabe que están en el plano. Uno de los puntos puede ser el del ∞, en cuyo caso es una recta paralela a otra recta del plano.
- Un punto pertenece a un plano, si está sobre una línea que está en el plano.

En la figura 15 a), la recta **t** pertenece al plano $\boldsymbol{\alpha}$**(r,s)** ya que corta a **r** en el punto **1** y a **s** en el punto **2**. En la figura 15 b), para determinar si **P**$\in\boldsymbol{\beta}$**(m,n)**, se hace pasar una recta **u** por **P** y por un punto **A** cualquiera de **m**, si ésta corta a **n** en un punto **B**, la recta **u**$\in\boldsymbol{\beta}$ y por consiguiente, **P**$\in\boldsymbol{\beta}$.

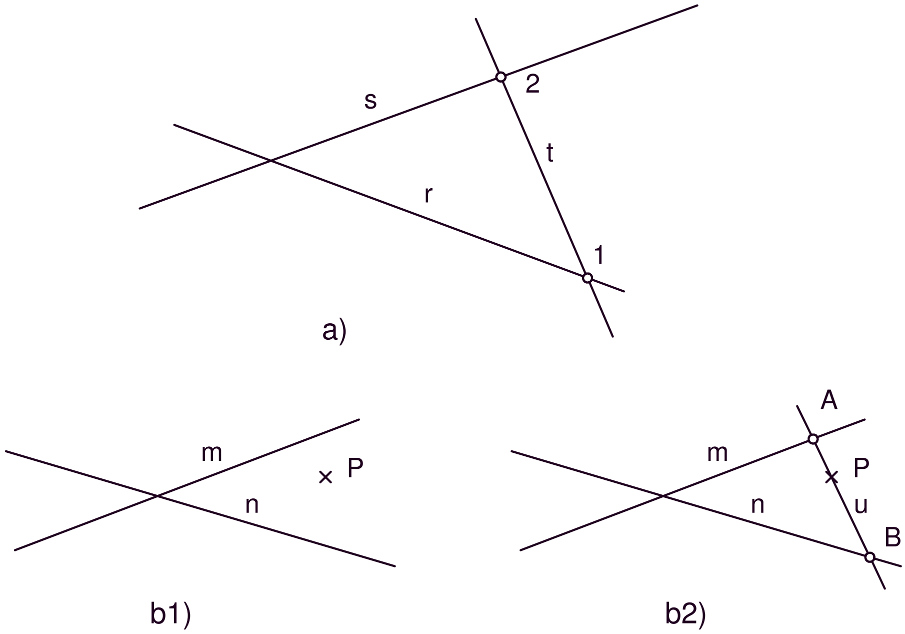


Figura 15. Pertenencia de una recta y de un punto a un plano.

Planos particulares en la proyección.

a) Planos perpendiculares a uno de proyección.

<u>Perpendicular al horizontal o proyectante sobre el horizontal</u>. Se caracteriza porque todos los elementos geométricos que contenga (líneas, puntos,...) quedan proyectados según una línea en el horizontal, ésta línea es la intersección con un plano horizontal de proyección y se le denomina traza (la proyección vertical es la que resulte, no teniendo peculiaridad alguna). Esto se visualiza en la figura 16.

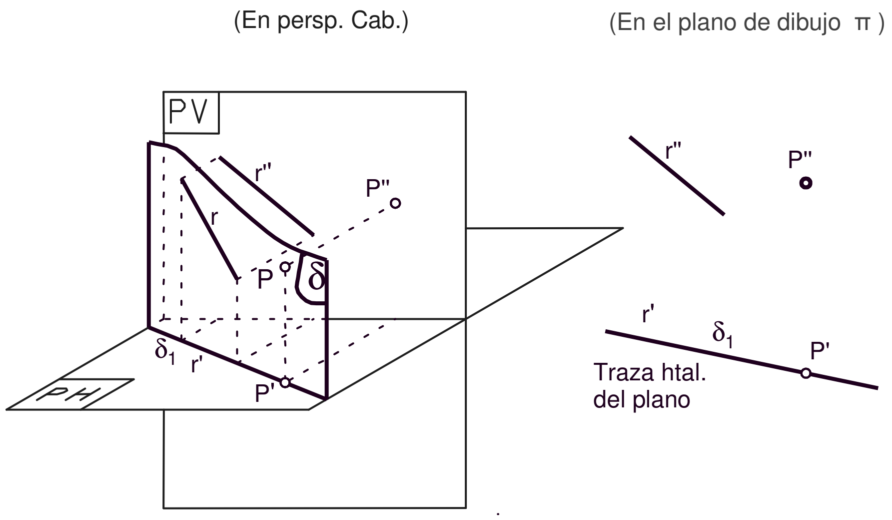


Figura 16. Plano proyectante sobre el horizontal δ_1(r,P).

<u>Perpendicular al vertical o proyectante sobre el vertical</u>. En el cual todos los elementos geométricos quedan proyectados según una línea o traza con el vertical. (En la proyección horizontal los elementos quedan proyectados donde les corresponda).

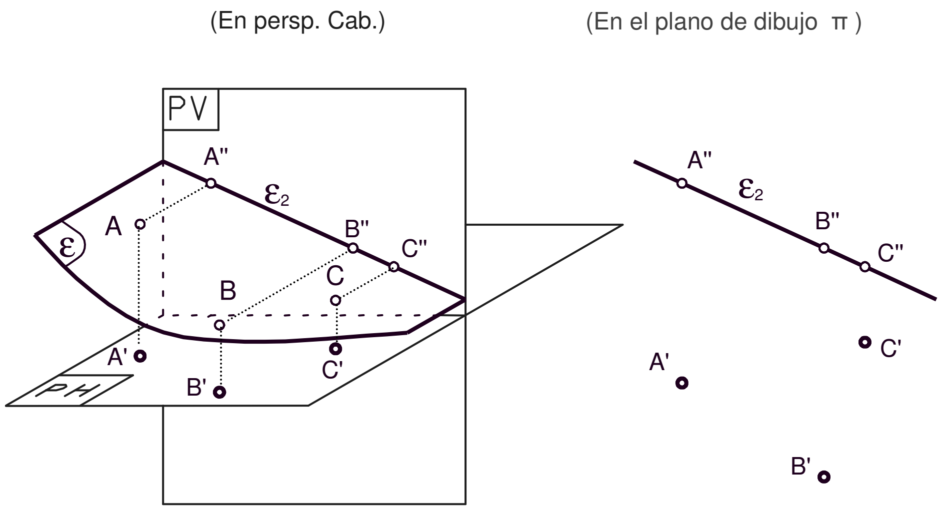


Figura 17. Plano proyectante sobre el vertical ε_2(A,B,C).

b) Planos paralelos a uno de proyección.

Estos son casos particulares de los planos proyectantes anteriores. Se caracterizan porque al ser paralelos a uno de proyección, los elementos geométricos del plano quedan proyectados en verdadera magnitud, cualidad importante para conocer sus características métricas y que va a ser de gran aplicación.

Paralelo al vertical.

(En persp. Cab.) (En el plano de dibujo π)

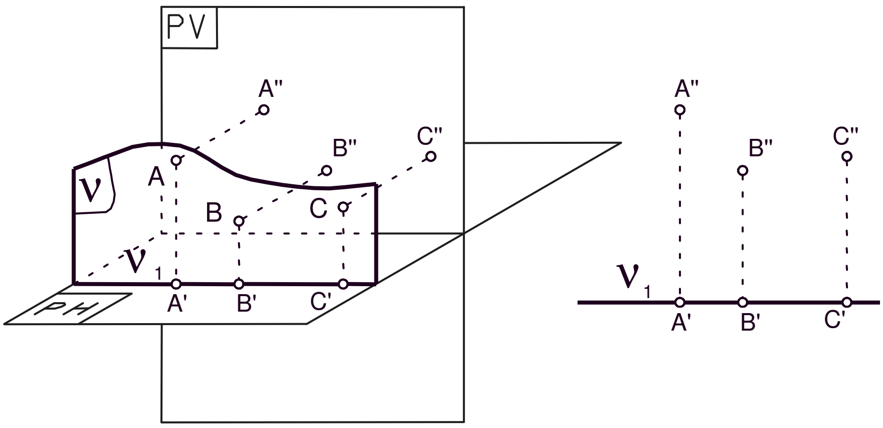


Figura 18. Plano paralelo al vertical.

Paralelo al horizontal.

(En persp. Cab.) (En el plano de dibujo π)

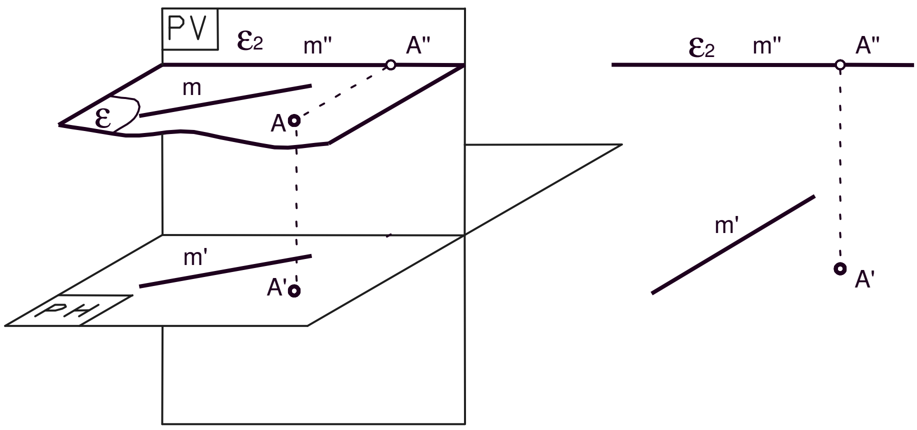


Figura 19. Plano paralelo al horizontal.

Plano de perfil. Paralelo al 2º plano vertical de proyección. Este caso se caracteriza porque:

I. para que queden definidas las líneas que se encuentran en este plano de perfil es preciso conocer dos puntos o la proyección sobre el 2º vertical.

II. en el 2º vertical de proyección, todos los elementos geométricos en él contenidos están en verdadera magnitud.

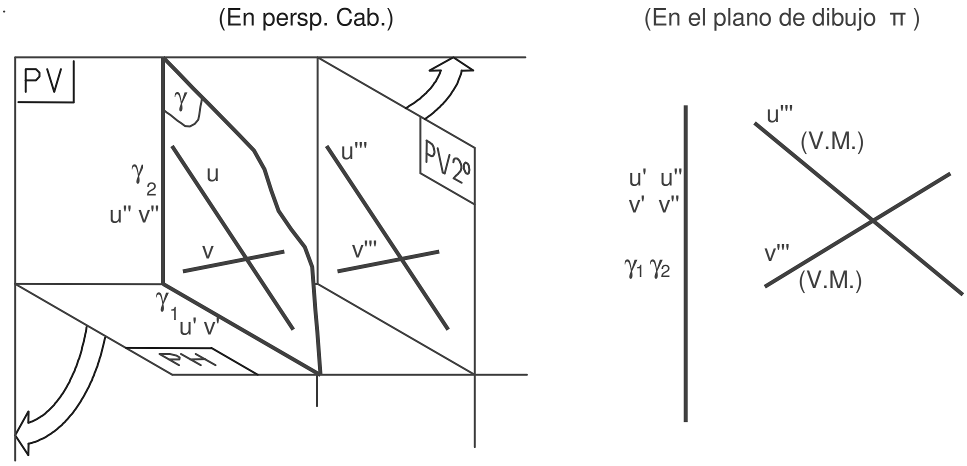


Figura 20. Plano de perfil.

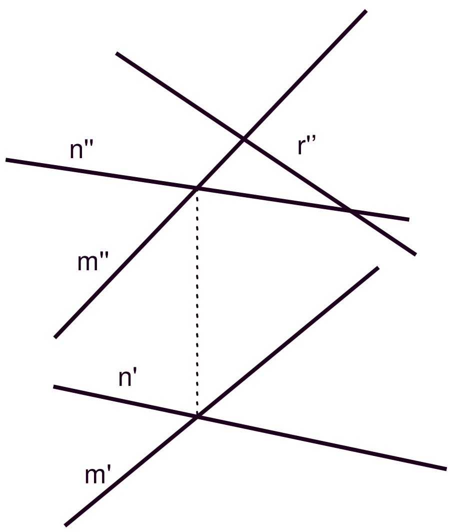
Criterio de pertenencia de una recta o punto a un plano.

Se ha indicado anteriormente el criterio de pertenencia de un punto o recta a un plano, que seguidamente y de forma escueta se expone (figura 15):

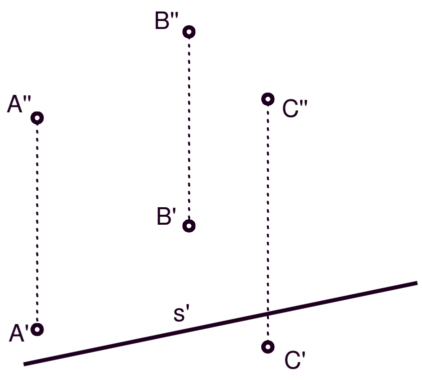
- $r \in \alpha$, si dos puntos de r están en α.
- $P \in \alpha$, si el punto P está en una recta de α.

Para ver la resolución de estos problemas en el sistema diédrico se plantean los siguientes ejercicios:

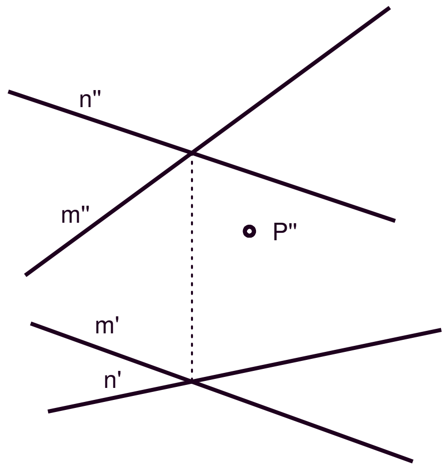
Ejercicio 5. Dado el plano $\alpha(m,n)$, sabiendo que $r \in \alpha$, determinar r’.



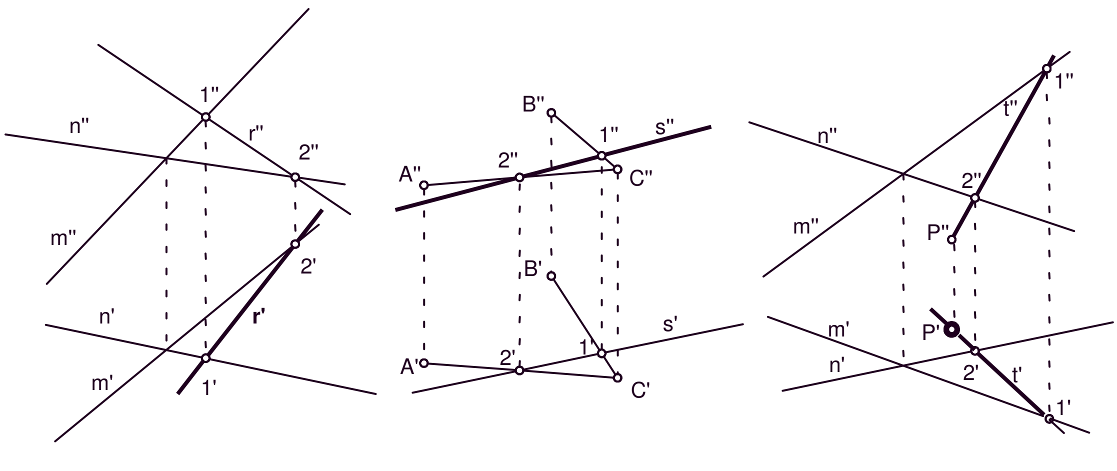
Ejercicio 6. Dado el plano β(A,B,C), sabiendo que s∈β, obtener s''.



Ejercicio 7. Determinar P', sabiendo que P∈δ(m,n).



Soluciones: En el primero de los ejercicios, dos puntos de r son los de corte con m, n del plano α. En el segundo, uniendo puntos del plano se obtienen rectas con las que se determina s''. En el tercero, por P se traza recta auxiliar t∈δ.



Líneas características del plano: Paralela al horizontal, paralela al vertical, L.M.P. y L.M.I.

Línea paralela al horizontal. En un plano genérico hay un conjunto de líneas paralelas entre sí que son paralelas al horizontal, esto se visualiza en la figura 21, en la que π es un plano horizontal de referencia, y la recta h_a, por ser la traza con π, es horizontal y todas las paralelas a ella del plano α también.

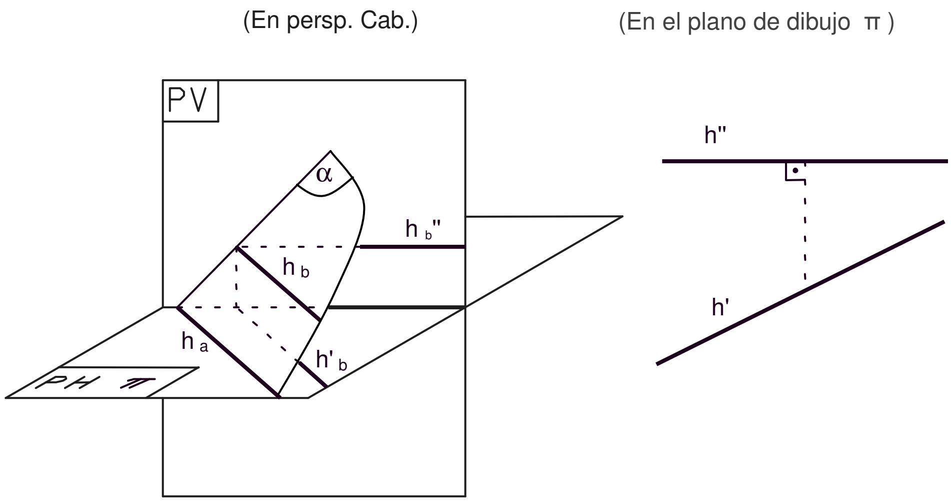


Figura 21. Líneas horizontales de un plano. Recta paralela al horizontal.

Para llevar a cabo en el plano de dibujo la obtención de rectas horizontales de α, basta tener en cuenta que una línea paralela al horizontal se caracteriza por tener su proyección vertical perpendicular a la dirección de proyección, obteniéndose la horizontal de modo que dicha recta pertenezca al plano. (Nota: las proyecciones de rectas paralelas son paralelas entre sí).

Trazar por A∈α(A,B,C) y por A∈β(A,r), recta paralela al horizontal.

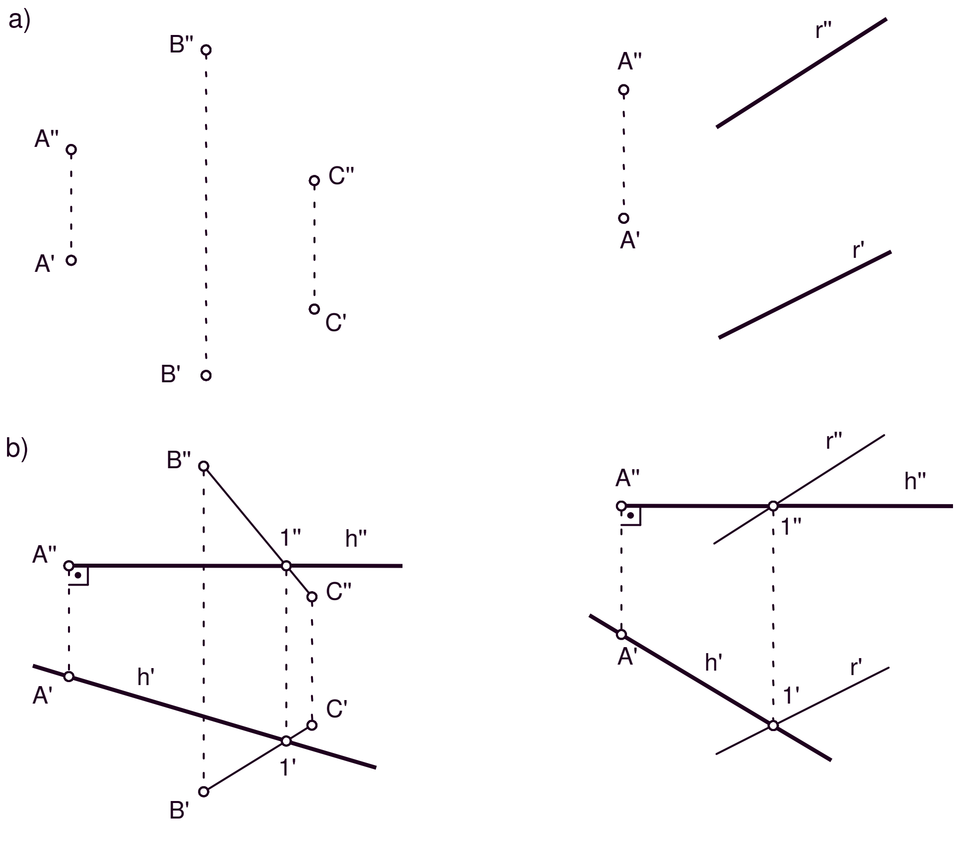


Figura 22. a) Ejercicios planteados. b) Resolución.

Los pasos seguidos en la resolución de los ejercicios de la figura 22 son:

1º Por A'' perpendicular a la dirección de proyección $\Rightarrow$ h''.
2º Sabiendo que $h \in \alpha \Rightarrow$ h'.

<u>Línea paralela al vertical de un plano.</u>

Aplicando el mismo razonamiento: sea π un plano vertical de referencia, y v_a la traza de $\beta \cap \pi$, las paralelas v_b, v_c ... de β, son todas ellas paralelas al vertical.

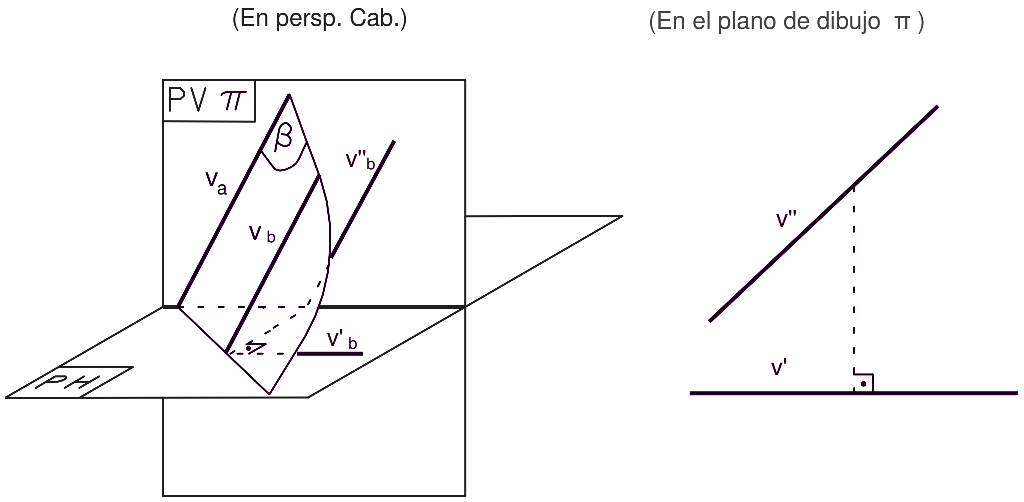
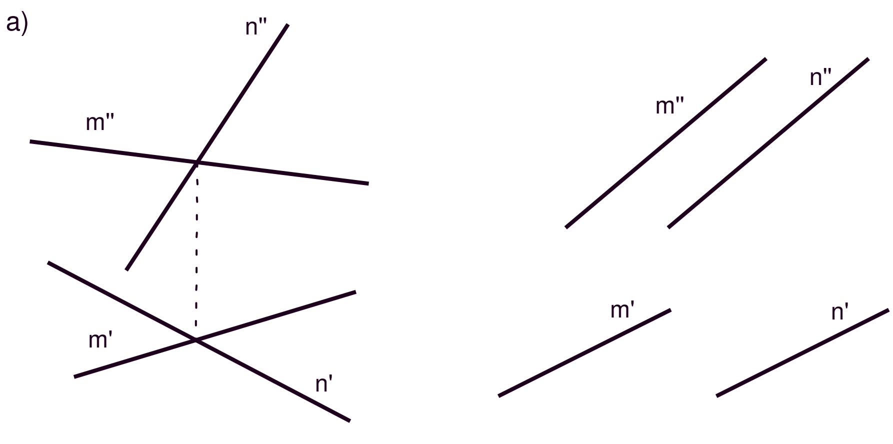


Figura 23. Rectas paralelas al vertical de un plano.

Los pasos a seguir en la obtención de paralelas al vertical de un plano son análogos al caso anterior:

1º Se traza v' perpendicular a la dirección de proyección.
2º v'' se obtiene sabiendo que debe pertenecer al plano.

Ejercicios de aplicación: Trácese recta cualquiera $v \in \beta(m,n)$, paralela al vertical.



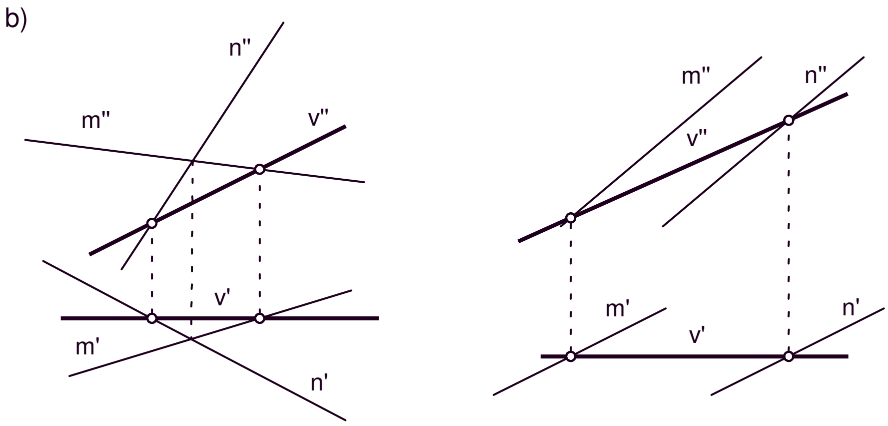


Figura 24. a) Ejercicio planteado. b) resolución.

<u>Línea de máxima pendiente (L.M.P.)</u>. Es la línea que forma el mayor ángulo con respecto al horizontal (figura 25), es perpendicular a las horizontales del plano y su proyección horizontal mantiene la perpendicularidad con la horizontal del plano (esto se verá claramente en el tema referente a la perendicularidad). La proyección vertical de la LMP se obtiene sabiendo que ésta pertenece al plano. En la figura 25 se muestra la representación espacial de una línea de máxima pendiente, así como el trazado en el plano de dibujo de dicha LMP del plano $\alpha(r,P)$, siendo los pasos a seguir:

1º se traza una horizontal $h \in \alpha(r,P)$.
2º LMP' es perpendicular a h'.
3º LMP'' $\in \alpha(r,P)$.

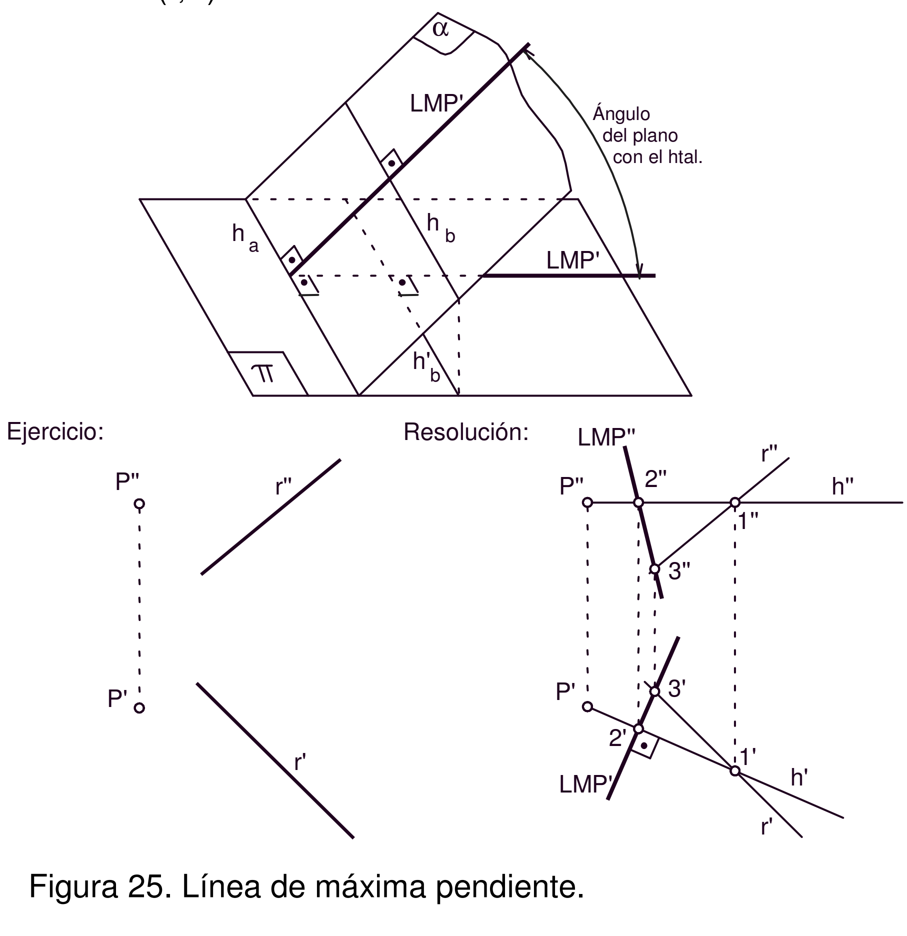


Figura 25. Línea de máxima pendiente.

<u>Línea de máxima inclinación (L.M.I.).</u> Es la línea del plano que forma el mayo ángulo con respecto al vertical de proyección (figura 26). Razonando de forma similar al de la LMP, se resuelve sabiendo que:

1º la proyección LMI'' es perpendicular a v''.

2º la proyección LMI' es consecuencia de pertenecer LMI al plano.

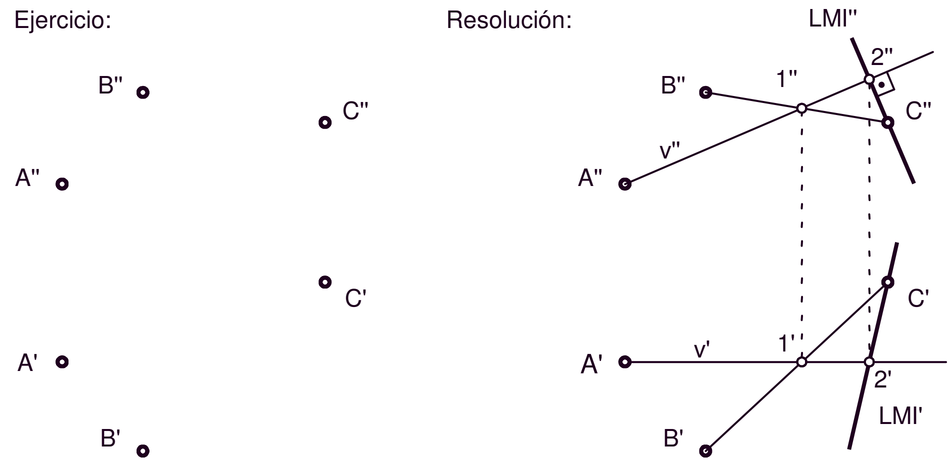


Figura 26. Línea de máxima inclinación del plano δ(A,B,C).

Aplicaciones: situar en un plano una recta de pendiente dada y hacer pasar por una recta un plano de pendiente dada.

<u>Situar en un plano una recta de pendiente dada.</u>

Se estudia este caso mediante el siguiente ejercicio (figura 27 a)):
Trazar por el punto P del plano α(P,r) recta m (ó n) que forme 30º con el plano horizontal.

Para resolverlo se van a realizar las consideraciones siguientes:

I El plano α(P,r) para que pueda contener rectas que formen 30º con el horizontal, su LMP (es decir, la pendiente de α) debe ser $\geq$ 30º. Si no, no hay solución (figura 27 b)). Si el plano es de pendiente >30º tiene dos soluciones, y si es =30º hay una solución.

II. El lugar geométrico de las rectas que forman 30º con el horizontal y pasan por P, es una superficie cónica de altura P-P'(1) y ángulo de las generatrices 30º. Se obtienen los datos del cono por medio de una construcción auxiliar como la de la figura 27 c)

III. Se observa en la figura 27 d), que de la intersección del círculo de la base del cono con la traza h(1) se obtienen dos puntos, M y N, que unidos con P dan las rectas solución, las cuales por pertenecer al cono forman los 30º pedidos y $\in$ al plano α.

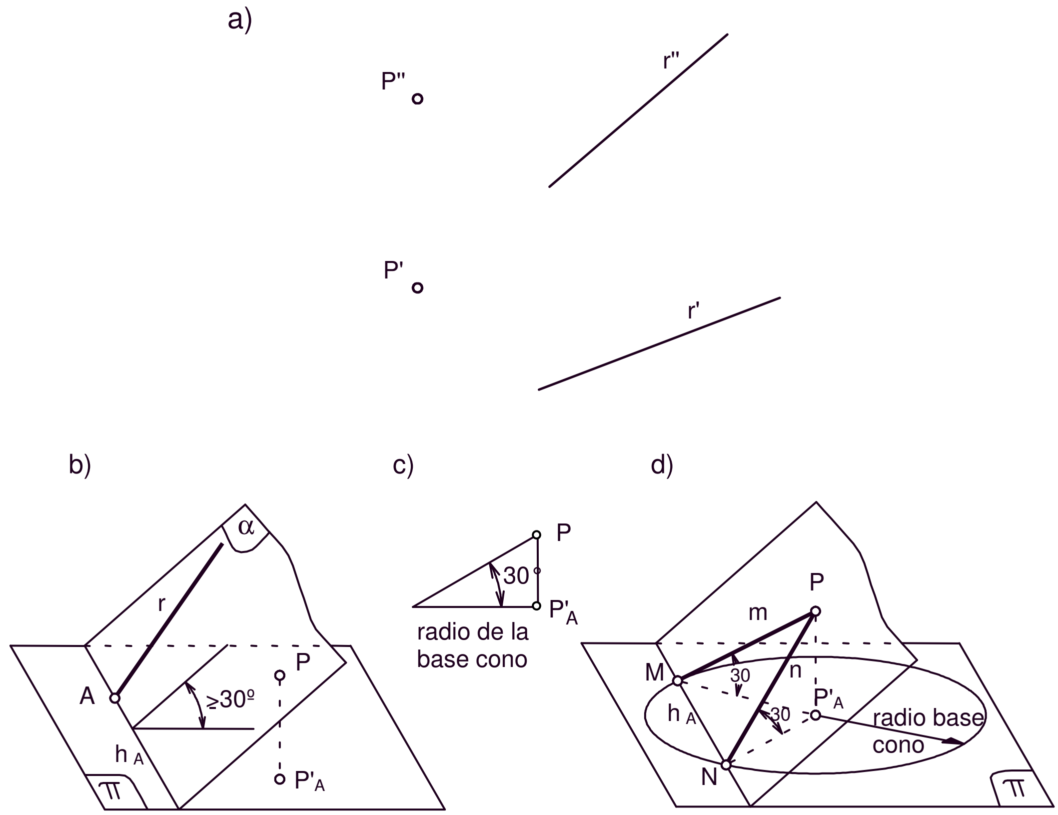


Figura 27. Obtención de rectas del plano de pendiente dada. Planteamiento espacial.

Resolución del ejercicio planteado en la figura 27 a) Pasos:

1º Se toma plano horizontal π de referencia.

2º Se obtiene el punto P_A, centro de la base del cono.

3º Construcción auxiliar para obtener el radio de la base del cono.

4º Recta horizontal de α por el punto A intersección de r con π_2.
Para ello, un procedimiento a seguir es:
- Trazar horizontal por P.
- Por A se traza una horizontal de α.

5º Con centro en P se traza el círculo de la base del cono que corta a h'_A en los puntos M y N que unidos a P dan las rectas m y n solución.

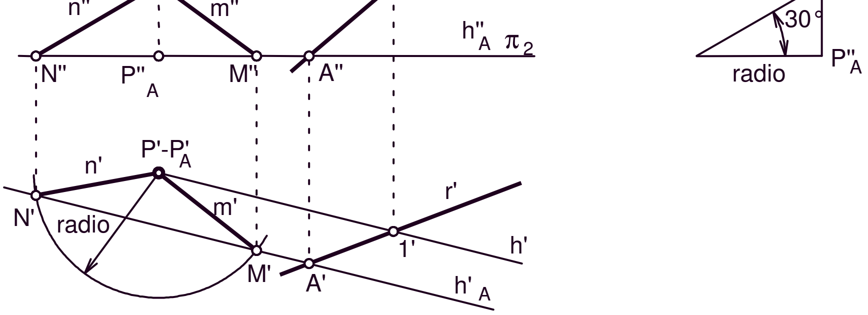


Figura 28. Situar una recta de pendiente dada en un plano.

Hacer pasar por una recta, plano de pendiente dada.

El análisis geométrico espacial del procedimiento a seguir se basa, como en el caso anterior, en considerar el lugar geométrico de las líneas (de máxima pendiente) que forman cierto ángulo con un plano, es decir, el cono. El lugar geométrico de los planos que forman cierto ángulo con respecto a otro, es asimismo, un cono. Siendo las líneas de máxima pendiente de dichos planos y las generatrices del cono, las respectivas líneas de tangencia (figura 29 a)).

El siguiente ejemplo (planteado en la figura 29 b)) ilustra la forma de resolverlo:

Trazar por r plano que forme θ = 60º con el horizontal.

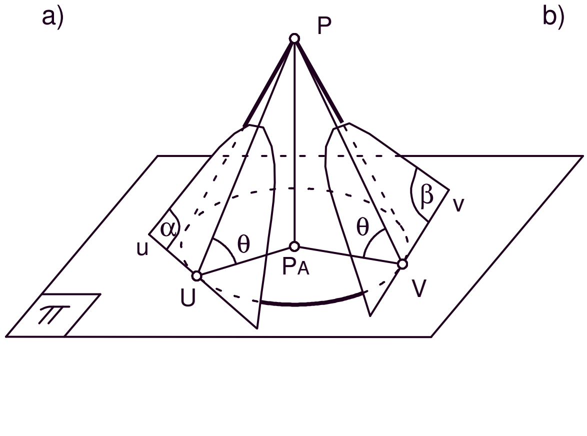
Se pueden dar tres casos, según el ángulo de r con el horizontal:

1. < θ Es el caso general, en el que hay dos planos solución.
2. = θ En el que hay un plano solución.
3. > θ En el cual no hay solución.

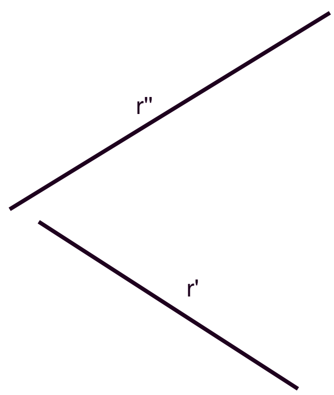
Los pasos a seguir para su resolución y que seguidamente se indican, se visualizan en la figura 29 c). En la d) se resuelve el ejercicio propuesto en b), en el plano de dibujo.

1º Se toma plano π horizontal de referencia.
2º Se toma un punto P$\in$ r cualquiera.
3º P(A), centro de la base del cono en π.
4º Se realiza la construcción auxiliar para dotar el radio del cono.
5º Se traza el círculo, base del cono, con centro en P'(A).
6º Desde M', punto donde r corta a π, se trazan las líneas u, v, tangentes al círculo. Siendo los planos solución los definidos por las rectas α(r,u) y β(r,v).
7º Las líneas de máxima pendiente de estos planos, α(r,u) y β(r,v) solución, se obtienen uniendo P con el punto de tangencia de u' y v' con la base del cono. Obsérvese que las líneas u y v son dos horizontales y que las LMP' correspondientes son perpendiculares a ellas.

a)



b)



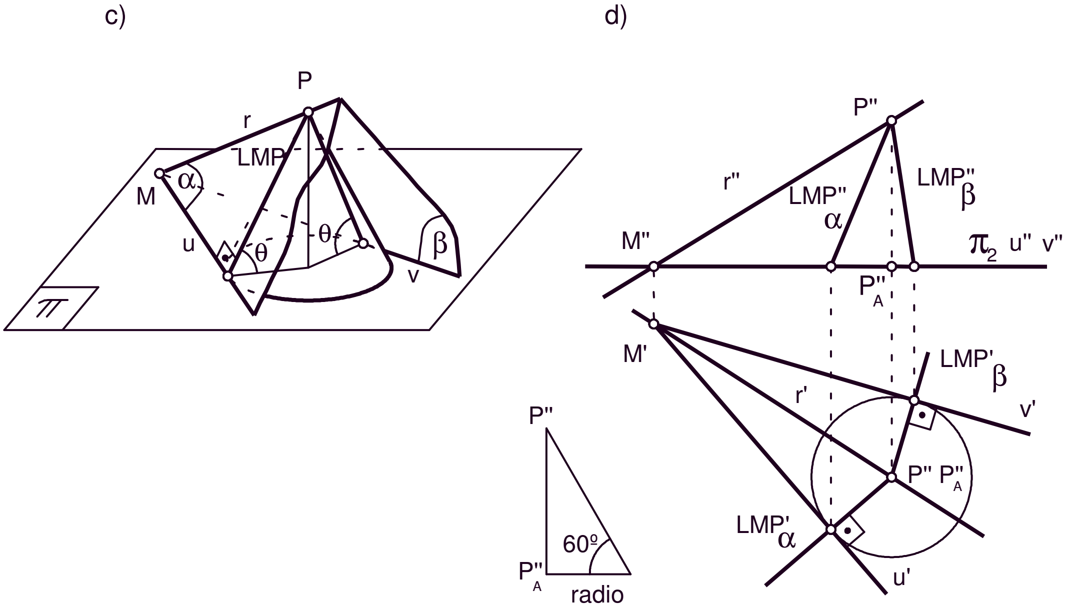


Figura 29. Plano que conteniendo a **r** forma ángulo θ con el horizontal.